Сегодня: среда, 13 декабря 2023 г.

Семинар 7

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Задачи типа 1

Определение сопротивления, электрических полей, напряжений в сплошной проводящей среде

$$I \to j \to E \to U.$$

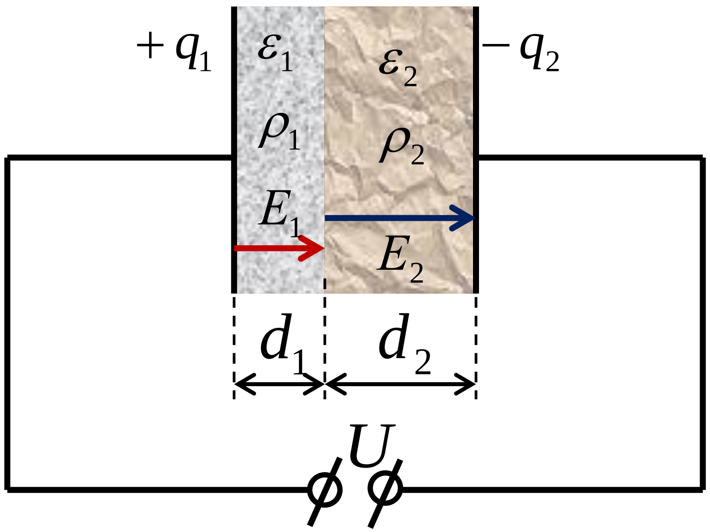
$$U \to E \to j \to I,$$

$$q \to E \to j \to I.$$

Задача. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено последовательно двумя диэлектрическими слоями толщиной $d_1 = 0{,}2$ см и $d_2 = 0{,}3$ см, диэлектрические проницаемости и удельные сопротивления которых равны $\varepsilon_1 = 6$, $\varepsilon_2 = 2$, $\rho_1 = 10^{13}$ Ом·м и $\rho_2 = 10^{15}$ Ом·м, площадь каждой из пластин равна $S = 230$ см^2. Определить:

1) общее сопротивление конденсатора;
2) заряд пластин конденсатора, если он подключен к источнику постоянного напряжения $U = 300$ В.

Решение: 1. Ток однородный и постоянный



$$j_1 = j_2 = j = \frac{I}{S}$$

Закон Ома

$$j = \gamma E$$

$$E = \frac{1}{\gamma} j = \rho j$$

$$E_1 = \rho_1 j, \quad E_2 = \rho_2 j$$

Напряжение между обкладками конденсатора

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$U = j\left(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2\right)$$

$$j = \frac{U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$$

$$I = jS = \frac{U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} S$$

Из закона Ома, найдем сопротивление конденсатора

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}{S}$$

$$R = \frac{10^{13} \cdot 6 + 10^{15} \cdot 2}{230 \cdot 10^{-4}} = 89 \text{ ПОм}$$

2) Для нахождения заряда пластин воспользуемся граничным условием для нормальной компоненты вектора электрической индукции

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

σ – поверхностная плотность свободных зарядов

n **– вектор нормали 1 → 2.**

Вне конденсатора *D* = 0, тогда для левой пластины

$$D_1 = \sigma_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1$$

Для правой пластины

$$-D_2 = \sigma_2 = -\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2$$

$$E_1 = \rho_1 j = \frac{U\rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}, \quad E_2 = \rho_2 j = \frac{U\rho_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$$

Полный заряд каждой из пластин:

$$q_1 = \sigma_1 S = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{U\rho_1 S}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} =$$

$$= 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \frac{300 \cdot 10^{13} \cdot 230 \cdot 10^{-4}}{10^{13} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4} + 10^{15} \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-4}} = 12 \text{ мкКл}$$

$$q_2 = \sigma_2 S = -\varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{U\rho_2 S}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} =$$

$$= -8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \frac{300 \cdot 10^{15} \cdot 230 \cdot 10^{-4}}{10^{13} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4} + 10^{15} \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-4}} = -4 \text{ мкКл}$$

Задачи типа 2

Нахождение теплоты, выделяющейся в проводнике при протекании тока

$$\boxed{Q = I^2 R}$$

Закон Джоуля–Ленца.

Закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме

$$\boxed{q_V = \left(\vec{j}\vec{E}\right) = \gamma E^2 = \rho j^2}$$

Задача 2. Сферический конденсатор заполнен однородным веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ и удельным сопротивлением $\rho = 10^{13}$ Ом·м. Первоначально конденсатор не заряжен. Найти количество теплоты, выделившееся в системе, после сообщения внутренней обкладке конденсатора заряда $q_0 = 2$ Кл. Радиусы обкладок конденсатора равны $a = 8$ см и $b = 3a$.

Решение:

После сообщения внутренней обкладке конденсатора заряда между его обкладками возникнет электрический ток, который будет течь, пока разность потенциалов между внутренней и внешней обкладками не станет равной нулю. В конечном состоянии весь заряд окажется распределенным по внешней обкладке конденсатора.

Способ 1. Можно рассматривать такой конденсатор как проводник сопротивлением R.

Обозначим

$q_1 = q$ - заряд на внутренней сфере
в произвольный момент времени,
тогда заряд внешней сферы
$q_2 = q_0 - q$.

Разность потенциалов между ними в процессе перетекания заряда

$$U(q) = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{b}\right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_1 + q_2}{b}$$

$$U(q)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{b-a}{ab}=\frac{q}{C}$$

$=1/C$ – *ёмкость сферического конденсатора*

По закону Джоуля–Ленца

$$dQ=I^2Rdt=IRIdt=\frac{U}{R}RIdt=\{dq=-Idt\}=$$

$$=-Udq=-\frac{q}{C}dq$$

Всё тепло, выделившееся в конденсаторе за время перетекания заряда

$$Q=-\int_{q_0}^{0}\frac{q}{C}dq=\frac{q_0^2}{2C}=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}=\frac{q_0^2}{12\pi a\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$Q=\frac{q_0^2}{12\pi a\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{4}{12\cdot 3{,}14\cdot 8\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}=75\,\text{ГДж}$$

Способ 2. **Заряд на внутренней обкладке конденсатора будет убывать по закону**

$$I=\frac{dq}{dt}=-\frac{q_0}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Тогда сила тока, текущего между обкладками конденсатора будет зависеть от времени

$$q=q_0\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Все тепло, выделившееся в конденсаторе

$$Q=\int_0^\infty I^2Rdt=\int_0^\infty R\left(\frac{q_0}{RC}\right)^2\exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)dt=$$

$$=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}=\frac{q_0^2}{12\pi a\varepsilon\varepsilon_0}$$

Задачи типа 3

Цепи нелинейных проводников.

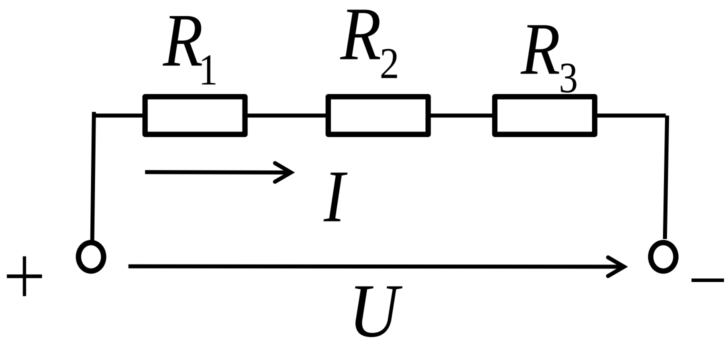
Разветвленные цепи, сводимые к неразветвленным благодаря элементам симметрии

Методы решения:

Для неразветвленных (последовательных) цепей – применение закона Ома для полной цепи.

Для разветвленных цепей – применение правил Кирхгофа

Задача 5. В цепи известны величины сопротивлений: R_1 =10 Ом, R_2 = 20 Ом, входное напряжение U = 100 В и мощность, выделяемая на резистивном элементе с сопротивлением R_1: P_1=40 Вт. Определить величину сопротивления резистора R_3.



Дано: R_1 =10 Ом,
R_2 = 20 Ом,
U = 100 В
P_1=40 Вт.
Определить R_3.

Решение: По закону Джоуля-Ленца $$P = U \cdot I$$

или по закону Ома $$P = I^2 \cdot R$$

По известному значению мощности и величине сопротивления этого элемента определим ток в ветви:

$$P_1 = I^2 \cdot R_1$$

$$I = \sqrt{P_1 / R_1} = \sqrt{40\text{Вт}/10\,\text{Ом}} = 2\text{А}$$

По закону Ома напряжение на зажимах:

$$U = I \cdot \left(R_1 + R_2 + R_3\right)$$

$$R_3 = \frac{U - I\left(R_1 + R_2\right)}{I} = \frac{100 - 2 \cdot \left(10 + 20\right)}{2} = 20\,\text{Ом}$$

Задача. **Длинный равномерно заряженный по поверхности цилиндр радиусом сечения r = 1 см движется с постоянной скоростью υ = 10 м/с вдоль своей оси. Напряженность электрического поля непосредственно у поверхности цилиндра E = 0,9 кВ/см. Чему равен соответствующий конвекционный ток**

Дано: r = 1 см

υ = 10 м/с

E = 0,9 кВ/см.

Определить:

I - ?

Решение:

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 E$$

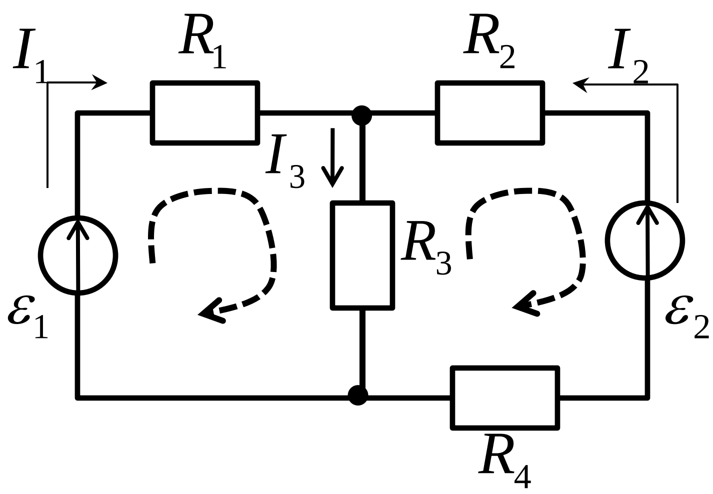
$$\sigma = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = E\varepsilon_0 dS$$

$$dS = 2\pi r \cdot dh \qquad dq = 2\pi r E\varepsilon_0 dh$$

$$I = \frac{dq}{dt} = 2\pi r E\varepsilon_0 \frac{dh}{dt} = 2\pi E r \varepsilon_0 \upsilon$$

$$I = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}9 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10 = 5 \cdot 10^{-7}\,\text{А} = 0{,}5\,\text{мкА}$$

Задача: В схеме электрической цепи определить токи в ветвях пользуясь законами Кирхгофа. Параметры элементов цепи: R_1 = 50 Ом, R_2 = 20 Ом, R_3 = 50 Ом, R_4 = 80 Ом, ε_1 = 50 В, ε_2 = 400 В.



Решение: Выбираем произвольно положительные направления искомых токов ветвей и обозначаем их на схеме.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1R_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1 \\ -I_2\left(R_2 + R_4\right) - I_3R_3 = -\varepsilon_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 = \varepsilon_1 \\ -I_2\left(R_2 + R_4\right) - I_3 R_3 = -\varepsilon_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 50 & 0 & 50 \\ 0 & -100 & -50 \end{vmatrix} = 12500$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 50 & 0 & 50 \\ -400 & -100 & -50 \end{vmatrix} = -12500$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 50 & 50 & 50 \\ 0 & -400 & -50 \end{vmatrix} = 37500$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 50 \\ 0 & -100 & -400 \end{vmatrix} = 25000$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-12500}{12500} = -1\,\text{A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{37500}{12500} = 3\text{A}$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{25000}{12500} = 2\text{A}$$

Для проверки составим уравнение баланса мощностей:

$$P_{ист} = P_{потр}$$

Мощность источников:

$$P_{ист} = I_1\varepsilon_1 + I_2\varepsilon_2 = -1\cdot 50 + 3\cdot 400 = 1150\,\text{Вт}$$

Мощность потребителей:

$$P_{ист} = I_1^2 R_1 + I_2^2\left(R_2 + R_4\right) + I_3^2 R_3 =$$

$$= -1\cdot 50 + 3^2\cdot\left(20 + 80\right) + 2^2\cdot 50 = 1150\,\text{Вт}$$