Семинар 15

Электромагнитные волны

Теоретическое введение

- **Уравнения Максвелла**

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j};\\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};\\ \mathrm{div}\vec{D} = \rho;\\ \mathrm{div}\vec{B} = 0\end{gathered}}$$

Взаимосвязь характеристик ЭМП

✓**Закон ЭМ индукции Фарадея**

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma BdS$$

✓**Теорема о циркуляции H**

$$\oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int_\Sigma \left(j + j_{см}\right)dS$$

✓**Теорема Гаусса для B**

$$\int_\Sigma (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$$

✓**Теорема Гаусса для D**

$$\int_\Sigma (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V \rho dV$$

- **Материальные уравнения Максвелла**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{J} \right)$$

✓**Линейная среда**

$$\vec{P}\left(\vec{E}\right) \propto \vec{E}$$
$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

✓**Нелинейная среда**

$$\chi = f\left(\vec{E}\right)$$

✓**Изотропная среда**

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$
$$\varepsilon = 1 + \chi$$
$$\vec{P} \parallel \vec{E} \parallel \vec{D}$$

- **Сила Лоренца**

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]\right)$$

- **Связь вектора поляризации и плотности связанных зарядов**

$$\rho_{св} = -\mathrm{div}\vec{P}$$

- **Плотность тока связанных зарядов**

$$\vec{j}_{св} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

- **Уравнение непрерывности**

$$\mathrm{div}\vec{j}_{св} + \frac{\partial \rho_{св}}{\partial t} = 0$$

- **Связь амплитуд E_0 и H_0 в линейной изотропной среде**

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0 = \sqrt{\mu_0} H_0}$$

- **Вектор Пойнтинга – плотность потока энергии**

$$\boxed{\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]}$$

$$\boxed{S = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 \upsilon}$$

- **Интенсивность**

$$\boxed{I = \left\langle \left| S \right| \right\rangle_T = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{2} \upsilon}$$

- **Волновой вектор**

$$\boxed{\vec{k} = k\vec{e} = \frac{\omega}{c} \vec{e}}$$

1. Задачи на определение ЭМВ, излучаемых при заданном движении электрических зарядов и заданных токах.

Метод решения: **Необходимо решить уравнения Максвелла для заданных движений зарядов и электрических токах.**

Задача 1. В вакууме распространяется плоская ЭМВ $\vec{E} = \vec{j}E_0\cos(\omega t - kx)$ с частотой $\omega = 1{,}5\cdot10^8$ с$^{-1}$, где $\vec{j}$ - орт вдоль оси y. Найти амплитуду напряженности E_0 электрического поля в точке с координатой $x = 10$ м в момент $t = 40$ нс, если в той же точке и в тот же момент времени $\vec{H} = 0{,}2\,\vec{k}$ [А/м].

Дано:

$$\vec{E} = \vec{j}E_0\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{x}\right)$$

$$\omega = 1{,}5\cdot10^8 \text{ с}^{-1}$$

$$x = 10 \text{ м}$$

$$t = 40 \text{ нс}$$

$$\vec{H} = 0{,}2\vec{k} = 0{,}2\vec{k} \text{ А/м}$$

Решение:

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_0 = \sqrt{\mu_0\mu}H_0$$

$$\varepsilon = 1, \mu = 1, \ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$$\boxed{c\varepsilon_0 E_0 = H_0}$$

$$\vec{H} = \vec{k}H_0\cos(\omega t - kx) =$$

$$= \vec{k}H_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) = \vec{k}H_0\cos\varphi$$

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) =$$

$$= 1{,}5\cdot 10^8\left(40\cdot 10^{-9} - \frac{10}{3\cdot 10^8}\right) = 1$$

$$\cos\varphi \approx 0{,}54$$

$$H_0 = \frac{\left|\vec{H}\right|}{\cos\varphi} = \frac{0{,}2}{0{,}54} = 0{,}37 \text{ А/м}$$

$$E_0 = \frac{0{,}37}{3\cdot 10^8\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 139 \text{ В/м}$$

- **Ответ:**

$$E_0 = 139 \text{ В/м}$$

2. Задачи на определение потока энергии по известным значениям напряженнстей полей

Метод решения: **Связь E и H с потоком энергии задается вектором Пойнтинга. Учитывать гармоничность и быстроту изменения.**

Задача 2. Шар, находящийся в немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$, облучается плоской ЭМВ с амплитудой $E_0 = 200$ В/м. Найти радиус шара R, если за время $\Delta t = 1$ мин на него падает энергия $W = 5$ кДж. Длина волны $\lambda << R$.

Дано:

$$\varepsilon = 4$$

$$E_0 = 200\,\text{В/м}$$

$$x = 10\,\text{м}$$

$$t = 40\,\text{нс}$$

$$\Delta t = 1\,\text{мин} = 60\,\text{с}$$

$$W = 5\,\text{кДж} = 5 \cdot 10^3\,\text{Дж}$$

$$\lambda << R$$

Решение:

$$W = I \cdot S\Delta t$$

$$S = \pi R^2$$

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{2}\upsilon}$$

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \upsilon}{2} \cdot \pi R^2 \Delta t$$

$$R^2 = \frac{2W\sqrt{\varepsilon}}{\pi \Delta t \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 c}$$

$$R = \sqrt{\frac{2W}{\pi \Delta t \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon} E_0^2 c}}$$

$$R = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 60 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 10^8}} = 0{,}5\ \text{м}$$

- **Ответ:** $R = 0{,}5\ \text{м}$