**Сегодня:
понедельник, 20
ноября 2023 г.**

Семинар 12

МАГНЕТИКИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Теоретический материал

$$\vec{J} = \frac{\sum\limits_{\Delta V} p_{mi}}{\Delta V}$$

$$\vec{B}_{cp} = \vec{B} + \vec{B}'$$

Размерности единиц измерения в СИ

$[p_m]$= А·м^2, [J] = А/м.

одна часть порождается токами проводимости (электрический ток в проводах, катушках и т.д.), другая обусловлена намагниченностью среды и порождается молекулярными токами:

Вектор напряженности магнитного поля Н:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

[H] = А/м

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = 0$$

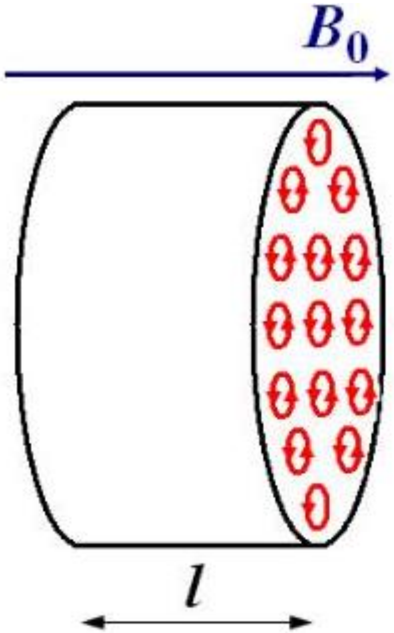
$$\oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0, \ \oint\limits_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int\limits_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = I$$

Уравнения Максвелла при наличии магнитных сред:

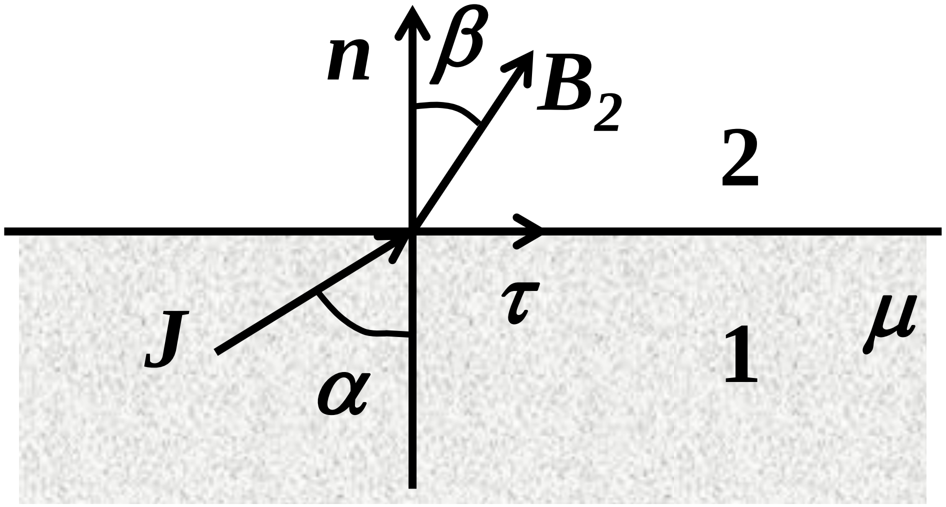
Граничные условия для нормальных (n) и тангенциальных (τ) компонент

$$\boxed{\begin{gathered} B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \\ \left[\vec{n}, \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\right] = i \end{gathered}}$$

i – вектор плотности тока проводимости на границе сред,
n – единичный вектор нормали, направленный от среды 1 к среде 2.



Задача 1. Бесконечный плоский слой парамагнетика с μ граничит с вакуумом. Вектор намагниченности известен *J* и образует угол *α* с нормалью к поверхности. Найти модуль *B* снаружи у поверхности и угол β, образуемый им с нормалью.



Дано:

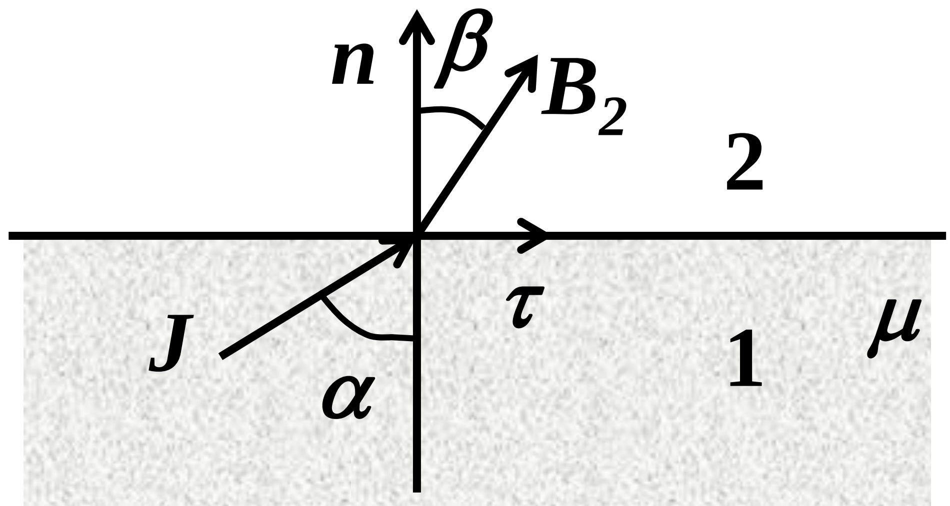
J, μ, α.

Определите:

B, β -?

Токов проводимости нет, запишем граничные условия

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{2\tau} = H_{1\tau}$$



Выразим H и B внутри магнетика через J, используя материальные уравнения

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\mu\mu_0\vec{H}}{\mu_0} - \vec{J}$$

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{J}}{\chi} = \frac{\vec{J}}{\mu - 1}$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0\mu\vec{H}_1 = \mu_0 \frac{\mu}{\mu - 1}\vec{J}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0}$$

Подставим в граничные условия

$$B_{2n} = \frac{\mu}{\mu - 1}\mu_0 J\cos\alpha$$

$$H_{2\tau} = H_{1\tau} \Rightarrow \frac{B_{2\tau}}{\mu_0} = \frac{B_{1\tau}}{\mu\mu_0}$$

$$\frac{B_{2\tau}}{\mu_0} = \frac{J\sin\alpha}{\mu - 1}$$

$$B_2 = \sqrt{B_{2n}^2 + B_{2\tau}^2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 J}{\mu - 1}\sqrt{(\mu\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\mu_0 J}{\mu - 1}\sqrt{(\mu^2 - 1)\cos^2\alpha + 1}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}} = \frac{1}{\mu}\operatorname{tg}\alpha$$

Ответ:

$$B_2 = \frac{\mu_0 J}{\mu - 1}\sqrt{(\mu^2 - 1)\cos^2\alpha + 1}$$

Задача 2. Прямой бесконечно длинный немагнитный провод радиуса a, по которому течет ток I, находится в непроводящей бесконечной однородной среде с магнитной проницаемостью μ. Найти намагниченность $J(r)$, магнитную индукцию $B(r)$, напряженность поля $H(r)$ и молекулярный ток $I'(r)$.

Дано:

a , μ, I.

Определите:

J,

B,

H,

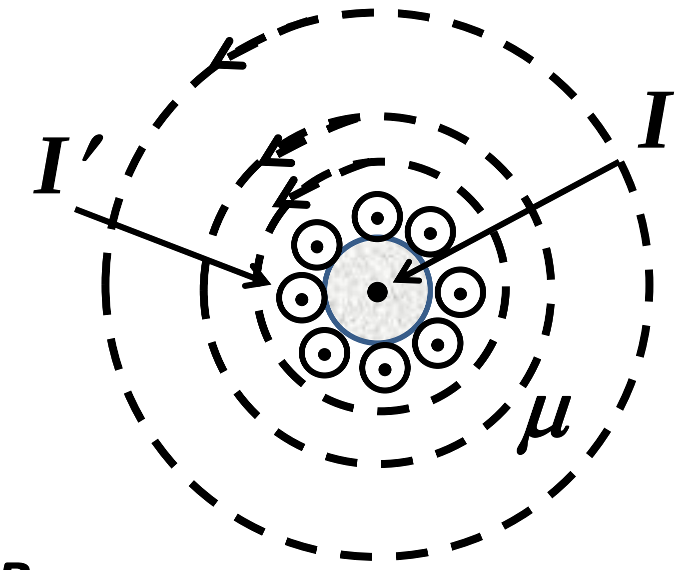
I' -?

Дано:

a , μ, I.

Определите:

J, B, H, I' -?



В силу осевой симметрии силовые линии =окружности, на которых *H* и *B* постоянные.

Теорема о циркуляции H:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

Среда является магнитно однородной

$$B(r) = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

$$J(r) = (\mu - 1)H = (\mu - 1)\frac{I}{2\pi r}$$

Объемные молекулярные токи отсутствуют, но имеется поверхностный молекулярный ток на границе провода и среды.

$$i' = J\left(a\right) = \chi H = \left(\mu - 1\right)\frac{I}{2\pi a}$$

a **– радиус провода.**

Направление *i'* при *μ* > 1 совпадает с направлением тока в проводе. Полный поверхностный молекулярный ток

$$I' = i' 2\pi a = \left(\mu - 1\right) I$$

Магнитная индукция вне провода определяется величиной эффективного полного тока

$$\boldsymbol{I_\Sigma = I + I' = \mu I}$$

$$B\left(r\right) = \mu_0 H\left(r\right) = \mu_0 \frac{I_\Sigma}{2\pi r} = \mu_0 \mu \frac{I}{2\pi r}$$

Ответ:

$$J(r) = (\mu - 1)\frac{I}{2\pi r}$$

$$B(r) = \mu_0 \mu \frac{I}{2\pi r}$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

$$I' = (\mu - 1)I$$

Задача 3. Прямой тонкий бесконечно длинный провод малого радиуса a, по которому течет ток I, лежит на поверхности плоского непроводящего однородного магнетика с μ, занимающего половину пространства. Найти намагниченность J, магнитную индукцию B, напряженность H молекулярные токи во всем пространстве.

Дано:

a, I, μ

Определить:

J, B, H, I'

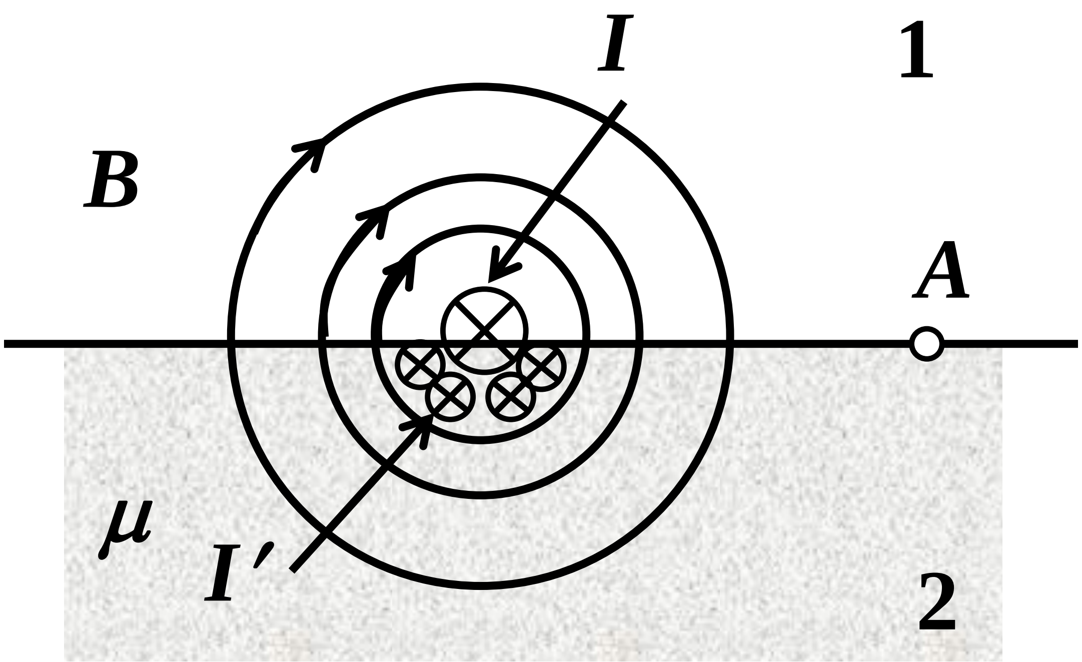
Дано:

a, *I*, μ

Определить:

J, *B*, *H*, *I′*

граница магнетика не совпадает с круговыми линиями поля H_0 от линейного тока *I* в вакууме, поэтому поле H не будет совпадать с H_0.



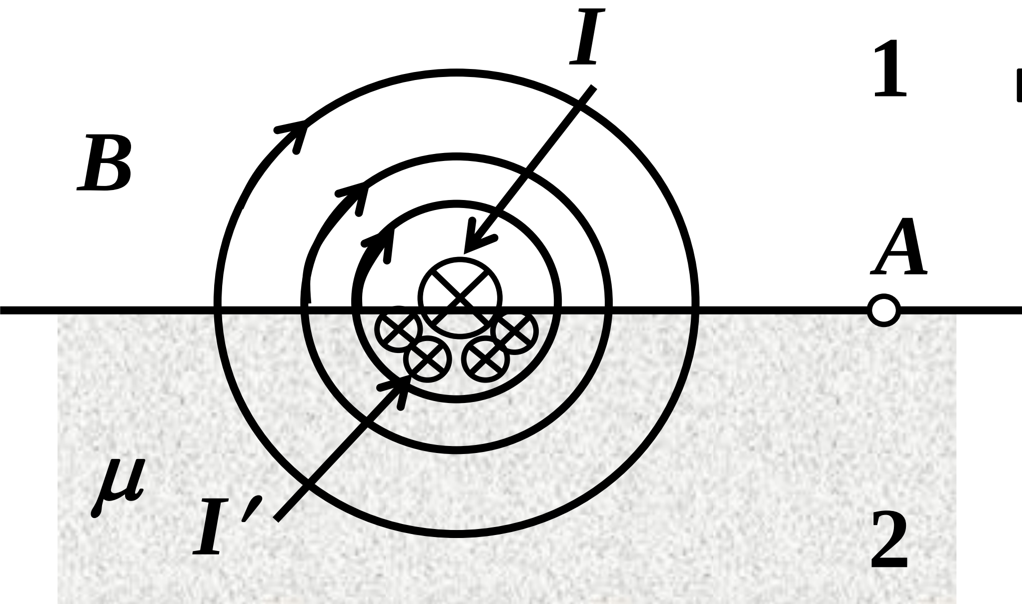
Что делать? – найти распределение молекулярных токов.

Так как среда однородная и токи проводимости в ней отсутствуют, то и объемные молекулярные токи отсутствуют.

На поверхности магнетика токов проводимости нет, поэтому тангенциальные компоненты поля H на границе должны быть непрерывны:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}$$

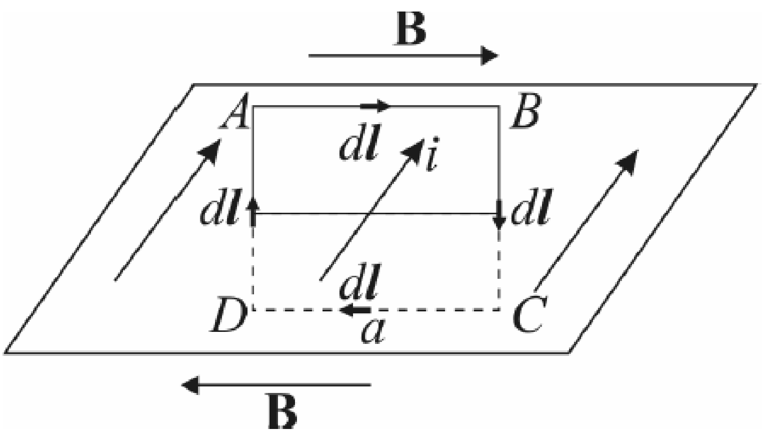
$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0 \mu}$$



В окрестность точки *A* на поверхности протекающий поверхностный молекулярный ток *i′* создал бы у поверхности этого участка только тангенциальные компоненты

$$B_{i1,2} = \pm\frac{1}{2}\mu_0 i'$$

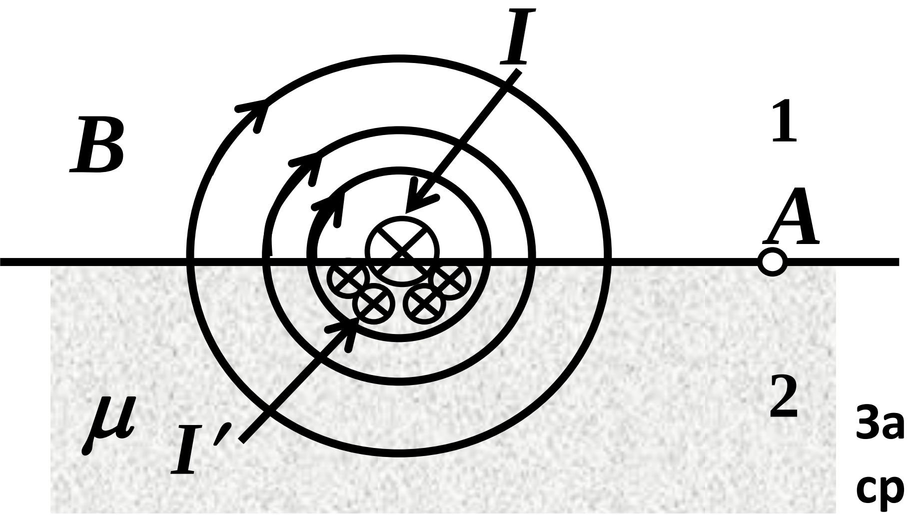
$$\frac{1}{2}i' = -\frac{1}{2\mu}i'$$



$$\left.\begin{aligned}&\oint_L \mathbf{B}\,dl = 2Ba\\ &I = ia\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2Ba = \mu_0 ia$$

то есть поверхностные молекулярные токи на (плоской) границе отсутствуют

$$i' = 0$$



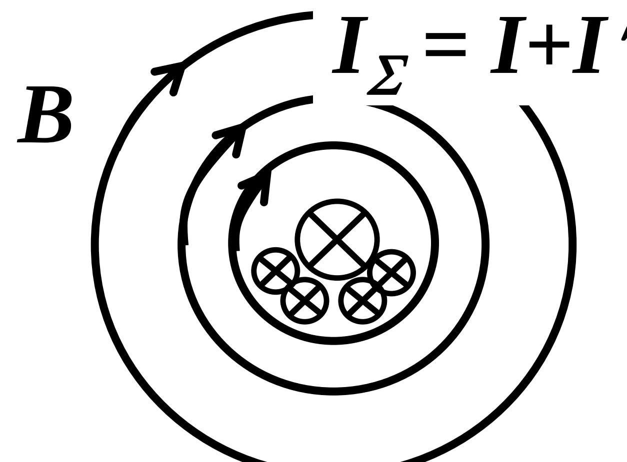
На границе самого провода с магнитной средой ($r = a$) формируется суммарный эффективный ток

$$I_\Sigma = I + I'$$

Заменяем поле, создаваемое магнитной средой, полем молекулярных токов, приходим к задаче о находящемся в вакууме тонком бесконечном проводе с эффективным током I_Σ

Линии B вокруг него = окружности, а B в зависимости от расстояния до провода r

$$B_1(r) = B_2(r) = B(r) = \mu_0 \frac{I_\Sigma}{2\pi r}$$



$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ и $\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}$, т.е. линии $\mathbf{H}$ и $\mathbf{J}$ тоже будут окружностями.

Эффективный ток I_Σ пока не знаем, поэтому запишем теорему циркуляции $\mathbf{H}$, выбрав в качестве контура окружность радиуса *r*:

$$\pi r H_1 + \pi r H_2 = I$$

$$H_1 = \frac{B}{\mu_0}, \quad H_2 = \frac{B}{\mu\mu_0}$$

$$\pi r\left(\frac{B}{\mu_0} + \frac{B}{\mu\mu_0}\right) = I$$

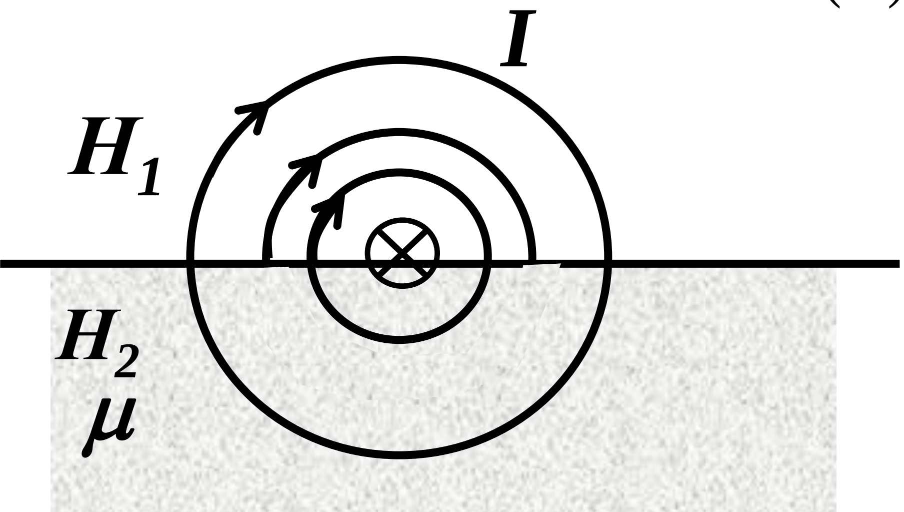
$$B(r) = \mu_0 \frac{\mu}{\mu + 1} \frac{I}{\pi r}$$

$$H_1 = \frac{\mu}{\mu+1}\frac{I}{\pi r}, \quad H_2 = \frac{1}{\mu+1}\frac{I}{\pi r}$$

$$J(r) = (\mu-1)H_2 = \frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{I}{\pi r}$$

$$i' = J(a) = \frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{I}{\pi a}$$

a **– радиус провода.**



Полный молекулярный ток на границе провода с магнетиком

$$I' = \pi a \cdot i' = \pi a \cdot J = I\,\frac{\mu-1}{\mu+1}$$