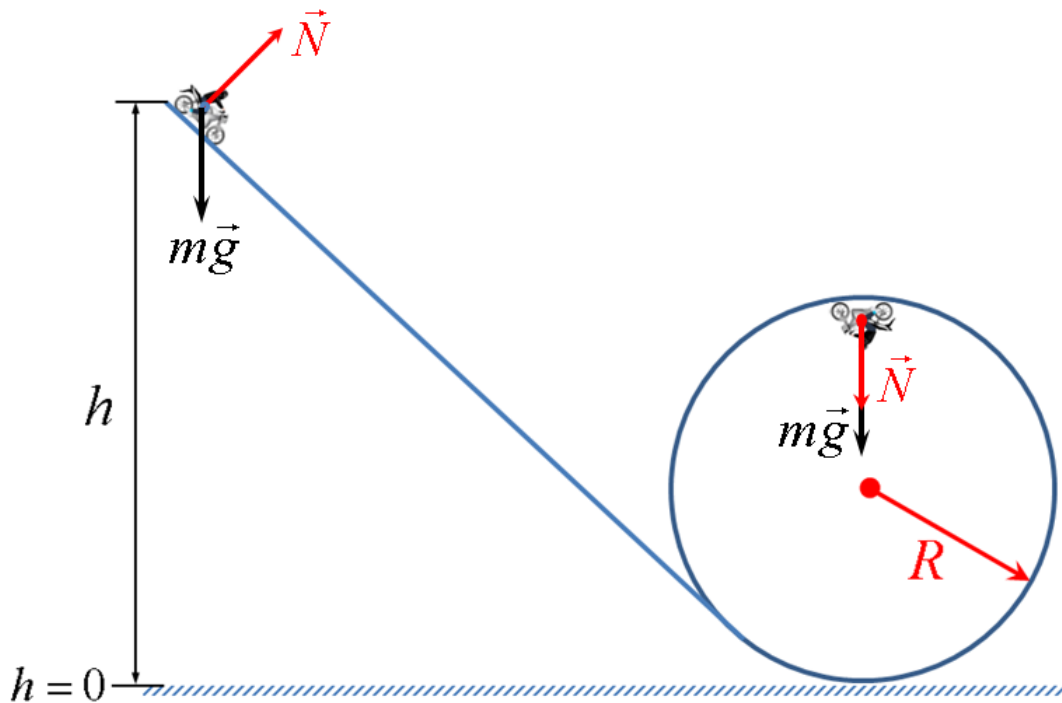


Сегодня: четверг, 16  
марта 2023 г.

Общая физика. Часть 1

## Лекция 9. Законы сохранения.



- 1. Закон сохранения энергии
- 2. Работа

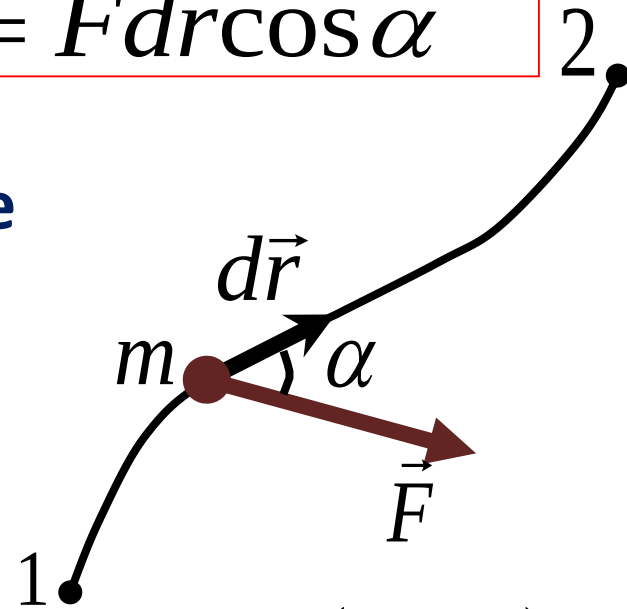
# Работа силы

**Элементарная работа** - действие силы на элементарном перемещении  $d\vec{r}$

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = F dr \cos \alpha$$

Работа может принимать как положительное, так и отрицательное значение, зависит от вида траектории движения частицы

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r})$$



**1 Джоуль** – работа, совершаемая силой 1Н на пути 1 м, при условии, что направления силы и перемещения совпадают.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

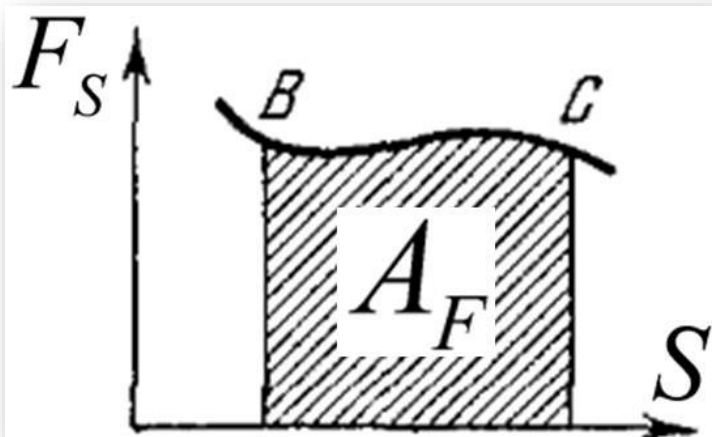
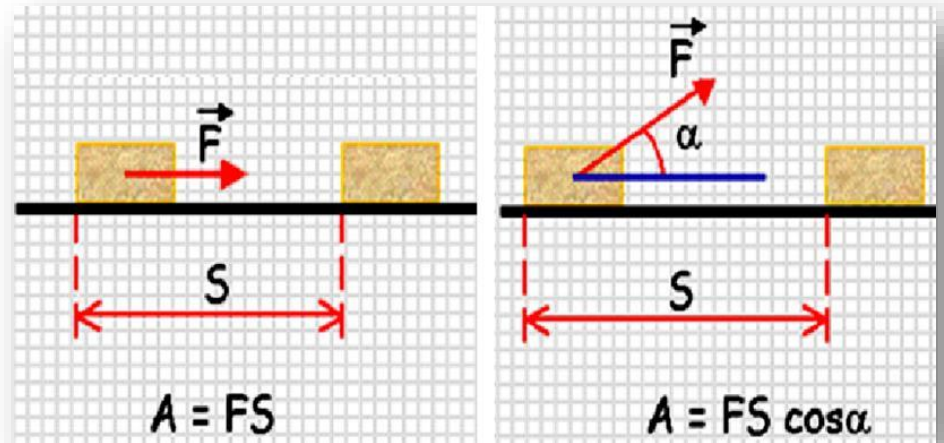
$$A = A_1 + A_2 + \dots$$

$$A_1 = \int (\vec{F}_1, d\vec{r}),$$

$$A_2 = \int (\vec{F}_2, d\vec{r}), \dots$$

# Геометрический смысл механической работы

$$A = FS \cos \alpha$$



**Механическая работа** =  
площадь фигуры под кривой  
графика зависимости силы  
 $F(S)$ , действующей на тело, от  
пройденного телом пути  $S$ .

# Механическая мощность силы

= характеристика быстроты выполнения работы

**Средняя мощность силы** = скалярная величина, равная отношению работы силы  $A$  за какой-то промежуток времени  $t$ , к величине этого промежутка времени:

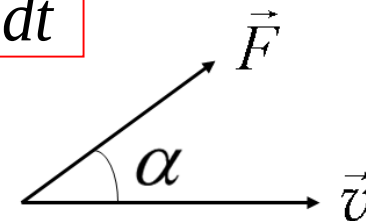
$$\langle N \rangle = \frac{A}{t} = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \text{ Вт} \right]$$



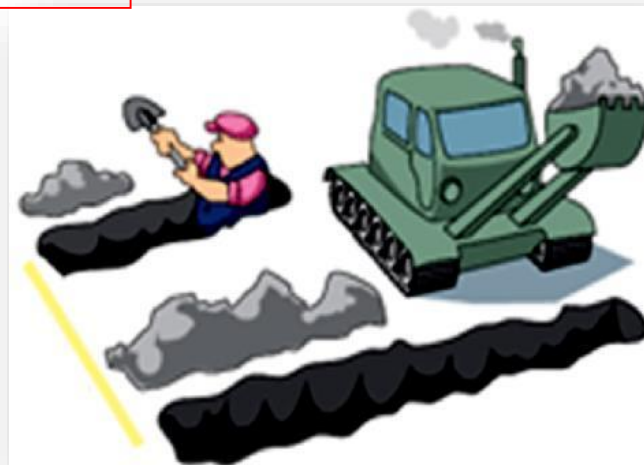
**Мгновенная механическая мощность** силы = скалярная величина, равная первой производной работы силы по времени:

$$N = \frac{dA}{dt}$$

$$N = \left( \vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = (\vec{F}, \vec{v})$$



$$N = Fv \cos \alpha$$



# Коэффициент полезного действия

= характеристика экономичности механизмов или процессов

= скалярная величина, равная отношению полезной работы механизма к его затраченной работе

$$\eta = \frac{A_{use}}{A_{spent}}$$

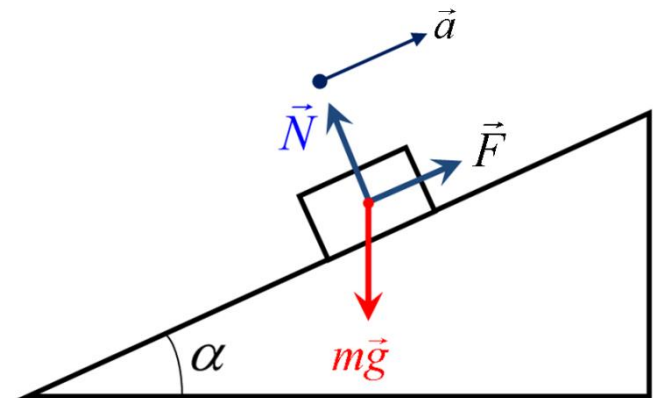
КПД, величина безразмерная.

КПД не может быть больше единицы или больше 100 %.

**Полезная работа** = минимальная работа, которую необходимо совершить, чтобы выполнить необходимое задание. Будет минимальной, если тело перемещать равномерно прямолинейно в отсутствии сил трения и сопротивления.

**Затраченная работа** = это работа, которую на самом деле приходится совершить, чтобы выполнить данное задание.

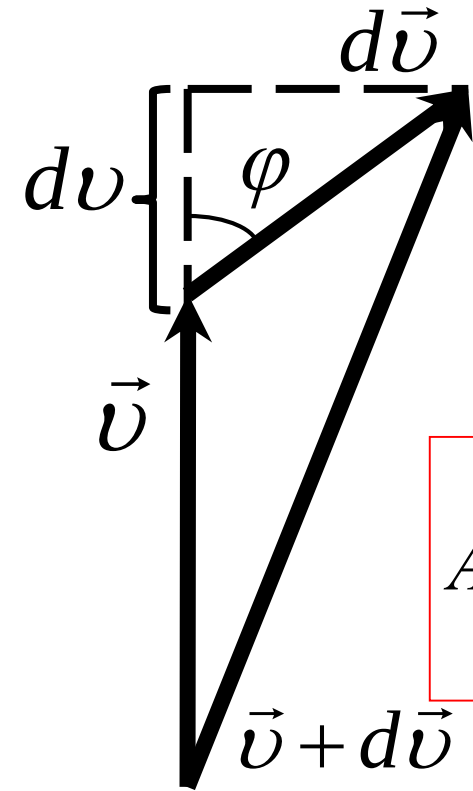
$$A_{use} = mgh, \quad A_{spent} = FS \cos \alpha$$



# Кинетическая энергия

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = \left( m \frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r} \right) = (m\vec{v}, d\vec{v}) = m \frac{d(v^2)}{2} = d \left( \frac{mv^2}{2} \right)$$

$$(\vec{v}, d\vec{v}) = |\vec{v}| \cdot |d\vec{v}| \cos \varphi = v dv$$



**Кинетическая энергия:**

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_1^2 d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1$$

$$(\vec{v}, d\vec{v}) = \frac{d(v^2)}{2}$$

**Изменение кинетической энергии тела  
равно сумме работ всех сил,  
действующих на это тело**

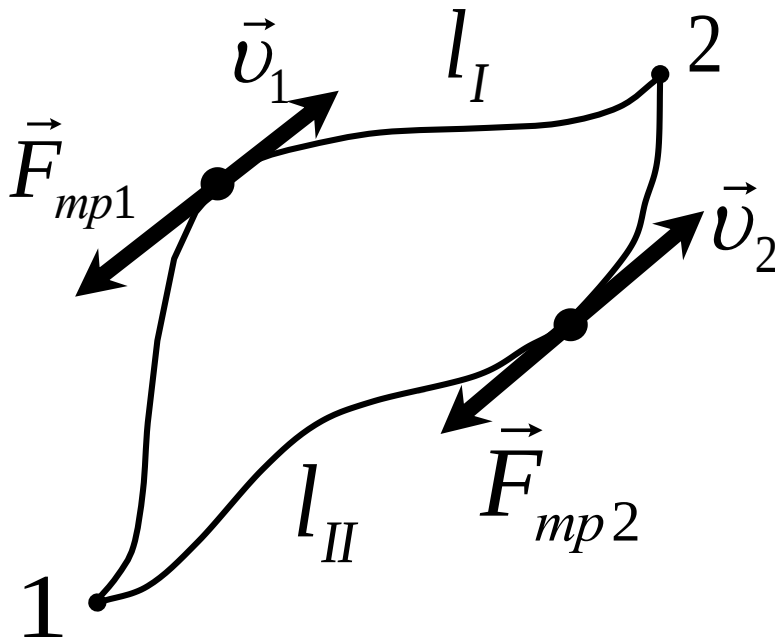
# Консервативные и неконсервативные силы

**Консервативная сила** = если работа силы определяется только положением точек 1 и 2 и не зависит от формы пути,

**Неконсервативная сила** = если работа силы зависит от формы траектории движения

Примеры неконсервативных сил:

- сила тяги ракеты,
- сила, действующая на заряженную частицу в вихревом ЭП,
- сила трения – диссипативная  $\Sigma A = 0$



$$A_{mp} = \int_1^2 (\vec{F}_{mp}, d\vec{r}) = -F_{mp} l < 0$$

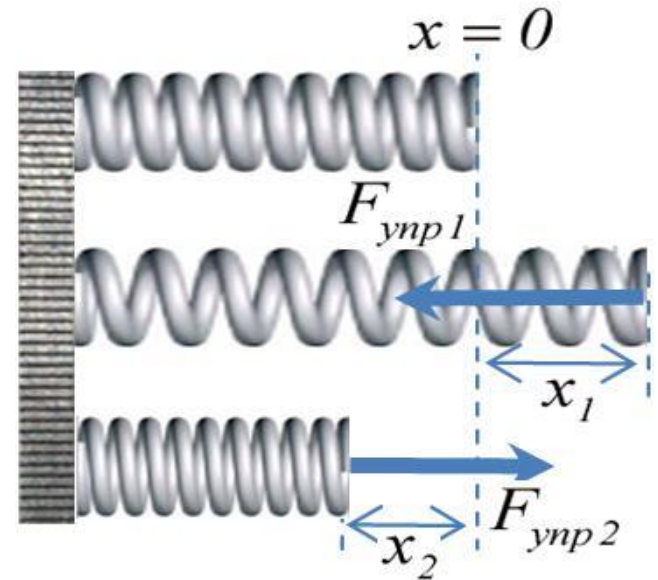
$$|A_{mpI}| > |A_{mpII}|, \text{ т.к. } l_I > l_{II}$$

# Примеры консервативных сил

Работа упругой силы

$$F = -kx$$

$$A_{12} = \int_1^2 (-kx) dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

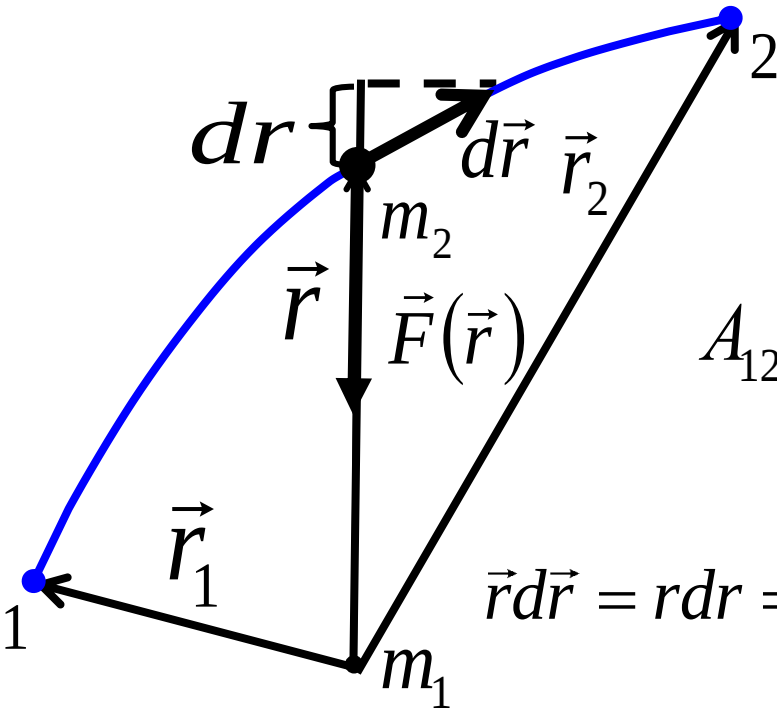


Работа гравитационной силы

$$A_{12} = \int_1^2 \left( -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\vec{r} = -Gm_1m_2 \int_1^2 \frac{dr}{r^2}$$

$$\vec{r} d\vec{r} = r dr = \frac{d(r^2)}{2}$$

$$A_{12} = \left( -G \frac{m_1m_2}{r_1} \right) - \left( -G \frac{m_1m_2}{r_2} \right)$$



# Примеры консервативных сил

## Работа силы тяжести

При падении с  
небольшой высоты

$$\begin{aligned} r_1 &= R_3 + h, \\ r_2 &= R_3, \\ m_1 &= M_3 \\ m_2 &= m \end{aligned}$$

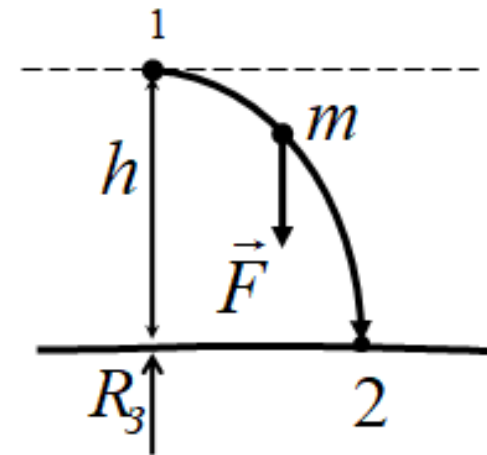
$$A_{12} = \left( -G \frac{M_3 m}{R_3 + h} \right) - \left( -G \frac{M_3 m}{R_3} \right) = -GM_3 m \left( \frac{1}{R_3 + h} - \frac{1}{R_3} \right)$$

$$A_{12} = -GM_3 m \frac{R_3 - (R_3 + h)}{R_3 (R_3 + h)} = \{ h \ll R_3 \} \approx GM_3 m \frac{h}{R_3^2}$$

Используем обозначение  $g = \frac{GM_3}{R_3^2}$

$$A_{12} = mgh$$

$$g = \frac{GM_3}{(R_3 + h)^2}$$



# Определение консервативных сил

1. Сила является **консервативной**, если ее работа не зависит от формы пути при перемещении частицы из одной точки пространства в другую и определяется только положением этих точек;

2. Сила является **консервативной**, если ее работа на любом замкнутом пути равна нулю.

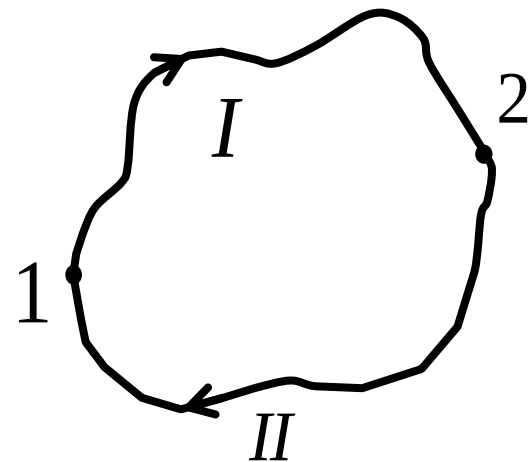
Доказательство:  $A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II}$

$$(A_{21})_{II} = -(A_{12})_{II}$$

$$A = (A_{12})_I - (A_{12})_{II}$$

$$\oint dA = 0$$

Т.к. при изменении направления движения направление перемещения  $dr$  изменяется на противоположное



# Замечание

Силы в направлении  $\perp$ -ом скорости движения МТ

- Магнитная составляющая силы Лоренца;
- Сила Кориолиса в НИСО.

Работа этих сил при перемещении по замкнутому контуру всегда равна нулю.

**Но эти силы не являются консервативными**, т.к.

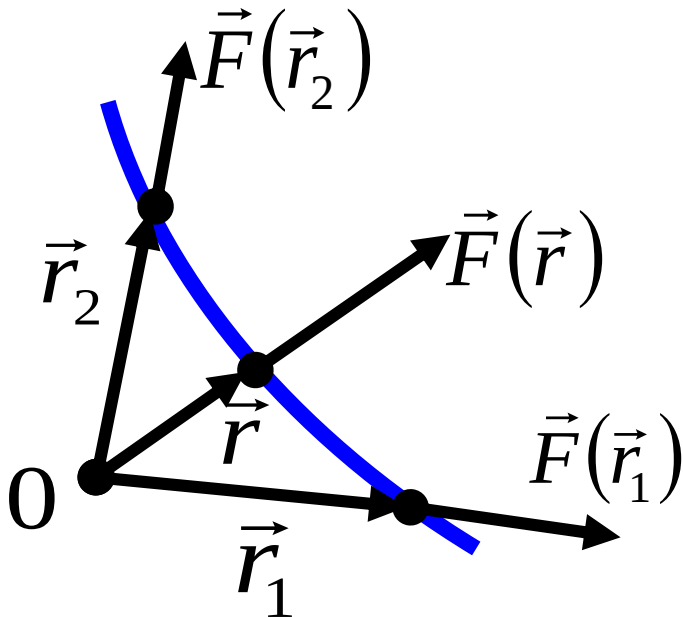
$\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ , то  $A = 0$  при любом перемещении,  
независимо от начальной и конечной точек.

# Поле сил

= это область пространства, в каждой точке которой на помещенную туда частицу действует сила.

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

- ✓ Модуль силы зависит только от расстояния между частицей и силовым центром.
- ✓ Сила направлена вдоль прямой, на которой расположены частица и силовой центр:



1. **Все центральные силы консервативны.**
2. **Поле центральных сил стационарно:** не зависит от времени ни по величине, ни по направлению = **необходимое условие консервативности сил.**

# Потенциальная энергия

**= скалярная функция своих координат.**

Изменение  $dU$  частицы = взятая с обратным знаком работа  $dA$  действующих на частицу консервативных сил при ее перемещении из одной точки поля в другую:

$$dU = -dA$$

$$A = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2$$

**Работа сил поля на пути 1→2 равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле.**

Частице, находящейся в произвольной точке поля, можно приписать любое наперед заданное значение потенциальной энергии.

**Нормировка:** чтобы определить  $U$  частицы в произвольной точке поля, необходимо задать значение  $U$  в какой-либо одной точке.

Для упругой силы:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

Нормировка  $U(0) = 0$ .

В однородном поле тяжести:

$$U(h) = mgh$$

Нормировка  $U(0) = 0$ .

В гравитационном поле:

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Нормировка  $U(\infty) = 0$ .

В кулоновском поле:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

Нормировка  $U(\infty) = 0$ .

# Связь консервативной силы с её потенциальной энергией

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = -dU$$

$$(F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k})(dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) = -dU(r)$$

$$(F_x \vec{i}, dx \vec{i}) = F_x dx (\vec{i}, \vec{i}) = F_x dx |\vec{i}| |\vec{i}| \cos(\vec{i}, \vec{i}) = F_x dx$$

$$(F_x \vec{i}, dy \vec{j}) = F_x dy (\vec{i}, \vec{j}) = F_x dy |\vec{i}| |\vec{j}| \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 0$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

# Связь консервативной силы с её потенциальной энергией

$$\vec{F} = - \left( \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}}_{\text{grad}U = \nabla U} \right) = -\text{grad}U$$

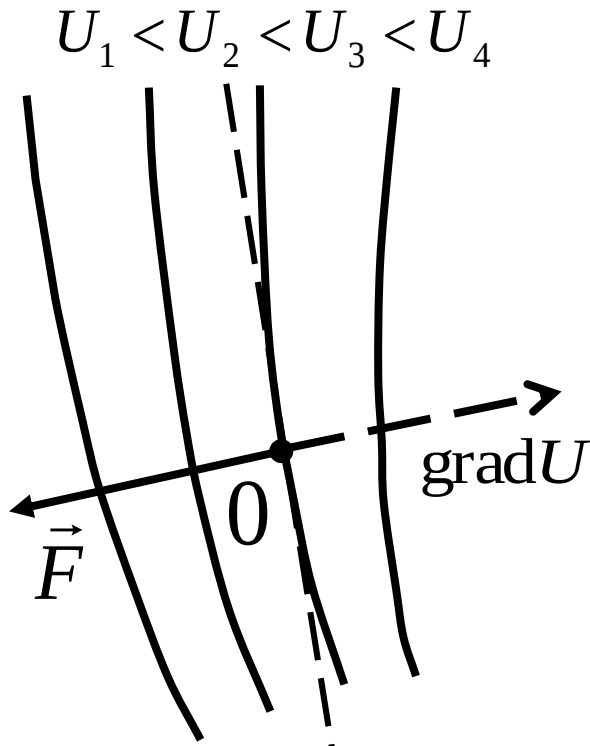
**Градиент скалярной функции**

$$\nabla = (\text{набла}) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\nabla U$$

# Эквипотенциальная поверхность

= во всех точках поверхности  $U$  имеет  
одно и то же значение.



Вектор  $\text{grad } U$  направлен  
противоположно  $F$  в сторону  
«наиболее быстрого» возрастания  $U$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\nabla U$$

$U(x, y, z, t) = f(t)$  – поле  
нестационарное.

$U(x, y, z) = U$  – поле стационарное.

В стационарном поле силы  
консервативные и

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

# Полная механическая энергия

В некотором поле консервативных сил, то частицу действует сила  $F$  со стороны этого поля.

Силы (консервативные или неконсервативные), не имеющие отношения к данному полю называются сторонними  $F_{\text{стор}}$ .

Полная работы всех сил

$$A_{\text{полн}} = A + A_{\text{стор}}$$

$$A = U_1 - U_2$$

Приращение кинетической энергии

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{\text{стор}}$$

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = A_{\text{стор}}$$

# Полная механическая энергия частицы

$$E = T + U$$

$$E_2 - E_1 = A_{\text{стор}}$$

Приращение полной механической энергии равно работе всех сторонних сил, действующих на частицу



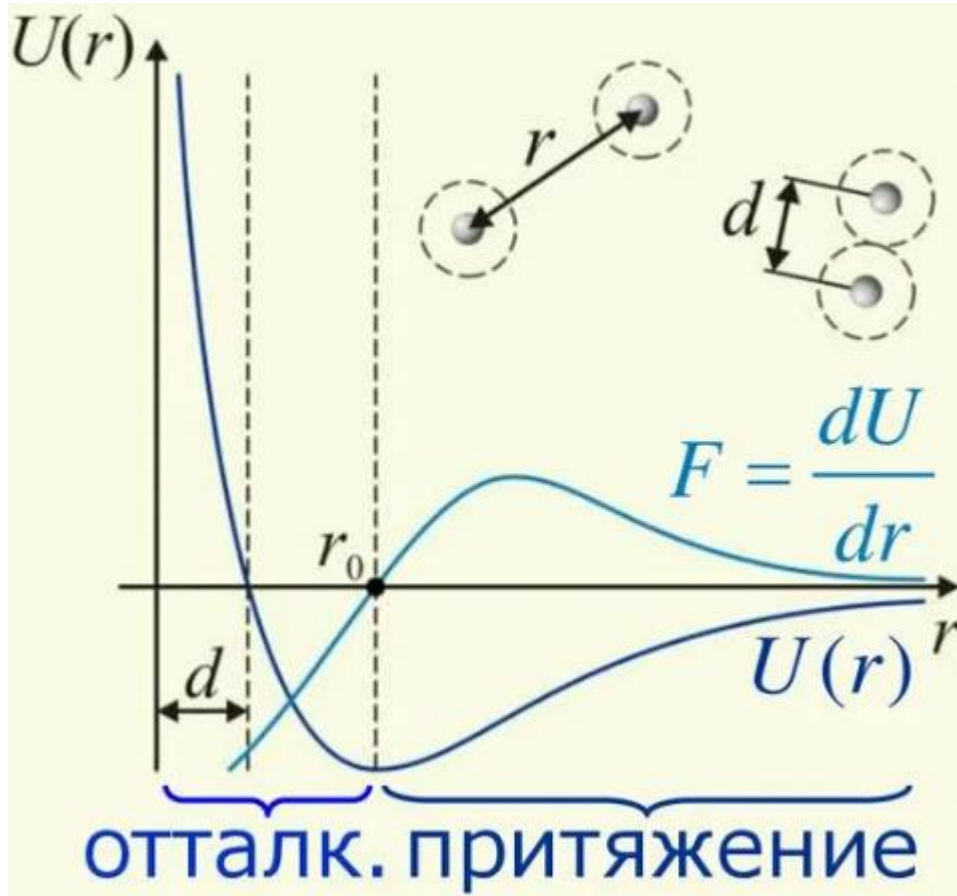
Если  $A_{\text{стор}} = 0$ , то

$$E = T + U = \text{const}$$

**Закон сохранения механической энергии частицы:**

Если сторонние силы не совершают работы или отсутствуют, то полная механическая энергия в поле консервативных сил остается неизменной.

# Пример: взаимодействие двух молекул газа

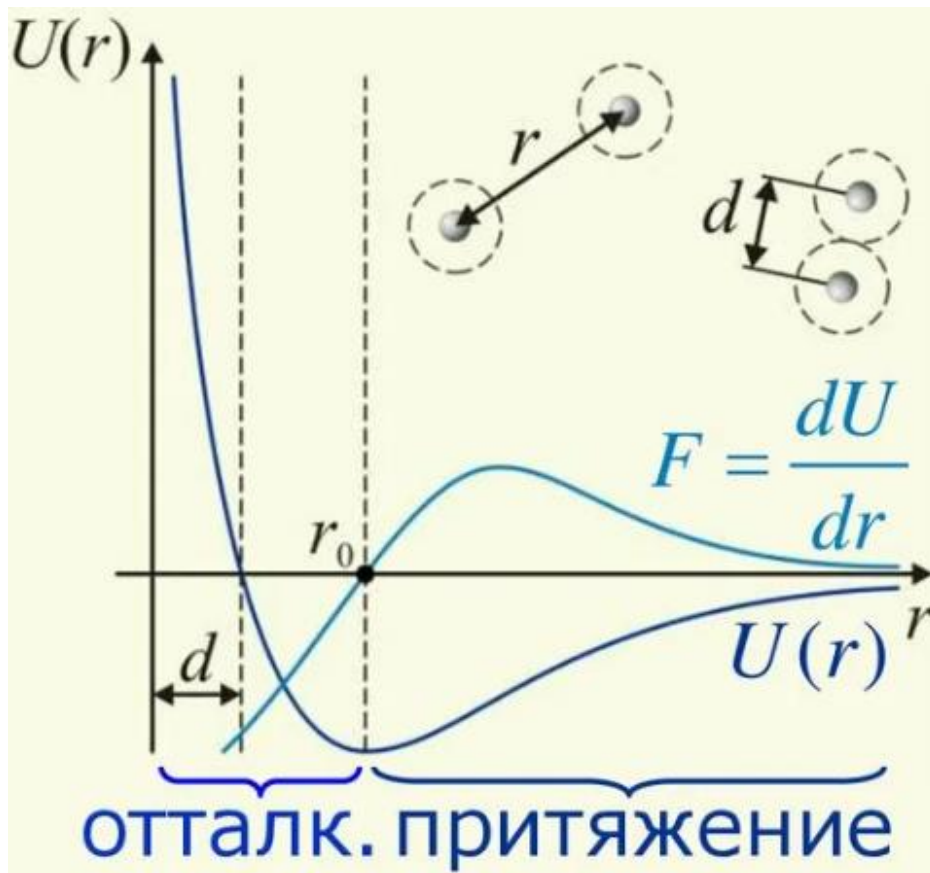


Потенциальная энергия другой описывается потенциалом Леннарда-Джонса

$$U(r) = 4\varphi_0 \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

$$U_{отт} \approx \frac{1}{r^{12}}$$

На малых расстояниях преобладают короткодействующие силы отталкивания



После  $U = U_{\min}$  преобладают силы отталкивания:  
 $U$  растет,  $T$  уменьшается.  
 На расстоянии  $d$  «налетающая» молекула останавливается ( $T = 0$ ,  $U = E$ ) и начинает двигаться в обратном направлении, уходит на бесконечность = движение **инфинитное**

Если общий запас энергии  $E_1 < 0$  отрицательный, то движение станет **финитным**, молекула будет совершать колебательное движение между, находясь в области потенциальной ямы (конденсация газа в жидкость)

# Кинетическая энергия системы

Кинетической энергией системы МТ называется сумма кинетических энергий частиц, из которых эта система состоит.

$$\Delta T_i = A_i$$

$$\Delta T = A_{\Sigma}$$

Изменение кинетической энергии системы происходит под действием не только внешних, но и внутренних сил. Причина – работа внутренних сил в нуль не обращается.

## Кинетическая энергия зависит от выбора СО

Скорость  $i$ -ой частицы в К

$$\vec{v}_i = \underbrace{\vec{u}_i}_{\text{в СЦМ}} + \underbrace{\vec{v}_c}_{\text{ЦМ}}$$

Полная кинетическая энергия в К

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{u}_i + \vec{v}_i)^2$$

$$T = \frac{v_u^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i + \vec{v}_u \sum_{i=1}^n m_i \vec{u}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} m = \sum_{i=1}^n m_i \\ \sum_{i=1}^n m_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0 \end{array} \right\} = \frac{m v_u^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i u_i^2}_{\substack{\sum\text{-ная кинетическая} \\ \text{энергия частиц в СЦМ}}}$$

$$T = \frac{m v_u^2}{2} + T_0$$

**Теорема Кенига:** Кинетическая энергия = энергии ее движения как целого со скоростью, равной скорости центра масс, и энергии движения частиц по отношению к СЦМ.

# Потенциальная энергия системы

Рассмотрим систему частиц, между которыми действуют только центральные силы

$$dA_{ij} = \vec{f}_{ij} d\vec{r}_j + \vec{f}_{ji} d\vec{r}_i = \vec{f}_{ij} (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = \vec{f}_{ij} d\vec{r}_{ij}$$

$$dA_{ij} = -dU_{ij}$$

$$dA_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n dU_{ij} = -dU$$

$\frac{1}{2}$  - множитель введен,  
чтобы не учитывать  
взаимодействие одних и  
тех же частиц

$$A = -\Delta U$$

**Работа внутренних консервативных сил равна  
убыли потенциальной энергии системы.**

# Закон сохранения механической энергии системы

Полная работа всех сил, действующих на частицы системы =  
сумма работ внутренних консервативных сил, внутренних  
диссипативных сил и внешних сил.

$$A_{\Sigma} = A + A_{\text{Д}} + A_{\text{внш}}$$

$$\Delta T = A + A_{\text{Д}} + A_{\text{внш}}$$

$$\Delta T + \Delta U = A_{\text{Д}} + A_{\text{внш}} \qquad \Delta E = A_{\text{Д}} + A_{\text{внш}}$$

Если  $A_{\text{Д}} + A_{\text{внш}} = 0$ , то  $\Delta E = 0$  и  $E = \text{const}$

Для изолированной системы  $A_{\text{внш}} = 0$  и  $\Delta E = A_{\text{Д}}$

$$A_{\text{Д}} < 0$$

**В изолированной системе, где действуют  
диссипативные силы, полная  
механическая энергия всегда убывает**

Если  $A_D = 0$ ,  
то  $\Delta E = 0$  и  $E = \text{const}$

**Закон сохранения механической энергии:** В ИСО полная механическая энергия изолированной системы частиц, в которой нет диссипативных сил, сохраняется

# Итого:

1. Законы сохранения носят фундаментальный характер и тесно связаны с симметрией пространства и времени.
  - Закон сохранения энергии связан с **однородностью времени**, т.е. равнозначностью всех моментов времени.
  - **Закон сохранения импульса** связан с **однородностью пространства**, т.е. равнозначностью всех точек пространства.
  - **Закон сохранения импульса** связан **со свойством изотропности пространства**, т.е. с отсутствием выделенных направлений.

## 2. Законы сохранения носят общий характер и не зависят от конкретной системы и ее движения.

**Из законов сохранения вытекает, что какие-то процессы заведомо оказываются невозможными.**

Так в 1775 г. Французская Академия решила не принимать к рассмотрению проекты вечных двигателей как противоречащих закону сохранения энергии

## 3. Законы сохранения позволяют рассмотреть общие свойства движения без решения уравнений и детальной информации о протекании процессов во времени.

Поэтому законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда силы точно не известны (физика элементарных частиц)

