Сегодня: среда, 13 декабря 2023 г.

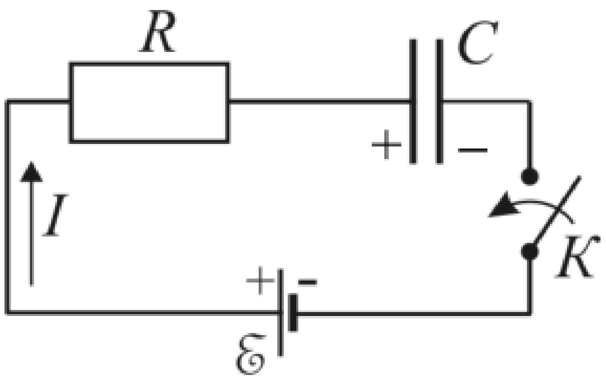
Общая физика. Часть 2

Семинар 14

СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Задачи на определение временных зависимостей напряжения на элементах цепи или силы тока при переходных процессах в RC и RL-цепях.

Задача 1. Резистор R, незаряженный конденсатор C и генератор постоянного напряжения E соединены последовательно (последовательная RC-цепь). Определить зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа K.



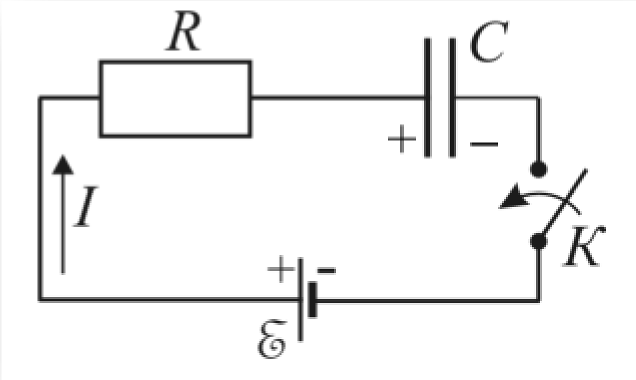
Дано:

R, *C*, *E*

Определите:

U(t) -?

второе правило Кирхгофа



$$U_C + U_R = E$$

$$U_R = RI_R$$

$$I_C = C\frac{dU_C}{dt}$$

все элементы цепи соединены
последовательно, поэтому сила
тока на всех участках цепи одинакова

$$I\left(t\right) = I_R = I_C$$

Надо определиться с исследуемой величиной: выберем в качестве исследуемой величины напряжение на конденсаторе U_C

$$U_C + RC\frac{dU_C}{dt} = E$$

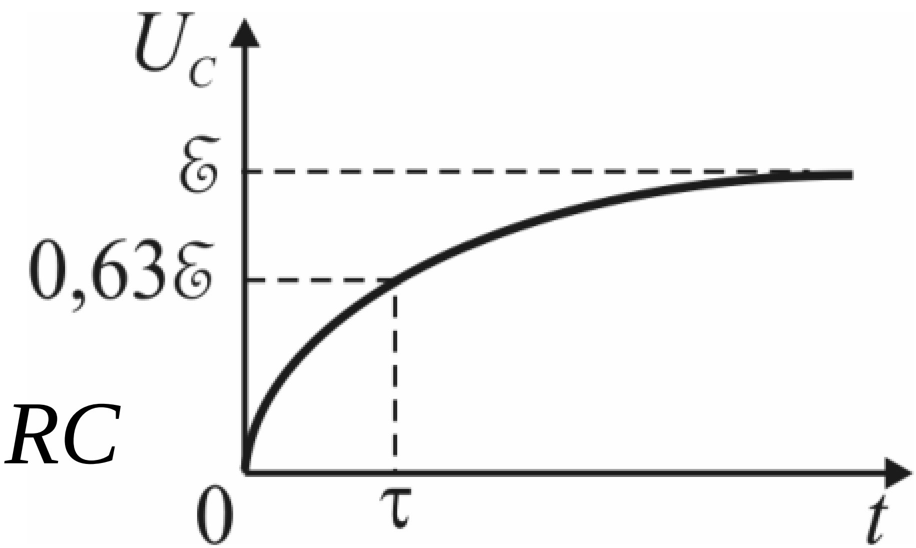
$$U_C + RC\frac{dU_C}{dt} = E$$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}\left(U_C - E\right) = 0$$

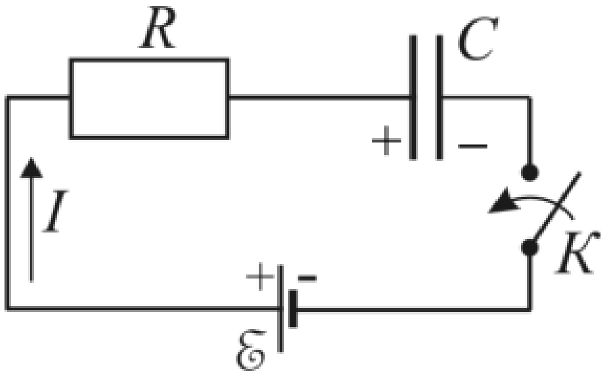
$$\frac{dU_C}{\left(U_C - E\right)} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\int_0^{U_C}\frac{dU_C}{\left(U_C - E\right)} = -\int_0^t\frac{1}{RC}dt$$

$$U_C\left(t\right) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right),\ \ \tau = RC$$



Задача 2. Заряженный до напряжения U_0 конденсатор C и резистор R соединены последовательно (последовательная RC-цепь). Определить зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа К.



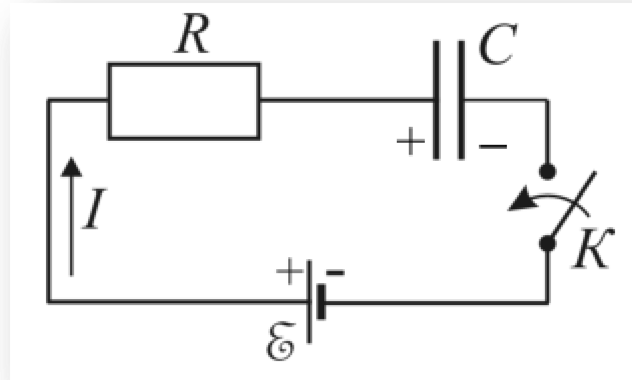
Дано:

R, C, U_0

Определите:

U(t) -?

второе правило Кирхгофа



$$U_C + U_R = 0$$

$$U_R = RI_R$$

$$I_C = C\frac{dU_C}{dt}$$

все элементы цепи соединены
последовательно, поэтому сила
тока на всех участках цепи одинакова

$$I(t) = I_R = I_C$$

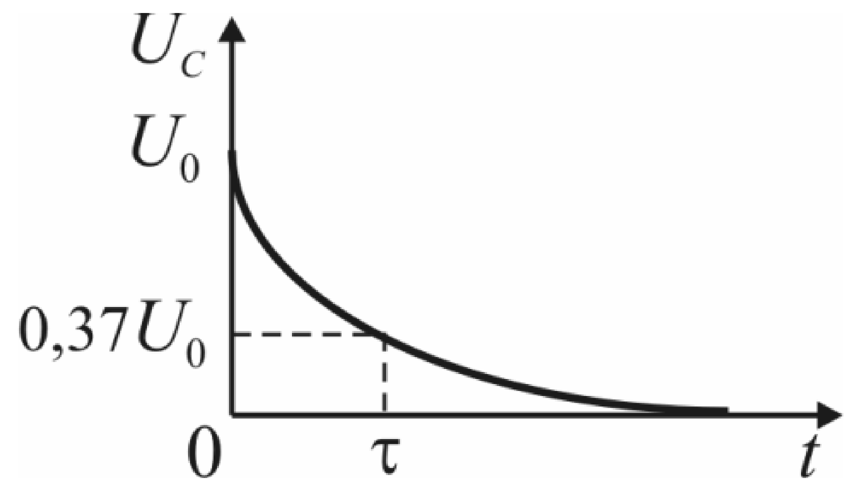
Надо определиться с исследуемой величиной: выберем в качестве исследуемой величины напряжение на конденсаторе U_C

$$U_C + RC\frac{dU_C}{dt} = 0$$

$$U_C + RC\frac{dU_C}{dt} = 0$$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = 0$$

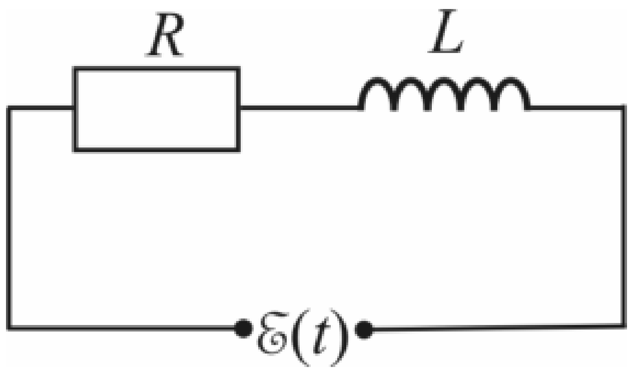
$$\frac{dU_C}{U_C} = -\frac{1}{RC}dt$$



$$\int_{U_0}^{U_C}\frac{dU_C}{U_C} = -\int_0^t \frac{1}{RC}dt$$

$$U_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}, \;\; \tau = RC$$

Задача 3. Резистор R, катушка индуктивности L и генератор напряжения E соединены последовательно (последовательная RL-цепь). Определить зависимость напряжения на резисторе от времени, если напряжение генератора меняется со временем по закону



Дано:

R*, *C*, *E

Определите:

***U(t)* -?**

$$E(t) = 0, \quad t < 0, t > T_u$$
$$E(t) = E_0 \quad 0 < t < T_u$$

При решении считать, что при t < 0 сила тока в цепи равна нулю, а время релаксации существенно меньше длительности импульса ($\tau << T_и$).

Интервал 0 < t < $T_и$: второе правило Кирхгофа $$U_L + U_R = E_0$$

все элементы цепи соединены последовательно, поэтому сила тока на всех участках цепи одинакова

$$I(t) = I_R = I_C$$

$$U_R = RI_R \qquad U_L = L\frac{dI}{dt} = \frac{L}{R}\frac{dU_R}{dt}$$

Надо определиться с исследуемой величиной: выберем в качестве исследуемой величины напряжение на резисторе U_R

$$U_R + \frac{L}{R}\frac{dU_R}{dt} = E_0$$

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{R}{L}\left(U_R - E_0\right) = 0$$

$$U_R(t) = E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \tau = \frac{R}{L}$$

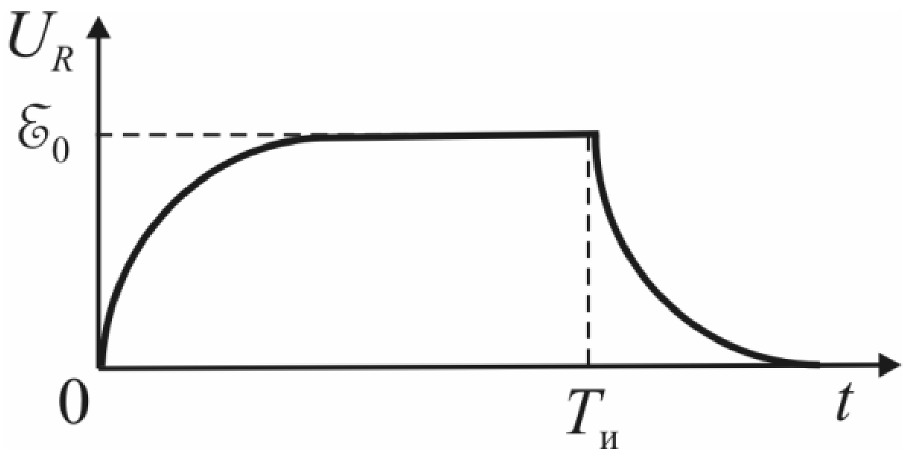
Интервал $t \geq T_и$: второе правило Кирхгофа

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{R}{L}U_R = 0$$

По условию $T_и >> \tau$, тогда при $t = T_и$ напряжение на резисторе можно считать равным

$$U_R(t) = E_0\left(1 - e^{-T_u/\tau}\right) \approx E_0$$

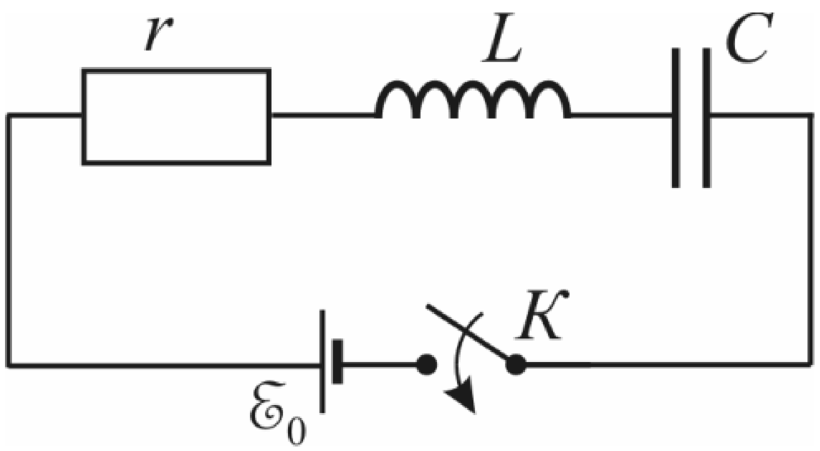
Тогда зависимость напряжения на резисторе от времени:



$$U_R(t) = E_0\left(1 - e^{-(t-T_u)/\tau}\right), \quad \tau = \frac{R}{L}$$

2. Задачи на определение временных зависимостей зарядов, напряжений и токов в RLC-цепях

Задача 4. Резистор r, конденсатор С, катушка индуктивности L ($\sqrt{L/C} \gg r$) и источник постоянного напряжения E_0 соединены в последовательную цепь. Определить зависимость от времени напряжения на конденсаторе после замыкания ключа К. Первоначально напряжение на конденсаторе и сила тока в цепи были равны нулю.



второе правило Кирхгофа + взаимосвязь между током в цепи I и напряжениями на резисторе, конденсаторе и индуктивности

$$rI + \frac{1}{C}\int I dt = E_0 - L\frac{dI}{dt}$$

Надо определиться с исследуемой величиной: выберем в качестве исследуемой величины напряжение на конденсаторе U_C – то, что надо определить по условию

все элементы цепи соединены последовательно, поэтому сила тока на всех участках цепи одинакова

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$$

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + rC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E_0$$

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2}+rC\frac{dU_C}{dt}+U_C=E_0$$

Переобозначим

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC},\beta=\frac{r}{2L}$$

$$\frac{d^2U_C}{dt^2}+2\beta\frac{dU_C}{dt}+\omega_0^2\left(U_C-E_0\right)=0$$

Стационарное значение напряжения на конденсаторе найдем, положив равными нулю все производные

$$U_{C\infty}=E_0$$

По условию

$$r\ll\sqrt{\frac{L}{C}}\qquad\Rightarrow\beta\ll\omega_0$$

Поэтому в цепи реализуются затухающие колебания

$$\frac{d^2U_C}{dt^2}+2\beta\frac{dU_C}{dt}+\omega_0^2\left(U_C-E_0\right)=0$$

решение уравнения $$U_C\left(t\right)=U_{C\infty}+e^{-\beta t}\left(a\cos\omega t+b\sin\omega t\right)$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

Константы *a* и *b*, входящие в это уравнение, определяем из начальных условий:

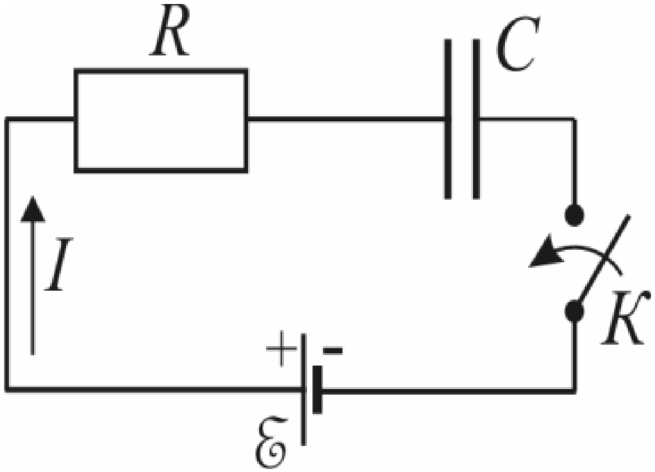
$$U_C\left(0\right)=U_{C\infty}+a=0 \qquad \Rightarrow a=-U_{C\infty}=-E_0$$

$$\frac{dU_C}{dt}\left(0\right)=-\beta a+\omega b=0 \qquad b=\frac{\beta a}{\omega}=\frac{\beta}{\omega}E_0$$

$$U_C\left(t\right)=E_0\left[1-e^{-\beta t}\left(\cos\omega t+\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$$

3. Расчет энергетических характеристик процессов (мощность, энергия, количество выделенного тепла и др.)

Задача 5. Конденсатор ёмкости C заряжается от источника постоянного напряжения E_0 через сопротивление R. Определить зависимость от времени мощности P(t), подводимой к конденсатору.



Мощность P(t), подводимая к конденсатору

$$P\left(t\right)=U_C I_C$$

В базовой задаче получили, что при зарядке конденсатора от постоянной ЭДС, напряжение на нём меняется по закону

$$U_C\left(t\right)=E_0\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

$$I\left(t\right)=\left\{E_0-U_C\left(t\right)=E_0 e^{-t/RC}\right\}=\frac{U_R\left(t\right)}{R}=\frac{E_0}{R}e^{-t/RC}$$

$$P\left(t\right)=\frac{E_0^2}{R}\left(1-e^{-t/RC}\right)e^{-t/RC}$$