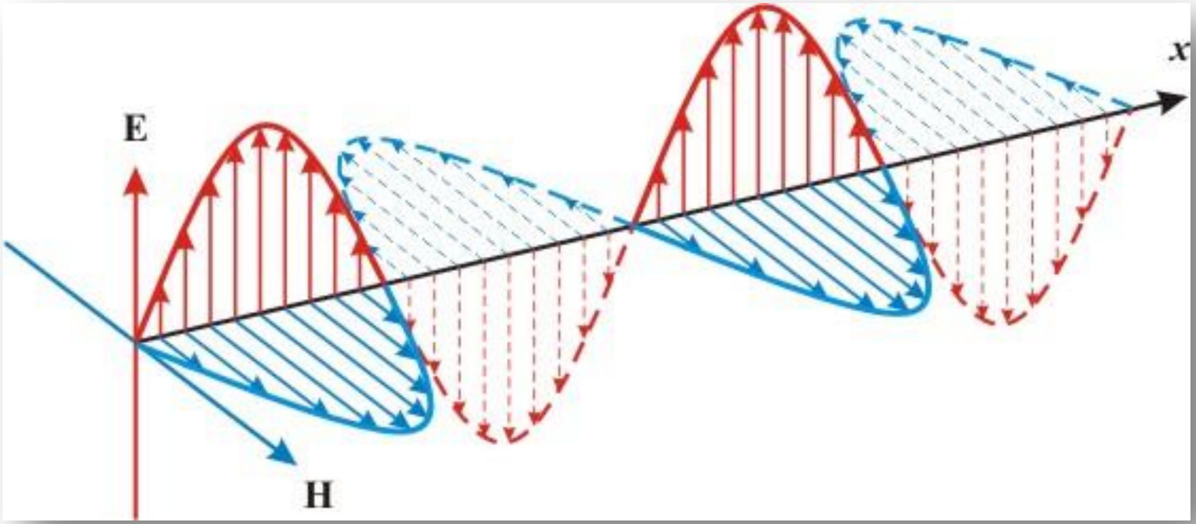
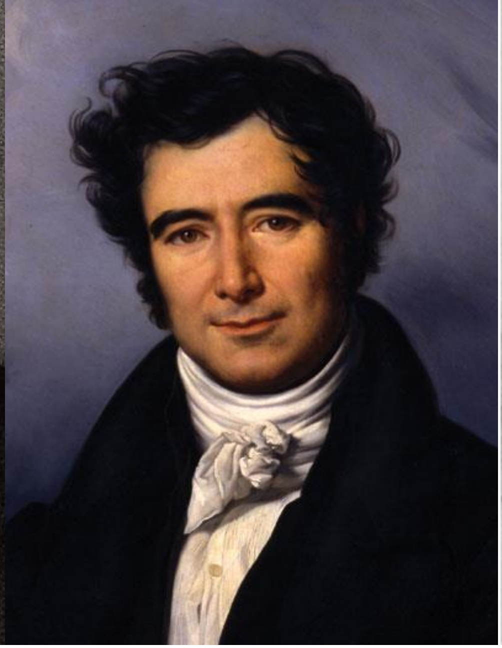
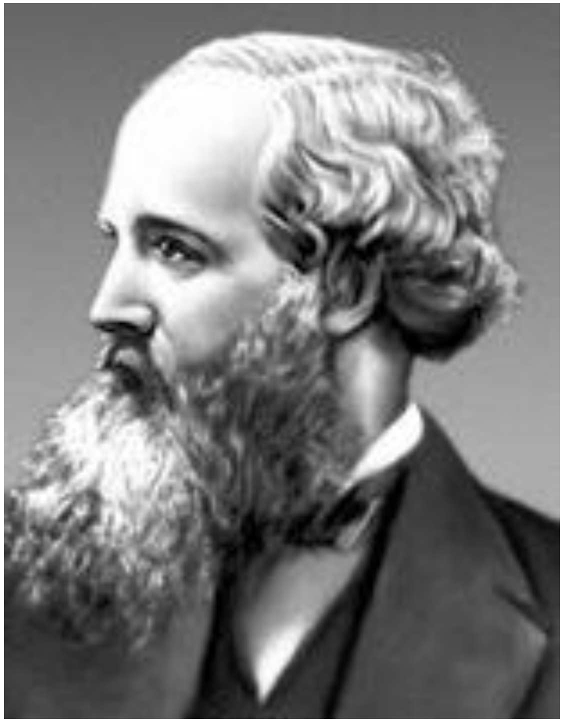
Сегодня: среда,
29 ноября 2023 г.

# Лекция 21.
# СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ



**Теория Джеймса Максвелла явилась обобщением законов полного тока, электромагнитной индукции Фарадея, теоремы Остроградского–Гаусса – основа классической электродинамики**

## Структурные уравнения Максвелла

| | | |
|---|---|---|
| $\oint\limits_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ | $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{dt}$ | **Изменяющееся магнитное поле приводит к возникновению вихревого электрического поля.** |
| $\oint\limits_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int\limits_s \left(\left(\vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right), d\vec{S}\right)$ | $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{dt}$ | **Вихревое магнитное поле создается полным током, т.е. токами проводимости и током смещения, вызванным изменяющимся электрическим полем.** |
| $\int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q$ | $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ | **Электростатическое поле создается неподвижными зарядами. Силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах.** |
| $\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0$ | $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ | **Магнитные заряды отсутствуют в природе.** |

## Материальные уравнения Максвелла

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \qquad \vec{j} = \gamma\vec{E}.$$

# Закон сохранения энергии электромагнитного поля

**Пусть в пространстве, заполненном средой, для которой справедливы материальные уравнения, находится ЭМ поле. Выделим мысленно область пространства V, воспользуемся законом Джоуля-Ленца и вторым структурным уравнением Максвелла**

$$1)\ \ q=\left(\vec{j},\vec{E}\right) \qquad\qquad 2)\ \ \mathrm{rot}\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{dt}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\int_V q\,dV=\int_V\left(\vec{j},\vec{E}\right)dV=\int_V\left(\mathrm{rot}\vec{H},\vec{E}\right)dV-\int_V\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\vec{E}\right)dV$$

$$\boxed{\mathrm{div}\left(\vec{E},\vec{H}\right)\equiv\left(\vec{H},\mathrm{div}\vec{E}\right)-\left(\vec{E},\mathrm{rot}\vec{H}\right)}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=-\int_V \mathrm{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right]dV=-\int_V\left(\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\vec{H}\right)+\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\vec{E}\right)\right)dV$$

Учтем $$\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{H}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2}, \quad \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{E}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{2}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{2} + \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2}}$$

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$\boxed{\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]}$$

Вектор плотности потока электромагнитного поля (вектор Умова-Пойнтинга)

**Используем теорему Остроградского-Гаусса**

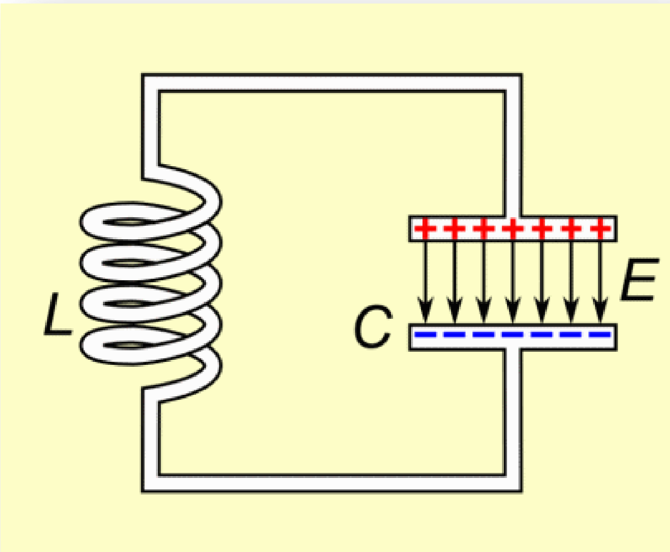
$$\boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\int_{\Sigma}\left(\vec{S}, d\vec{\sigma}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\int_{V}\omega dV}$$

**Количество выделяемого тепла равно убыли энергии ЭМ поля и ее притоку извне через поверхность Σ.**

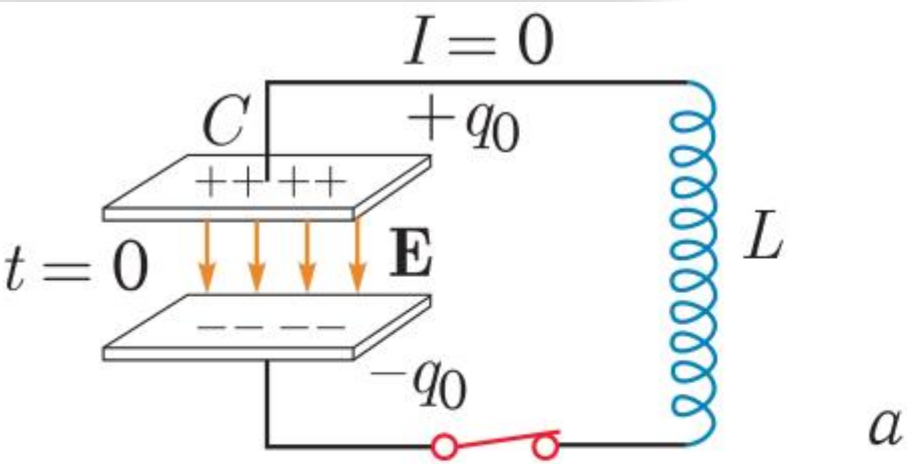
# Взаимосвязь электрических и магнитных явлений

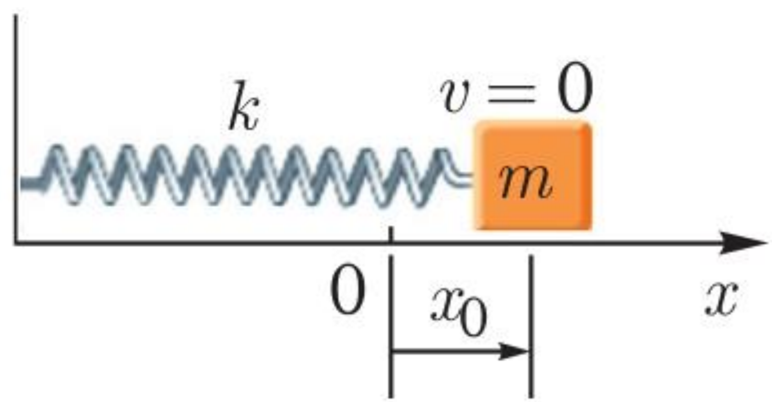
**ярко проявляется в колебаниях зарядов, токов, напряжений в электрических цепях. Взаимопревращение электрических и магнитных полей является причиной существования электромагнитных волн, которые могут распространяться как вдоль направляющих поверхностей, так и в свободном пространстве.**

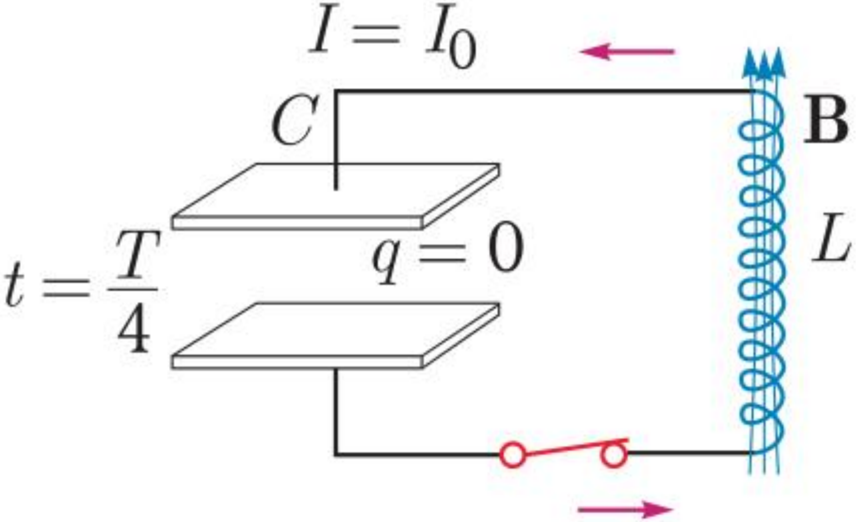
# Идеальный колебательный контур

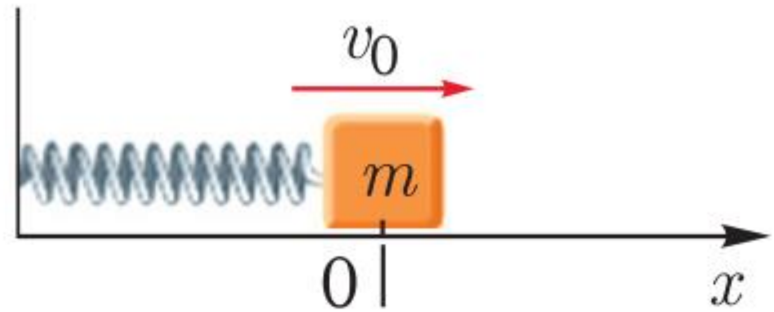



цепь, состоящая из **катушки и конденсатора**, соединенных последовательно, **омическое сопротивление пренебрежимо мало**.

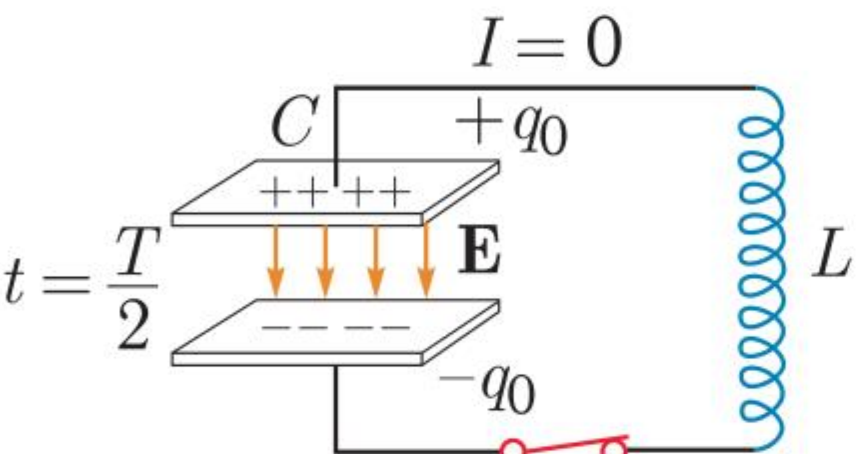


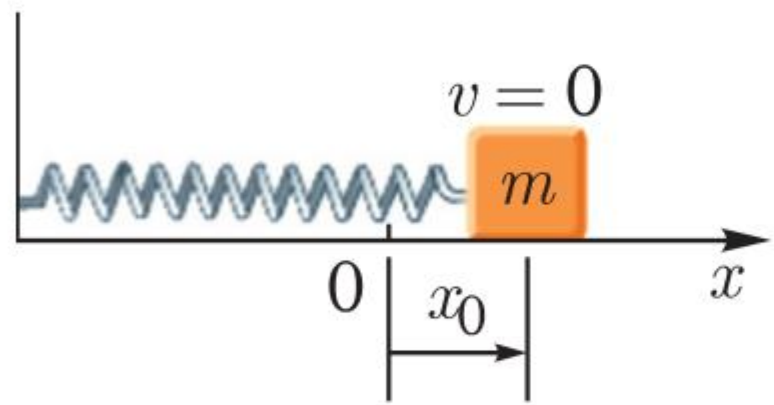




$I = I_0$
$C$
$\mathbf{B}$
$L$
$q = 0$
$t = \frac{T}{4}$


$v_0$
$m$
$0$
$x$

г

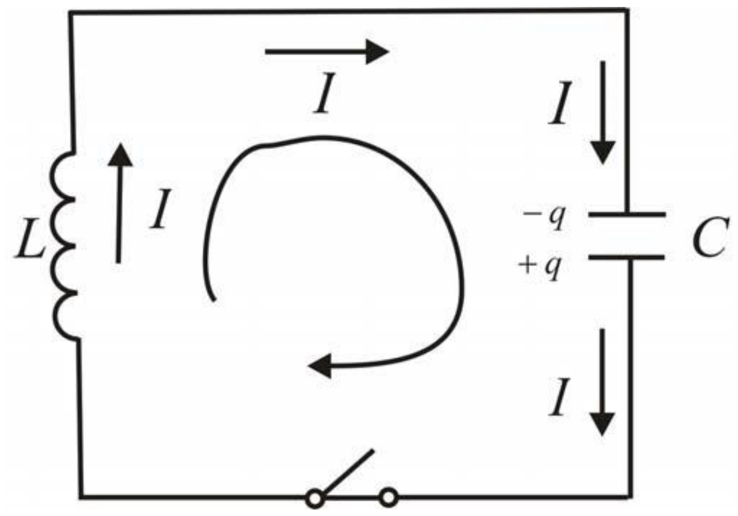

$I = 0$
$C$
$+q_0$
$\mathbf{E}$
$L$
$-q_0$
$t = \frac{T}{2}$


$v = 0$
$m$
$0$
$x_0$
$x$

д

# Свободные колебания в идеальном контуре

$$U_L(t)+U_C(t)=0$$




$$L\frac{dI}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

$$I=\frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q=0}$$

$$\boxed{\ddot{q}+\omega_0^2 q=0}$$

**уравнение незатухающих (собственных) гармонических колебаний**

$$\boxed{q(t)=q_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)}$$

$$\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

# Аналогия между колебаниями

| Электромагнитные колебания | | Механические колебания | |
|---|---|---|---|
| Заряд | $q$ | $x$ | Координата |
| Ток | $I = \frac{dq}{dt}$ | $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ | Скорость |
| Индуктивность | $L$ | $m$ | Масса |
| Обратная емкость | $\frac{1}{C}$ | $k$ | Жесткость |
| Энергия конденсатора | $\frac{q^2}{2C}$ | $\frac{kx^2}{2}$ | Энергия пружины |
| Энергия катушки | $\frac{LI^2}{2}$ | $\frac{m\upsilon^2}{2}$ | Кинетическая энергия |

# Энергия гармонических колебаний

$$\frac{dq}{dt} = I \cdot \Big| \, L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$L\frac{d}{dt}\frac{I^2}{2} + \frac{dq}{dt}\frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L} + \underbrace{\frac{q^2}{2C}}_{W_C}\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L} + \underbrace{\frac{q^2}{2C}}_{W_C} = \mathrm{const}$$

$$\boxed{q = q_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)}$$

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2} q_0^2 \omega_0^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) =$$

$$= \frac{q_0^2}{2C}\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left[2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right]\right)$$

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) =$$

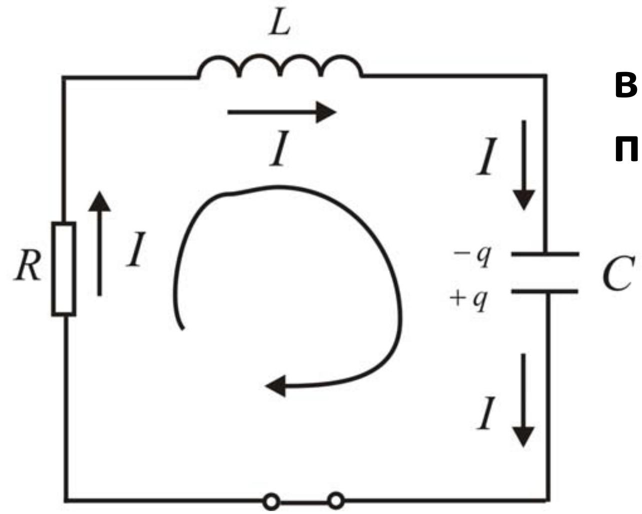
$$= \frac{q_0^2}{2C}\frac{1}{2}\left(1 + \cos\left[2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right]\right)$$

$$\left\langle W_{L,C} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} W_{L,C}\, dt = \frac{q_0^2}{4C}$$

$$\Rightarrow \left\langle W_L \right\rangle = \left\langle W_C \right\rangle$$

# Реальный контур

**обладает омическим сопротивлением R, обусловленным сопротивлением катушки и утечкой конденсатора**




**в правило Кирхгофа необходимо добавить падение напряжения на сопротивлении**

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\beta}\frac{dq}{dt}+\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}q=0$$

$$\boxed{\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

$$\boxed{\beta=\frac{R}{2L}}$$

Показатель затухания

$$\boxed{\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2q=0}$$

$$\lambda=\beta T$$

Лог. Декремент

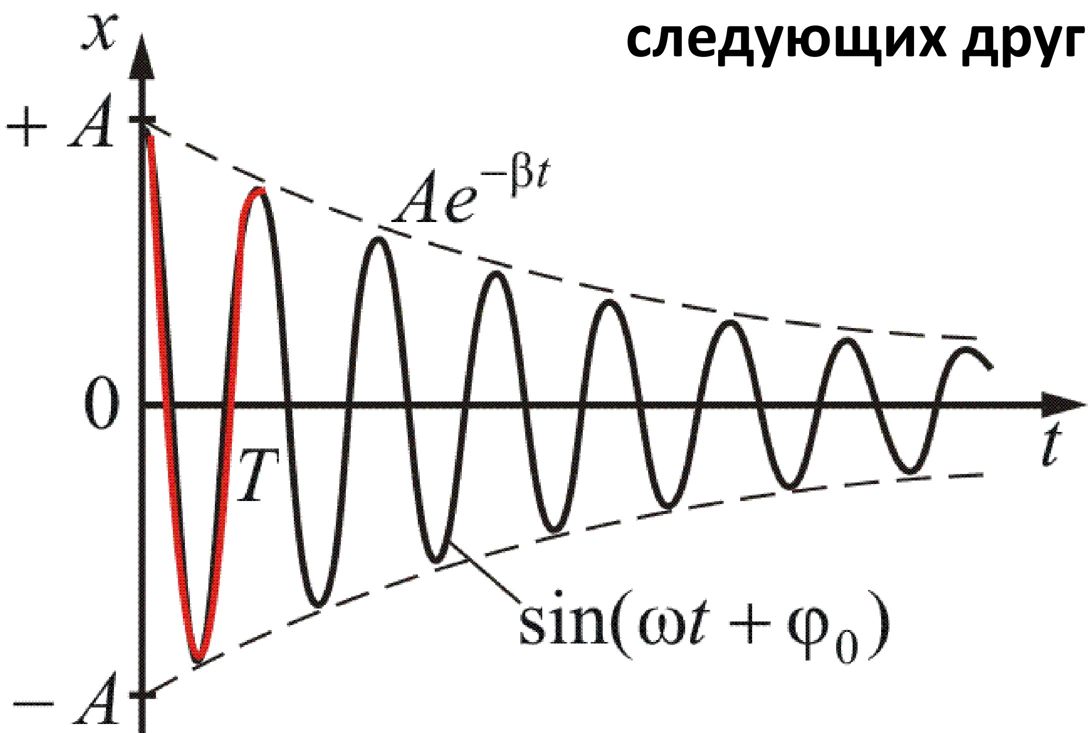
$$Q=\frac{\pi}{\lambda}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

добротность

$$\boxed{q=a_0e^{-\beta t}\cos(\omega_1t+\varphi_0)}$$

# Характеристики затухания

**1. Логарифмический декремент затухания -** **натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период Т:**

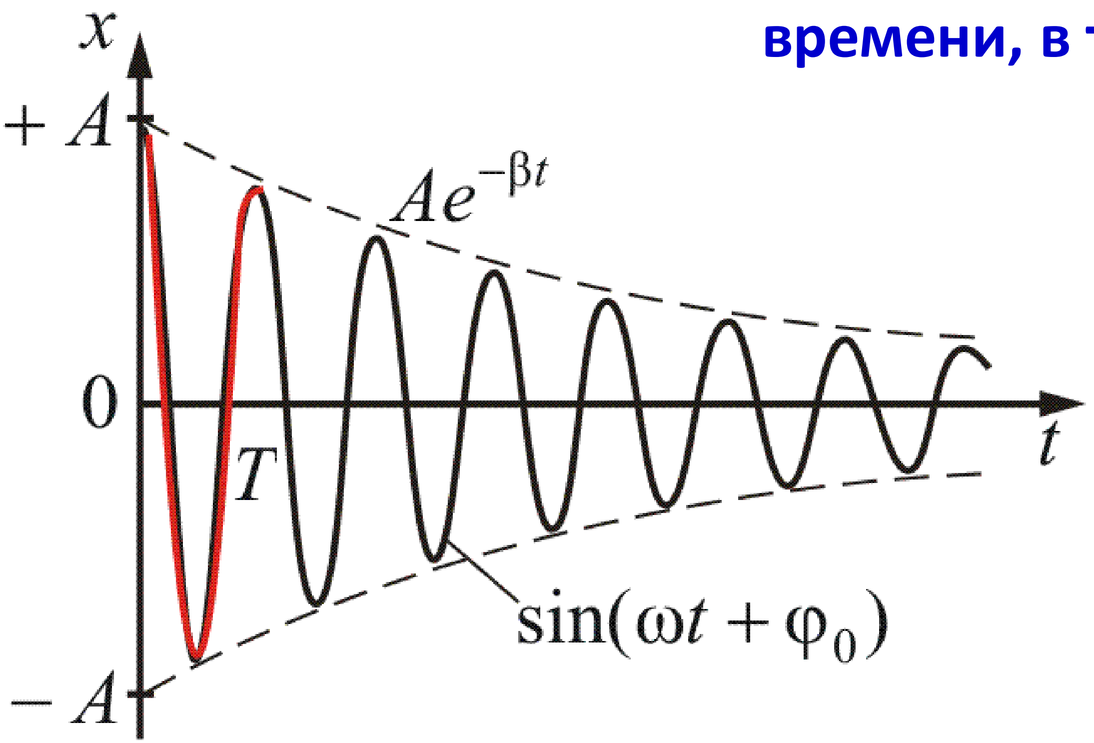



$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$

$$\boxed{\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T}$$

## 2. Показатель, затухания

**Физ. смысл:** физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в е раз.




$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1$$

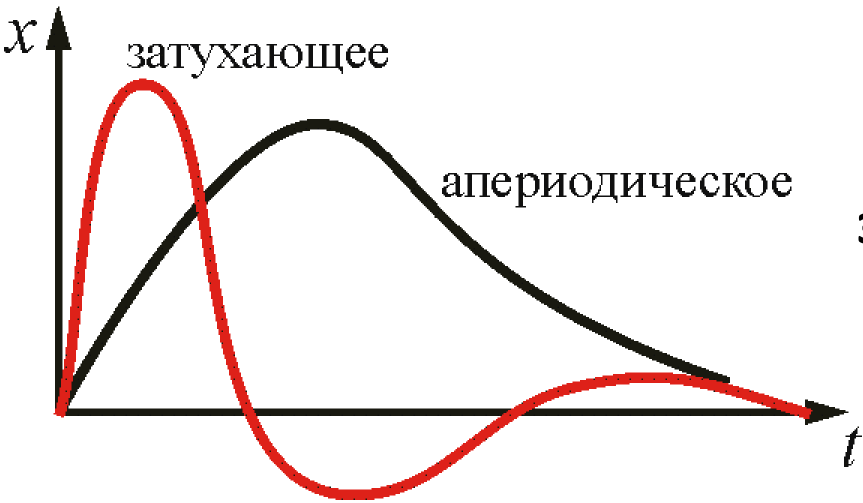
$$\rightarrow \quad \beta\tau = 1$$

$$\rightarrow \beta = \frac{1}{\tau}$$

$$\boxed{\beta = \frac{R}{2L}}$$

$$\boxed{\lambda = \beta T = \frac{\tau}{\tau N} = \frac{1}{N}}$$

- **физическая величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в е раз.**

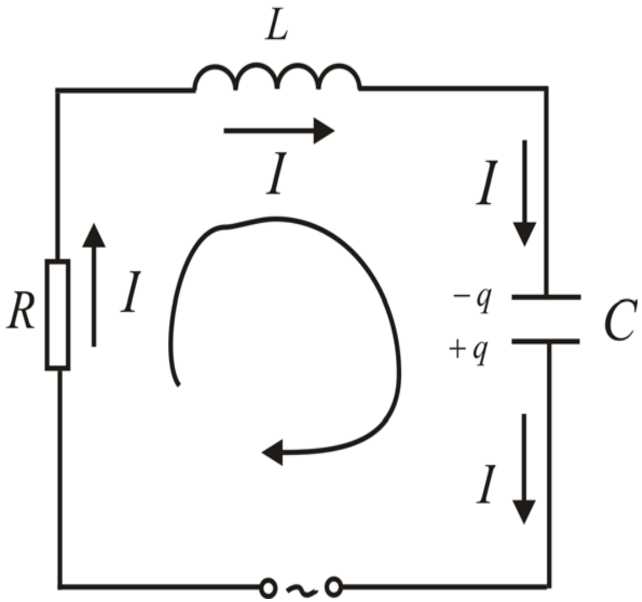



**3. Добро́тность — параметр колебательной системы характеризующий, во сколько раз запасы энергии в системе больше, чем потери энергии за один период колебаний**

**Большим значениям добротности соответствует малое затухание.**

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda}}$$

# Вынужденные колебания в контуре




$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\beta}\frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}q = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{L}}_{x_0}\sin \omega t$$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = x_0 \sin \omega t$$

$$q = q_{общ.одн} + q_{частн.неодн}$$

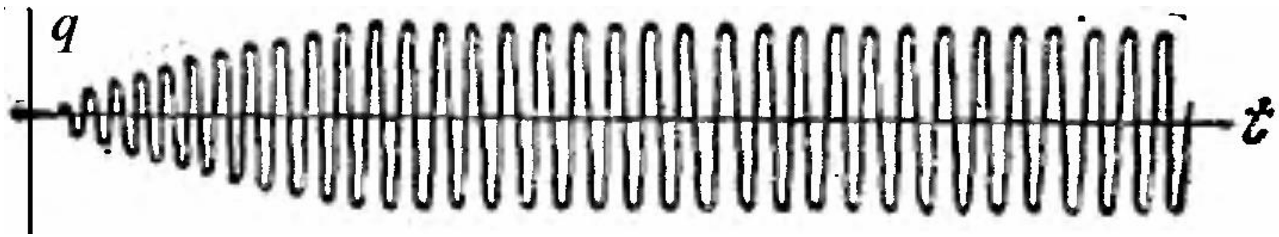
$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$q_{общ.одн} = q_0 e^{-\beta t}\sin\left(\omega_1 t + \varphi_0\right)$$

**Общее решение – суперпозиция собственных затухающих колебаний на $\omega_1$ и незатухающих вынужденных на $\omega$**

$$\boxed{q = a_0 e^{-\beta t}\sin\left(\omega_1 t + \varphi_0\right) + q_0 \sin\left(\omega t + \varphi_q\right)}$$

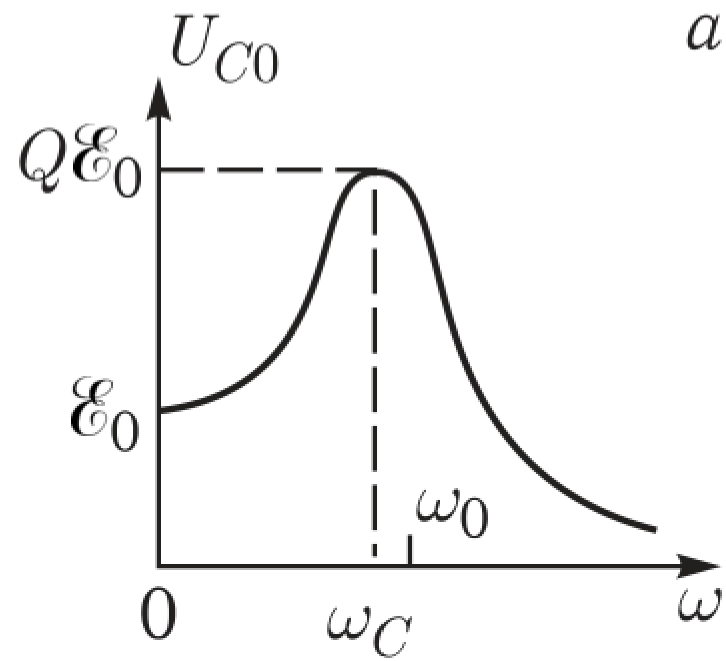
**Колебания установятся по истечении времени**




$$\boxed{t \geq \tau = \frac{1}{\beta}}$$

**В установившемся режиме амплитуда колебания напряжения на емкости зависит от частоты внешней ЭДС**

$$U_{C0} = \frac{\varepsilon_0}{LC\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$




**Резонанс напряжения на емкости происходит на частоте**

$$\boxed{\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0}$$

**Вблизи этой частоты можно упростить**

$$U_{C0} = \frac{\varepsilon_0}{LC\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 = (\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 - \omega)^2 \approx (\omega_0 - \omega)^2 4\omega_0^2$$

$$4\beta^2\omega^2 \approx 4\beta^2\omega_0^2$$

$$U_{C0} = Q\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{\beta^2} + 1}}$$

**При резонансе амплитуда напряжения на конденсаторе в Q раз превышает $\varepsilon_0$.**

**Ширина резонансной кривой определяется из условия убывания вдвое энергии конденсатора, пропорциональной квадрату напряжения на нем:**

$$\frac{1}{\sqrt{(\Delta\omega/2\beta)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,07$$

**ширина резонансной кривой или полоса пропускания контура**

$$\boxed{\Delta\omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}}$$

# Амплитуда напряжения на резисторе

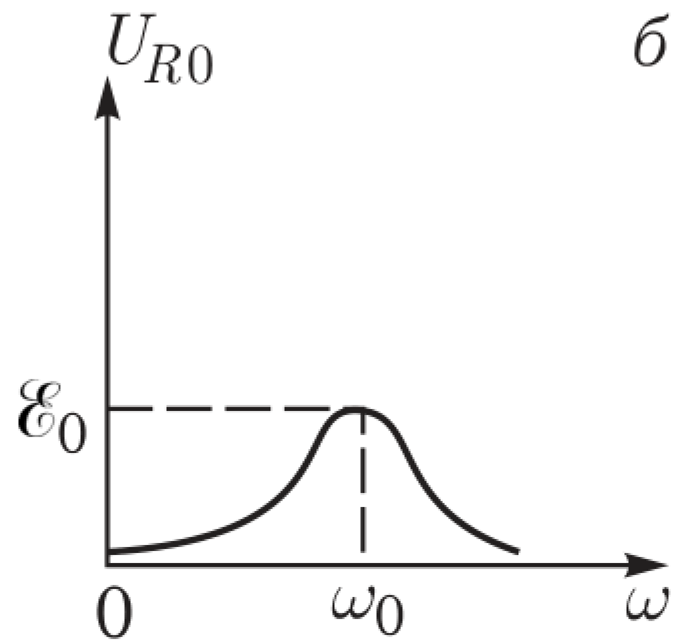
**зависит от частоты, как и амплитуда скорости**

$$U_{R0} = I_0 R = q_0 \omega R$$

**При $\omega = \omega_0$**

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow R\frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

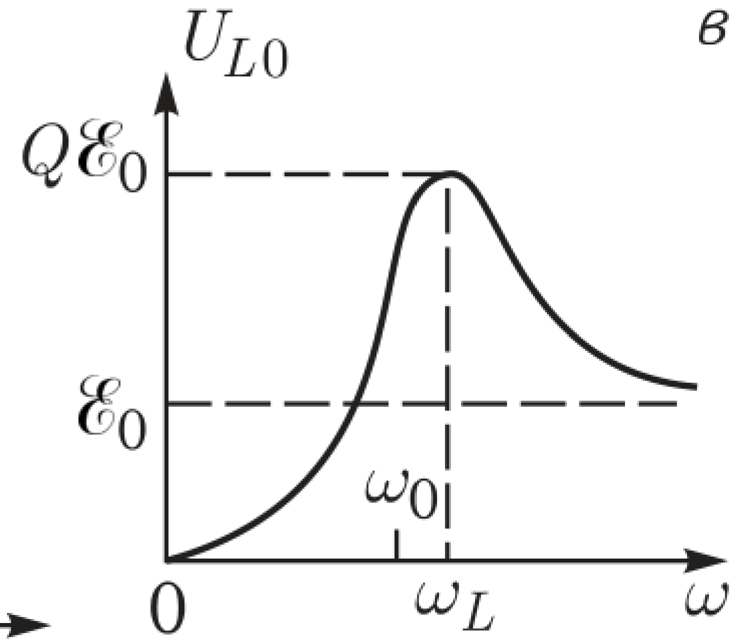



**На резонансной частоте сумма падений напряжений на емкости и индуктивности равна нулю, а напряжение на резисторе равно величине внешней ЭДС.**

# Амплитуда напряжения на индуктивности

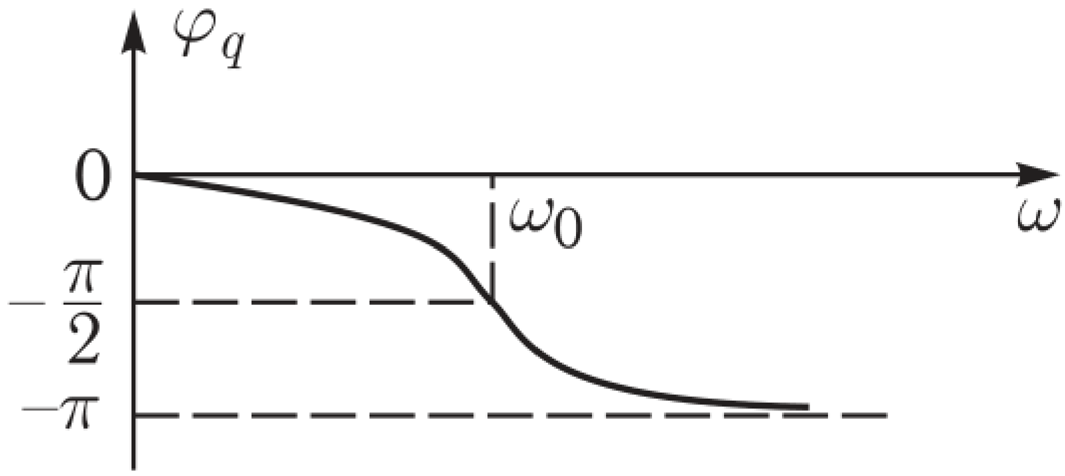
**зависит от частоты, как и амплитуда ускорения**

$$U_{L0} = I_0 \omega L = q_0 \omega^2 L$$




**При резонансе**

$$U_{L0\,рез} = Q\varepsilon_0$$

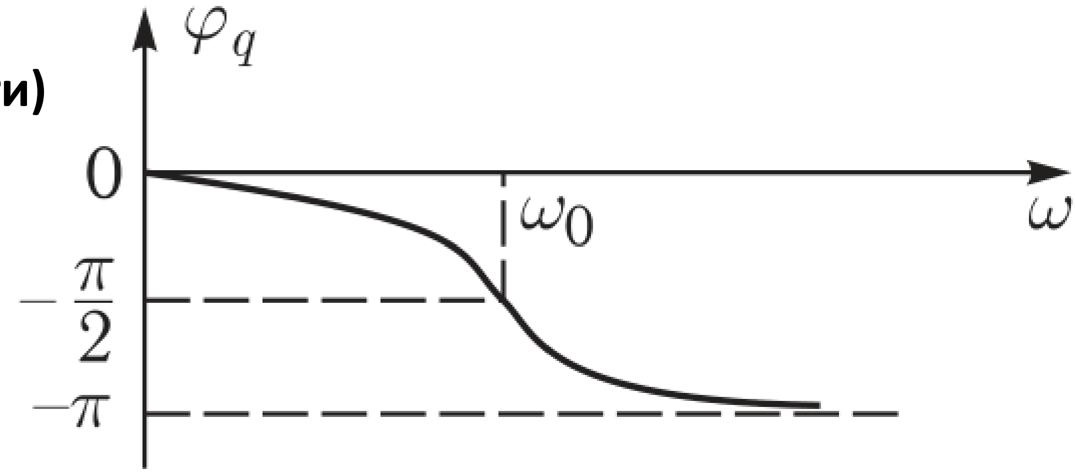



**Фазовая характеристика**

$$tg\varphi_q = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

При резонансе колебания заряда (напряжение на емкости) отстают по фазе от колебаний внешней ЭДС на π/2:

$$\varphi_q = \varphi_C = -\frac{\pi}{2}$$




А колебания напряжения на индуктивности опережают колебания ЭДС на π/2:

$$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$$

Возрастание напряжения на емкости и индуктивности до

$$U_{C0} = U_{L0} = Q\varepsilon_0$$

носит название резонанс напряжений. Напряжение на резисторе (и ток в цепи) при резонансе колеблется в фазе с внешней ЭДС:

$$\varphi_R = \varphi_I = 0$$