Сегодня: воскресенье, 14 апреля 2024 г.

Лекция 16:

Одномерное движение

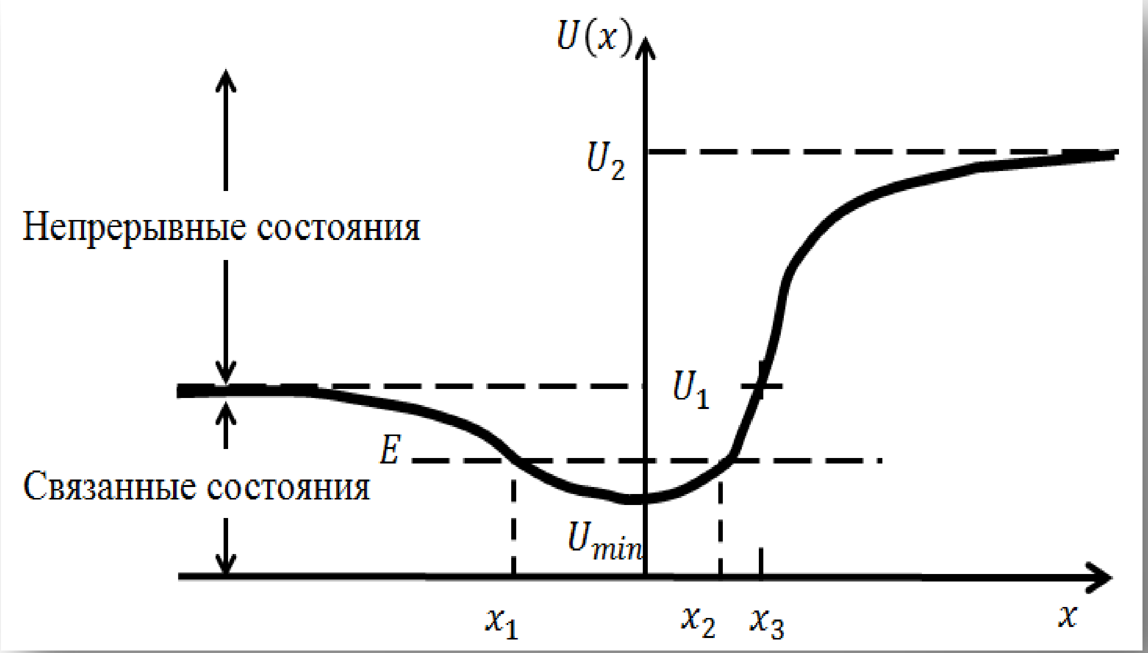
Свойства одномерного движения

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U(x)\psi(x)=E\psi(x)}$$

$$\boxed{\Psi(x,t)=\psi(x)e^{-iEt/\hbar}}$$

$$\begin{cases} U(-\infty)=U_1, & x\to\pm\infty, U_1<U_2 \\ U(+\infty)=U_2, & \\ U_{\min} & x=0 \end{cases}$$

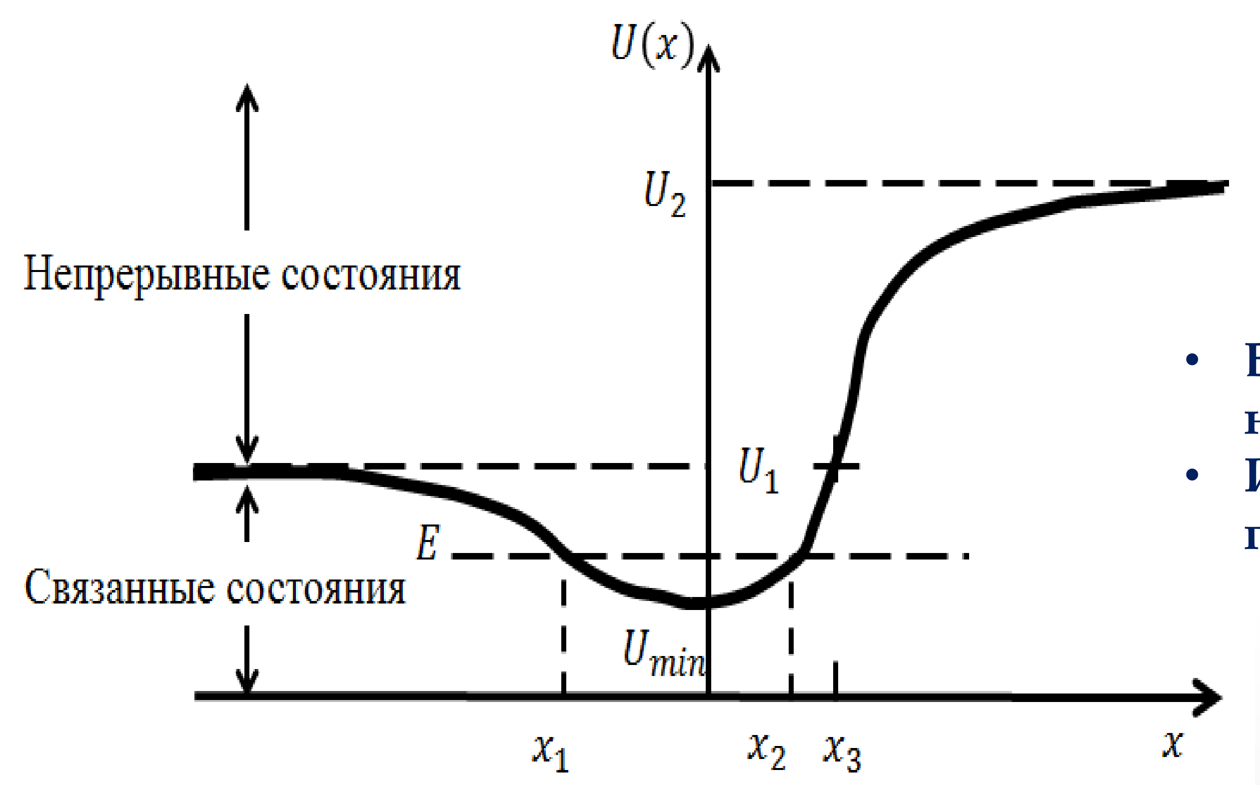
Чтобы решить уравнение в частных производных, нужно указать потенциал *U*(*x*) и граничные условия, которые могут быть получены из физических требований системы.



Виды спектров

Дискретный спектр (связанные состояния) – частица движется в области пространства, ограниченной двумя точками поворота.

$$\boxed{U_{\min} < E < U_1}$$

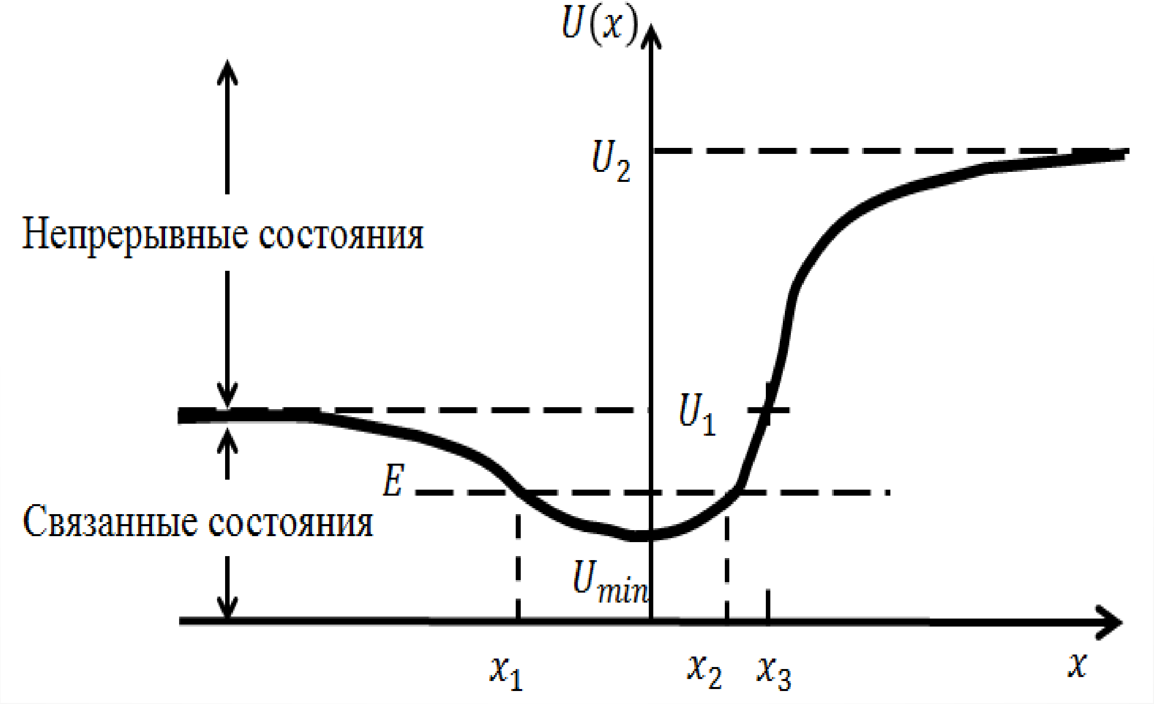


- **Волновая функция нормирована,**
- **Используем граничные условия**

Непрерывный спектр - **Несвязанные состояния возникают, когда движение системы не ограничено.**

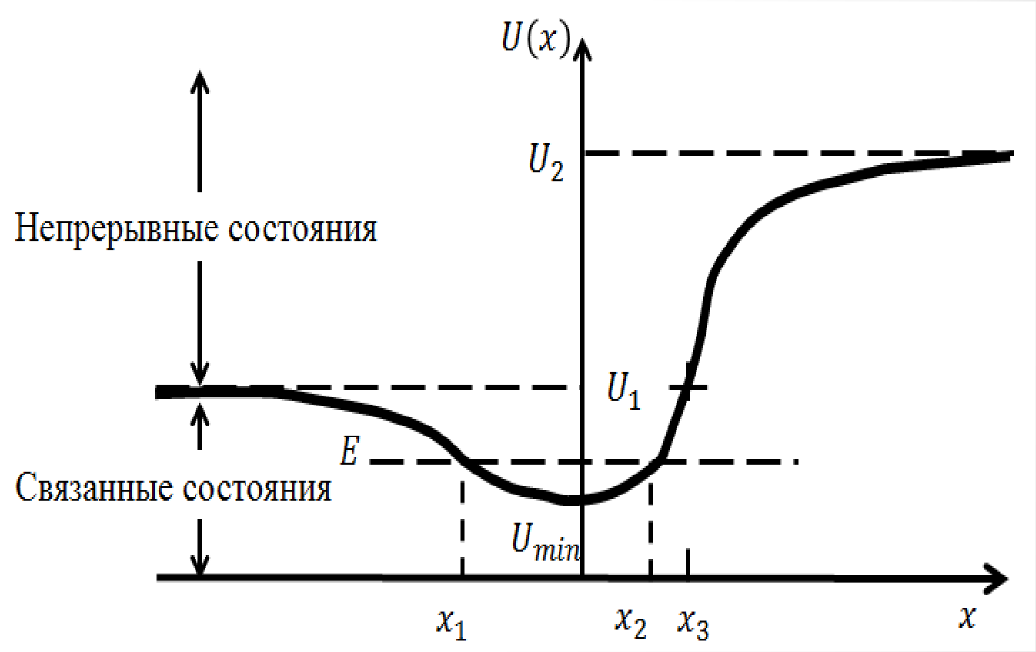
$$U_1 < E < U_2 \text{ и } E > U_2$$

- **Волновая функция не нормирована,**
- **не можем использовать граничные условия**



Смешанный спектр - потенциалы ограничивают частицу только частично

- Если $U_1 < E < U_2$, движение объекта является несвязанным только вдоль $x \to -\infty$ сохраняется одно решение, так как другое расходится при $x \to +\infty$ и должно быть отброшено
- Если $E > U_2$ – оба решения сохраняются, все энергетические уровни дважды вырождены



Свободная частица

$$\boxed{k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}}$$

простейшая одномерная задача. соответствует потенциалу $U(x) = 0$ для произвольного x.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

- **общее решение уравнения = сочетание двух линейно независимых плоских волн**

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\psi(x) = 0$$

$$\psi_k(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x) = A_+e^{ikx} + A_-e^{-ikx}$$

- **полная волновая функция = задается стационарным состоянием**

$$\Psi_k(x,t) = A_+e^{i(kx-\omega t)} + A_-e^{-i(kx+\omega t)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_+(x,t)\\ \Psi_-(x,t)\end{array}\right\}$$

Описывают движение свободной частицы вправо и влево, *с* четко определенными импульсом и энергией:

$$p_\pm = \pm\hbar k,\ E_\pm = \hbar^2k^2/2m$$

Замечания

свободная частица, представленная плоскими волнами не может иметь четко определенных p и E

т.е. физически приемлемые волны не могут быть плоскими (!)

- нет граничных условий → нет ограничений на *k* или *E*. Все значения дают решения

$$P_{\pm}(x,t)=\left|\Psi_{\pm}(x,t)\right|^2=\left|A_{\pm}\right|^2$$

- плотности вероятностей, соответствующие обоим решениям являются константами, так как не зависят ни от *x*, ни от *t* существует несоответствие между скоростью волны и скоростью частицы,

$$\upsilon_{wave}=\frac{\omega}{k}=\frac{E}{\hbar k}=\frac{\hbar^2k^2/2m}{\hbar k}=\frac{\hbar k}{2m}$$

частица движется в два раза быстрее своей волны!

$$\upsilon_{clas}=\frac{p}{m}=\frac{\hbar k}{m}=2\upsilon_{wave}$$

- волновая функция не нормируется:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_{\pm}^{*}(x,t)\Psi_{\pm}(x,t)\,dx=\left|A_{\pm}\right|^2\int_{-\infty}^{+\infty}dx\to\infty$$

решения нефизичны.

Выход?

можем построить физические решения с помощью линейной суперпозиции плоских волн - волновые пакеты:

$$\boxed{\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\phi(k)e^{i(kx-\omega t)}dk}$$

$$\boxed{\phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}dx}$$

Свободная частица должна быть представлена не плоской волной в виде решения уравнения Шредингера, а волновым пакетом.