

Сегодня: четверг, 9
марта 2023 г.

Общая физика. Часть 1

Лекция 5. Законы сохранения.

Реактивное движение



1. Импульс точки, импульс силы
2. Закон сохранения импульса
3. Центр масс. Закон о движении центра масс.
4. Движение тел с переменной массой
уравнение Мещерского.
5. Формула Циолковского.

Импульс точки, импульс силы

Импульс материальной точки – произведение массы точки на ее скорость

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Производная импульса материальной по времени равна действующей на эту точку силе

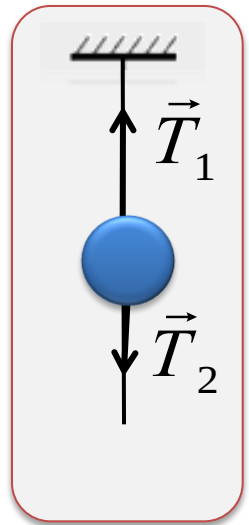


$$\Delta\vec{p} = \int_{\vec{p}}^{\vec{p}_0} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F}(t) dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$
$$F = const$$



Приращение количества движения за некоторый промежуток времени равно импульсу всех сил, действующих на это тело (зависит от величины силы и от продолжительности ее действия).



Импульс системы частиц – векторная сумма импульсов составляющих ее частиц

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{tot}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_i + \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ki} \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}_{\text{внешние силы}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \vec{f}_{ki}}_{\text{внутренние силы}}$$

$$\vec{f}_{ki} = -\vec{f}_{ik}$$

=0

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}$$



Производная по времени импульса системы частиц равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на частицы системы.

$$\Delta \vec{P} = \vec{P} - \vec{P} = \int_{t_0}^t \vec{F}(t) dt$$

Приращение импульса системы за промежуток времени Δt равно импульсу результирующей всех внешних сил.

Закон сохранения импульса

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}$$

**Суммарный импульс замкнутой системы
остается постоянным**

Замкнутая система – та, для которой сумма
внешних сил равна нулю,

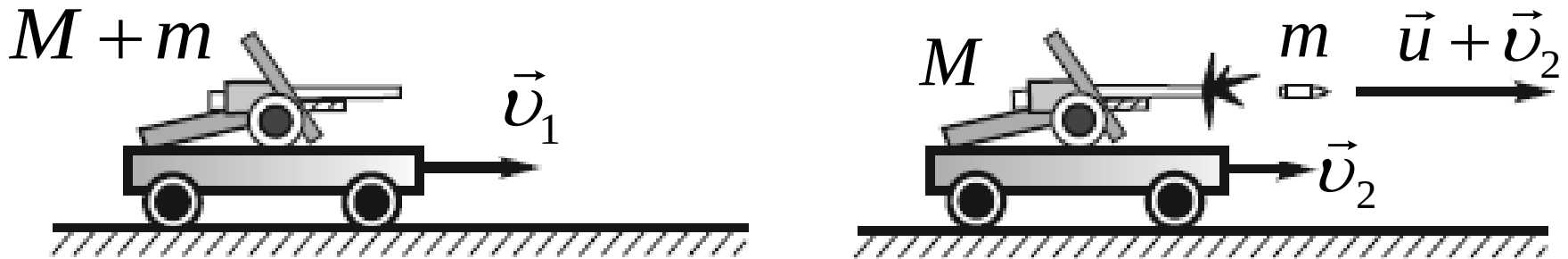
Изолированная система – та, на которую
внешние силы вообще не действуют

$$F_x = 0$$



$$P_x = \text{const}$$

Пример 1



$$(M + m)v_1 = m(v_2 + u) + Mv_2$$

$$v_2 = v_1 - \frac{m}{M + m}u$$

Чем больше масса платформы, тем на меньшую величину изменяется ее скорость в результате выстрела.

$$0 = m(v_2 - v_1 + u) + M(v_2 - v_1)$$

Если импульс сохраняется в одной ИСО, то он сохраняется и в любой другой ИСО.

Центр масс

Импульс системы материальных точек равен импульсу одной материальной точки с массой, равной суммарной массе частиц и движущейся со скоростью центра масс системы

$$\vec{r}_y = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$$M\dot{\vec{r}}_u = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{P} = M\vec{v}_u$$

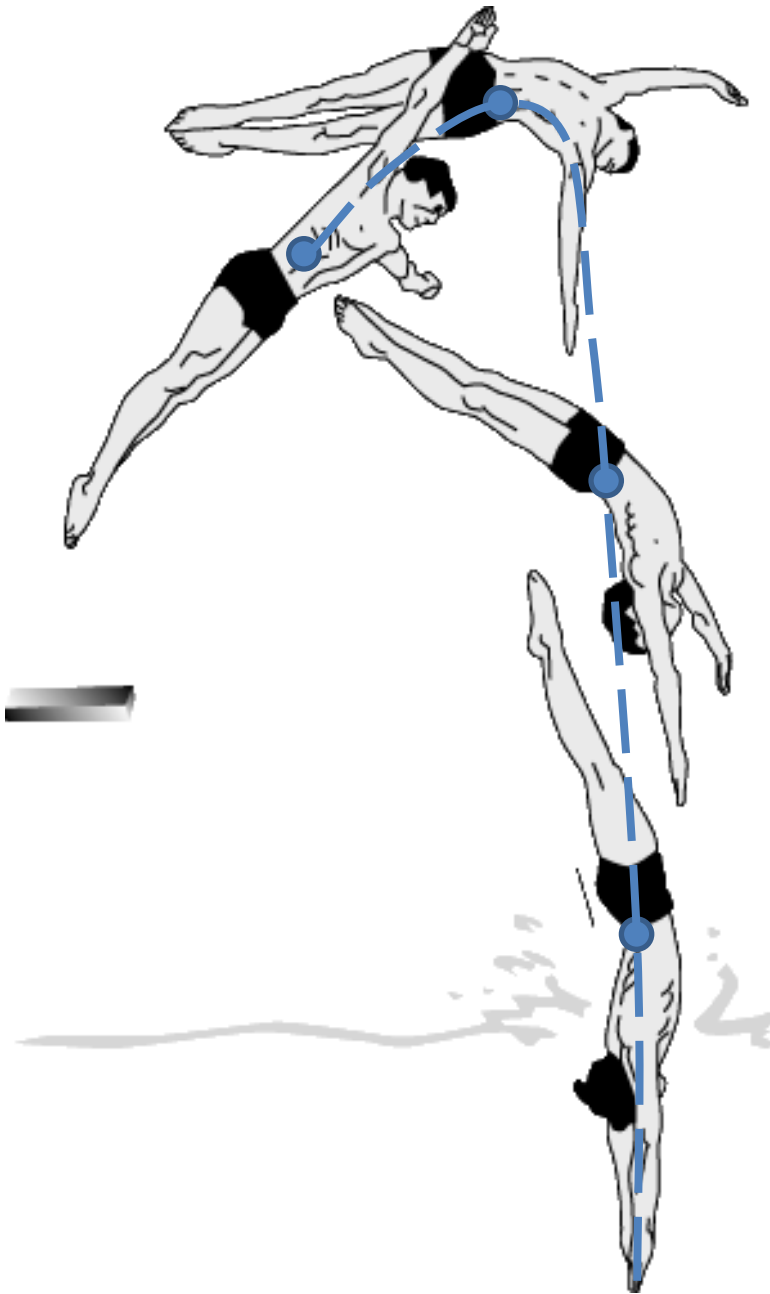
$$M \frac{d\vec{v}_u}{dt} = \vec{F}$$

**Уравнение движения
центра масс**

Теорема о движении центра масс: центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой M под действием приложенных всех внешних сил.

Ускорение центра масс не зависит от того, к каким конкретно точкам системы приложены внешние силы.

Пример 2



$$\vec{F} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0$$

$$\vec{v}_c = \text{const}$$

Центр масс замкнутой системы материальных точек либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно.

Движение тел с переменной массой

Основная цель: получение максимальной скорости истечения газов сгоревшего топлива

$$u \approx \sqrt{\frac{T}{m}}$$

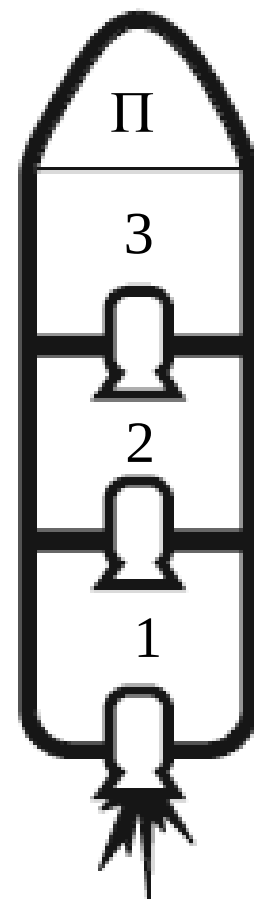
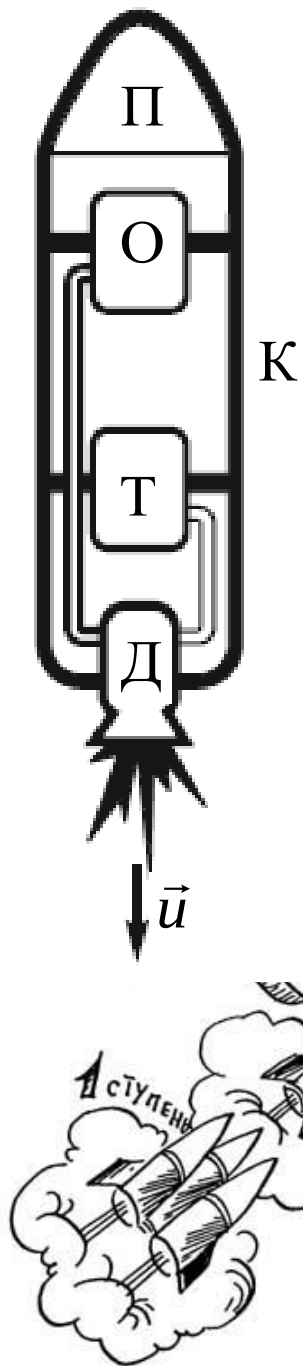
$$T = 4000 - 5000 \text{ К}$$

$$u = 4 - 5 \text{ км/с}$$

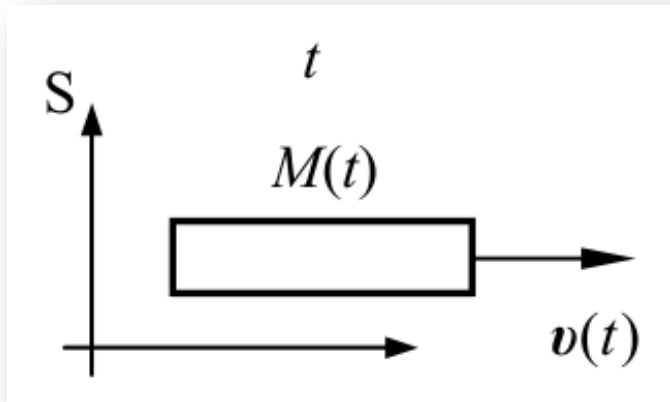
$$u_{\text{керосин}} = 2,6 \text{ км/с}$$

$$u_{\text{H}_2} = 4,2 \text{ км/с}$$

$$u_{\text{F+H}_2+\text{Li}} = 5 \text{ км/с}$$

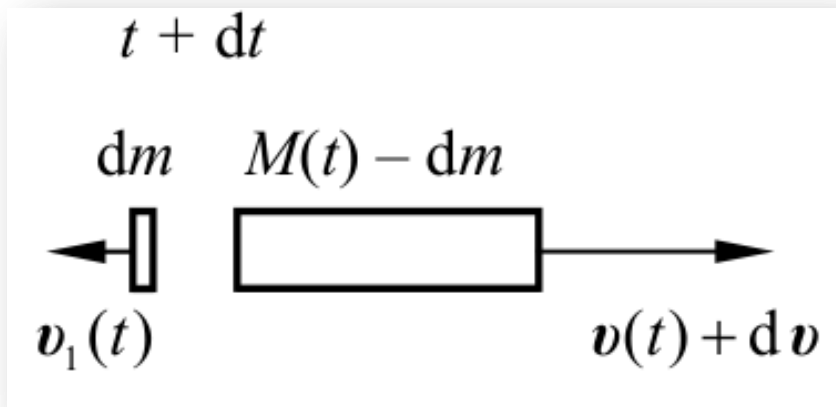


Уравнение Мещерского



Рассмотрим движение тела с переменной массой. Пусть $M(t)$ – масса тела в момент времени t
импульс тела в момент времени t

$$\vec{p}(t) = M(t) \vec{v}(t)$$



$dm = -dM$ – масса
отделившихся частиц за dt
импульс тела с
отделившимися частицами в
момент времени $t + dt$:

$$\vec{p}(t + dt) = (M(t) - dm)(\vec{v}(t) + d\vec{v}) + dm \cdot \vec{v}_1(t)$$

С точностью до бесконечно малых величин второго порядка изменение импульса механической системы, состоящей из тела и отделившихся от него за время dt частицами, равно

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = M(t) d\vec{v} + dm \cdot \vec{u}(t)$$

$\vec{u}(t) \equiv \vec{v}_1(t) - \vec{v}(t)$ –
скорость отделяющихся
частиц относительно тела

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot \vec{u}(t) = \vec{F}^{ex}$$

*внешняя
сила*

$$M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = M(t) \vec{a} = \vec{F}^{ex} - \frac{dm}{dt} \cdot \vec{u}(t)$$

$$M(t) \vec{a} = \vec{F}^{ex} - \mu \cdot \vec{u}(t) = \vec{F}^{ex} + \vec{F}_p(t)$$

уравнение Мещерского

$$\vec{F}_p(t) = -\mu \cdot \vec{u}(t)$$

**реактивная сила, действующая на тело со
стороны отделяющихся от него частиц**

$$\mu = \frac{dm}{dt} = - \frac{dM}{dt}$$

расход топлива

Пример

$$M \approx 3 \cdot 10^6 \text{ кг}$$

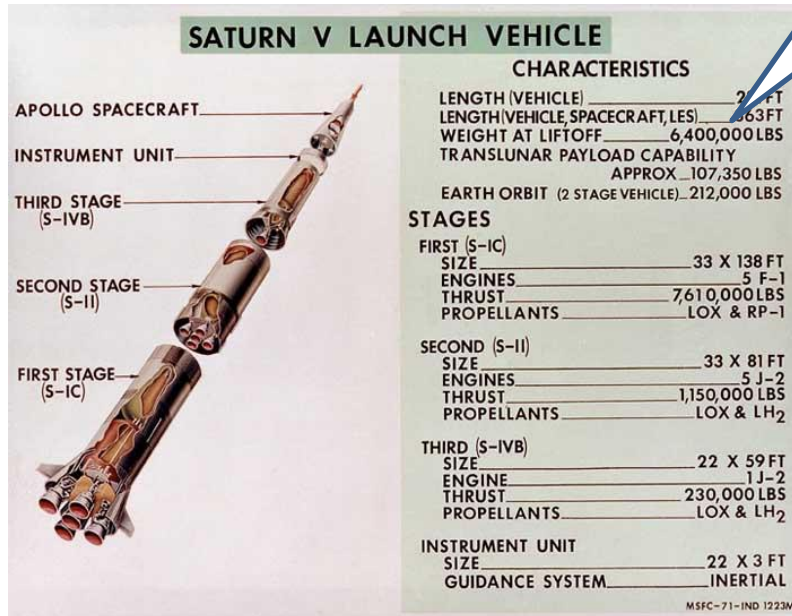
Определим минимальный расход топлива на старте

$$u_{\text{кер}} \approx 2600 \text{ м/с}$$

$$Mg = \mu u$$

$$\mu = \frac{Mg}{u} \approx \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 10}{2,6 \cdot 10^3} \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ кг/с}$$

Каждую секунду свыше **10 т (!)** топлива, только чтобы оторваться от поверхности Земли.



$$M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_T$$

Допустим, что на ракету действуют внешние силы + возможно присоединение дополнительной массы

$$dM = \underbrace{dM_B}_{\text{выбросили}} + \underbrace{dM_{\Pi}}_{\substack{\text{присоединили} \\ >0}}$$

Расход массы

$$\mu = -\frac{dM_B}{dt} \qquad \mu_{\Pi} = \frac{dM_{\Pi}}{dt}$$

$$\div dt \quad M d\vec{v} = -\vec{u} dM_B + \vec{w} dM_{\Pi} + \vec{F} dt \quad \div dt$$

Уравнение Мещерского для движения тел с переменной массой

$$M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_T + \vec{w} \mu_{II} + \vec{F}$$

$$M(t) = M_0 - \int_0^t \mu dt + \int_0^t \mu_{II} dt$$

**Переменная
масса**

$$Mdv + udM = 0$$

Формула Циолковского

Частный случай прямолинейного движения ракеты, когда пренебрегают внешними силами

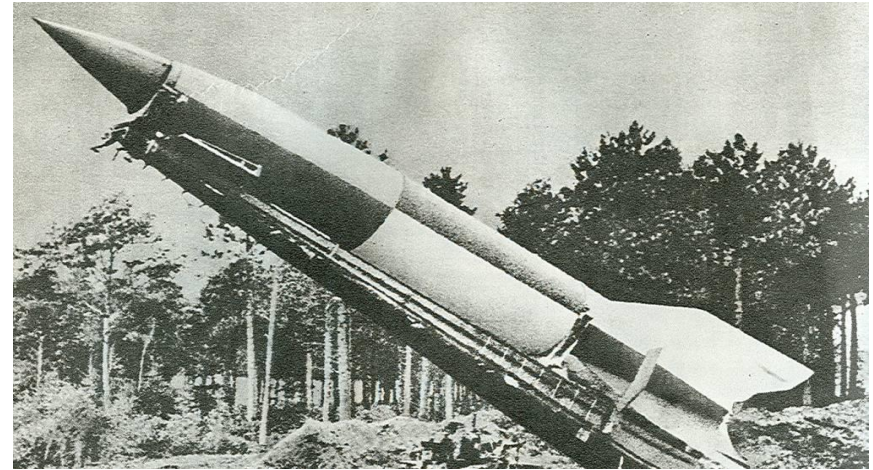
$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u}$$

$$u = \text{const}$$

$$\int_{M_0}^{M_K} \frac{dM}{M} = -\int_{v_0}^{v_K} \frac{dv}{u}$$

$$\ln \frac{M_K}{M_0} = -\frac{v_K - v_0}{u}$$

**Формула
Циолковского**



$$\frac{M_K}{M_0} \approx 0,3; \quad u \approx 4 \text{ км/с};$$

$$v_0 = 0 \Rightarrow v_K = 4 \text{ км/с}$$

$$\frac{M_K}{M_0 \text{ ФАУ-2}} = 0,3; \quad \frac{M_K}{M_0 \text{ Сатурн-5}} = 0,27$$

$$v_K = v_0 - u \ln \frac{M_K}{M_0}$$

Пусть ракета состоит из n ступеней,
 u_i – скорость истечения газов в каждой ступени

$$\alpha_i = \frac{M_{\kappa i}}{M_{0i}}, \quad 1 \leq i \leq n$$

M_{0i} – Масса всех ступеней, начиная с i -й (включая топливо)

$M_{\kappa i}$ – Масса всех ступеней, без топлива, без i -й ступени.

$$v_{\kappa} = v_0 - \sum_{i=1}^n u_i \ln \alpha_i \quad \alpha \approx 0,3; \quad u \approx 4 \text{ км/с}; \quad v_0 = 0; \quad n = 3$$

$\Downarrow$

$$\alpha_i = \alpha = \text{const}, \quad u_i = u = \text{const} \quad v_{\kappa} = 12 \text{ км/с}$$

$$v_{\kappa} = v_0 - nu \ln \alpha$$

**Характеристическая
скорость**

4 октября 1957 г. Спутник

Конструктор ракеты -

С.П. Королев

Конструктор двигателей -

В.П. Глушко



12 апреля 1961 г. Восток

($M = 4,73$ т; $L = 4,4$ м; $D = 2,43$ м)

Конструктор ракеты - **С.П.**

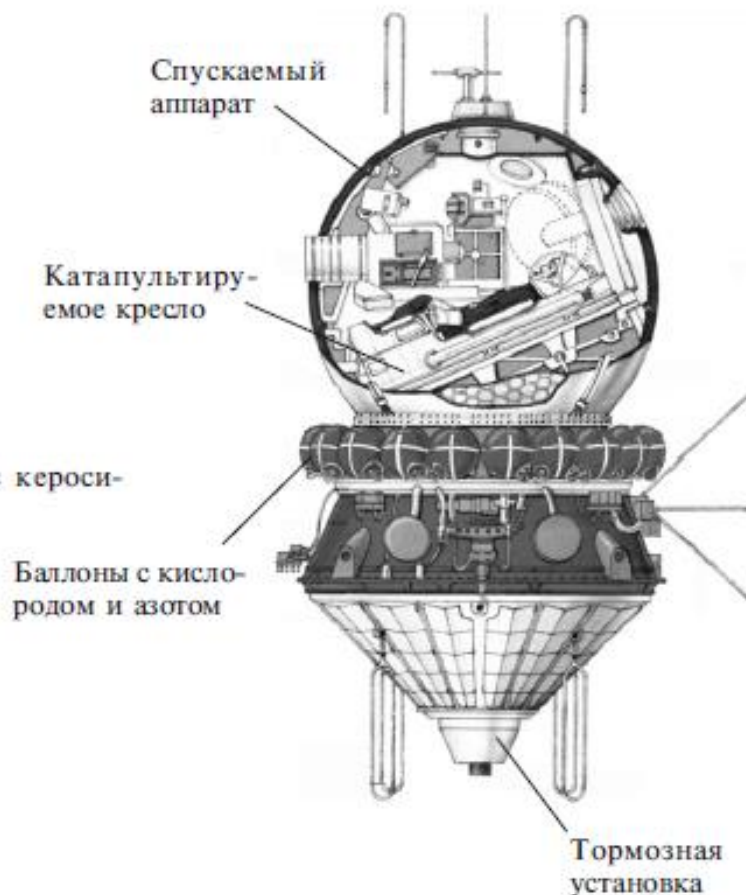
Королев

Конструктор двигателей -

В.П. Глушко

Космонавт на борту –

Ю.А. Гагарин





- 1. Момент импульса. Уравнение моментов.**
- 2. Закон сохранения момента импульса**

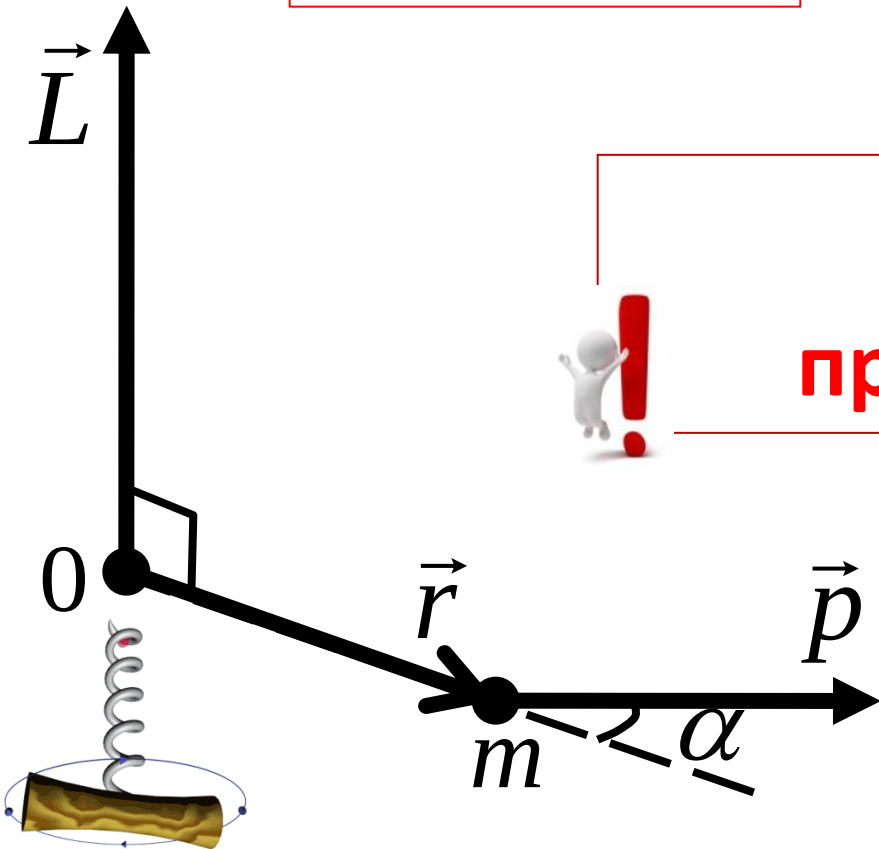
Момент количества движения (момент импульса) частицы m относительно O = векторное произведение радиуса-вектора частицы $\vec{r}$ на ее импульс $\vec{p}$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$L = rps \sin \alpha$$

$$L \perp r, p +$$

правило буравчика.

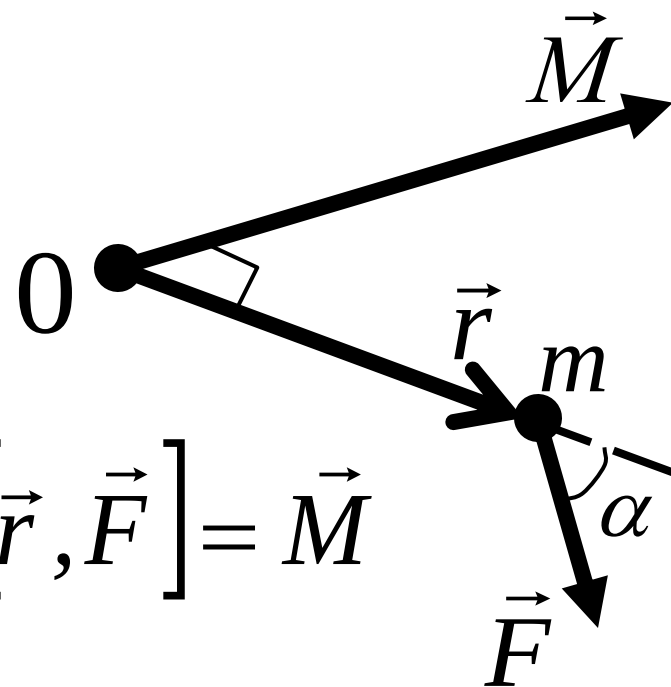


$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]$$

$$\underbrace{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right]}_{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \uparrow \uparrow \vec{p}} = 0$$

$$\underbrace{\left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]}_{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

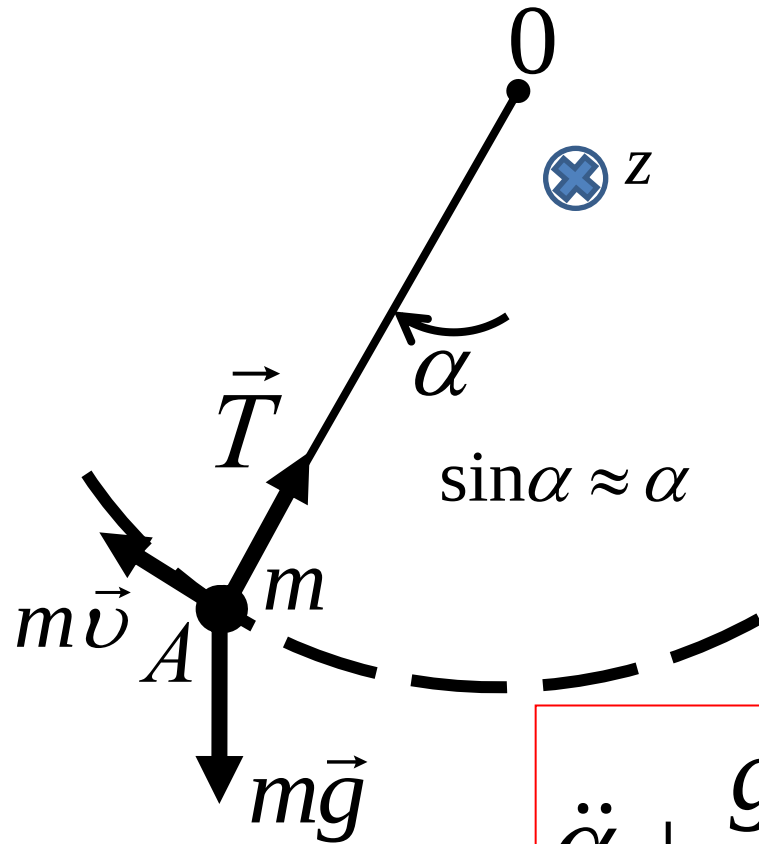
Уравнение моментов: производная по времени от момента импульса частицы относительно некоторой т. О равна моменту силы относительно той же т. О.



Пример 1. Уравнение колебаний математического маятника

$$L_z = mvl$$

$l = OA$ – Длина нити



$$\frac{dL_z}{dt} = (\vec{M}_{mg})_z + (\vec{M}_T)_z$$

$$(\vec{M}_{mg})_z = -mgl \sin \alpha$$

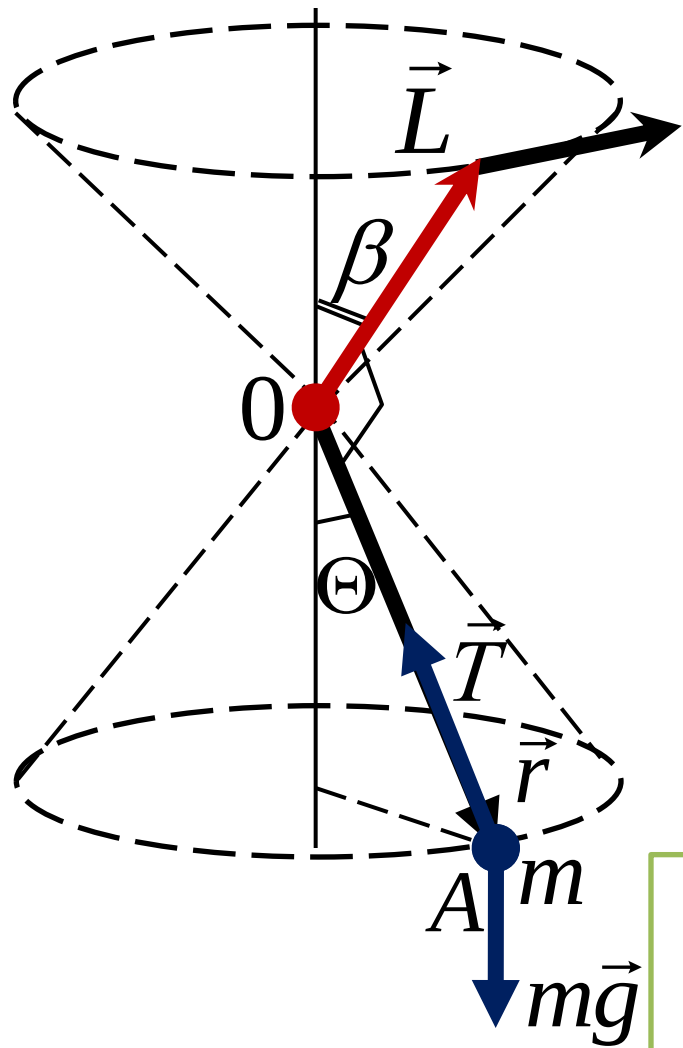
$$(\vec{M}_T)_z = 0$$

$$v = l \dot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} = 0$$

Пример 2



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \Theta$$

$$\vec{M}_T = [\vec{r} \times \vec{T}] = 0$$

$$\Delta \vec{L} = \vec{L} - \vec{L}_0 = \underbrace{\int_{t_0}^t \vec{M} dt}_{\text{импульс момента силы за } \Delta t}$$

$$\vec{M}_{mg} = [\vec{r} \times m\vec{g}]$$

Приращение момента импульса материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу момента силы за это же время.

