Сегодня: вторник,
19 сентября 2023 г.

Семинар 3

Напряженность, работа, потенциал электростатического поля

$$\boxed{A_{12} = \int\limits_{L_{12}} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = \int\limits_{L_{12}} q\left(\vec{E}d\vec{l}\right)}$$

Электростатическое поле потенциально: при перемещении точечного заряда по любому замкнутому контуру работа равна нулю.

$$\boxed{A_{12} = q\left[\varphi\left(\vec{r}_1\right) - \varphi\left(\vec{r}_2\right)\right]}$$

φ(r) -скалярная функция, электростатический потенциал. Функция непрерывна и имеет конечные первые производные.

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$$

Связь потенциала с напряженностью поля

$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = -\int\limits_1^2 \left(\vec{E}d\vec{l}\right)}$$

Обратная операция – нахождение разности потенциалов φ_{21} по заданной E

Потенциал поля точечного заряда

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

$$\boxed{\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$

Потенциал поля системы точечных зарядов

Потенциал поля точечного диполя

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}}$$

уравнение Пуассона

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Уравнение Лапласа:

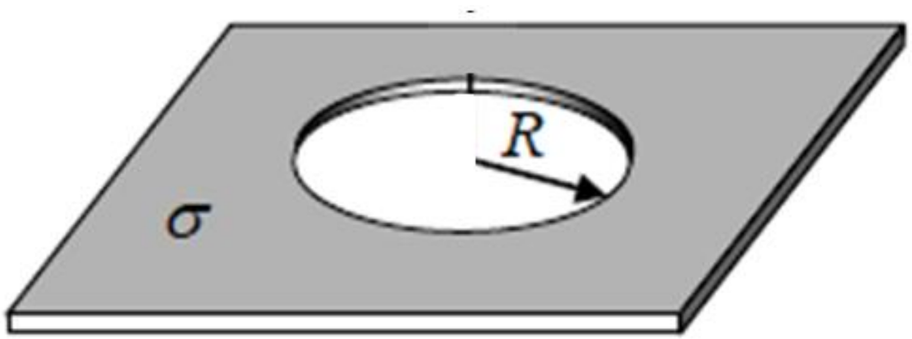
$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$

Два полезных математических тождества:

div rot $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$ **для любой векторной функции** $\boldsymbol{A(r)}$**;**

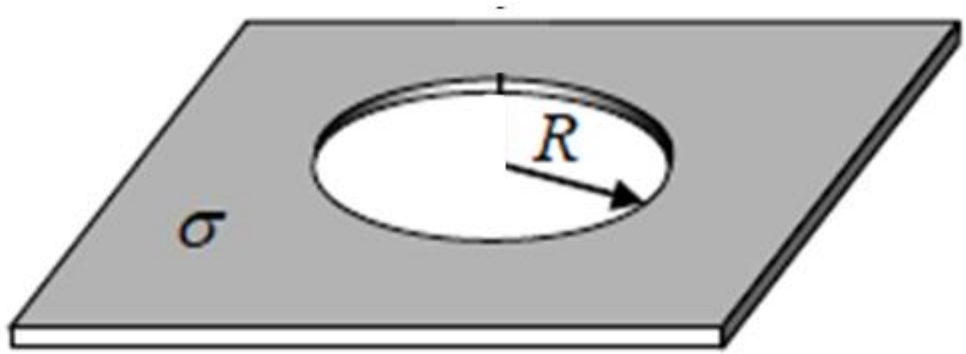
rot grad $\varphi \equiv 0$ **для любой скалярной функции** $\varphi(r)$**.**

Задача 1. В бесконечной тонкой плоскости, заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда σ, вырезано круглое отверстие радиусом *R*. Найти напряженность электрического поля на оси этого отверстия.



Решение

Отверстие, где плотность зарядов равна нулю, можно представить как наложение диска с поверхностным зарядом –σ на сплошную плоскость с поверхностным зарядом +σ.



$$\vec{E} = \vec{E}_{-\sigma} + \vec{E}_{+\sigma}$$

Напряженность поля, создаваемого бесконечной плоскостью

$$E_{+\sigma} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Напряженность поля на оси диска из базовой задачи

$$E_{-\sigma} = \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}\right)$$

Ответ: $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}$$

Задача 2. На двух концентрических сферах R и $2R$ равномерно распределены заряды с σ_1 и σ_2.
Требуется:

1) найти зависимость $E(r)$ для областей:

I ($0 < x < R$),

II ($R < x < 2R$),

III ($2R < x < \infty$).

Принять $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$;

2) вычислить E в точке, удаленной от центра на расстояние r, и указать направление E.
Принять $\sigma = 0{,}1$ мкКл/м^2, $r = 3R$.

Дано:

$R, \quad 2R$

$\sigma_1 = \sigma$

$\sigma_2 = -\sigma$

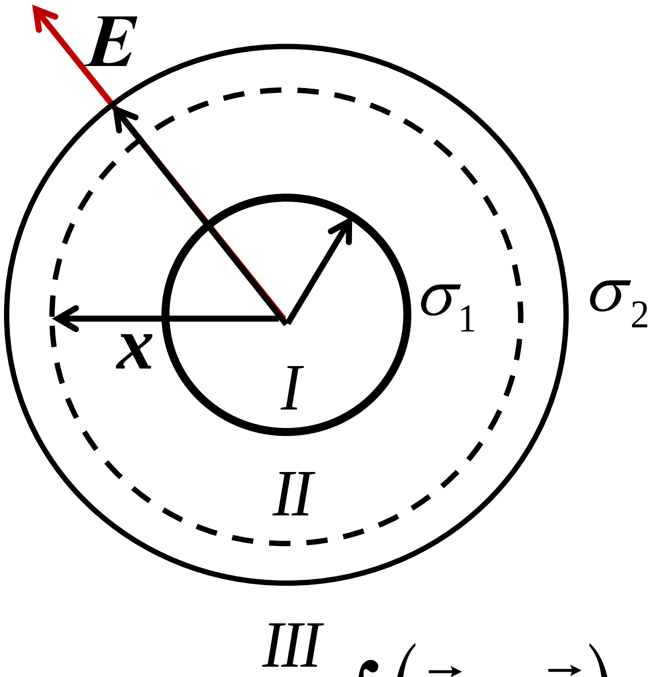
$\sigma = 10^{-7}$ Кл/м^2

$r = 3R$

Найти:

$E(x)$ - ?,

$E(r)$ -?



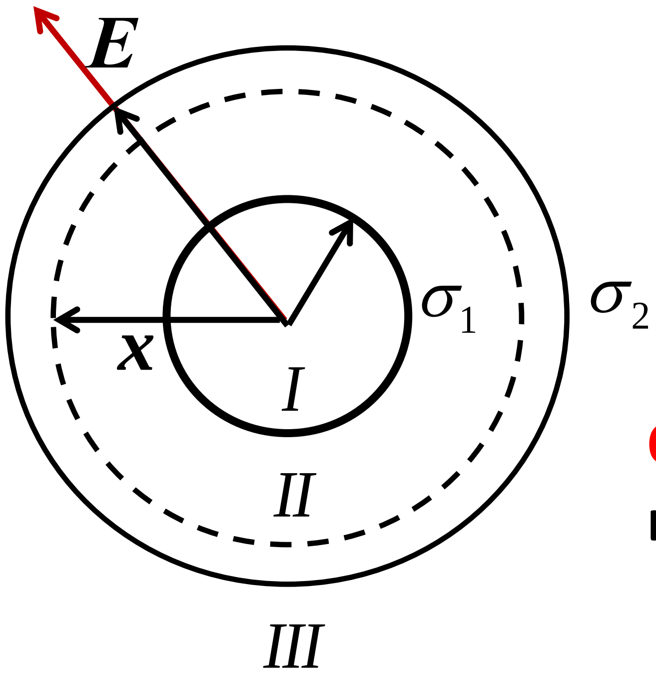
$$\boxed{\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = ES = E \cdot 4\pi x^2 = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Область I: **0 < x < R.**

Зарядов внутри сферы нет

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} = 0, \quad \mathrm{E} = 0$$



$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Область 2: ***R*** **<** ***x*** **< 2*R*. Первая сфера целиком лежит внутри вспомогательной**

$$q = \sigma_1 S_1 = \sigma_1 4\pi R^2$$

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{\sigma_1 4\pi R^2}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma_1 R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$$

Область III: $2R < x < \infty$.

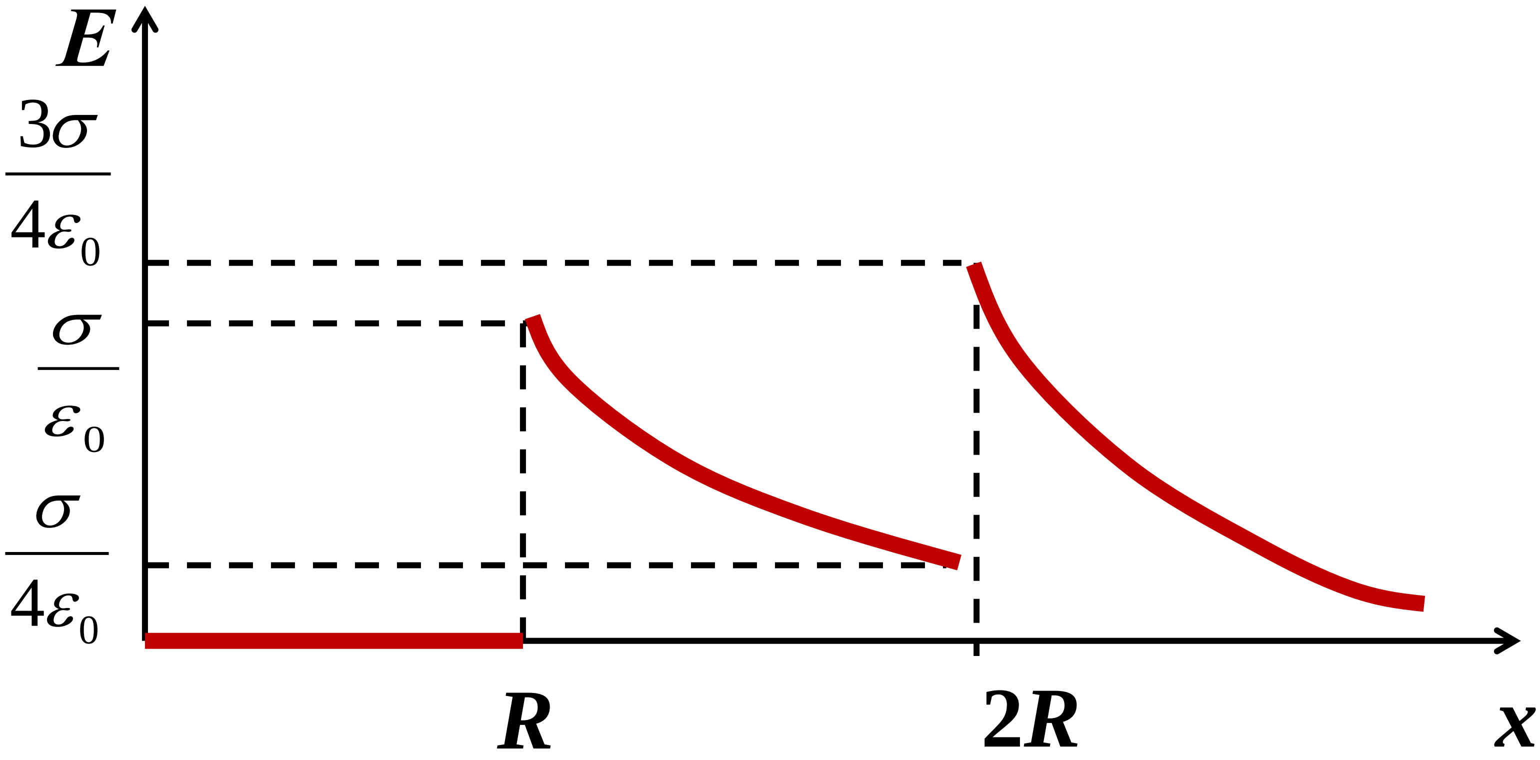
Первая и вторая сферы целиком находятся внутри вспомогательной.

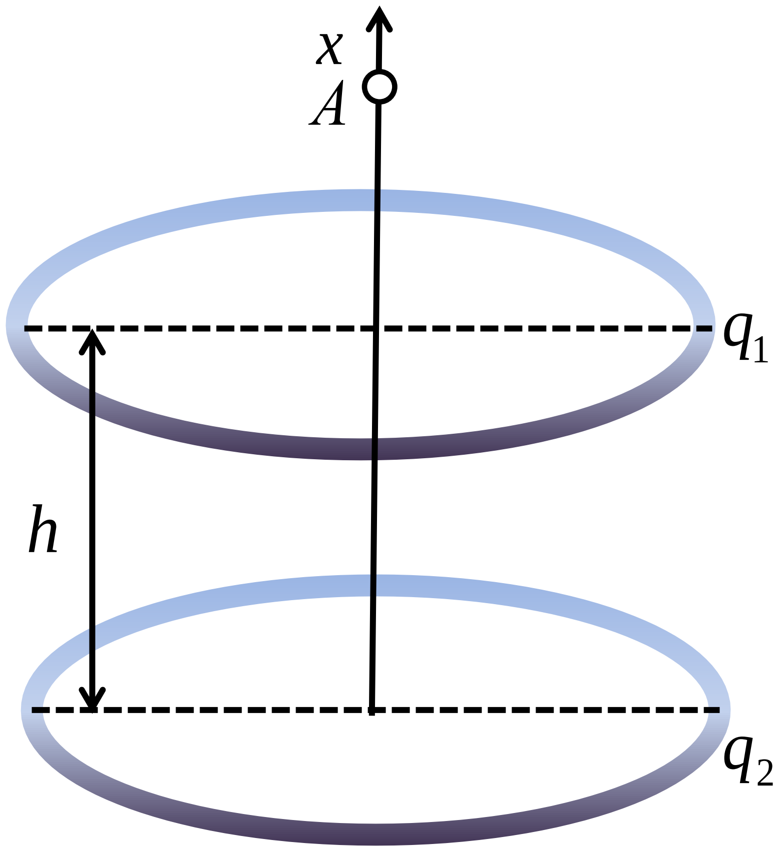
$$q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = \sigma_1 4\pi R^2 + \sigma_2 4\pi (2R)^2$$

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{\sigma_1 4\pi R^2 + \sigma_2 4\pi (2R)^2}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{(\sigma_1 + 4\sigma_2) R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 x^2} = \{\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = -\sigma\} = -\frac{3\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$$

$$E = \frac{3\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 (3R)^2} = \frac{10^{-7}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3} = 3{,}8 \quad \text{кВ/м}$$

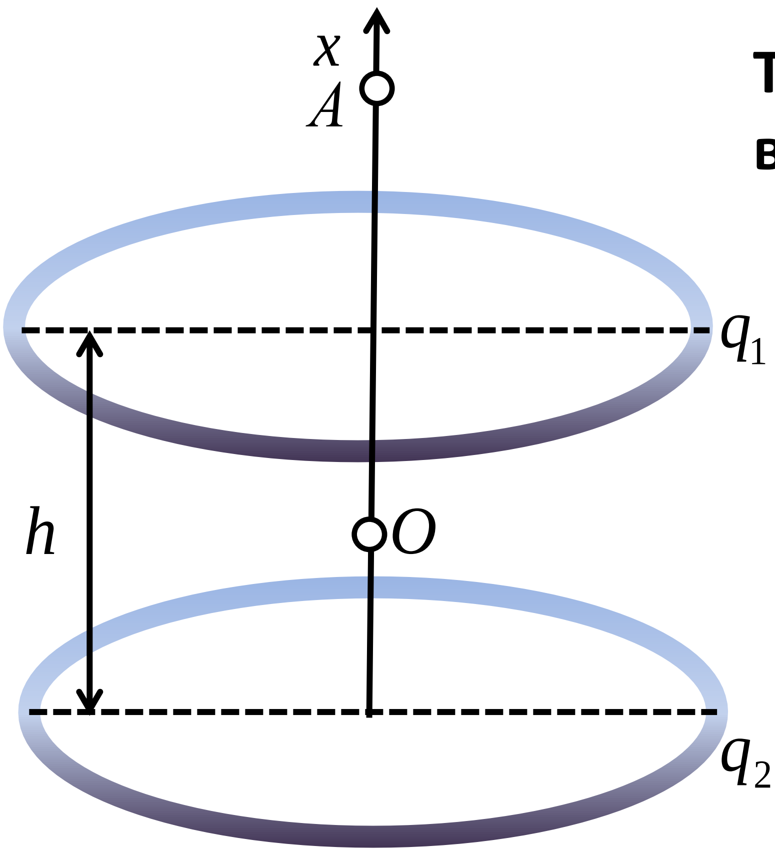

E
$\frac{3\sigma}{4\varepsilon_0}$
$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$
$\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$
R
2R
x



Задача 3. **Два коаксиальных кольца одинакового радиуса R заряжены равномерно зарядами q_1 и q_2. Плоскости колец находятся на расстоянии h друг от друга. Найти потенциал в произвольной точке A на оси колец.**

Решение

Воспользуемся симметрией задачи и поместим начало координат *O* в средней точке между кольцами, а ось x направим вдоль оси колец



Точка A от верхнего кольца

$$x_1 = x - \frac{h}{2}$$

от нижнего кольца

$$x_2 = x + \frac{h}{2}$$

Каждое кольцо создает в точке *A* потенциал (в базовой задаче)

$$\boxed{\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{\sqrt{R^2 + x_i^2}}}$$

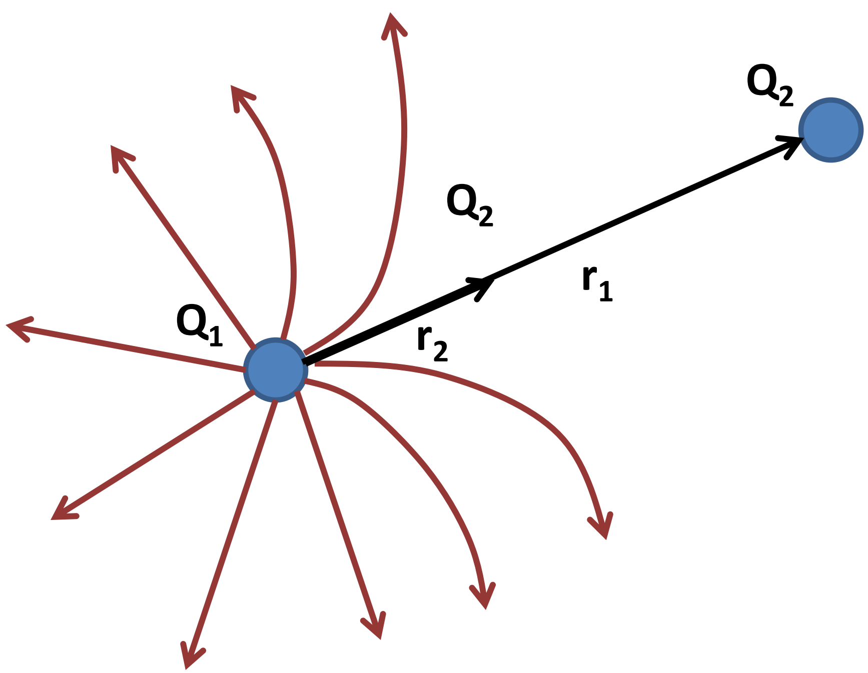
Принцип суперпозиции

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{R^2 + \left(x - h/2\right)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{R^2 + \left(x + h/2\right)^2}}\right)$$

Задача:

Положительные заряды Q_1=3 мкКл и Q_2=20 нКл находятся в вакууме на расстоянии r_1=1,5 м друг от друга. Определить работу А, которую надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния r_2=1 м.



Решение:

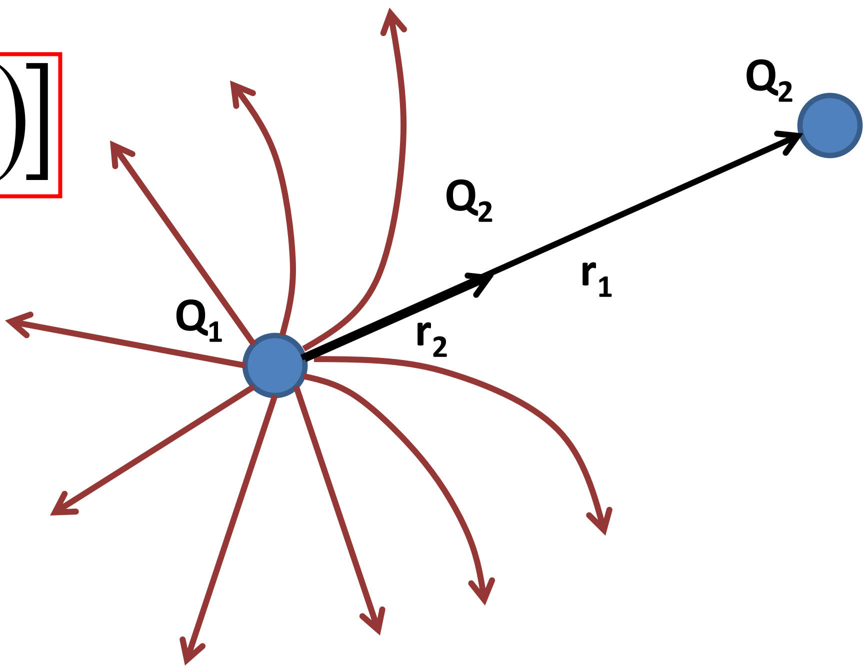
Пусть Q_1 -неподвижный, а Q_2 перемещается в поле созданном Q_1

Работа внешней силы равна по модулю и противоположна по знаку работе сил поля

$$A = -A_{12}$$

Работа сил поля по перемещению заряда

$$\boxed{A_{12} = q\left[\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)\right]}$$



работа внешних сил по переносу 2 заряда

$$A = -q\left[\varphi_1 - \varphi_2\right] = q_2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

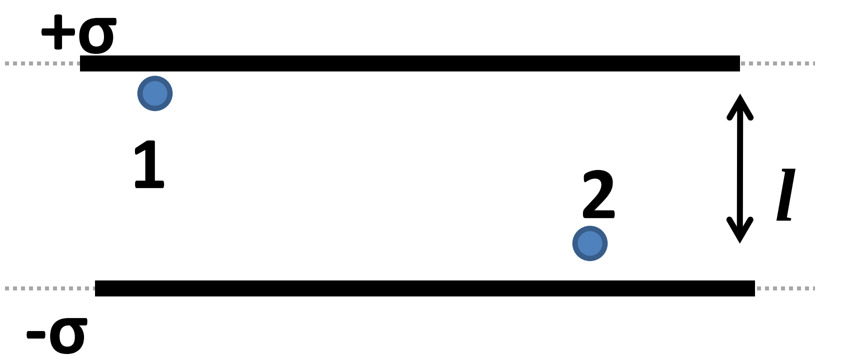
$$\boxed{\varphi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1},\ \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \cong 180\,\text{мкДж}$$

Задача:

Найти работу A поля по перемещению заряда Q=10 нКл из точки 1 в точку 2, находящиеся между двумя разноименно заряженными с поверхностной плотностью σ = 0,4 мкКл/м^2 бесконечными параллельными плоскостями, расстояние l между которыми равно 3 см.



Решение:

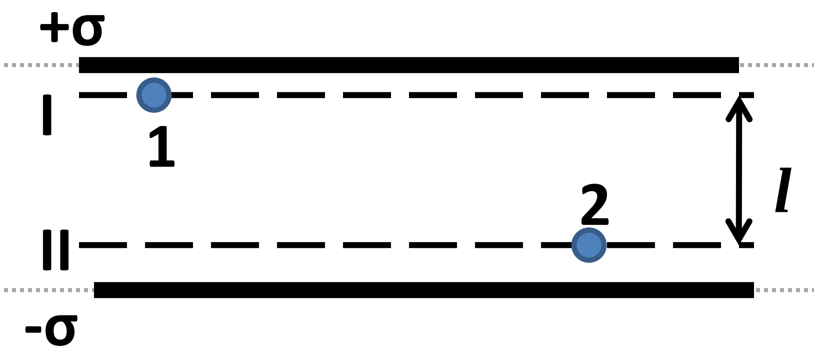
1 способ:

$$\boxed{A_{12} = q\left[\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)\right]}$$

Проведем через 1 и 2 эквипотенциальные поверхности – плоскости. Поле между - однородно.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = El = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l$$

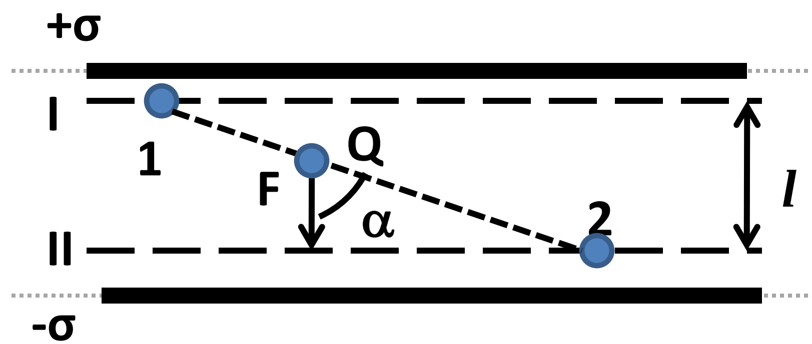
$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0} l =$$



$$= 10^{-8}\frac{4 \cdot 10^{-7}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 13{,}6 \text{ мкДж}$$

2 способ:

Поле между - однородно. Тогда сила постоянна



$$\boxed{A = F\Delta r\cos\alpha}$$

$$F = QE = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$l = \Delta r\cos\alpha$$

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l = 10^{-8}\frac{4\cdot 10^{-7}}{8{,}85\cdot 10^{-12}}\cdot 3\cdot 10^{-2} = 13{,}6\ \text{мкДж}$$

Задача:
Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом R = 1 см, равномерно заряженным с линейной плотностью τ = 20 нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстояниях a_1=0,5 см и a_2=2 см от поверхности цилиндра, в средней его части.

Решение:

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$$

$$\boxed{E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}, \quad d\varphi = -Edr$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} Edr$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R+a_2}{R+a_1} = 250\text{В}$$