Сегодня: среда, 13 декабря 2023 г.

Семинар 1

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ЗАКОН КУЛОНА.

Закон Кулона

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \text{ м/Ф}$$

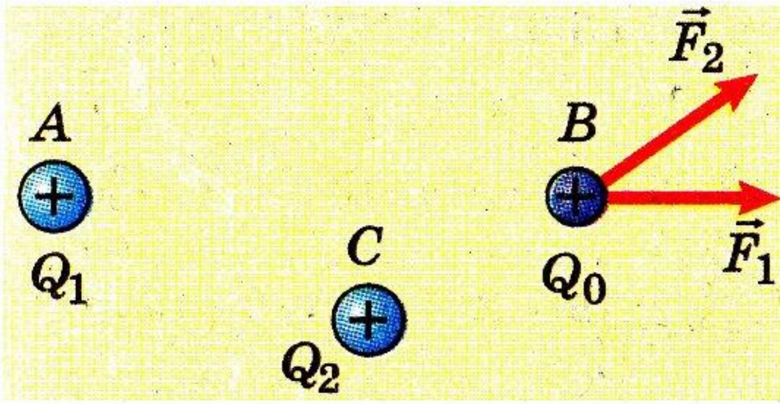
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ai}$$

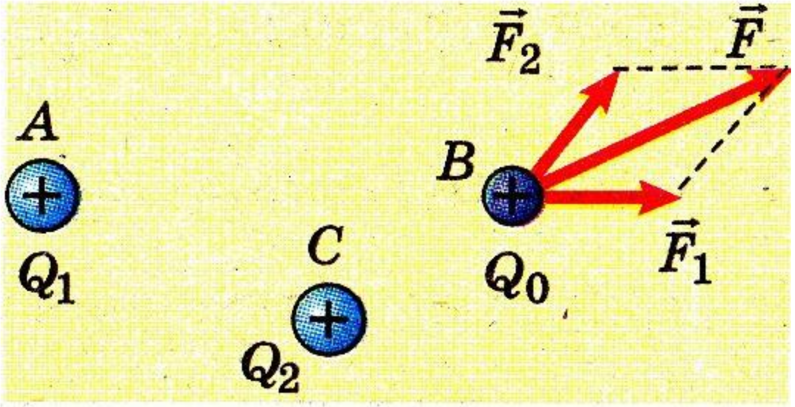
Принцип суперпозиции:

Если заряженное тело взаимодействует одновременно с несколькими другими заряженными телами, то результирующая сила, действующая на данное тело, равна векторной сумме сил, действующих на это тело со стороны всех других заряженных тел.

Электрическая постоянная

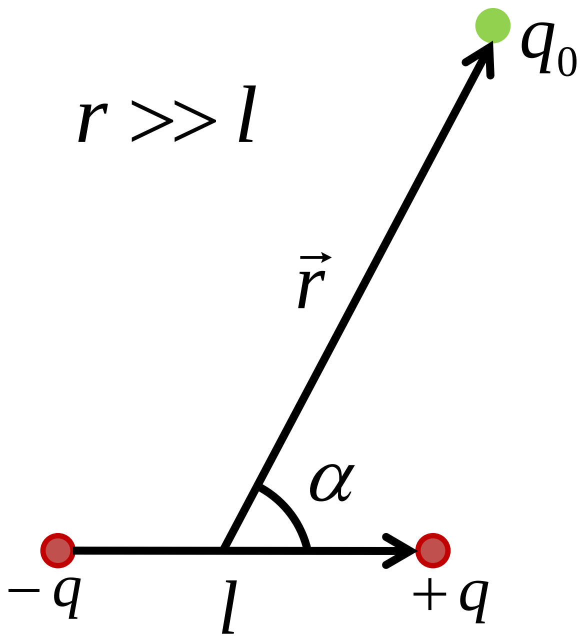
$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

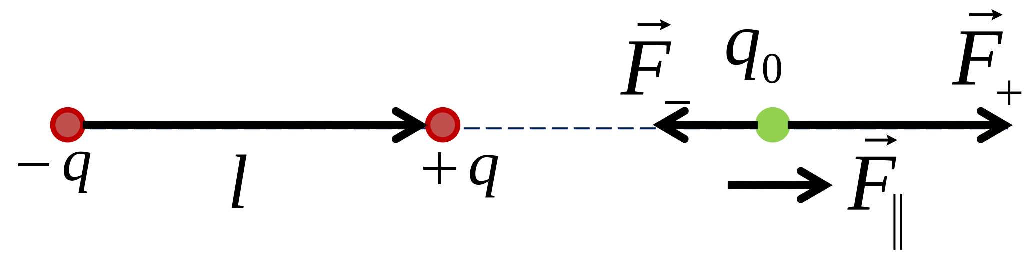




Сила воздействия диполя на точечный заряд

$r >> l$



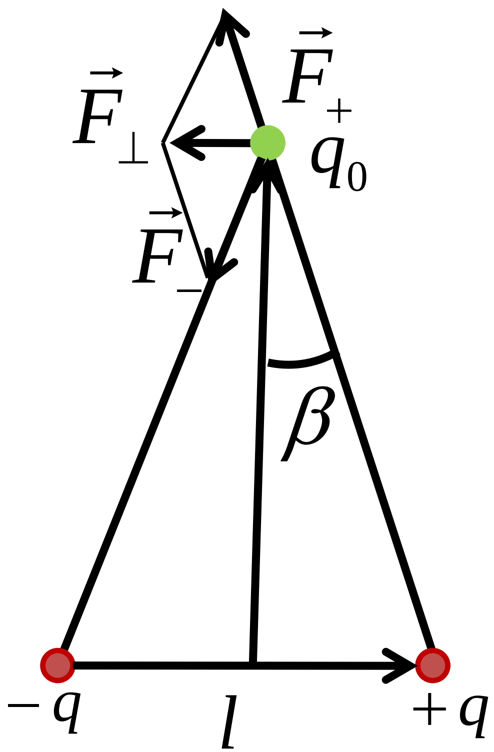


1 Случай: $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{r}$.

$$F_\parallel = F_+ - F_- = kqq_0\left[\frac{1}{(r-l/2)^2} - \frac{1}{(r+l/2)^2}\right] \approx \frac{2kqq_0 l}{r^3} = \frac{2kpq_0}{r^3}$$

$$\boxed{\vec{F}_\parallel = \frac{2k\vec{p}q_0}{r^3}, F_\parallel = \frac{2kpq_0}{r^3}}$$

2 Случай: $p \perp r$.

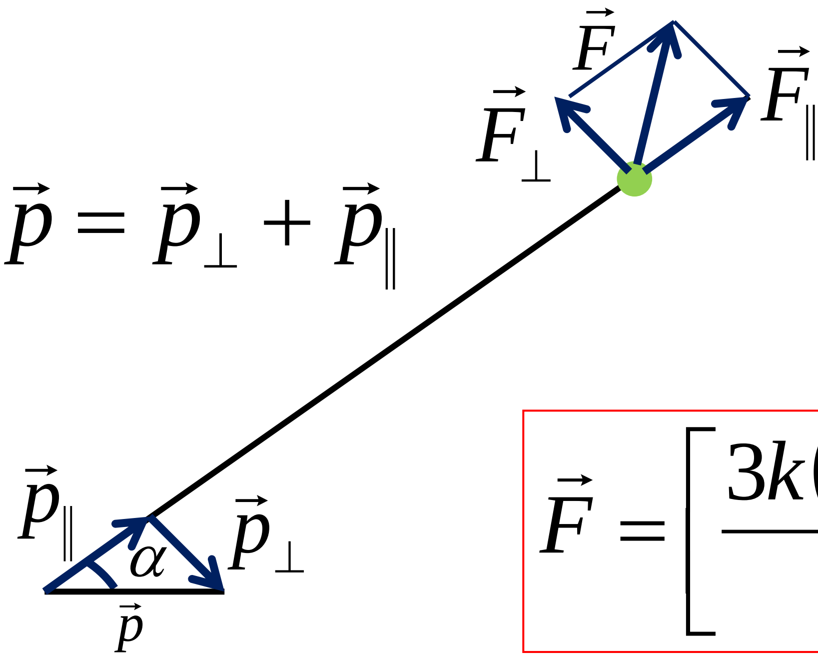


$$F_+ = F_- \approx \frac{kqq_0}{r^2},$$

$$\sin\beta = \frac{l}{2r}$$

$$F_\perp = 2F_+ \sin\beta = \frac{kqlq_0}{r^3} = \frac{kpq_0}{r^3}$$

$$\vec{F}_\perp = -\frac{k\vec{p}q_0}{r^3}$$



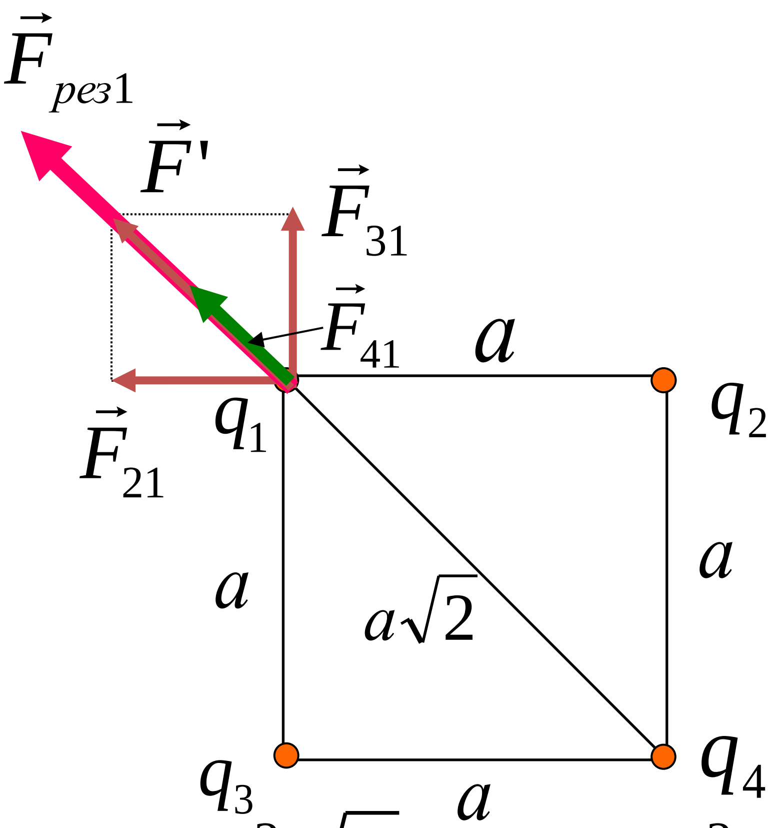
$$\vec{p} = \vec{p}_{\perp} + \vec{p}_{\parallel}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{+} + \vec{F}_{-} = \frac{2k\vec{p}_{\parallel}\, q_0}{r^3} - \frac{k\vec{p}_{\perp} q_0}{r^3} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{\perp} = \vec{p} - \vec{p}_{\parallel} \\ \\ \vec{p}_{\parallel} = p\cos\alpha \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^2} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\vec{F} = \left[\frac{3k(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{p}}{r^3} \right] q_0}$$

Задача 2. **Найти силу, действующую на каждый из зарядов, помещенных в вершинах квадрата со стороной a = 0,04 м. Заряды одноименные, одинаковые по величине и равны q = 7•10^{-7} Кл.**



$$F_{21} = F_{31} = \frac{q_1 \cdot q_{2(3)}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

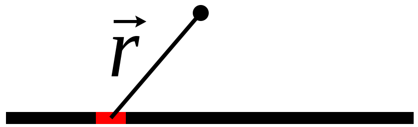
$$F' = \sqrt{F_{21}^2 + F_{31}^2} = F_{21}\sqrt{2}$$

$$F' = \frac{q^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

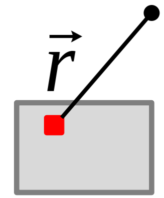
$$F_{41} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2a^2}$$

$$F_{рез1} = F' + F_{41}$$

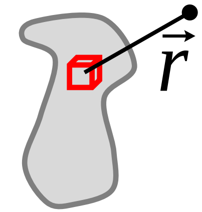
$$F_{рез1} = \frac{q^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a^2} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2a^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}\left(2\sqrt{2}+1\right) = 1{,}4\text{Н}$$



$\tau dx = dq$



$\sigma dS = dq$



$\rho dV = dq$

Плотность заряда:

1) объемная плотность:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

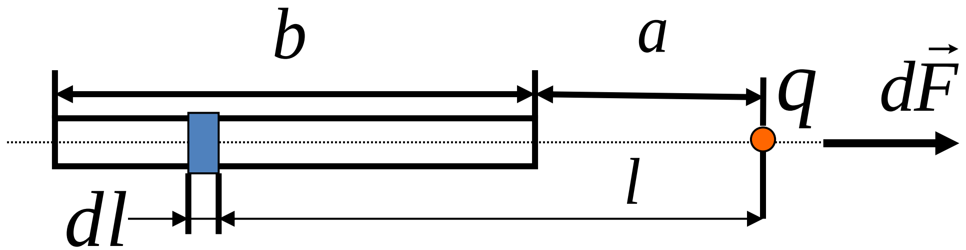
2) поверхностная плотность:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

3) линейная плотность:

$$\tau = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

Задача 2. **На продолжении оси тонкого прямого стержня длиной b = 0,06 м, равномерно заряженного с линейной плотностью τ =15 нКл/см на расстоянии a =40 см от конца стержня находится точечный заряд q =10 мкКл. Определить силу, действующую на заряд q.**



$$dq = \tau \cdot dl$$

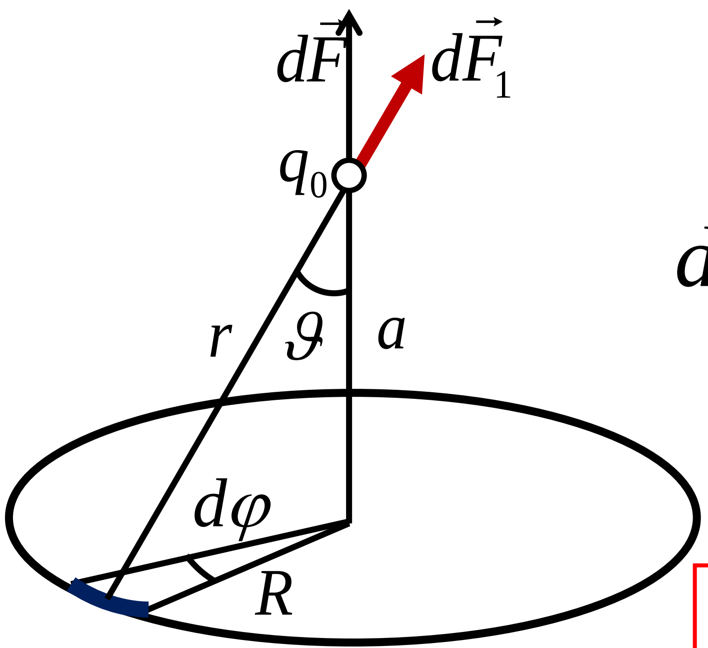
$$dF = \frac{q\,dq}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

$$F = \int_{\substack{\text{по} \\ \text{стержню}}} dF = \int_a^{a+b} \frac{q\,dq}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+b}\frac{dl}{l^2} = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 l}\Bigg|_a^{a+b} =$$

$$= \frac{q\tau b}{4\pi\varepsilon_0 (a+b)} = 0{,}2\text{Н}$$

Задача 3. **Вычислить силу, действующую на заряд q_0, со стороны тонкого кольца радиуса R, по которому равномерно распределен заряд q, если q_0 расположен на оси кольца на произвольном расстоянии a от его плоскости.**

Решение



$$dl = Rd\varphi$$

$$r = \sqrt{R^2 + a^2}$$

$$\tau = \frac{q}{2\pi R}$$

$$dF = dF_1 \cos\vartheta,$$

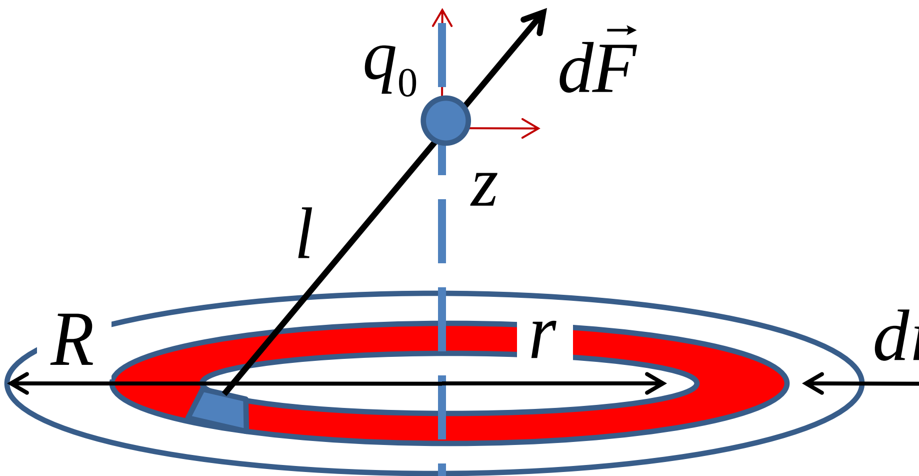
$$dF = \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$\cos\vartheta = \frac{a}{r}$$

$$dq = \tau dl$$

$$\boxed{F = \int dF = \int_0^q \frac{kq_0 dq}{r^2}\frac{a}{r} = \frac{kqaq_0}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}}$$

Задача 4. Тонкий однородный диск радиусом R равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ. Заряды неподвижны. Определить силу взаимодействия F диска с точечным зарядом q_0, находящемся на расстоянии z на оси диска.



$$dq = \sigma \cdot dS$$

$$dS = dl \cdot dr = r d\alpha \cdot dr$$

$$dF = \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q_0 \sigma \cdot r d\alpha \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

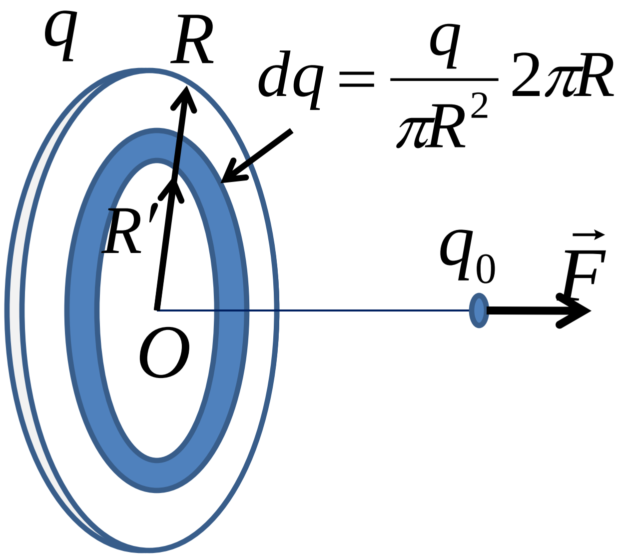
$$dF_K = dF \cdot \cos\varphi \qquad l = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$dF_K = \frac{q_0 \sigma \cdot r d\alpha \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

$$F_K = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{q_0 \sigma \cdot r \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} = \frac{q_0 \sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]$$

Диск

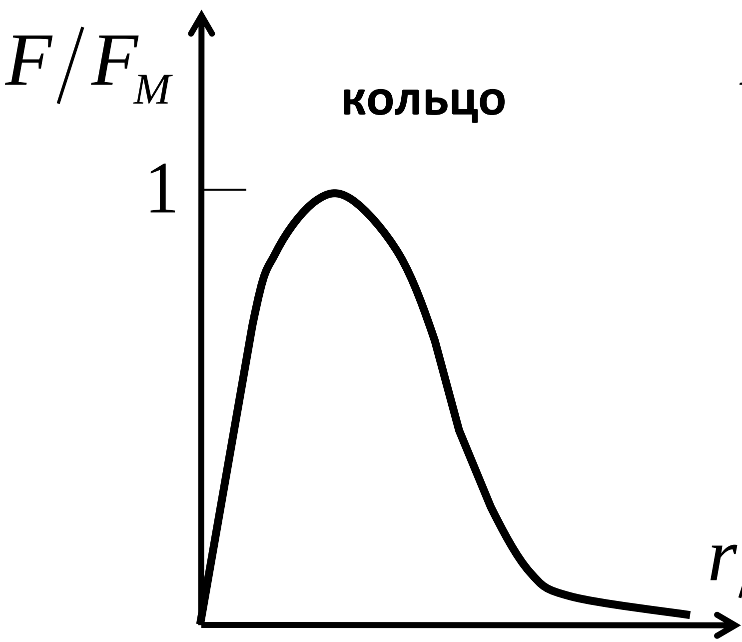


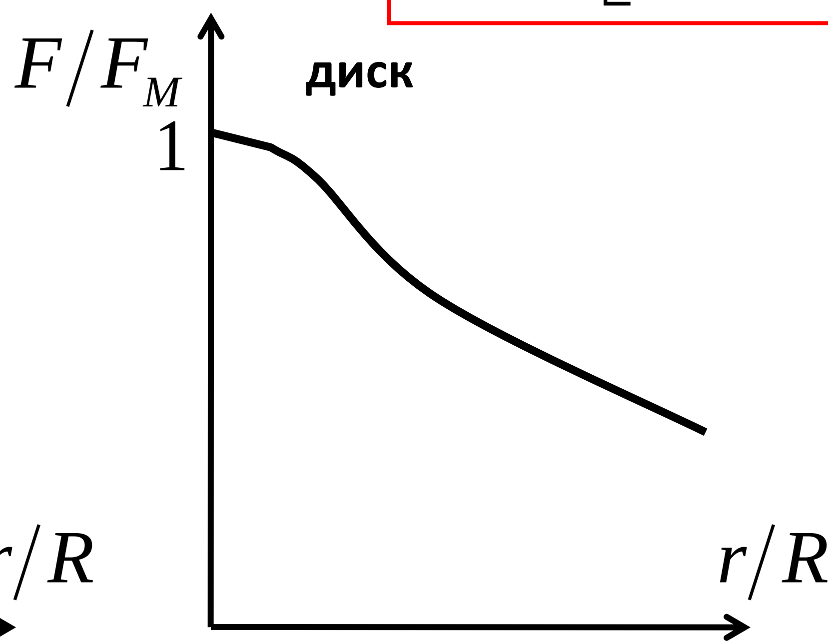
$$dq = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi R' dR' = \sigma 2\pi R' dR'$$

$$F = \int \frac{kdqr}{\left(r^2 + R'^2\right)^{3/2}} q_0 =$$

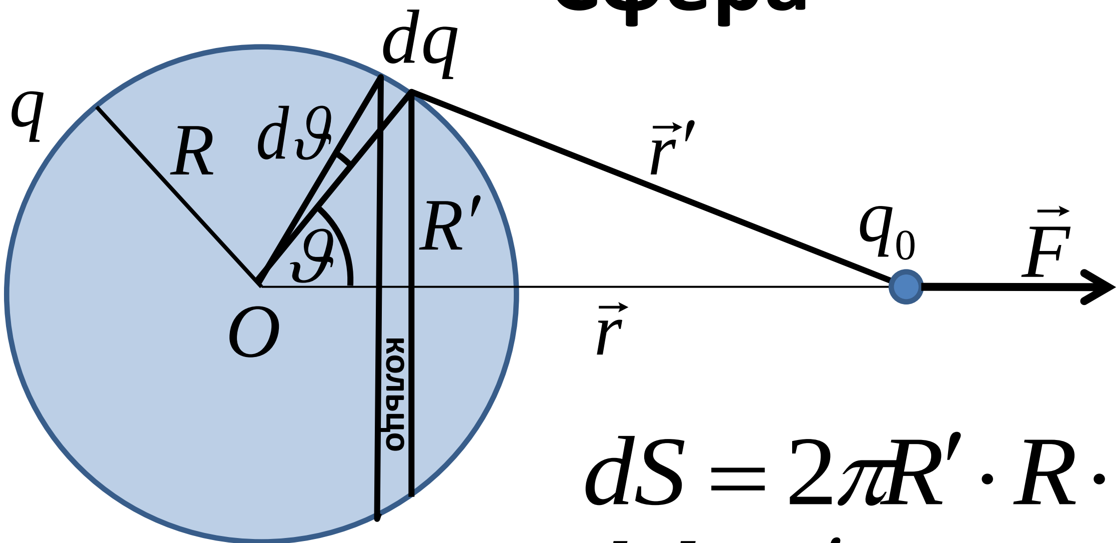
$$= \frac{kq}{R^2} \int \frac{rR' \cdot dq \cdot dR'}{\left(r^2 + R'^2\right)^{3/2}} q_0 =$$

$$= \frac{2kq}{R^2} \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right] q_0$$





Сфера



$$R' = R\sin\vartheta$$
$$r' = r - R\cos\vartheta$$

$$dq = \frac{q}{4\pi R^2}dS$$

$$dS = 2\pi R' \cdot R \cdot d\vartheta = 2\pi R^2 \sin\vartheta d\vartheta$$

$$dF = \frac{kdq \cdot r'}{\left(r'^2 + R'^2\right)} q_0 = \frac{k \cdot q \cdot dS \cdot r'}{4\pi R^2 \left(r'^2 + R'^2\right)^{3/2}} q_0$$

$$F = \int \frac{kdq \cdot r'}{\left(r'^2 + R'^2\right)} q_0 = kq \int_0^{\pi} \frac{\left(r - R\cos\vartheta\right)\sin\vartheta \cdot d\vartheta}{2\left(r^2 - 2Rr\cos\vartheta + R^2\right)^{3/2}} q_0$$

$$\boxed{F = \frac{kq}{r^2} q_0}$$

$$\boxed{F_{q_0-\text{внутри}} = 0, \ \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}, \ F_{\text{пов}} = \frac{kq}{R^2} q_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} q_0}$$