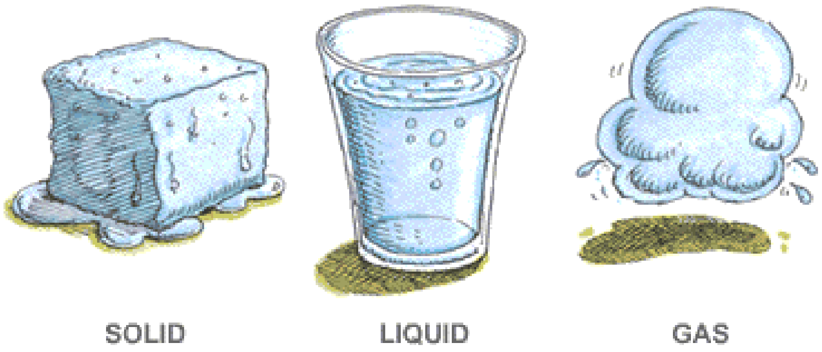
Сегодня: пятница, 14 апреля 2023 г.

Лекция 13. Общие свойства жидкостей и газов



Купрекова Е.И.

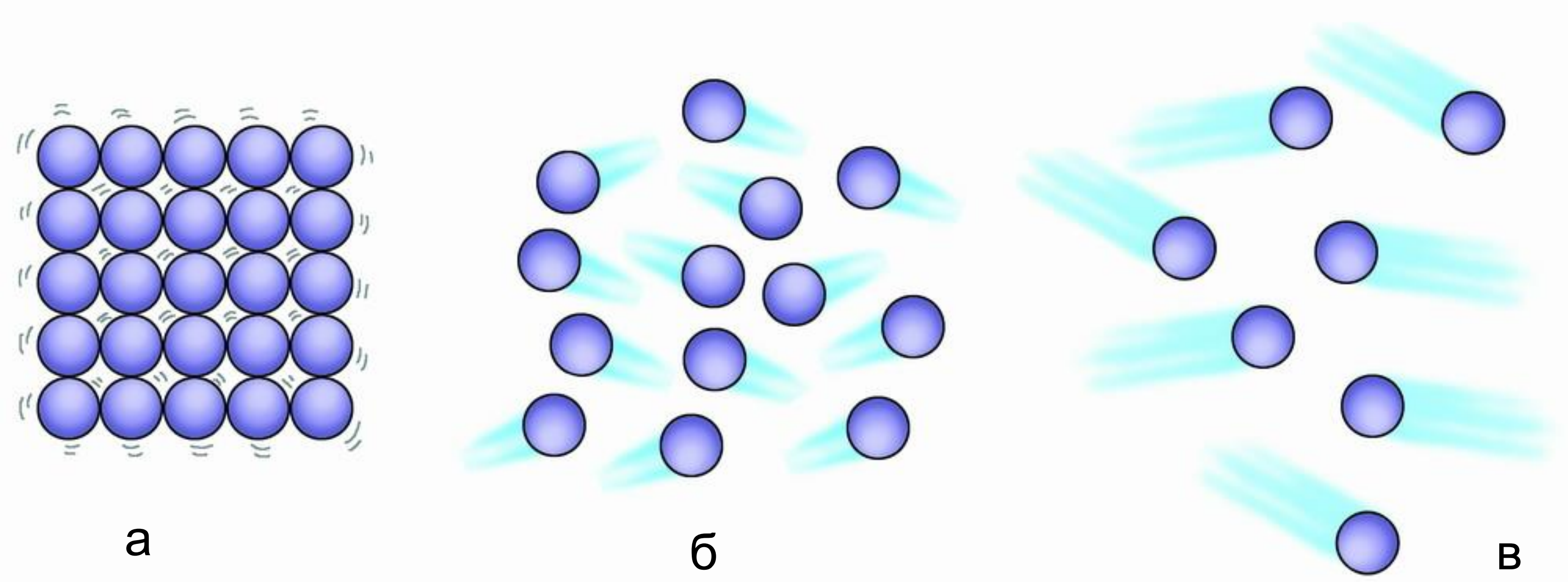
Агрегатное состояние вещества

Зависит от соотношения между потенциальной энергией взаимодействия атомов *U*, составляющих тело, и их средней кинетической энергией *T*.

a) $U \gg T$, твердое состояние.

b) $U \sim T$, жидкое состояние.

c) $U \ll T$, газообразное состояние.



а б в

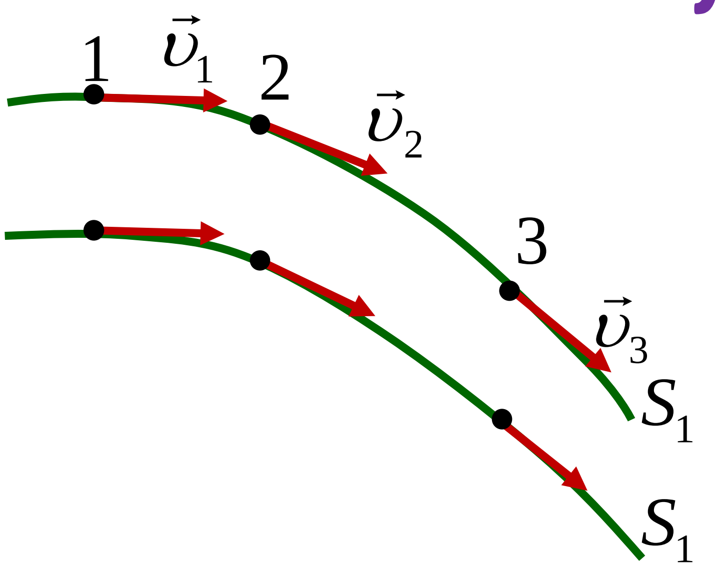
Способы описания жидкостей

1. **Лагранж.** **Выбираем набор «жидких» частиц. Движение жидкости - движение «жидких» частиц. Вводим понятия скорости и ускорения частиц . Трудность: учет изменения формы «жидкой» частицы при движении.**

2. **Эйлер.** **Задаем векторное поле скоростей движения жидкости: фиксируем изменение скорости жидкости со временем. Следим за кинематическими характеристиками в фиксированных точках пространства, не интересуясь типом «жидких» частиц. Для наглядного представления вводим линии тока.**

Стационарное течение жидкости - течение, при котором скорость жидкости в каждой данной точке остается постоянной как по величине, так и по направлению.

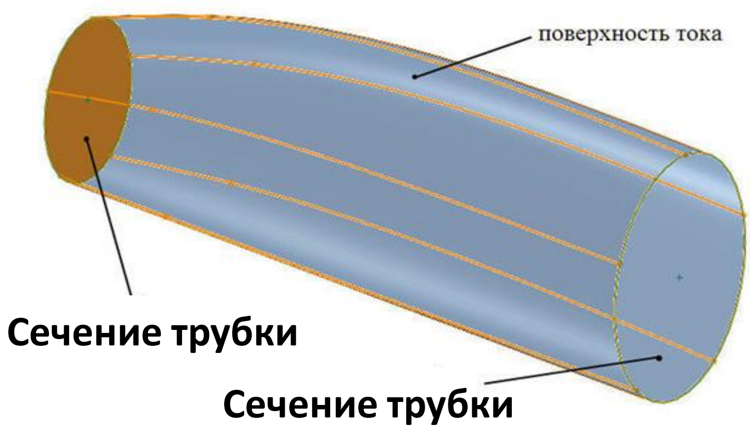
Линия тока



– воображаемая линия, проведённая в потоке таким образом, что в каждой её точке направление скорости совпадает с касательной к этой линии.

NB: это не траектории! Совпадают только при установившемся движении

Густота, с которой проведены линии тока, пропорциональна скорости течения.



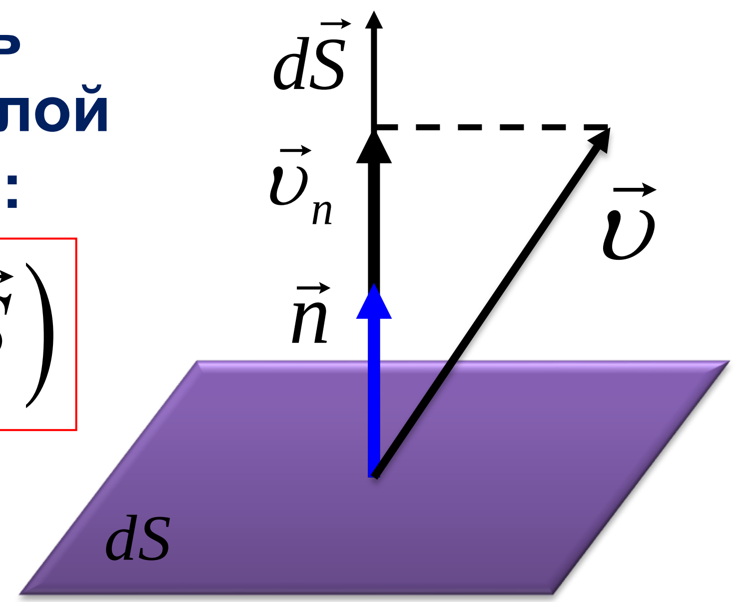
Часть объема жидкости, ограниченная линиями тока, называется трубкой тока.

Жидкость внутри трубки тока, не может покинуть ее пределы

Поток вектора

Поток вектора υ **через поверхность бесконечно малой площади dS:**

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$



$$\boxed{d\Phi_\upsilon = \left(\vec{\upsilon}, d\vec{S}\right)}$$

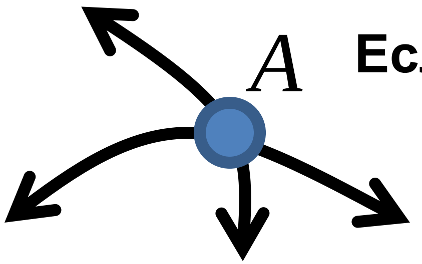
$$\boxed{\Phi_\upsilon = \int_S \left(\vec{\upsilon}, d\vec{S}\right)}$$

Поток массы - объем dV, который успевает наполнять за 1 с поток жидкости, пронизывающий dS

$$\boxed{d\Phi_m = \left(\vec{\upsilon}\rho, d\vec{S}\right)}$$

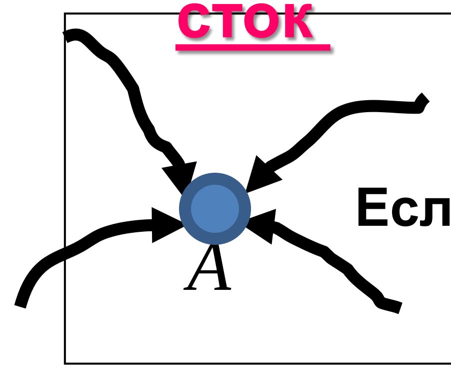
Внешняя нормаль - нормаль к каждому из элементов поверхности dS направлена из объема наружу

исток



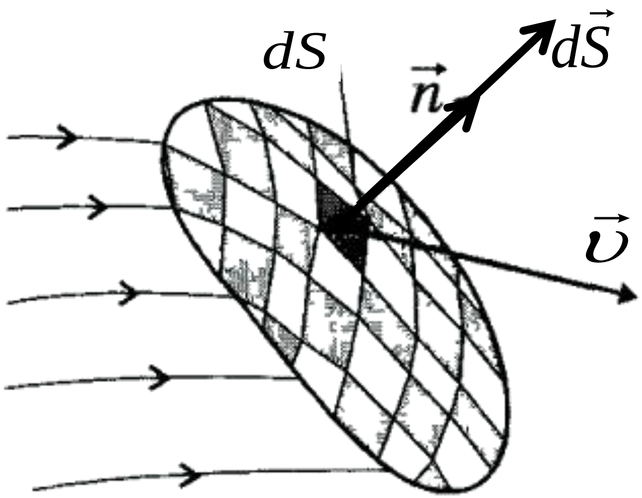
Если $d\Phi_{\upsilon} > 0$

сток



Если $d\Phi_{\upsilon} < 0$

Если $d\Phi_{\upsilon} = 0$, источников и стоков нет, или имеют одинаковую интенсивность



Поток вектора через всю поверхность характеризует общую интенсивность источников и стоков, находящихся в объеме

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\left(\vec{\upsilon},d\vec{S}\right)}{\Delta V}=\operatorname{div}\vec{\upsilon}$$

Дивергенция - локальная удельная характеристика интенсивности источников жидкости в точке А

Если $\mathrm{div}\,\upsilon = 0$, *в т. А* нет источников (стоков).

Если $\mathrm{div}\,\upsilon > 0$, *т. А* является источником.

Если $\mathrm{div}\,\upsilon < 0$, *т. А* является стоком.

Чем больше $\mathrm{div}\,\upsilon > 0$, тем выше интенсивность источника.

$$\boxed{(\nabla, \vec{\upsilon}) \equiv \mathrm{div}\,\vec{\upsilon} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} - \textit{набла}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{\upsilon} = \frac{d\Phi}{dx\,dy\,dz}}$$

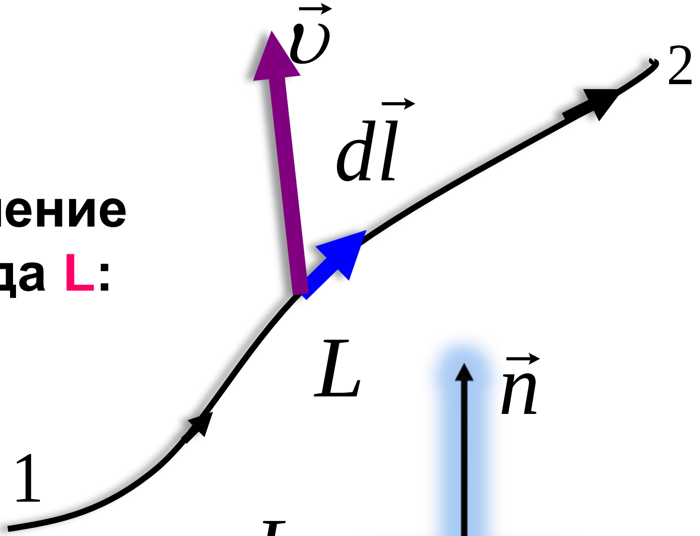
Дивергенция вектора скорости = равна потоку жидкости через поверхность элементарного объема, внутри которого находится рассматриваемая точка, отнесенному к величине этого объема

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{\upsilon} = 0}$$

Уравнение неразрывности

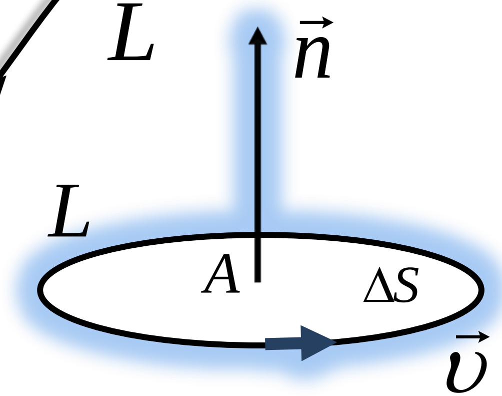
Циркуляция векторного поля. Ротор вектора.

Пусть в поле скоростей υ (x, y, z) задана некоторая кривая L.



Разобьем на малые элементы dl, направление которых совпадает с направлением обхода L:

$$\boxed{\oint_L \left(\vec{\upsilon}, d\vec{l}\right) = \oint_L \upsilon_l \, dl}$$



циркуляция вектора скорости вдоль кривой (характеризует завихренность поля *υ* в области *L*).

$$\boxed{\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta L} \left(\vec{\upsilon}, d\vec{l}\right)}{\Delta S} \cdot \vec{n} = \mathrm{rot}\,\vec{\upsilon}(x, y, z)}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \end{vmatrix}$$

Уравнения движения и равновесия жидкости

В жидкости отсутствует понятие сдвига ($\tau = 0$). В жидкости могут быть только напряжения осевого сжатия и

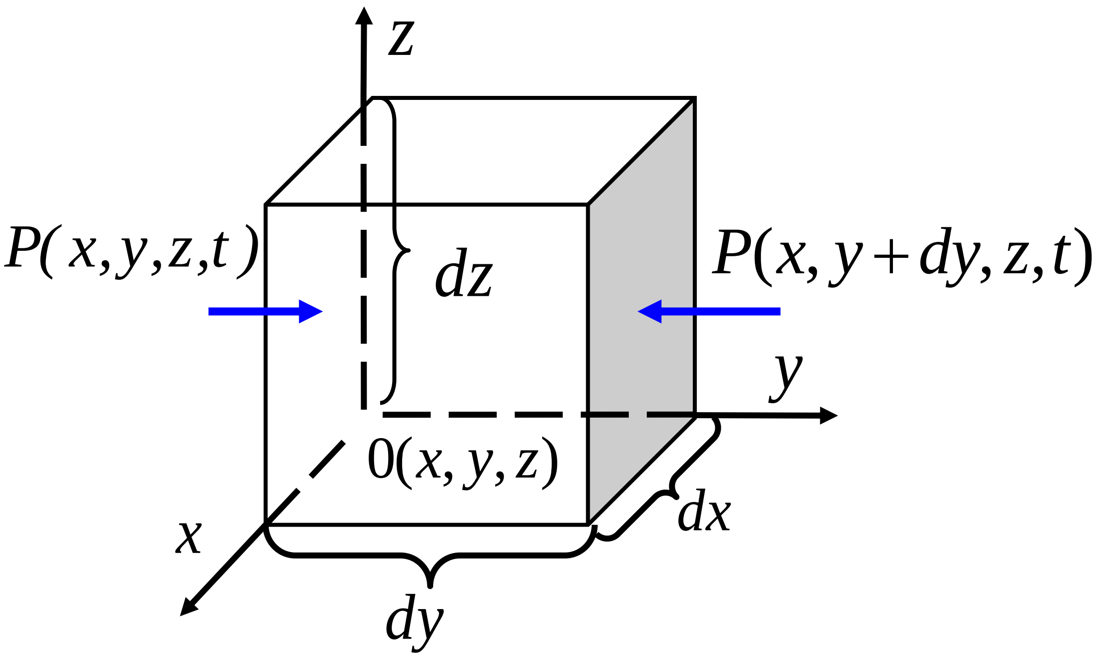
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = P$$

P – давление – сила, действующая на некоторую площадку, помещенную в жидкость перпендикулярно силе и отнесенной к единице площади:

$$\boxed{P = \frac{dF}{dS_{\perp}}}$$

[p] = 1 Па.
1 Па = 1 Н/м^2.

1 паскаль равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределённой по нормали к ней поверхности площадью 1 м^2.



1. Выберем в жидкости бесконечно малый объем

P(x, y, z, t) – давление жидкости вблизи левой боковой грани, перпендикулярной оси y,

P(x, y+dy, z, t) – давление вблизи правой боковой грани.

Проекция на 0y силы давления жидкости:

$$dF_y = P(x,y,z,t)dxdz - P(x,y+dy,z,t)dxdz =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz = -\frac{\partial P}{\partial y}dV$$

$$\frac{dF_y}{dV} = f_y = -\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{dF_x}{dV} = f_x = -\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{dF_z}{dV} = f_z = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

Сила давления, действующая на элемент жидкости.

$$\boxed{\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k} = -\mathrm{grad}P = -\nabla P}$$

$$dm\frac{d\upsilon}{dt} = -\nabla P dV$$

$$dm = \rho dV$$

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + (\vec{\upsilon}, \nabla)\vec{\upsilon}$$

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + (\upsilon, \nabla)\vec{\upsilon}\right] = -\nabla P - \rho \nabla \varphi$$

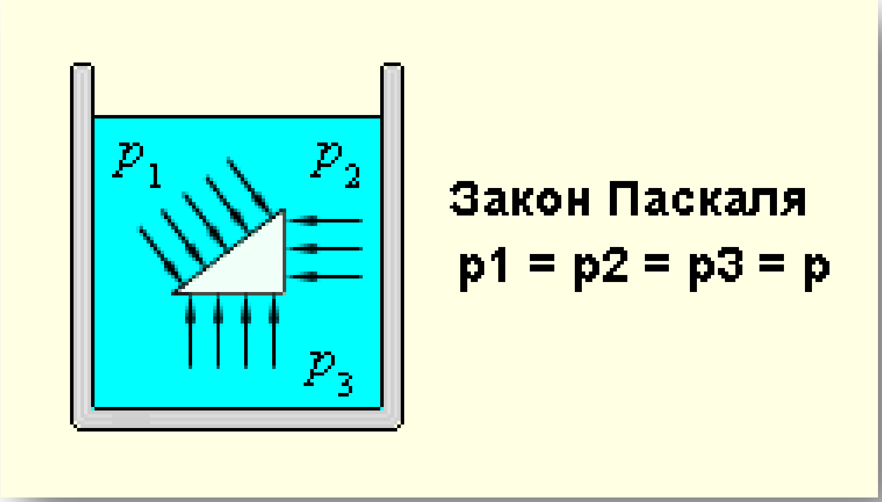
Уравнение движения идеальной жидкости в силовом поле

$\nabla - набла$

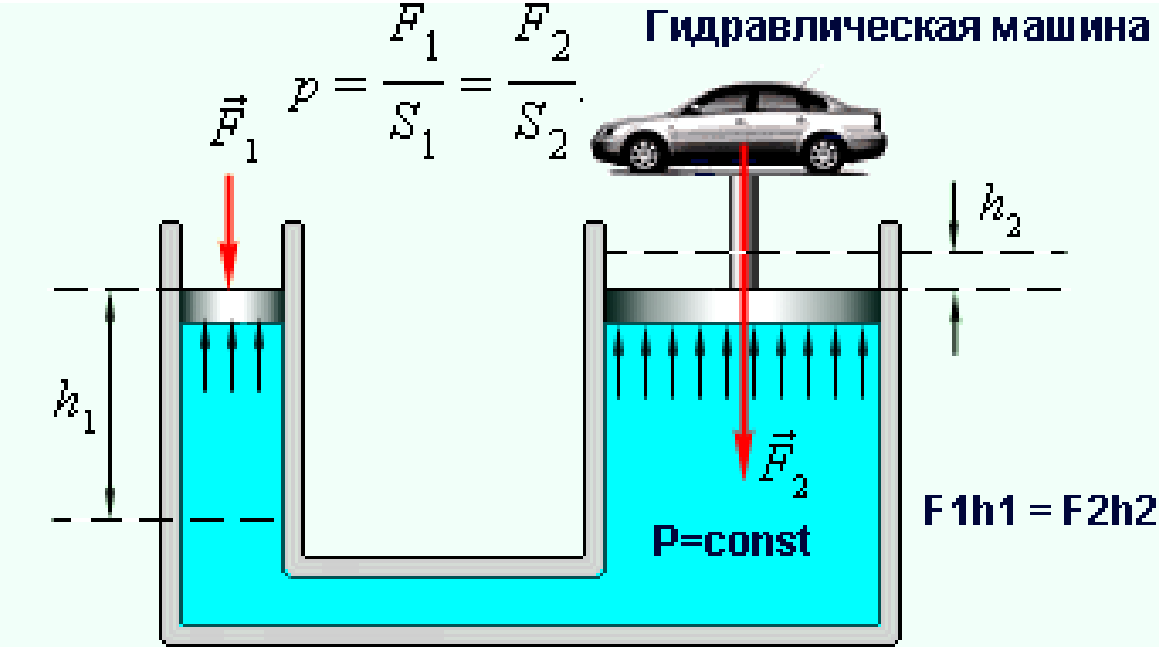
$$\nabla P + \rho \nabla \varphi = 0$$

Уравнение гидростатики (в равновесии)

Закон Паскаля: давление, оказываемое на жидкость, передается ею по всем направлениям одинаковым образом



Гидравлический пресс: два сообщающихся сосуда заполнены жидкостью и закрыты поршнями различной площади.



По закону Паскаля, давления под поршнями одинаковы:

$$P_1 = P_2$$

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}}$$

Сила давления второго поршня больше силы давления первого во столько раз, во сколько площадь больше первого.

Гидравлический пресс – механизм, позволяющий развить колоссальные силы, используемые для прессования различных изделий из металлов и пластмасс.

Условие несжимаемости: объемы жидкости, перешедшей из одного цилиндра в другой:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2$$

Работы, совершаемые силами за один ход

$$A_1 = S_1 h_1 \text{ и } A_2 = S_2 h_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{F_1 h_1}{F_2 h_2} = \frac{S_1 h_1}{S_2 h_2} = 1$$

пресс дает выигрыш в силе, но не в совершаемой работе

Частный случай: несжимаемая жидкость.

Жидкость в однородном поле тяжести

Выбираем 0z вертикально верх: $\varphi = gz + const,$

Подставим в уравнение равновесия:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \qquad \boxed{\nabla P + \rho \nabla \varphi = 0}$$

$$\boxed{P = -\rho g z + const}$$

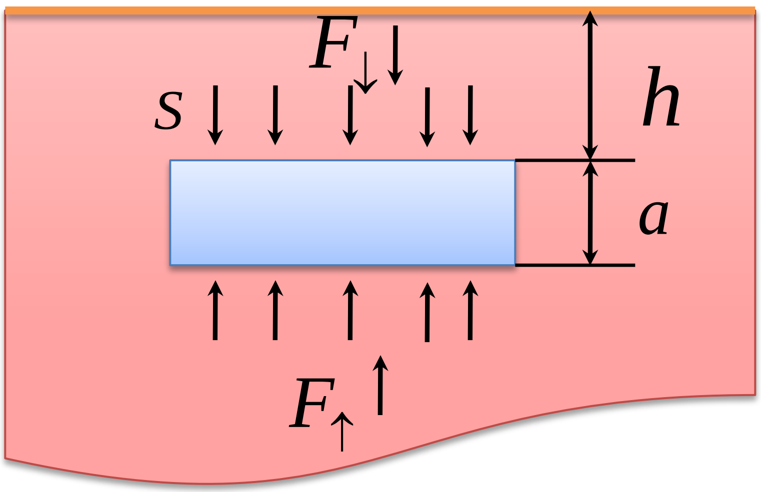
$$\boxed{P = P_0 + \rho g \left(h - z\right)}$$

линейное увеличение гидростатического давления с увеличением глубины

$$P = P_0 + \rho g(h - z)$$

Отсюда сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние. Поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила – сила Архимеда.

Погрузим в жидкость на глубину h параллелепипед с площадью основания S и высотой ребра *a*.



Давление на глубине h

$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

на верхнее основание действует сила

$$F_{\downarrow} = p(h)S = S(p_0 + \rho g h).$$

На глубине *h + a* давление

$$p(h+a) = p_0 + \rho g(h+a)$$

И сила на нижнее основание:

$$F_{\uparrow} = p(h+a)S = S(p_0 + \rho gh + \rho ga).$$

Равнодействующая направлена вверх :

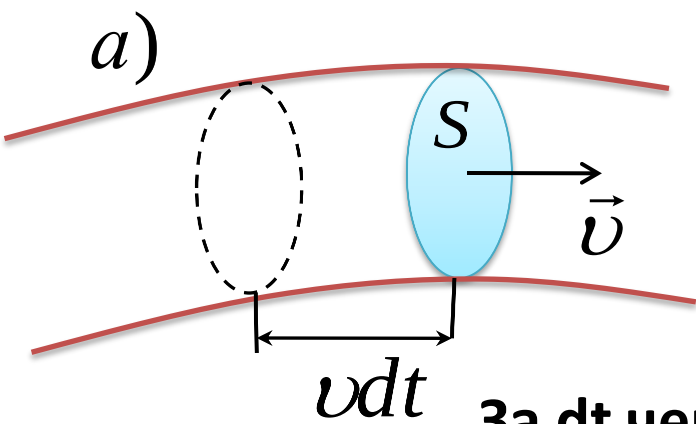
$$\boxed{F_A = F_{\uparrow} - F_{\downarrow} = \rho Sag = \rho Vg = mg}$$

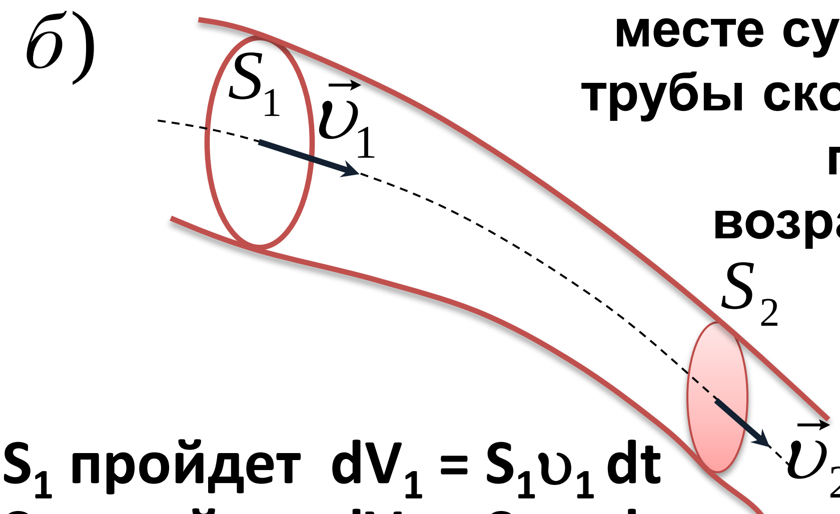
Закон Архимеда: на тело погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила, равна весу вытесненной телом жидкости (газа).

Уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости

Рассмотрим трубку тока. За d*t* через произвольное сечение *S* проходит объем жидкости dV = $S\upsilon dt$. Выберем два сечения S_1 и S_2

<u>Следствие:</u> в месте сужения трубы скорость потока возрастает





За dt через S_1 пройдет $dV_1 = S_1\upsilon_1 dt$
За dt через S_2 пройдет $dV_2 = S_2\upsilon_2 dt$

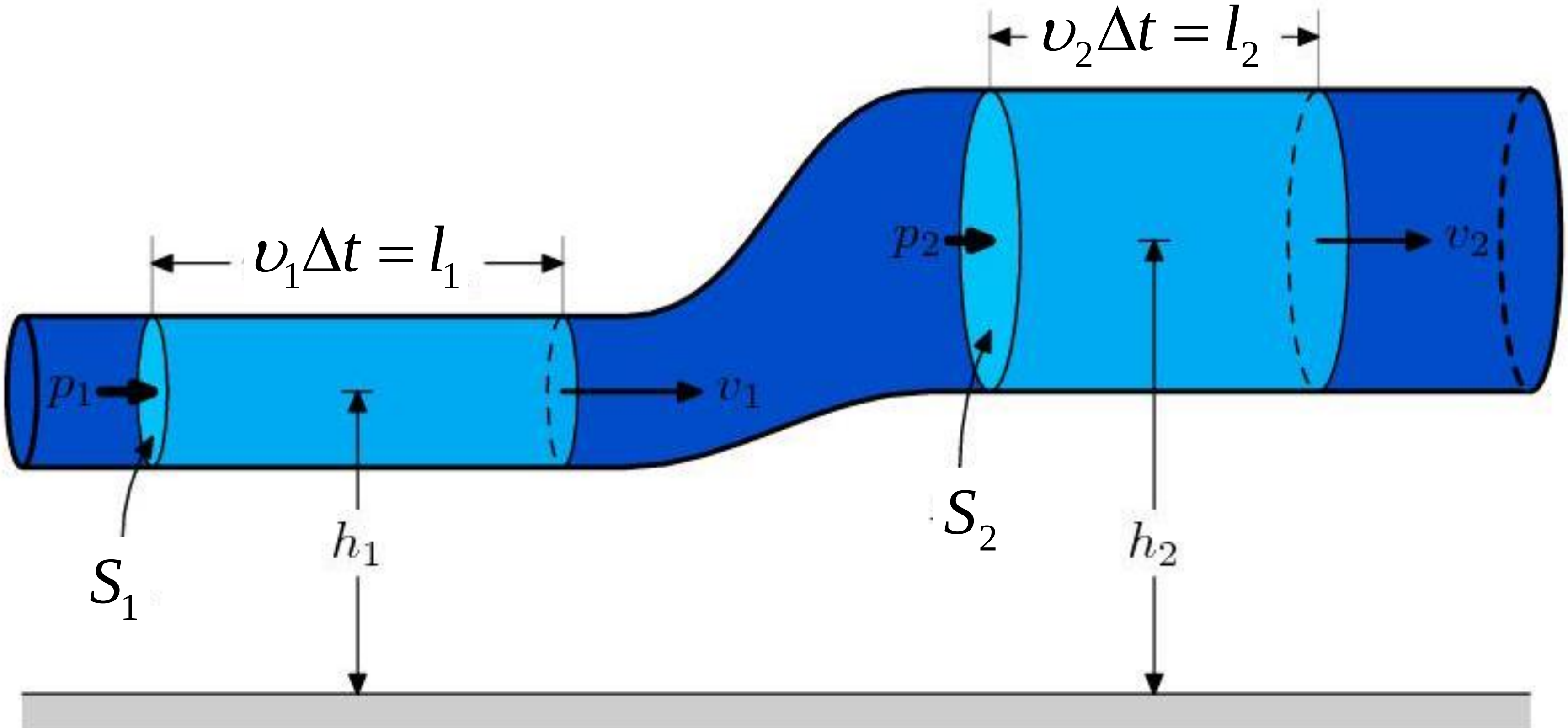
$$\boxed{S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2}$$

Из равенства объемов

Теорема о неразрывности струи: Для несжимаемой жидкости в любом сечении одной и той же трубки тока

$S\upsilon$ = const.

Стационарное движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли



Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2, по которой слева направо течет жидкость

За Δt объем жидкости переместится вдоль трубки тока (непрерывность)

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

Энергия *i* - частицы $$E_i = T_i + U_i$$

Полная энергия за Δt через S_1

$$E_1 = \left(\frac{\rho \Delta V_1 \upsilon_1^2}{2} + \rho \Delta V_1 g h_1 \right) = \Delta V \left(\frac{\rho \upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 \right)$$

$$E_2 = \left(\frac{\rho \Delta V_2 \upsilon_2^2}{2} + \rho \Delta V_2 g h_2 \right) = \Delta V \left(\frac{\rho \upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 \right)$$

Изменение полной энергии $$E_2 - E_1 = A$$

Силы давления на боковую поверхность перпендикулярны к направлению перемещения частиц, поэтому работу не совершают. Отлична от нуля только работа сил, приложенных к сечениям

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = \left(p_1 - p_2 \right) \Delta V$$

$$\Delta V\left(\frac{\rho\upsilon_2^2}{2}+\rho g h_2\right)-\Delta V\left(\frac{\rho\upsilon_1^2}{2}+\rho g h_1\right)=\left(p_1-p_2\right)\Delta V$$

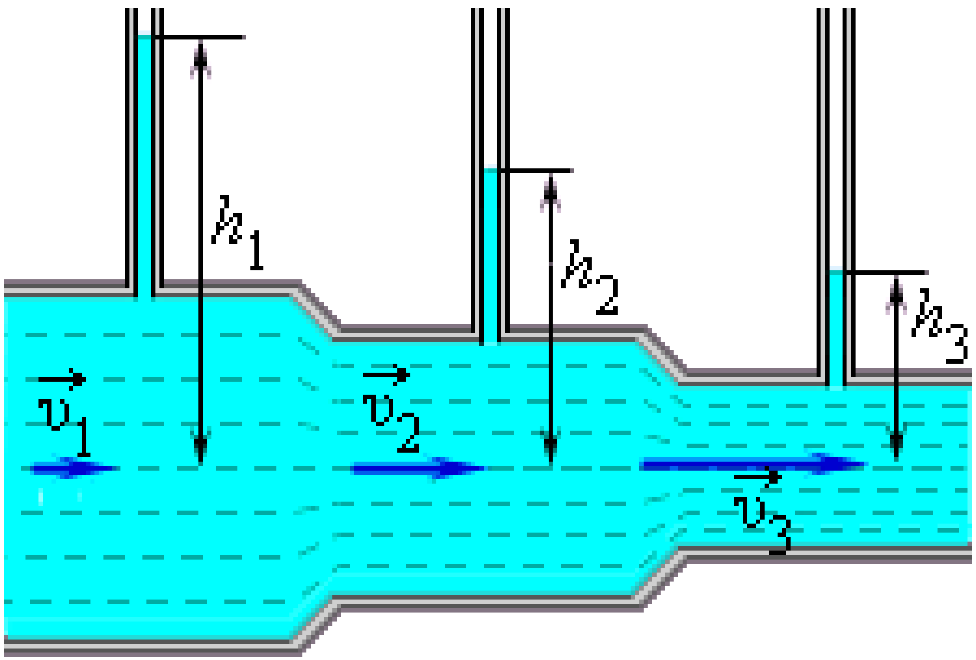
Сечения S_1 и S_2 взяты произвольно. Поэтому в стационарно текущей идеальной жидкости в любом сечении трубки :

$$\boxed{\underbrace{\frac{\rho\upsilon^2}{2}}_{\text{динамическое давление}}+\underbrace{\rho g h}_{\text{гидростатическое давление}}+\underbrace{p}_{\text{статическое давление}}=const}$$

Уравнение Бернулли: **в установившемся движении идеальной жидкости полное давление, слагающееся из динамического, гидростатического и статического, одинаково для всех поперечных сечений трубки тока**

Следствие уравнения Бернулли

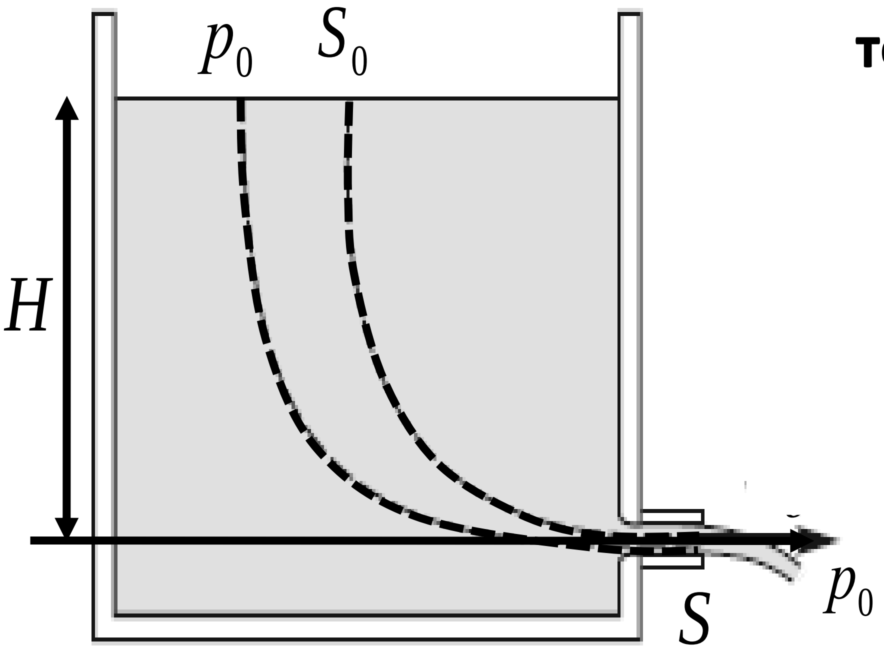
Горизонтально расположенная труба ($h_1 = h_2$)



Давление в жидкости, текущей по горизонтальной трубе переменного сечения, больше в тех сечениях, где скорость движения меньше, и наоборот, меньше в тех сечениях, в которых скорость больше

$$\boxed{\frac{\rho \upsilon^2}{2} + p = \mathrm{const}}$$

Формула Торричелли



Разобьем текущую жидкость на трубки тока: все начинаются на свободной поверхности и заканчиваются на выходном торце сливной трубки

H – высота столба

$$\mathrm{const} = \frac{\rho \upsilon_0^2}{2} + p_0 + \rho g H$$

$$\frac{\rho \upsilon_0^2}{2} + p_0 = \frac{\rho \upsilon^2}{2} + p_0 + \rho g H$$

Если S << S$_0$, то свободная поверхность будет оставаться горизонтальной и опускаться с некоторой малой скоростью υ_0

$$S \ll S_0 \Rightarrow \upsilon_0 \ll \upsilon$$

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} = \rho g H$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2gH}}$$

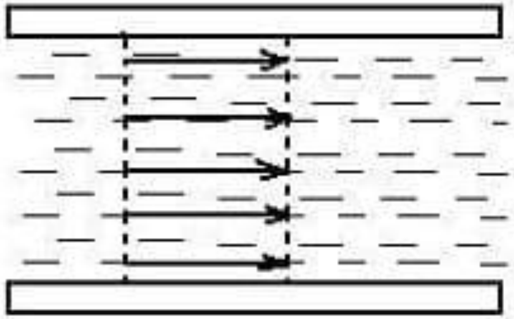
Формула Торричелли

Стационарное течение вязкой жидкости

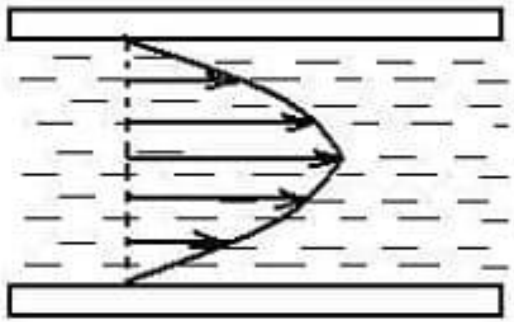
Вязкость (внутреннее трение) – **свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.**

Возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоёв.

Частицы жидкости, прилипающие к пластине, движутся с нею со скоростью υ.

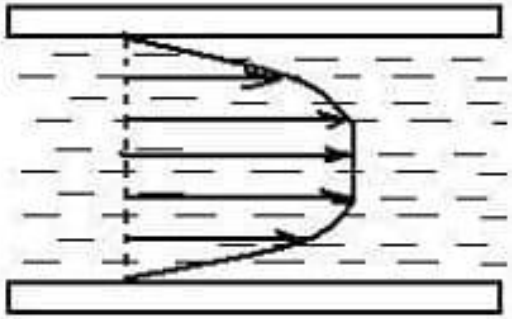


Идеальная жидкость



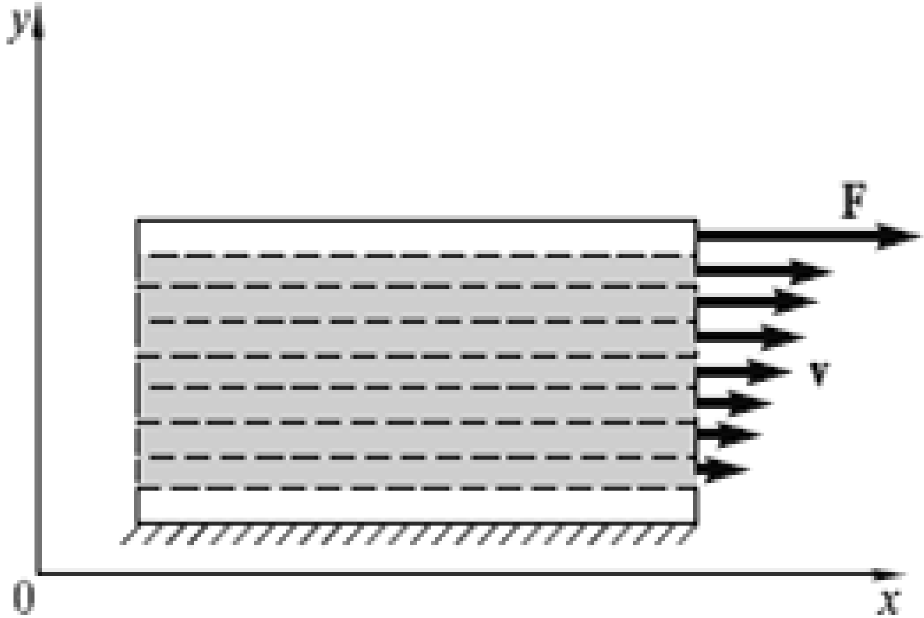
Вязкая жидкость

$R_e < 1000$



Вязкая жидкость

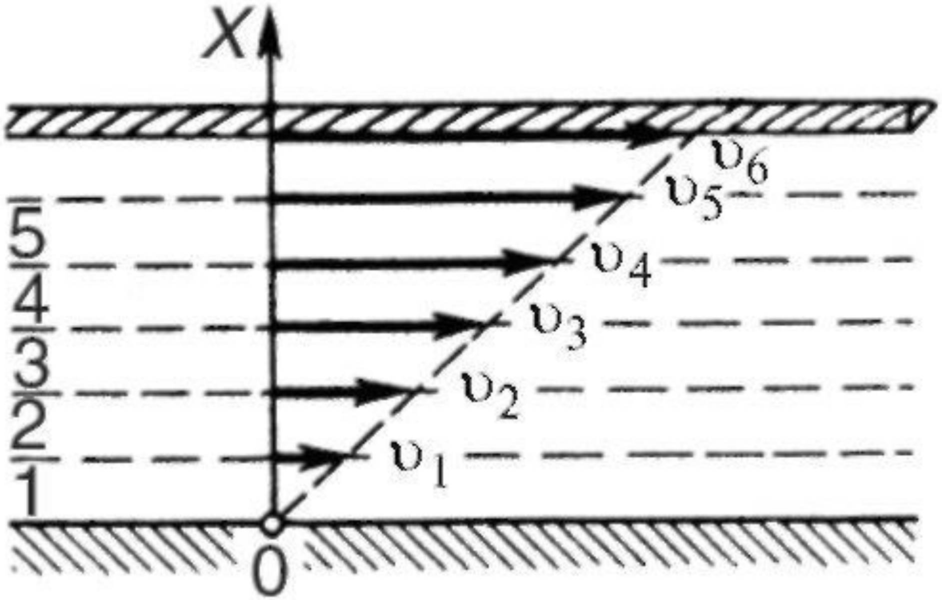
$R_e > 2300$



МКТ: внутреннее трение в жидкостях и газах обусловлено хаотическим движением молекул

При движении жидкости молекулы в целом приобретают некоторый импульс, соответствующий скорости данного слоя. Этот импульс увеличивается при столкновениях с молекулами из соседнего более «быстрого» слоя, либо уменьшается (при столкновениях с молекулами из более «медленного» слоя. В итоге усилие, приложенное к верхней пластине передается нижней.

Градиент скорости – величина, показывающая, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении, перпендикулярном движению слоёв



Сила внутреннего трения

$$F_{тр} = \eta \left| \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} \right| S$$

Формула Ньютона

$$[\eta] = 1 \text{ пуаз} = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$$

коэффициент вязкости – динамическая вязкость

Число Рейнольдса

Определяет условия, когда силами вязкости можно пренебречь

Вязкостью можно пренебречь, если потери энергии потока, обусловленные силами трения, незначительны, т.е. работа сил трения, значительно меньше кинетической энергии

$$A = f_x l \approx \frac{\eta \upsilon}{R} l$$

$$T = \frac{\rho \upsilon^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{\eta \upsilon}{R} << \frac{\rho \upsilon^2}{2}}$$

условие пренебрежения вязкостью

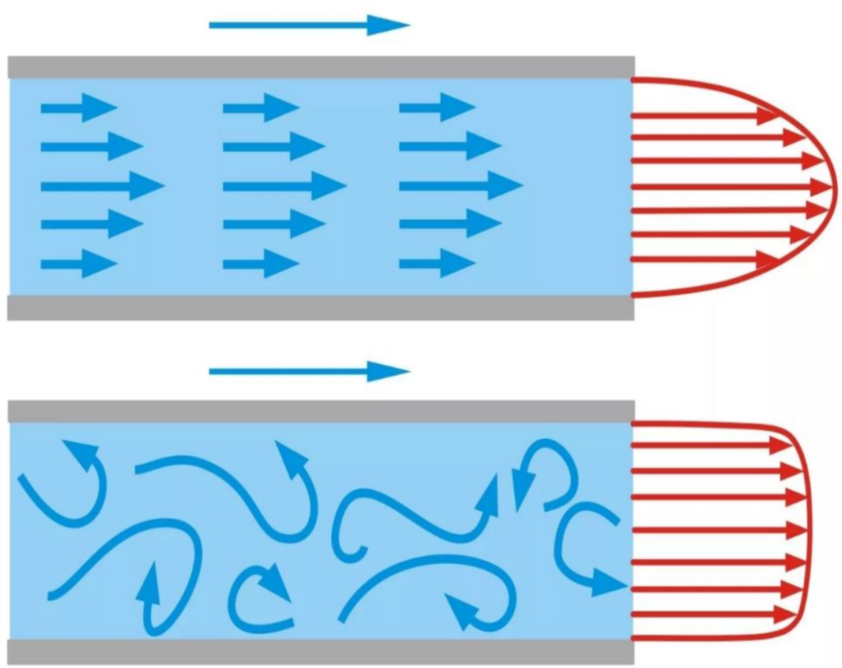
$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon R}{\eta}}$$

Число Рейнольдса

Чем меньше Re, чем большую роль в движении жидкости играют силы вязкости

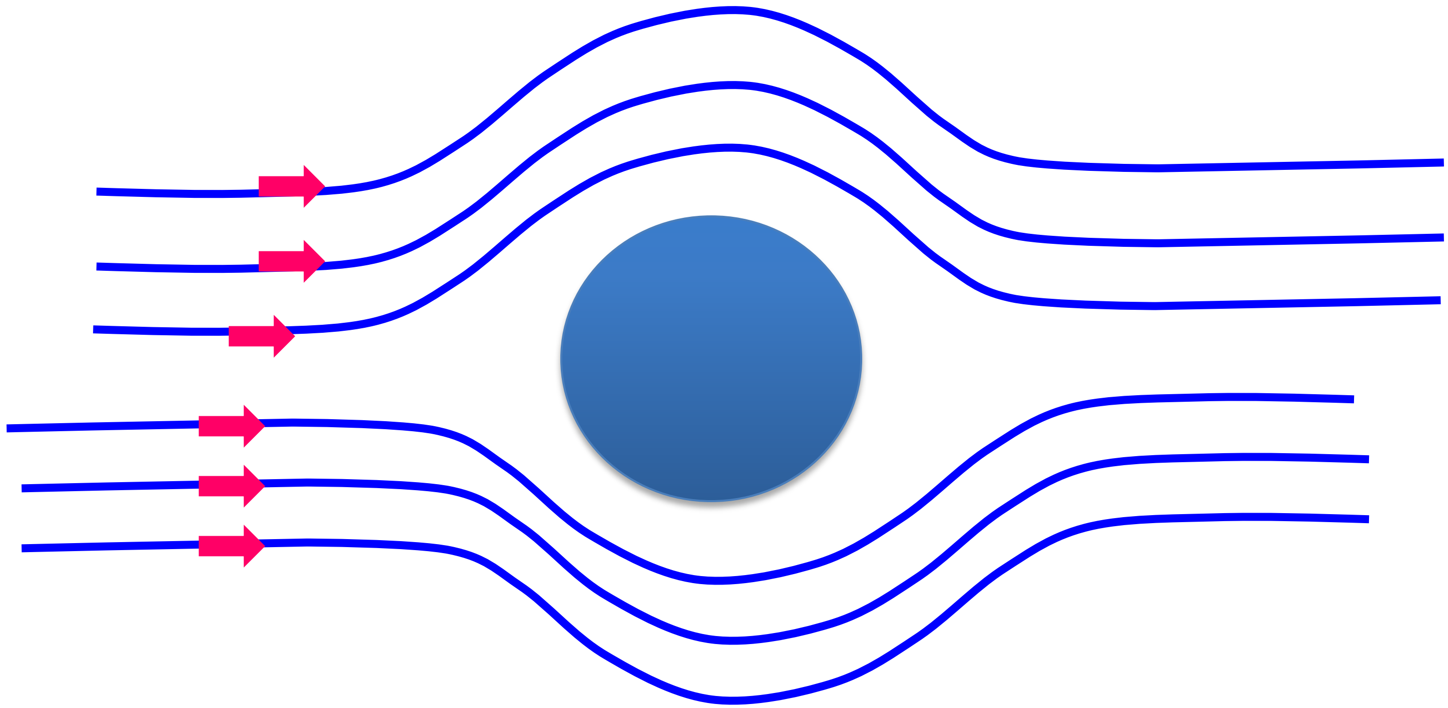
При

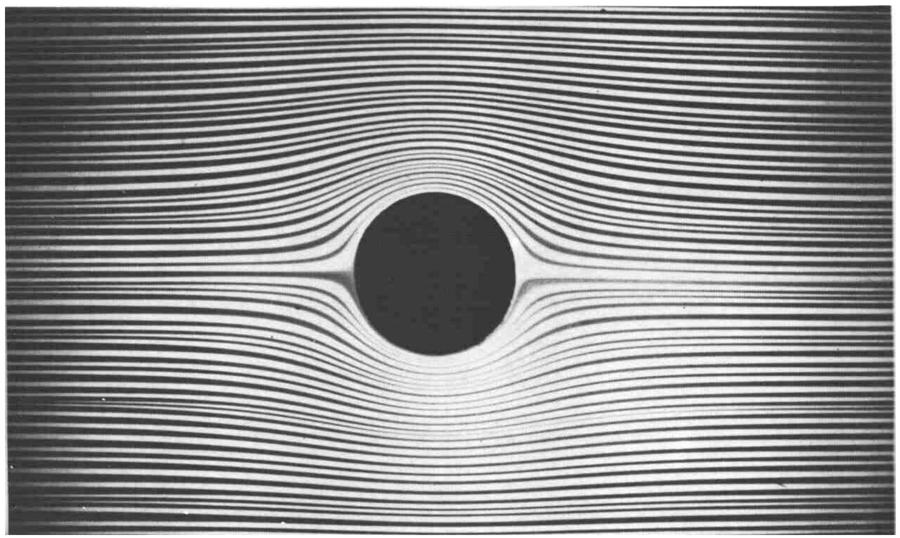
- ✓ малых значениях $Re \leq 1000$ - ламинарное течение;
- ✓ $1000 \leq Re \leq 2000$ переход к турбулентному течению;
- ✓ $Re = 2300$ течение – турбулентное.

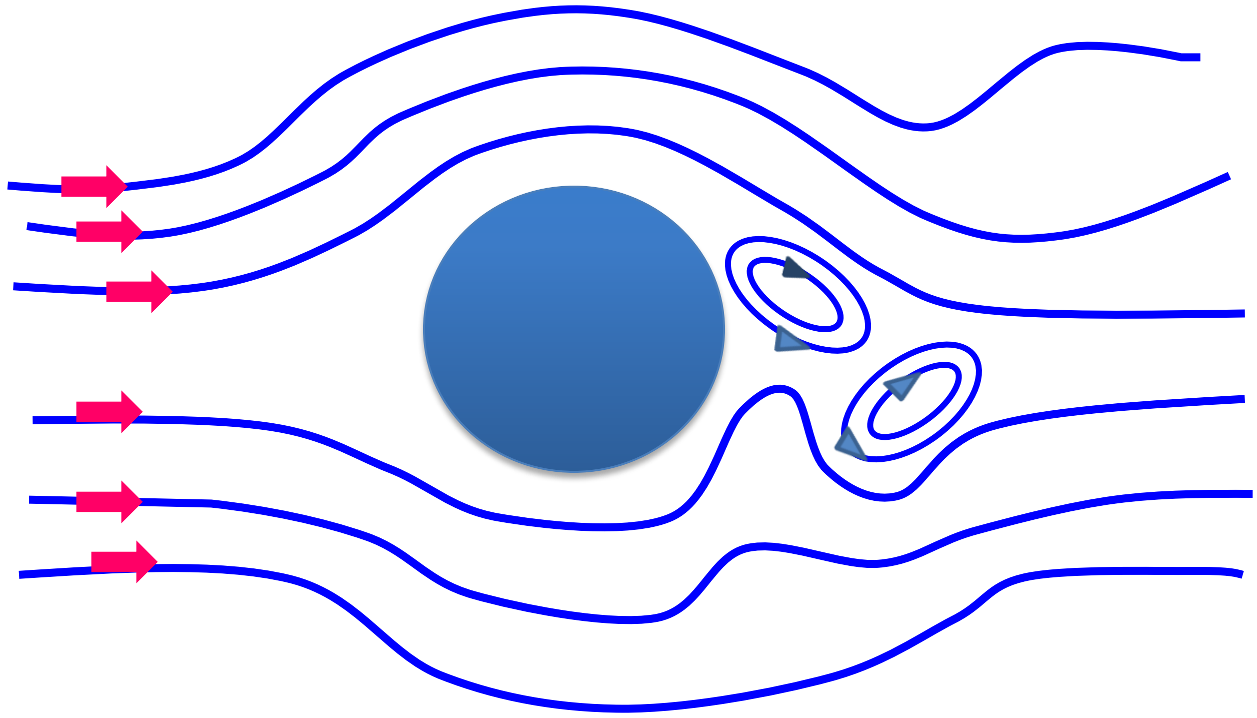


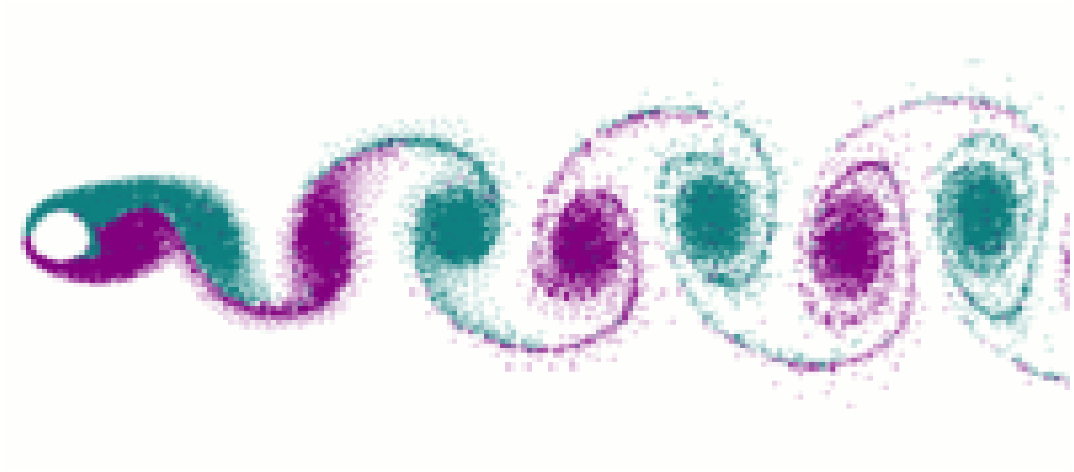
Ламинарное (слоистое) течение – течение, при котором вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними.

Турбулентное (вихревое) течение – течение, при котором вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание слоёв движущейся жидкости (газа).









Вихревая дорожка при обтекании цилиндра