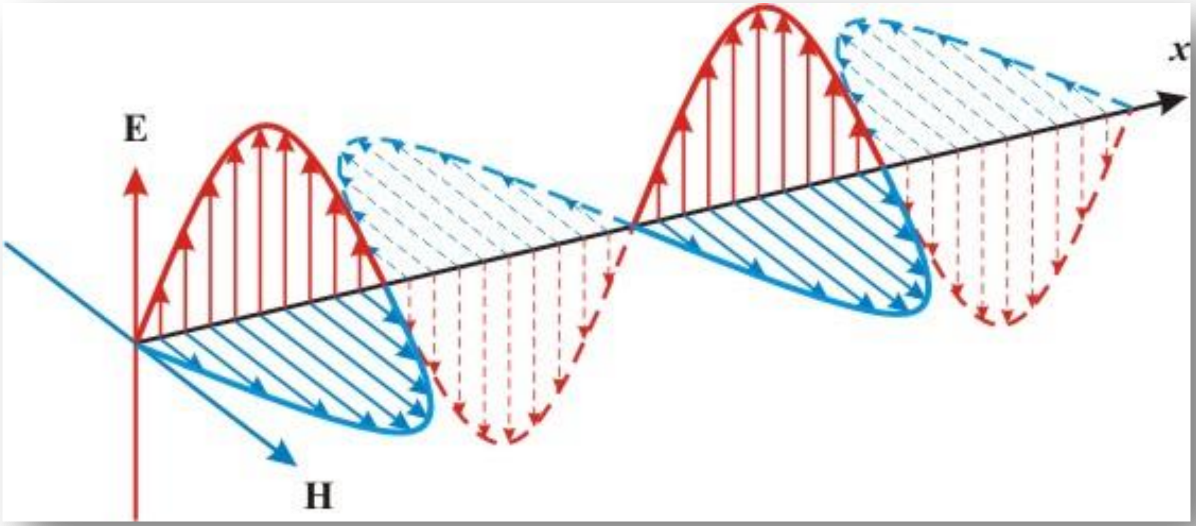
Сегодня: четверг,
7 декабря 2023 г.

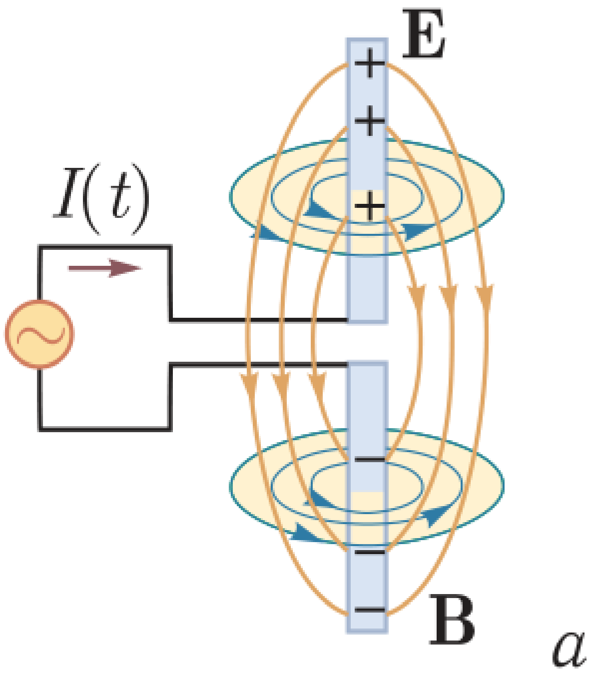
Лекция 22.
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

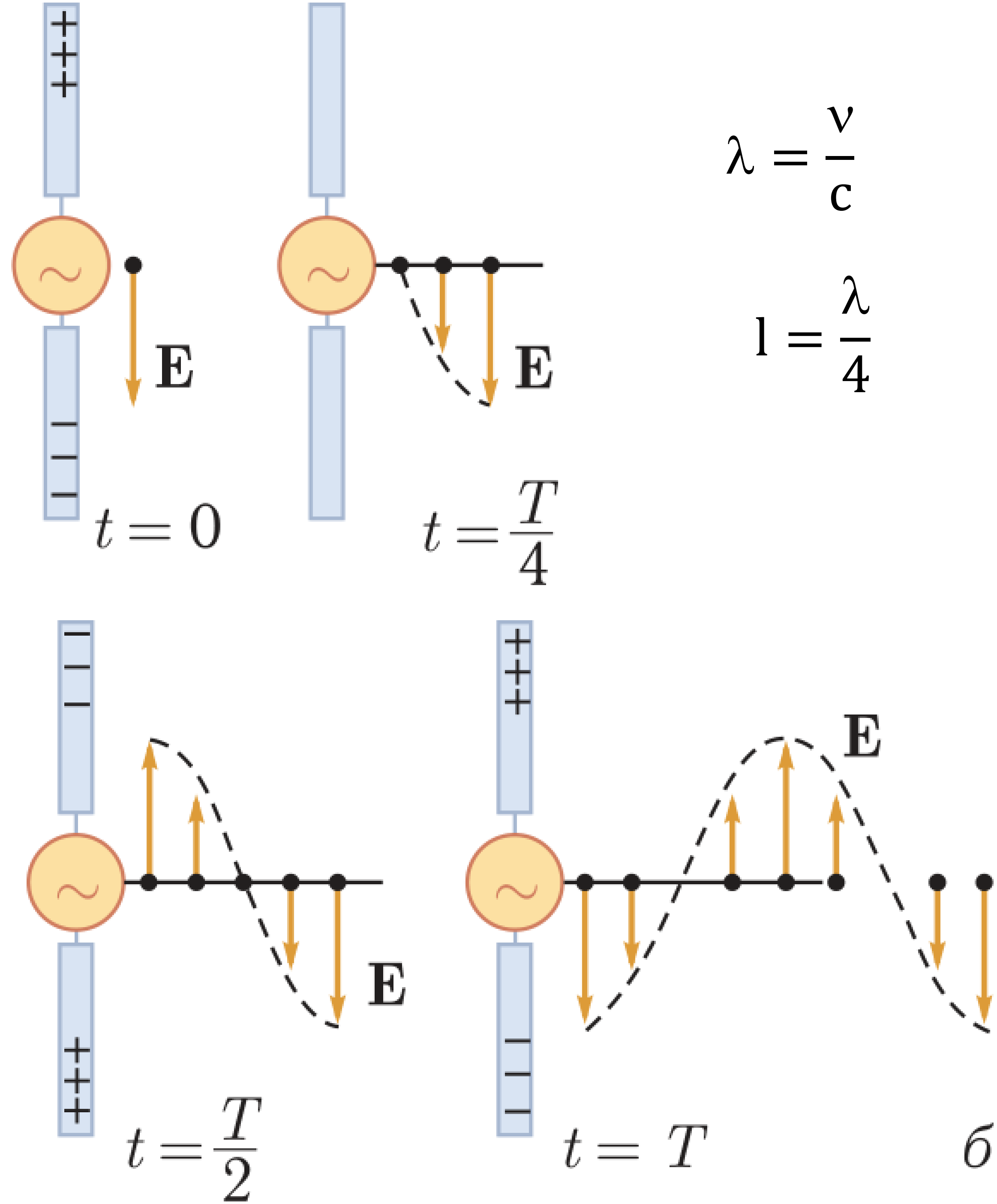


Возможность существования электромагнитных волн предсказал Майкл Фарадей в 1832 г.

Теоретически обосновал Джеймс Максвелл: электромагнитные взаимодействия передаются из одной точки пространства в другую не мгновенно, а с конечной скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с

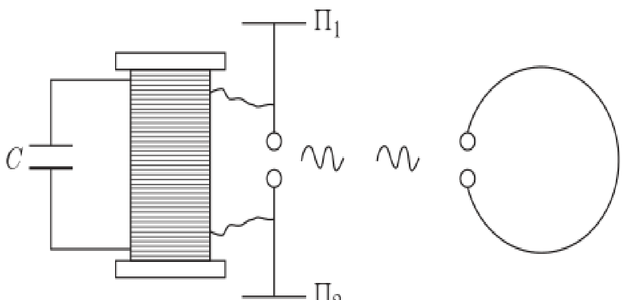
Экспериментально ЭМВ были получены Генрихом Герцем (1857 – 1894)



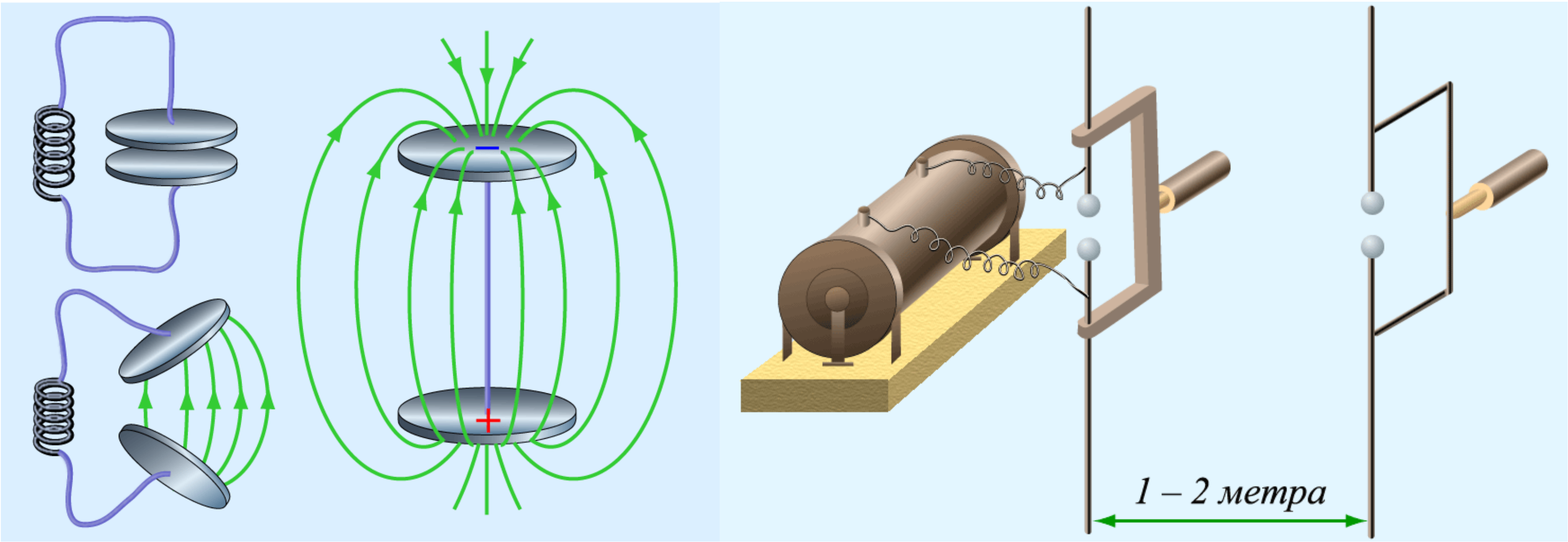


$$\lambda = \frac{v}{c}$$

$$l = \frac{\lambda}{4}$$

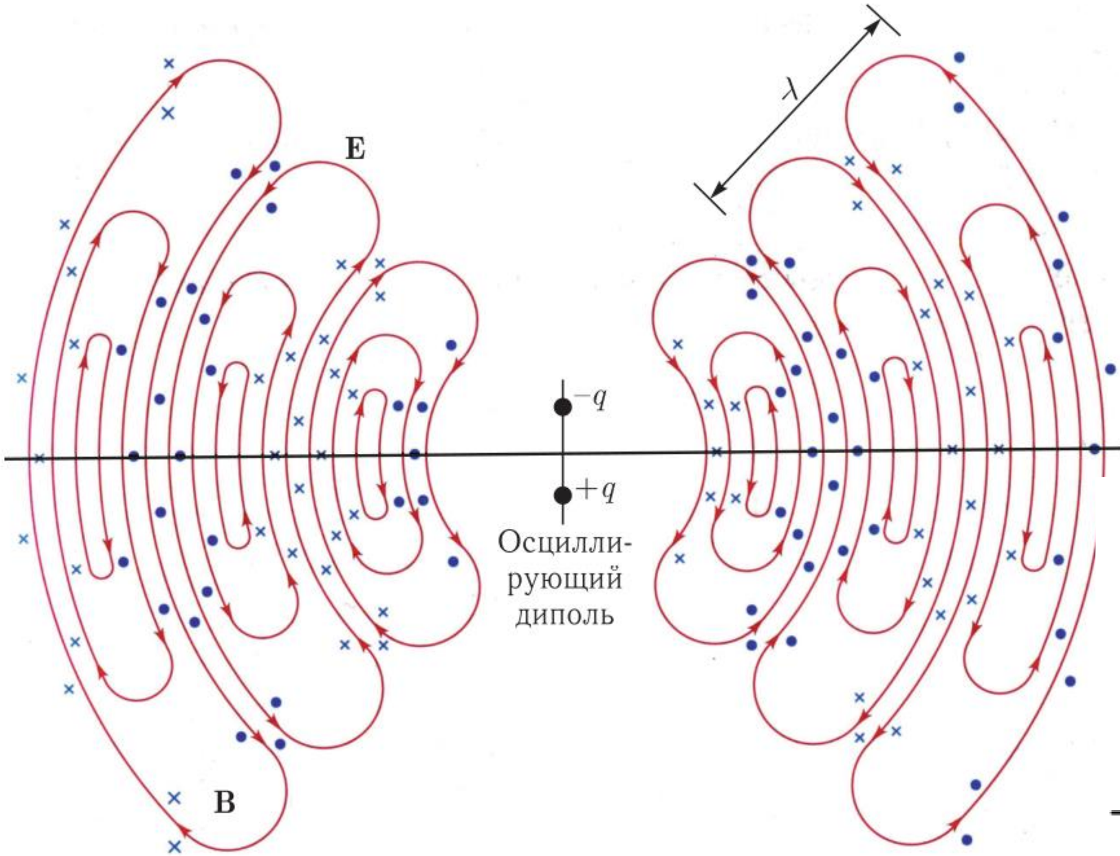


Опыт Герца: открытый колебательный контур



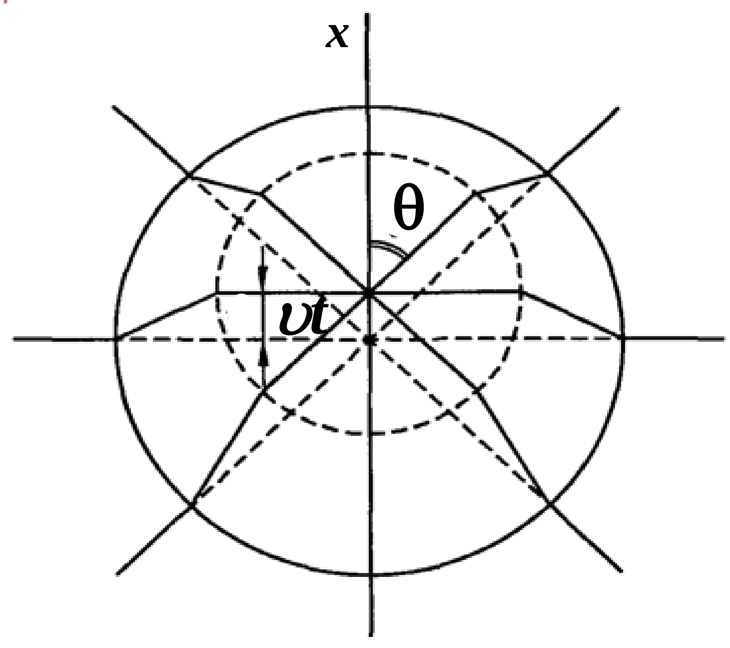
$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Излучение электрического диполя



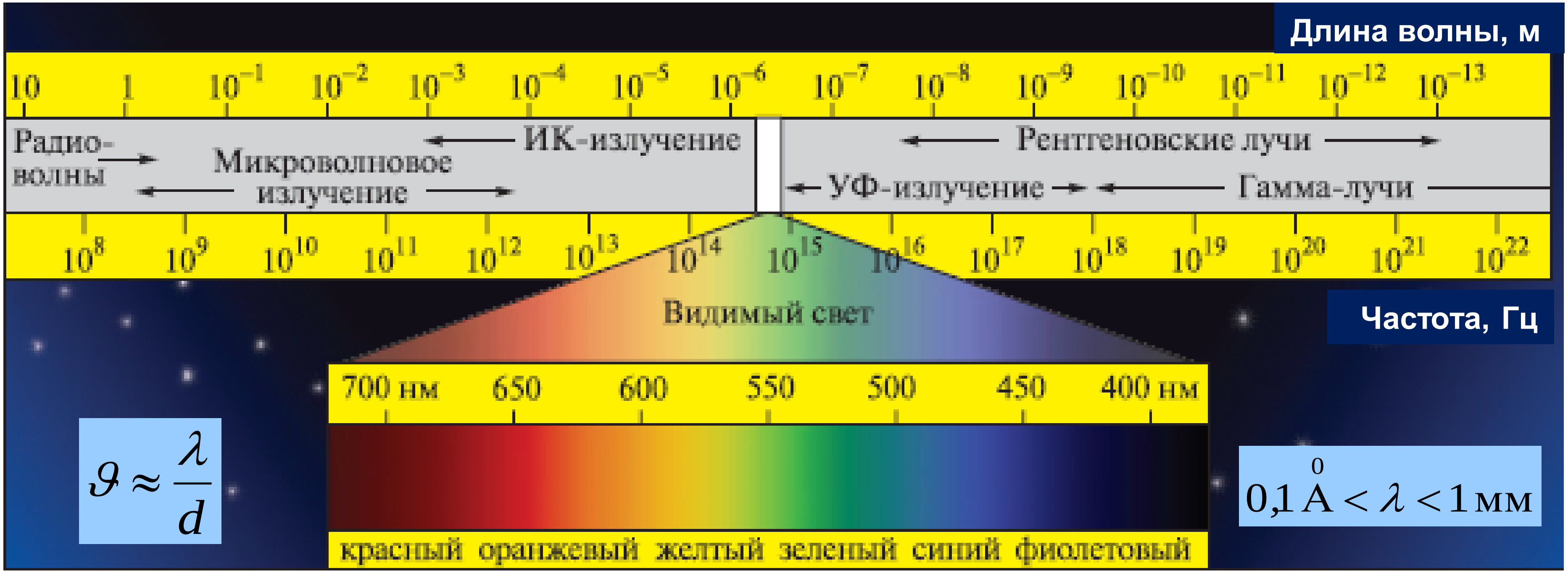
$$S\left(t,\vec{r}\right)=EH\propto\omega^4$$

$$I=\left\langle S\right\rangle=I_0\sin^2\theta$$



Причина ЭМ излучения – ускорение заряженных частиц!

Оптический диапазон волн



- Ограничение определяется **общностью средств и методов**, используемых в оптическом диапазоне:

возможность создания направленных пучков ЭМВ, годных для формирования изображения.

2. Уравнение электромагнитной волны

Электромагнитная теория света базируется на уравнениях Максвелла

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho; \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0.$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \ \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

И законе сохранения заряда

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0}$$

Уравнение непрерывности

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \vec{E}\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \vec{H}\right] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Электромагнитные волны могут распространяться в вакууме в отсутствие зарядов и токов проводимости, т.е. при ρ = 0 и j = 0.

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \vec{E}\right] = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1); \qquad \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \vec{H}\right] = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{r}} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (3); \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{r}} = \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (4)$$

Подействуем на обе части уравнения (1) оператором rot:

Левая часть:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}},\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}},\vec{E}\right]\right]=\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{r}}\right)-\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial r^2}=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{r}}=0\quad(3)\\ \Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\end{array}\right\}=-\Delta\vec{E}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{a}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{a}-\Delta\vec{a}}$$

Правая часть: $$-\mu_0\mu\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]=-\mu_0\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{r}}\right]=$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}},\vec{H}\right]=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\quad(2)\quad=-\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2E}{\partial t^2}$$

Тогда первое уравнение Максвелла примет вид:

$$-\Delta\vec{E} = -\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Аналогично преобразуем второе уравнение:

$$\boxed{\Delta\vec{H} - \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

это уравнения двух волн *E(r, t)* и *H(r, t)*, распространяющихся со скоростью:

$$\boxed{\upsilon_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}}$$

В источнике частота колебаний магнитного и электрического полей одинаковая, поэтому обе волны имеют одинаковую начальную фазу. В вакууме $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$. Следовательно, скорость ЭМ волны в вакууме

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

$$\boxed{n = \sqrt{\varepsilon \mu}}$$

абсолютный показатель преломления

$$\boxed{\upsilon_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n}}$$

Показатель преломления – это физическая величина, равная отношению скорости распространения ЭМ волн в вакууме к скорости их распространения в среде.

Решение дифференциальных уравнений:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \left(\vec{k}\vec{r}\right)\right)}}$$

$$\boxed{\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\left(\omega t - \left(\vec{k}\vec{r}\right)\right)}}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{s}$$ - **волновой вектор, направлен в сторону распространения волны.**

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)}$$

$$\boxed{\vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)}$$

Уравнение бегущей ЭМВ

$$\widehat{z} = x + iy,$$

$$i = \sqrt{-1} - \text{мнимая единица},$$

$$\left|\widehat{z}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

$$\widehat{z} = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

Свойства электромагнитных волн

Подставим полученные решения в комплексном виде в первое уравнение Максвелла

$$\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}},\vec{E}\right] = -\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}},\vec{E}\right] = \left[-i\vec{k}\,\underbrace{\vec{E}_0 e^{i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)}}_{\vec{E}}\right] = -i\left[\vec{k},\vec{E}\right]$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = i\omega\mu\mu_o\vec{H}_0 e^{i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)} = i\omega\mu\mu_o\vec{H}$$

$$-i\left[\vec{k},\vec{E}\right] = -i\omega\mu_0\mu\vec{H}$$

$$\boxed{\left[\vec{k},\vec{E}\right] = \mu_0\mu\omega\vec{H}}$$

$$\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\mu_0\mu\omega\vec{H}$$

Выводы:

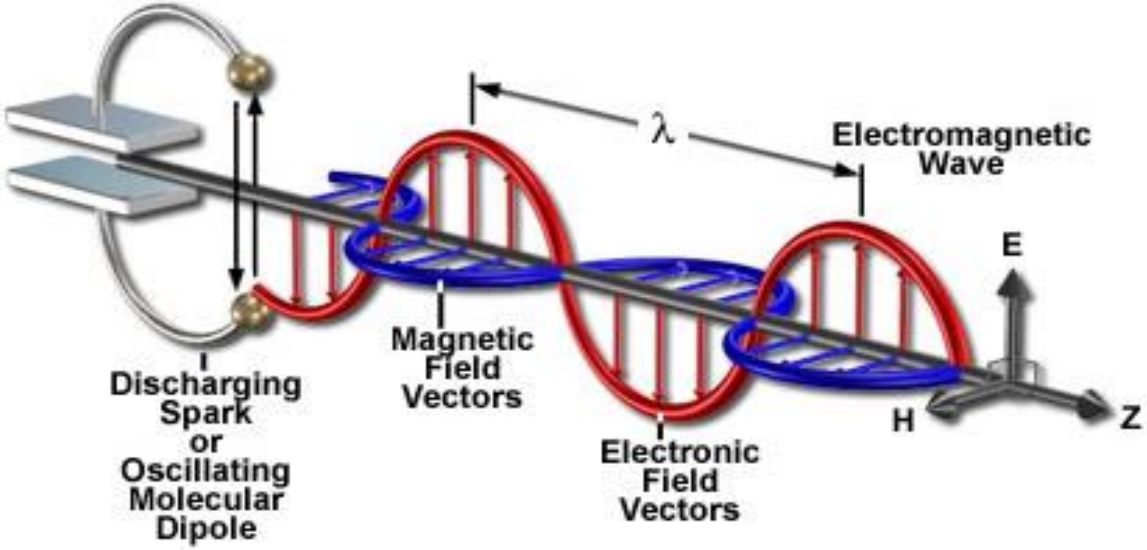
а) Векторы H, E, $\upsilon_ф$ взаимно перпендикулярны, k↑↑ $\upsilon_ф$

Электромагнитная волна является поперечной волной.

Б) *H, E, $\upsilon_ф$* образуют правую тройку векторов

В) *E* и *H* изменяются синхронно во времени, достигая одновременно максимальных и минимальных значений.

с) Векторы H, E колеблются в одинаковых фазах.



Для доказательства последнего свойства воспользуемся правилом разложения ротора на составляющие:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Для волны, распространяющейся вдоль оси OZ, компоненты электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля равны

$$\boldsymbol{E}(0,\, E_y,\, 0),\ \boldsymbol{H}(H_x,\, 0,\, 0).$$

Следовательно, из шести уравнений, значимыми останутся только два (!).

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Решение этих дифференциальных уравнений в комплексной форме или действительные части:

$$E_y = E_0 \cos\left(\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1\right),$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2\right)$$

Подставляем эти функции в дифференциальные уравнения:

$$-k_1E_0\cos(\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1) = -\mu\mu_0\omega_2 H_0\cos(\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2),$$

$$k_2H_0\cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2) = \varepsilon\varepsilon_0\omega_1 E_0\cos(\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1)$$

Эти равенства будут справедливы при условии:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega,$$

$$k_1 = k_2 = k,$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

Следовательно, выполняется последнее (с) свойство и, действительно, векторы H, E колеблются в одинаковых фазах

+

$$\boxed{\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 = \mu\mu_0 H_0^2}$$

Необходимо обратить внимание и на тот факт, что ε > 1 и μ > 1 в любой среде, кроме диамагнетиков.

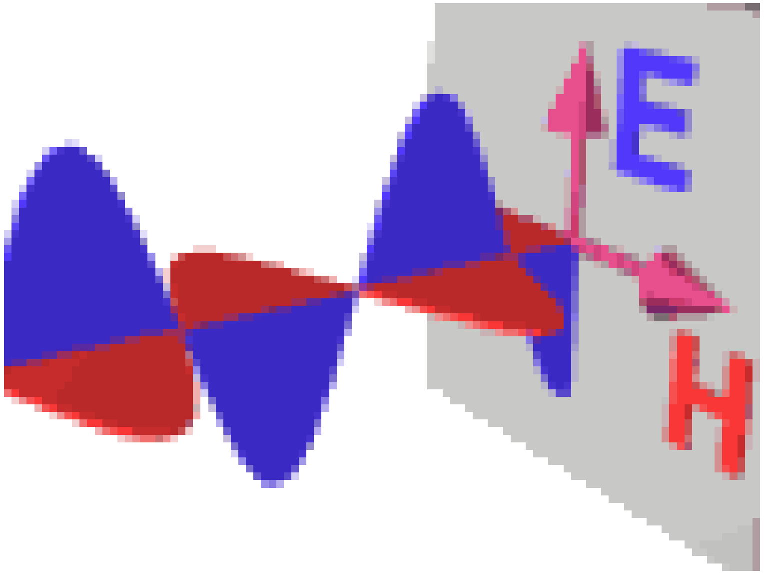
$$\upsilon_{\phi} = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Скорость электромагнитной волны в среде меньше, чем в вакууме и

$$n > 1$$

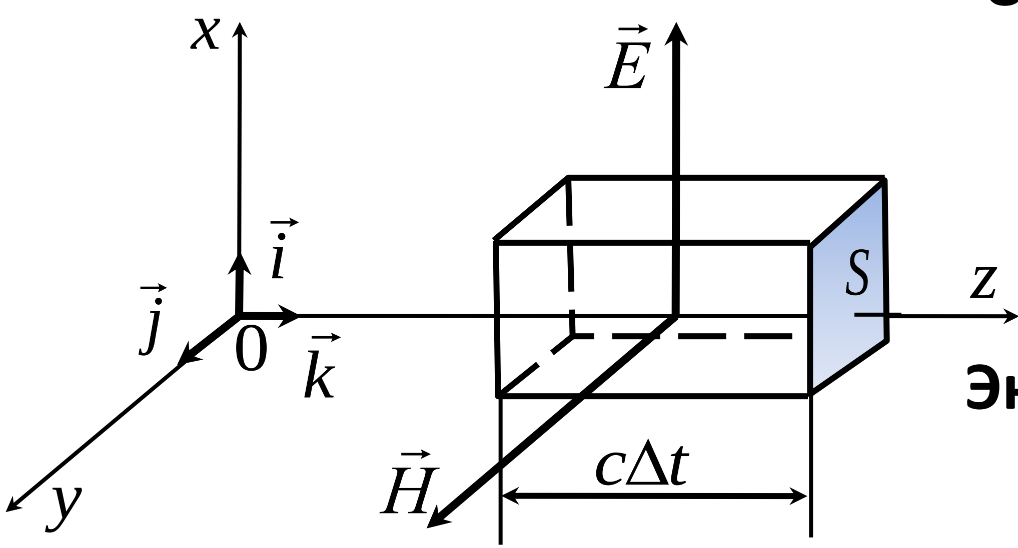
$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м}$$



Поток энергии в световой волне. Интенсивность света

Одно из основных свойств света – способность переносить энергию. Количественная характеристика переноса энергии - поток энергии (вектор Пойнтинга).



Объемная плотность энергии

$$\boxed{\omega = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right)}$$

Энергия, перенесенная за время Δt через площадь S

$$\Delta W = \omega \cdot \underbrace{S \cdot c\Delta t}_{V} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2\right) S \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \Delta t$$

Так как в плоской волне $\sqrt{\varepsilon_0}E_x = \sqrt{\mu_0}H_y$

$$\Delta W = \varepsilon_0 E_x^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} S\Delta t = E_x H_y S\Delta t$$

$$\boxed{S_z = \frac{\Delta W}{S\Delta t} = E_x H_y}$$

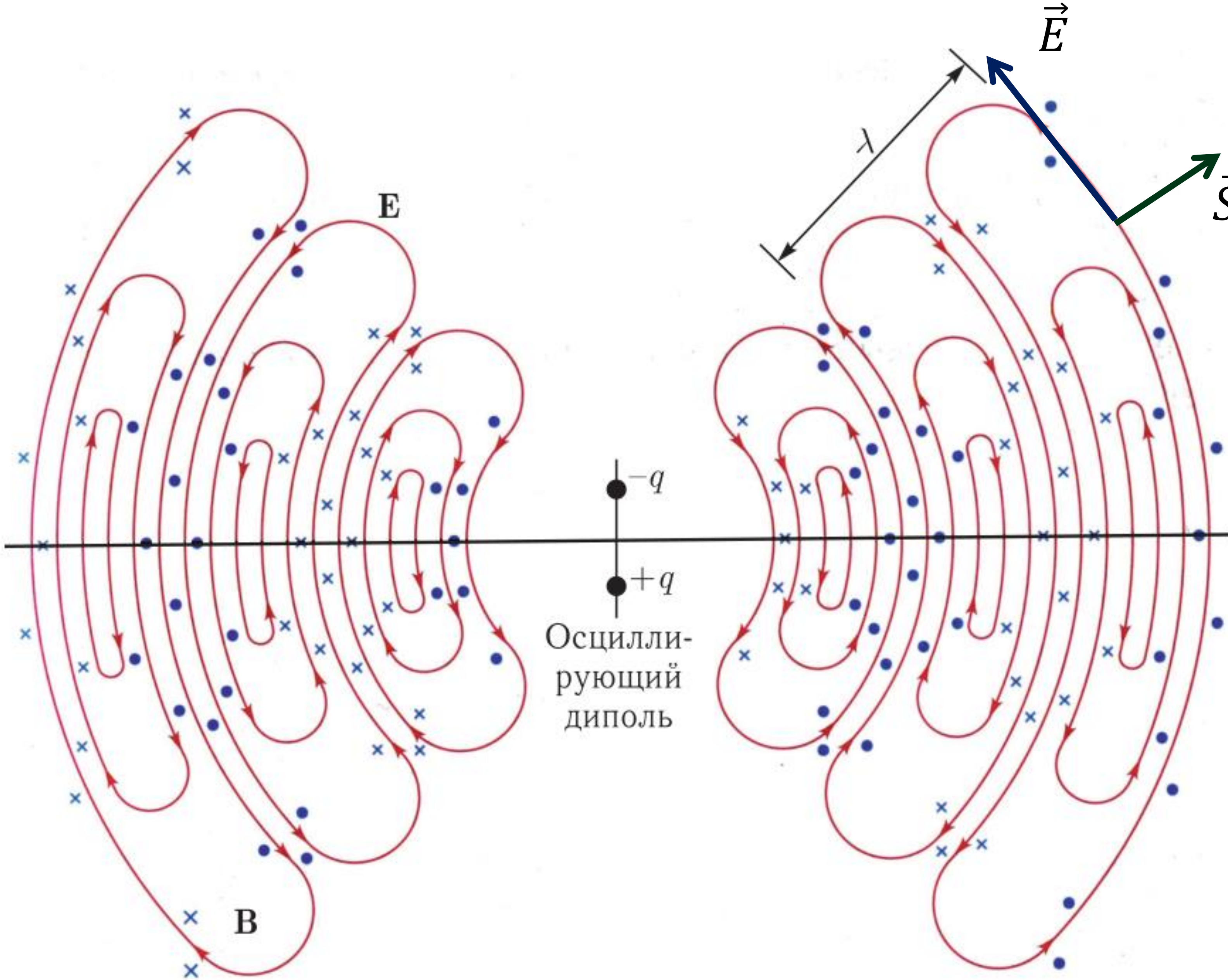
$$\boxed{\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]}$$

Вектор S направлен в сторону распространения электромагнитной волны, его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Если волна гармоническая

$$E_x = A\cos(\omega t - kz),\; H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_x = c\varepsilon_0 E_x$$

$$S_z = c\varepsilon_0 A^2 \cos^2(\omega t - kz)$$



$\vec{E}$
$\vec{S}$
λ
E
B
$-q$
$+q$
Осцилли-
рующий
диполь

Поток «пульсирует» со временем, поэтому на практике используется **усредненная за период величина плотности потока энергии** – **интенсивность волны**:

$$\boxed{I = \langle S_z \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S_z dt = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 A^2}$$

$$[I] = 1\ \text{Вт/м}^2 \quad \text{или } 1\ \text{Вт/см}^2$$

$$\boxed{I(1\ \text{Вт/м}^2) = 1{,}32\cdot 10^{-3}(A(\text{В/м}))^2}$$

Например, интенсивность света Солнца вблизи Земли (солнечная постоянная) I_C = 1 350 Вт/м^2, а амплитуда поля волны A ~ 10^3 В/м.

$$\boxed{I \approx A^2}$$