Сегодня: понедельник, 25 сентября 2023 г.

Общая физика. Часть 2

Лекция 6

Металлы и диэлектрики в электростатическом поле

1. Поляризация и вектор индукции
2. Условия на границе двух диэлектриков
3. Энергия поля

доцент ОЭФ ИЯТШ ТПУ, к.ф.-м.н.
Купрекова Елена Ивановна

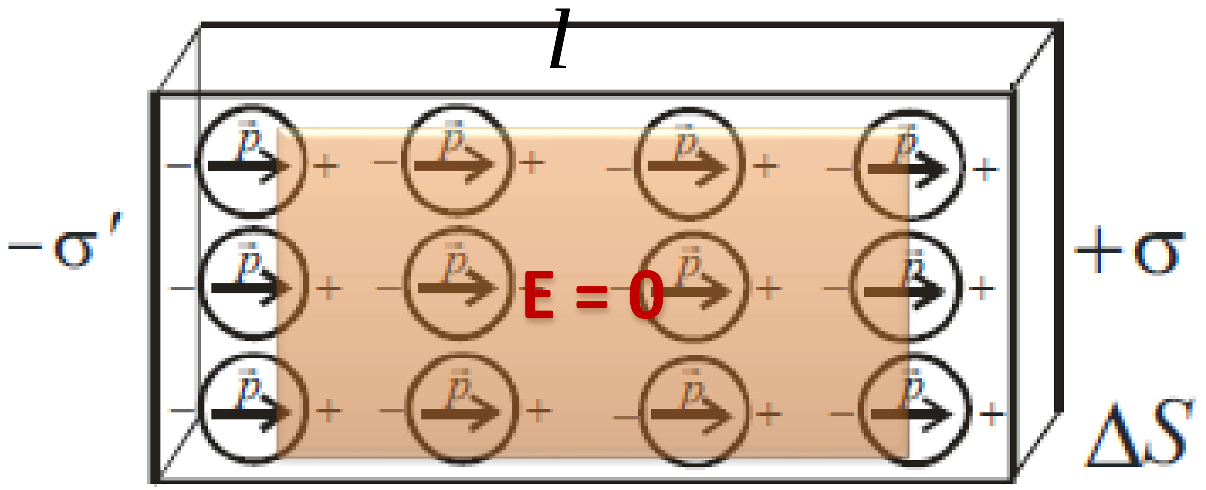
Вектор поляризации

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}}{\Delta V}}$$

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}}$$

χ - диэлектрическая восприимчивость

Результат: **на поверхностях нескомпенсированные связанные заряды противоположного знака с σ′ = const, т.е. внутри проводника индуцируется поле**



σ′ - связанные заряды

$$E_{инд} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

Дипольный момент

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{инд}$$

$$p_{пл} = \sigma' \Delta S \cdot l$$

$$P_n \Delta V = q^{связ} L = \sigma' \Delta S L$$

$$\boxed{P_n = \sigma'}$$

$$\boxed{\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}=\varepsilon_0\chi\left(\vec{E}_0+\vec{E}_{инд}\right)}$$

$$\boxed{E_{инд}=\frac{\sigma'}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{P_n=\sigma'}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_{инд}=\vec{E}_0-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}=\vec{E}_0-\frac{\varepsilon_0\chi\vec{E}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{E}_0}{1+\chi}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon},\quad \varepsilon=1+\chi}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{P}=-\rho'}$$

Вектор индукции

Связанные σ′ и свободные σ заряды = источники поля.

В диэлектрике теорема Остроградского-Гаусса видоизменяется

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oiint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right)$$

Введем вектор индукции $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$

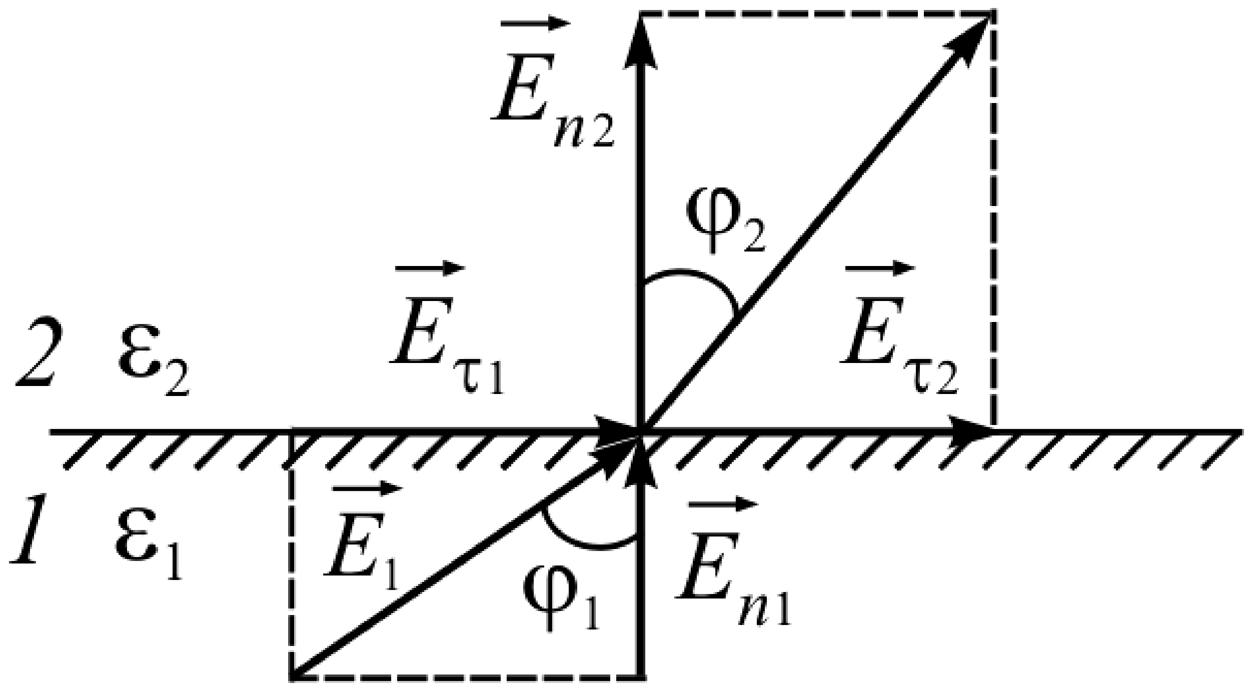
$$\Phi_{\vec{D}} = \oiint_S \varepsilon_0 \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) + \oiint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = \boxed{\oiint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\vec{P}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E} + \mathrm{div}\vec{P} = \mathrm{div}\vec{D} = \rho}$$

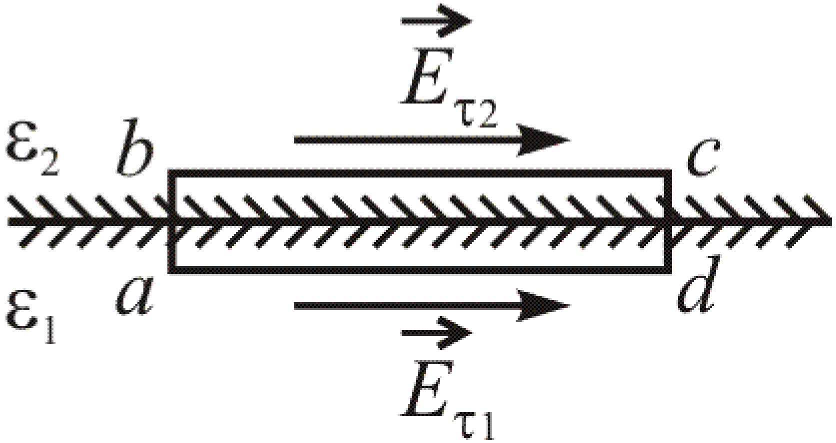
Уравнение Максвелла в дифференциальной форме

Преломление линий напряженности и индукции на границе двух диэлектриков



$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}}$$

$$\boxed{E_{1\tau} \overset{?}{=} E_{2\tau}}$$



На границе раздела двух диэлектриков строим прямоугольный контур *abcd* и считаем циркуляцию E вдоль контура

$$\boxed{\oint_l \left(\vec{E}_l d\vec{l}\right) = 0}$$

Условие: малость ширины

$$\int_a^b \left(\vec{E}_l d\vec{l}\right) + \int_b^c \left(\vec{E}_l d\vec{l}\right) + \int_c^d \left(\vec{E}_l d\vec{l}\right) + \int_d^a \left(\vec{E}_l d\vec{l}\right) = 0$$

$$\underbrace{\int_a^b \left(\vec{E}_{1,2n} d\vec{l}\right)}_{0} + \int_b^c \left(\vec{E}_{2\tau} d\vec{l}\right) + \underbrace{\int_c^d \left(\vec{E}_{1,2n} d\vec{l}\right)}_{0} + \int_d^a \left(\vec{E}_{1\tau} d\vec{l}\right) = 0$$

$$\int_b^c \left(\vec{E}_{2\tau} d\vec{l}\right) + \int_d^a \left(\vec{E}_{1\tau} d\vec{l}\right) = 0$$

$$E_{2\tau} l_{bc} + E_{1\tau} l_{da} = 0$$

$$l_{bc} = -l_{da}$$

$$\boxed{E_{2\tau} = E_{1\tau}}$$

Тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля при переходе через границу двух диэлектриков непрерывна - следствие потенциальности ЭСП

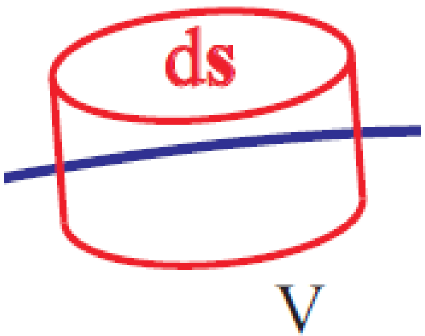
$$D_{1\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1\tau}, D_{2\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau}$$

$$\boxed{\frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1}}$$

Тангенциальная компонента вектора индукции претерпевает разрыв

Граничные условия для нормальной компоненты получим из теоремы Остроградского-Гаусса

$$\Phi_D = \oiint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q$$



$$\Phi_D = -D_{1n}S + D_{2n}S = \sigma S$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

Разрыв нормальной компоненты вектора индукции происходит лишь при наличии свободных зарядов на границе раздела.
В отсутствие свободных зарядов нормальная компонента вектора индукции непрерывна.

$$D_{1n} = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_{1n}, D_{2n} = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_{2n}$$

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}}$$

Нормальная компонента вектора напряженности претерпевает разрыв

Условия на границе двух диэлектриков

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

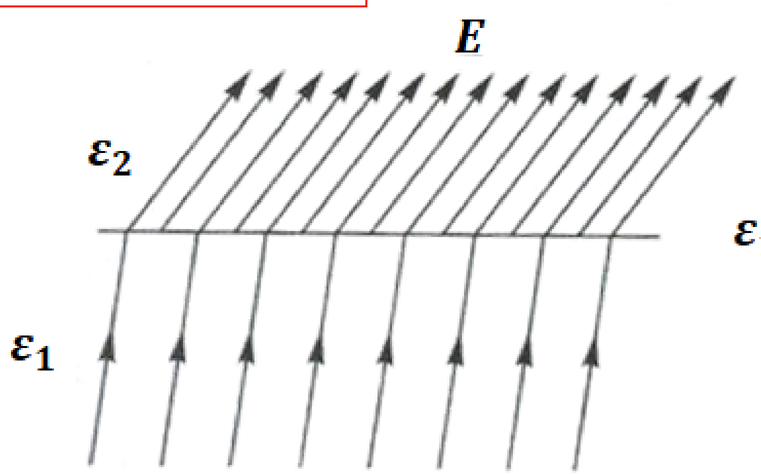
$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

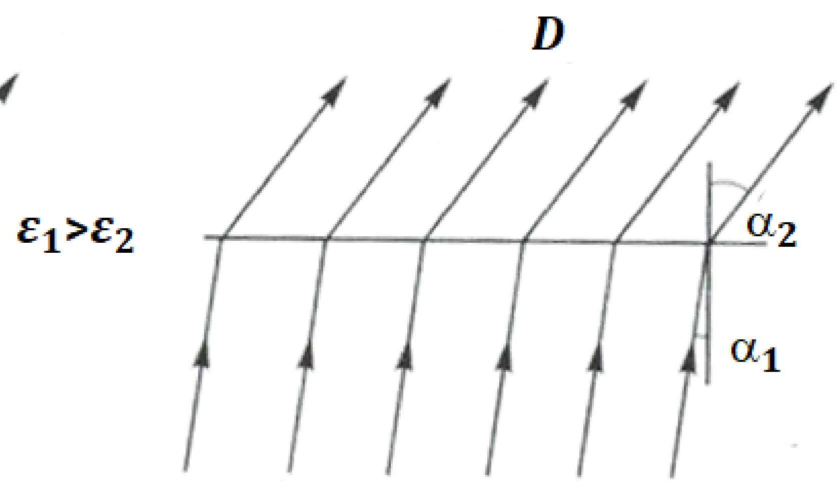
$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}$$

При переходе через границу раздела двух диэлектриков линии вектора напряженности электрического поля и линии электрического смещения преломляются

Из-за появления связных зарядов возникает индукционное поле и линии испытывают излом. Источниками поля индукции являются свободные заряды, поэтому линии индукции неразрывны, E – претерпевают разрыв

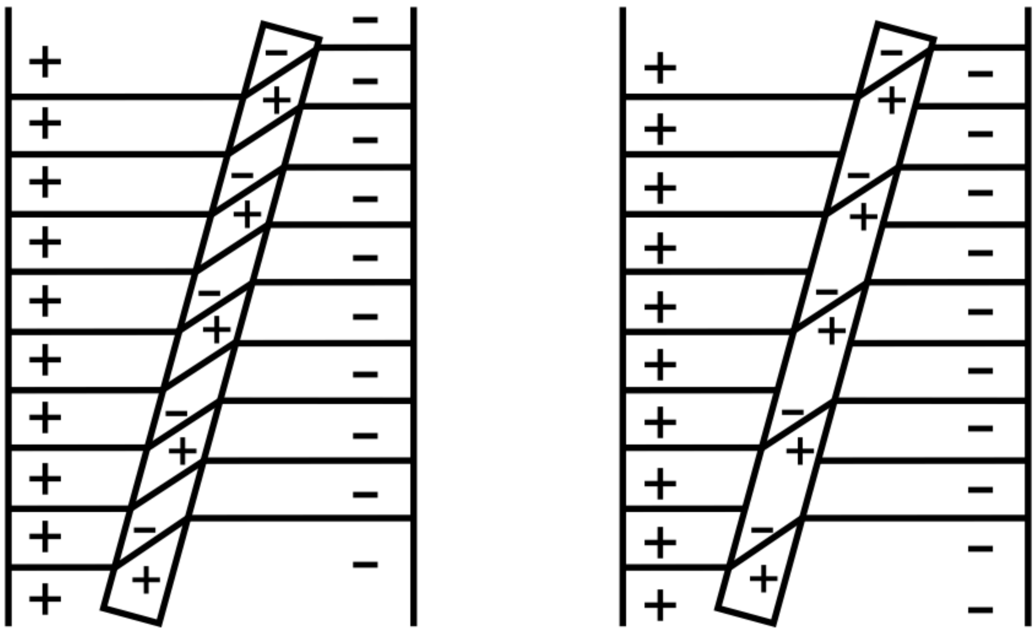


Однородное электрическое поле



Для случая $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

Пример



Поле вне пластины

$$E_1 = E_0$$

Поле внутри пластины

$$E_2 = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P_2}{\varepsilon_0}$$

Тогда индукция

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P_2 = \varepsilon_0 E_0 = D_1$$

Линии индукции непрерывны, а линии напряженности частично прерываются на границе раздела

Энергия поля

$$\boxed{W_{сб} = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\vec{E}, \vec{D}\right) dV}$$

Объемная плотность энергии

$$\boxed{\omega = \frac{1}{2}\left(\vec{E}, \vec{D}\right)}$$

Задача. Вычислите энергию электрического поля, создаваемого шаром R, который равномерно заряжен по поверхности q.

Решение: Поскольку поле существует во всем окружающем пространстве и напряженность поля шара

$$E = \frac{kq}{r^2}$$

$$W=\int \omega dV$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\omega=\dfrac{\left(\vec{E}\vec{D}\right)}{2}\\ D=\varepsilon\varepsilon_0 E\end{array}\right\}=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_R^{\infty}\left(\frac{kq}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

Задача. Определите энергию электрического поля, создаваемого плоским конденсатором, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε.

Решение: Если поверхностные плотности зарядов +σ и -σ, а площади пластин S

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E = \sigma$$

$$W = \int \omega dV = \omega Sl$$

$$= \left\{ \omega = \frac{\left(\vec{E}\vec{D}\right)}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon\varepsilon_0} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon\varepsilon_0} Sl \quad = \frac{1}{2}\sigma SEl$$

$$= \frac{1}{2} q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$