Законы теплового излучения, необходимость введения квантовых представлений

Лекция 3.

доцент ОЭФ ИЯТШ ТПУ, к.физ.-мат.н.
Купрекова Елена Ивановна

Теория Рэлея - Джинса

Термодинамика не в состоянии определить вид универсальной функции. Необходимо привлечь статистические методы.

Д. Релей (1905) и Д. Джинс определяли $f(\omega,T)$, исходя из классических представлений и основываясь на законе о равномерном распределении энергии по степеням свободы.
В равновесии существующее ЭМ поле (излучение) можно разложить по стоячим волнам. При этом на каждую стоячую волну приходится средняя энергия, равная $2\cdot(1/2\kappa T)$, так как ЭМ волна имеет две степени свободы, соответствующие электрическому E и магнитному H полю:

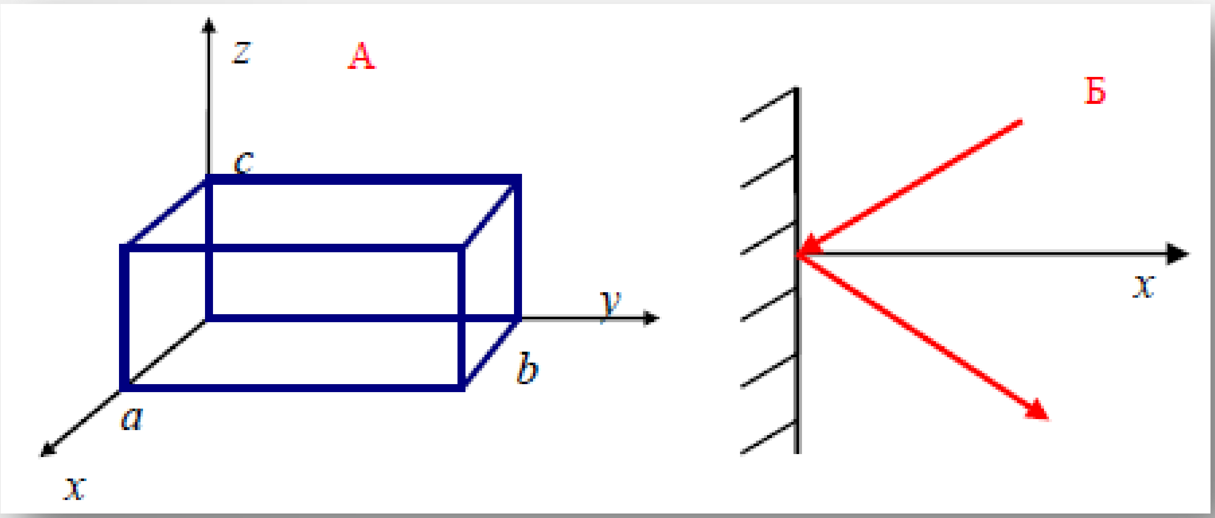
$$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$$

Сосчитаем число стоячих волн, приходящихся на единицу интервала частот.

2) Трехмерный случай

Рассмотрим трехмерный ящик

Учтем, что при отражении от стенки проекция вектора k на направление, перпендикулярное к стенке, т.е. например, k_x меняется на «- k_x» при отражении. Стоячая волна в ящике возникает при наложении 8-ми бегущих волн, отличающихся знаками проекций вектора k



$$1)\left(k_x, k_y, k_z\right);$$
$$2)\left(k_x, -k_y, k_z\right);$$
$$3)\left(k_x, k_y, -k_z\right);$$
$$4)\left(k_x, -k_y, -k_z\right);$$
$$5)\left(-k_x, k_y, k_z\right);$$
$$6)\left(-k_x, -k_y, k_z\right);$$
$$7)\left(-k_x, k_y, -k_z\right);$$
$$8)\left(-k_x, -k_y, -k_z\right)$$

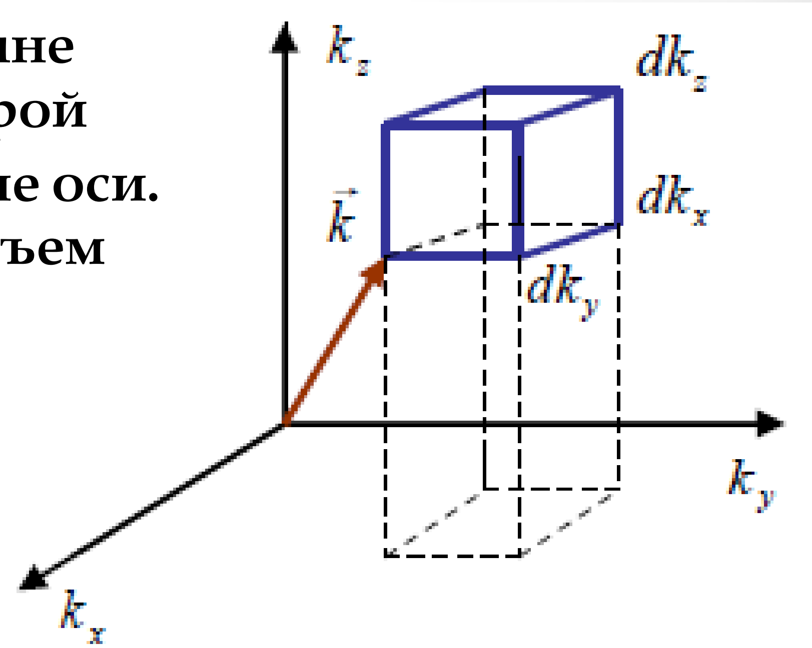
Допустим имеем на стенках при $x = 0, y = 0, z = 0$ узлы, тогда уравнение стоячей волны

$$E = 8E_0 sin k_x x \cdot sin k_y y \cdot sin k_z z \cdot sin\omega t$$

Для того чтобы узлы стоячей волны наблюдались также на стенках $x = a$, $y = b$, $z = c$ (т.е. во всех восьми вершинах рассматриваемой области), необходимо :

$$k_x = \frac{\pi}{a} n_x \quad k_y = \frac{\pi}{b} n_y \quad k_z = \frac{\pi}{c} n_z \qquad n_x, n_y, n_z = 1,2,3,\ldots$$

В k - пространстве каждой стоячей волне соответствует точка, положение которой задается проекцией $\vec{k}$ на координатные оси. На долю каждой точки приходится объем



$$\frac{\pi^3}{abc} = \frac{\pi^3}{V}$$

V - объем пространственной области (ящика).

След-но, плотность точек $\frac{V}{\pi^3}$

Объем бесконечно малого кубика в k - пространстве

$$dk_x\, dk_y dk_z = \frac{\pi^3}{abc} dn_x\, dn_y dn_z$$

Тогда число стоячих волн, заключенном в этом кубике

$$dN = dn_x\, dn_y dn_z = \frac{abc}{\pi^3} dk_x\, dk_y dk_z$$

Поскольку именно модуль волнового вектора определяет частоту волны излучения ($\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}$), рассматрим объем фазового пространства, соответствующий только его изменению. Число стоячих волн, у которых модуль волнового вектора лежит в пределах от k до $k + dk$, равно количеству точек, попадающих в пределы 1/8 части шарового слоя радиуса k и толщины $d\,k$.

$$dN = \frac{V}{8\pi^3} 4\pi k^2 dk = V\frac{k^2 dk}{2\pi^2} = V\frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}$$

Множитель 1/8 появляется из-за того, что при сложении бегущих ЭМВ уже учтены проекции волнового вектора обоих знаков. Поэтому здесь берутся только положительные значения компонент волнового вектора: $\boldsymbol{k_x}, \boldsymbol{k_y}, \boldsymbol{k_z} > 0$.

Полученное выражение необходимо умножить на 2, т.к. вдоль заданного направления могут распространяться 2 ЭМ волны одинаковой частоты, отличающиеся направлением поляризации. Таким образом, число стоячих волн, на единицу объема, в интервале частот от ω до ω +dω равно

$$\boxed{dn_\omega = \frac{2dN}{V} = \frac{2\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3} = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}}$$

Итак, плотность стоячих волн, приходящаяся на единицу частоты (плотность состояний), пропорциональна квадрату частоты. Мы получили важный результат, справедливый как в классической, так и в квантовой физике, и используемый при решении различных задач, где требуется вычислить плотность состояний.

Вспоминаем, что плотность энергии ЭМ поля равна

$$\boxed{w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)}$$

Из статистических соображений Рэлей и Джинс предположили, что на каждую стоячую волну приходится в среднем энергия, равная $2\cdot\frac{1}{2}kT$. Тогда плотность энергии ЭМП на интервал частот $d\omega$

$$u(\omega,T)d\omega = \langle\varepsilon\rangle dn_\omega = 2\frac{kT}{2}\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

закон или формулы Рэлея-Джинса

(1) $$\boxed{u(\omega,T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}kT}$$

спектральная плотность излучения

(2) $$\boxed{f(\omega,T) = \frac{c}{4}u(\omega,T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}kT}$$

испускательная способность АЧТ

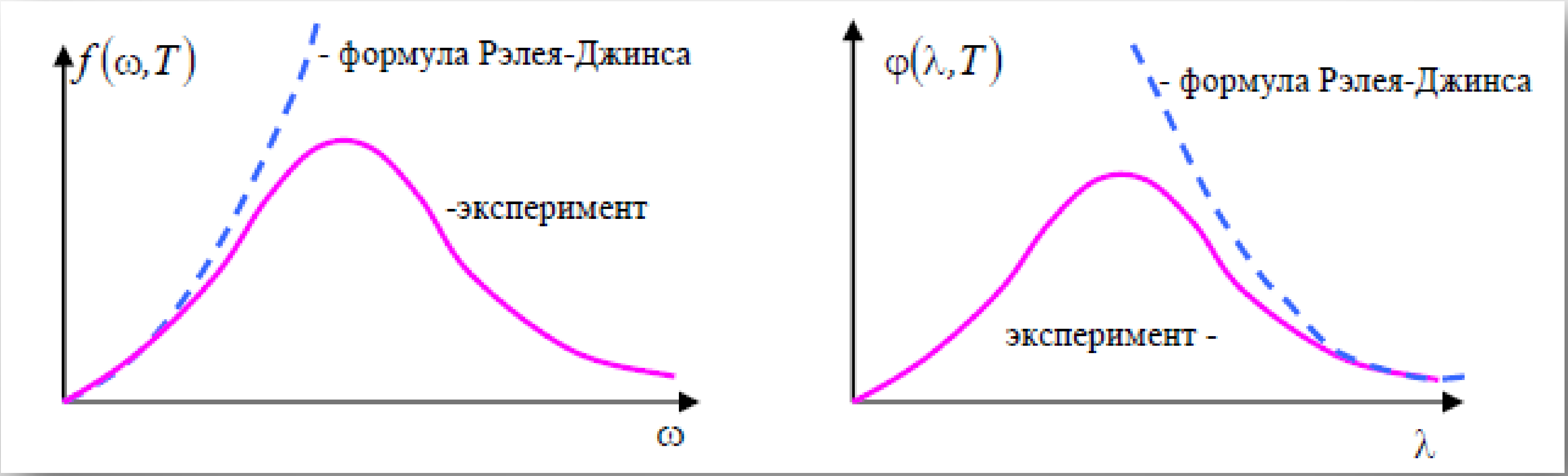
Основные свойства формулы Рэлея-Джинса

а) Формула (2) удовлетворяет критерию Вина:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT = \frac{k}{4\pi^2 c^2} \omega^3 \left(\frac{T}{\omega}\right) = \omega^3 F\left(\frac{T}{\omega}\right)$$

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{kT}{4\pi^2 c^2} \frac{(2\pi c)^2}{\lambda^2} = \frac{2\pi c}{\lambda^5} k\lambda T = \frac{2\pi c}{\lambda^5} \psi(\lambda T)$$

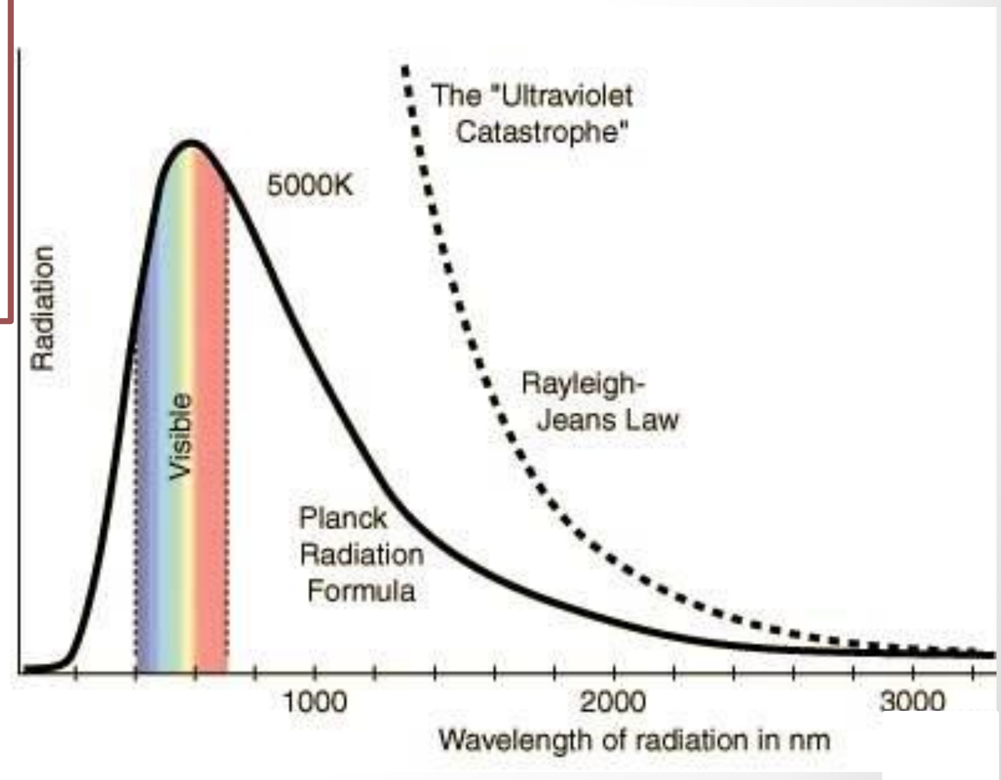
б) Формула хорошо описывает экспериментальную кривую только в длинноволновой ($\lambda > 7 \cdot 10^3$ нм) области спектра



Ультрафиолетовая катастрофа

При расчете энергетической светимости интегрирование формулы Рэлея-Джинса дает расходящееся выражение:

$$R(T) = \int_0^\infty A\omega^2 T d\omega$$
$$= AT\int_0^\infty \omega^2\, d\omega = \frac{AT}{3}\omega^3\Big|_0^\infty \to \infty$$



Вся внутренняя энергия вещества должна мгновенно перейти в излучение, а вещество, охладится до нуля К

Формула Вина

в 1896 г. предложил другой вид для функции $F\left(\frac{\omega}{T}\right)$. Он

- рассмотрел хаотическое движение атомов как квазипериодический процесс,
- средней энергии этого квазипериодического движения сопоставил определенную частоту: $\langle\varepsilon\rangle \sim \langle v^2\rangle \sim \omega$.
- Предложил считать, что каждая мода колебаний является носителем энергии $\varepsilon(\omega)$, но не все моды данной частоты возбуждены.
- Относительное число возбужденных мод задается распределением Больцмана:

$$\frac{\Delta N}{N} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

Тогда для средней энергии, приходящейся на возбужденные моды с частотой ω, имеем

$$\langle\varepsilon\rangle = \varepsilon(\omega)\frac{\Delta N}{N} = \varepsilon(\omega)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

Если $$e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sim e^{-\frac{m\langle \upsilon \rangle^2}{2kT}} \sim e^{-\frac{B\omega}{T}}$$

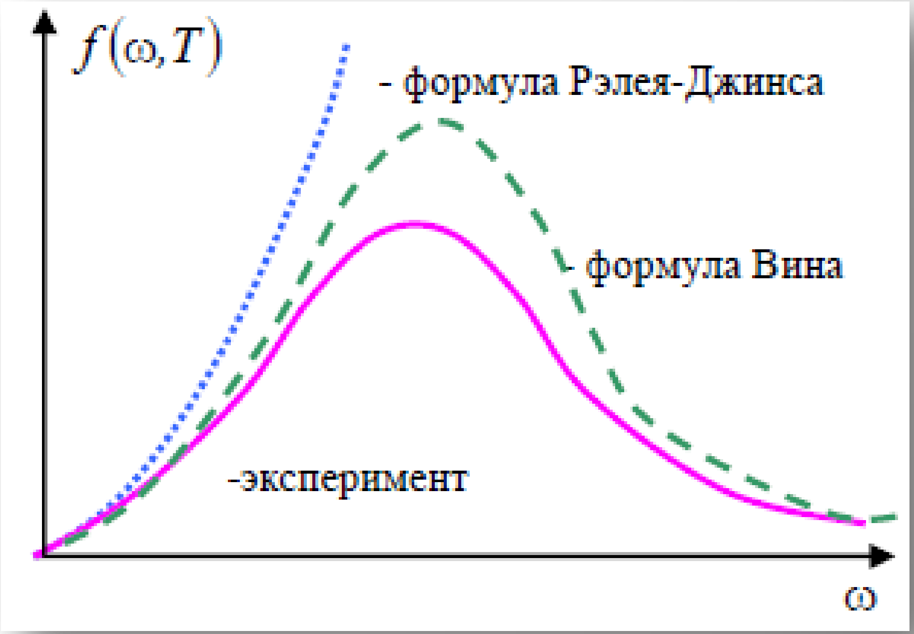
и, по предположению Вина, $\langle \varepsilon(\omega) \rangle \sim \omega$, то, используя выражение для плотности состояний:

$$u(\omega, T)d\omega = C_1 \omega \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{B\omega}{T}} = A\omega^3 e^{-\frac{B\omega}{T}} \mathrm{d}\omega$$

Итак, формула Вина для универсальной функции равна:

$$\boxed{u(\omega, T) = A\omega^3 e^{-\frac{B\omega}{T}}}$$

A и *B* – постоянные коэффициенты. позволила описать эксперимент в коротковолновой области и довольно близка к общей экспериментальной зависимости.



Однако противоречит эксперименту Луммера и Прингсгейма (1899г.) в области низких частот

ГИПОТЕЗА КВАНТОВ

С классической точки зрения вывод формулы Рэлея-Джинса является безупречным и расхождение этой формулы с опытом указывало на существование неизвестных закономерностей, несовместимых с представлениями классической физики.

В октябре 1900 г. немецкий физик М. Планк сначала эмпирически, а затем, обосновав через 2 месяца теоретически, записал формулу для спектральной плотности излучения черного тела :

$$\boxed{f(\omega, T) = \frac{A\omega^3}{exp\left(\frac{B\omega}{T}\right) - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}}$$

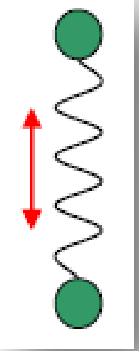
$$\boxed{u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}}$$

где ħ – коэффициент пропорциональности между энергией и циклической частотой, получил название постоянной Планка.

Сначала эту формулу Планк получил просто интерполяционным путем (комбинация закона Рэлея-Джинса и формулы Вина). Далее при теоретическом выводе ему пришлось ввести гипотезу квантов. 14 декабря 1900 г. - день рождения квантовой физики.

ОСНОВНОЙ ВОПРОС – ЧТО ИЗЛУЧАЕТ?

При выводе формулы Планк выдвинул гипотезу, в корне противоречащую классической физике: излучение (и поглощение) происходит не непрерывно, а конечными порциями – квантами света или квантами энергии.



- ✓ Излучают осцилляторы (атомы, молекулы)
- ✓ Они могут находиться только в некоторых избранных стационарных состояниях, где их энергия является целым кратным наименьшего количества энергии $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots n\varepsilon_0$. Переход из одного стационарного состояния в другое может происходить скачком при излучении (поглощении) такого же количества энергии: $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots n\varepsilon_0$., где $\varepsilon_0 = \hbar\omega$ – отдельная порция излучения, n – количество порций, испускаемых осциллятором на частоте ω.

Динамическое равновесие осуществляется посредством постоянного обмена квантами между полем излучения и осциллятором. При данной T возбуждены все энергетические уровни, но с разными вероятностями. Поэтому требуется вычислить среднюю энергию осциллятора в этом состоянии статистического равновесия.

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Впервые в физике появилась новая фундаментальная константа – постоянная Планка - определена из опыта.

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34} Дж \cdot с = 6{,}62 \cdot 10^{-27} эрг \cdot с$$

$$\hbar = 6{,}62 \cdot 10^{-34} Дж \cdot с = 6{,}62 \cdot 10^{-27} эрг \cdot с$$

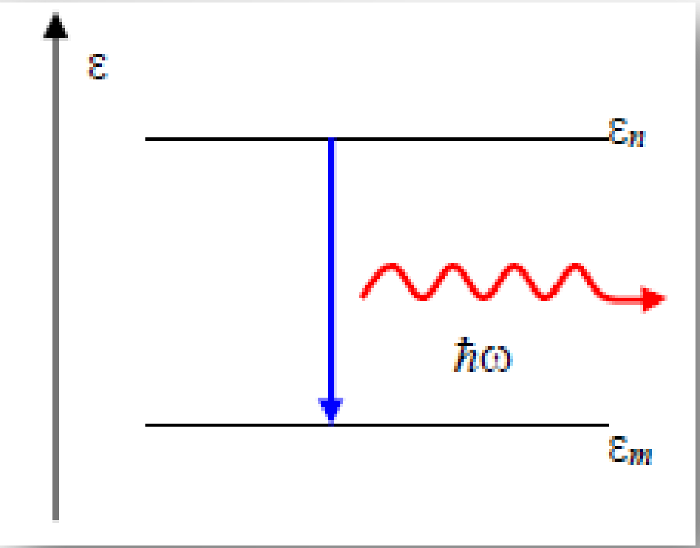
имеет размерность «энергия × время». Поэтому её иногда называют квантом действия по аналогии с величиной той же размерности в классической механике.

Если в условиях данной задачи физические величины, имеющие размерность действия (Дж·с), значительно больше ħ, то применима классическая механика, в противоположном – квантовая.

Квантовая механика чрезвычайно важна для инженерного образования, так как все жизнеобеспечивающие среды организованы по законам квантовой механики, составляющим основу многих практически важных наук (металлургии, твердотельной электроники и т.д.)

Вывод формулы Планка по Эйнштейну

В 1916 г. А. Эйнштейн дал сравнительно простой вывод формулы Планка, используя для моделирования механизма излучения переходы в 2х-уровневой системе и применив к описанию процессов вероятностный подход



Допустим $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ – значения энергий, которые характеризуют состояние рассматриваемой системы (атом). Рассмотрим двухуровневую систему атомов с дискретным энергетическим спектром ε_m и ε_n. В ε - пространстве этим значениям энергий сопоставим энергетические уровни ε_m и ε_n ,

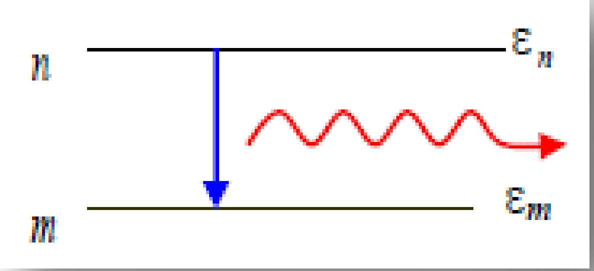
а состояние системы можем описывать заданием положения этих уровней. Процесс излучения - переход системы с верхнего уровня на нижний. При этом энергия излучения равна:

$$\omega_{nm} = \varepsilon_n - \varepsilon_m$$

То есть для такого процесса выполняется закон сохранения энергии: энергия испускаемого или поглощаемого фотона равна разности энергий соответствующих стационарных состояний

1) СПОНТАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Эйнштейн ввел в рассмотрение два типа переходов, сопровождаемых излучением, и переход, связанный с поглощением кванта

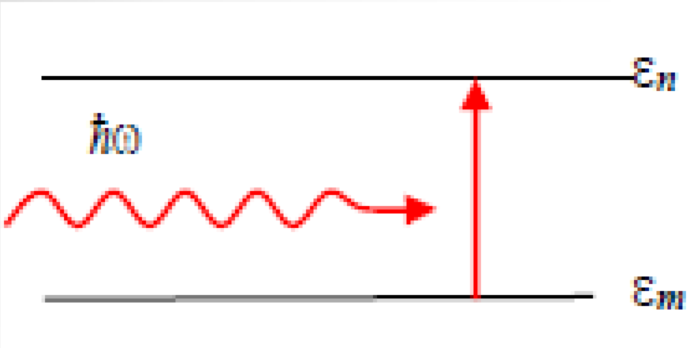


Спонтанное излучение – самопроизвольный переход с ε_n на ε_m, без участия внешних полей, носит статистический характер. Предсказать момент перехода невозможно. Испускание фотона - событие случайное, т.е. не можем с достоверностью предсказать, произойдет или нет в данном атоме переход в течение dt, следующего за моментом t, но можем только указать его вероятность. Пусть в $t = \tau$ в состоянии n находилось N_n атомов, а через промежуток времени dt часть атомов перешла в m, а часть осталась в состоянии n. Тогда за dt число переходов $n \to m$ пропорционально числу атомов на верхнем уровне N_n. Если вероятность спонтанных переходов обозначить A_{nm}, то среднее число таких переходов можно записать:

$$dN_{nm}^{cn} = A_{nm} N_n dt$$

Статистический характер спонтанного излучения приводит к тому, что фазы, направления распространения и состояния поляризации световых волн, испускаемых атомами, не согласованы друг с другом - спонтанное излучение *некогерентно*.

2) ПОГЛОЩЕНИЕ



Это процесс возбуждения атомов: переходы из основного состояния в возбужденное за счет поглощения фотонов в ЭМП. Переход всегда вынужденный, описывает резонансный процесс, в котором система, переходя из состояния ε_m в состояние ε_n поглощает квант энергии:

$$\boxed{\hbar\omega_{nm} = \varepsilon_n - \varepsilon_m}$$

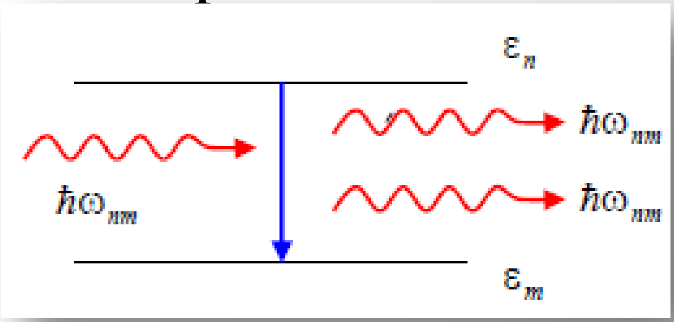
Вероятность такого процесса в единицу времени пропорциональна плотности энергии ЭМП и некоторому коэффициенту B_{mn} - вероятность возбуждения атома. Среднее число переходов из основного состояния в возбужденное за промежуток времени от t до $t + dt$ пропорционально и числу атомов N_m в основном состоянии:

$$dN_{nm}^{\text{вын}} = B_{mn} N_m u(\omega, T) dt$$

3) ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Чтобы получить согласующуюся с опытом формулу Планка, необходимо предположить, что ЭМП вызывает не только переходы из основного состояния в возбужденное, но и из возбужденного состояния в основное, сопровождающиеся испусканием фотонов. Такие переходы под действием внешнего поля получили название вынужденного излучения или отрицательного поглощения.

Вынужденное излучение обладает замечательными свойствами (П. Дирак 1927 г.): в каждом акте вынужденного испускания происходит увеличение на единицу числа фотонов в той моде излучения, под действием которой произошел переход. Все фотоны одной моды тождественны, т.е. новый фотон неотличим от фотонов, вызывающих его испускание. Частота, фаза, направление распространения и поляризация волн, испущенных при вынужденных переходах, точно такие же, как у излучения, вызвавшего переходы, т.е. эти излучения когерентны.



Число вынужденно испущенных фотонов за промежуток $t \div t + dt$ пропорционально заселенности верхнего энергетического уровня N_n, спектральной плотности излучения $u(\omega,T)$ и вероятности вынужденных переходов из возбужденного состояния в основное B_{nm}

$$dN_{nm}^{\text{вын}} = B_{nm} N_n u(\omega, T) dt$$

Полное число переходов за dt из возбужденного состояния в основное будет определяться совокупностью спонтанного и вынужденного излучения.

Пусть состояние системы равновесно, тогда имеет место детальное равновесие:

$$dN_{nm}^{\text{сп}} + dN_{nm}^{\text{вын}} = dN_{mn}^{\text{вын}}$$

$$A_{nm} N_n dt + B_{nm} N_n u(\omega, T) dt = B_{mn} N_m u(\omega, T) dt$$

$$A_{nm} N_n + B_{nm} N_n u(\omega_{nm}) = B_{mn} N_m u(\omega_{nm})$$

Таким образом, в состоянии равновесия имеем для отношения «заселенностей» состояний:

$$\boxed{\frac{N_n}{N_m} = \frac{B_{mn} u(\omega_{nm})}{A_{nm} + B_{nm} u(\omega_{nm})}}$$

Величины A_{nm}, B_{nm}, B_{mn} - коэффициенты Эйнштейна - являются характеристиками только самой системы (атома, молекулы) и могут зависеть лишь от частоты

Случай 1: Энергетические уровни n m – простые, невырожденные и не кратные.

Тогда для данной пары уровней $B_{nm} = B_{mn}$. Действительно, при очень высокой Т плотность энергии $u(\omega_{nm})$, которой пропорциональны вынужденные переходы, становится настолько большой, что спонтанным излучением можно пренебречь по сравнению с индуцированными переходами. Тогда

$$B_{nm}N_n = B_{mn}N_m$$

Но в равновесии при $\frac{\hbar\omega}{kT} \to \infty$ населенности уровней выравниваются ($N_n = N_m$), поэтому получаем:

$$B_{nm} = B_{mn}$$

Равенство, полученное для предельного случая $T \to \infty$, справедливо всегда, в том числе и в отсутствие теплового равновесия, т.к. коэффициенты B_{nm} и B_{mn} зависят только от свойств атомов и не зависят от внешних условий, в которых происходят переходы.

Случай 2: Энергетические уровни n m – вырожденные или кратные.

Вырождение заключается в том, что некоторая физическая величина, характеризующая данную систему (атом) имеет одинаковое значение для различных состояний системы. Число таких различных состояний (способов реализации), которым отвечает одно и то же значение данной физической величины, называется кратностью вырождения этой величины. При этом уровни m, n могут иметь разный статистический вес. Пусть g_m – статистический вес уровня m, а g_n – статистический вес уровня n. Тогда при $T \to \infty$ получаем следующее равенство

$$B_{nm} g_n = B_{mn} g_m$$

Если система атомов находится в равновесии, то атомы населяют энергетические уровни так, как это следует из распределения Больцмана. Тогда вероятность заселения уровней m и n:

$$W_m = C g_m exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)$$

$$W_n = C g_n exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)$$

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)}{g_m exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)} = \frac{g_n}{g_m} exp\left(-\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{kT}\right) = \frac{B_{mn} u(\omega, T)}{A_{nm} + B_{nm} u(\omega, T)}$$

Отсюда выражаем спектральную плотность излучения:

$$u(\omega, T) = \frac{g_n A_{nm}}{g_m B_{mn} exp\left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{kT}\right) - g_n B_{nm}}$$

Теперь, устремляя $T \rightarrow \infty$ и помня, что $\hbar\omega_{nm} = \varepsilon_n - \varepsilon_m$, получаем

$$exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad u(\omega, T) \rightarrow \infty$$

Это возможно получить только при выполнении условия $B_{nm} g_n = B_{mn} g_m$. Тогда, упрощая, можем записать

$$u(\omega, T) = \frac{g_n A_{nm}}{g_n B_{nm}\left[exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT} - 1\right)\right]} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}\left[exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT} - 1\right)\right]}$$

Чтобы определить отношение $\frac{A_{nm}}{B_{nm}}$, не производя дополнительных вычислений, воспользуемся формулой Рэлея-Джинса, которая справедлива в пределе $\omega \to 0$ или $\hbar\omega \ll kT$. Если $\frac{\hbar\omega}{kT}$, то, раскладывая в ряд:

$$exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$$

тогда

$$u(\omega, T) \approx \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{kT}{\hbar\omega}$$

С другой стороны, формула Рэлея-Джинса в рассматриваемом пределе :

$$\boxed{u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT}$$

Таким образом, опуская индексы n и m, теперь можем записать формулу Планка

$$\boxed{u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}}$$

$$\boxed{f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}}$$

Свойства формулы Планка

$$f(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$$

1) Формула Планка согласуется с экспериментом при всех значениях частоты ω, или длины волны λ.

2) Удовлетворяет критерию Вина

$$f(\omega,T)=A\omega^3F\left(\frac{\omega}{T}\right)$$

3) В предельном случае больших частот излучения (ω→∞, малые длины волн): $\hbar\omega >> kT$, $exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) >> 1$, переходит в формулу Вина:

$$f(\omega,T)=\frac{\hbar}{4\pi^2c^2}\omega^3exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)$$

4) В предельном случае малых частот (при ω→0 или больших длинах волн): $\hbar\omega >> kT$, $exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\approx 1+\frac{\hbar\omega}{kT}$, переходит в формулу Рэлея-Джинса

$$f(\omega,T)=\frac{\omega^2}{4\pi^2c^2}kT$$

Свойства формулы Планка 2

$$\boxed{f(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}}$$

5) Интегрируя по всем частотам, получаем закон Стефана-Больцмана:

$$R(T)=\int_0^\infty f(\omega,T)d\omega=\sigma T^4$$

$$\boxed{\sigma=\frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3}}$$

6) Запишем «по Планку» испускательную способность абсолютно черного тела, перейдя от ω к λ :

$$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$$

$$\varphi(\lambda,T)=f(\omega,T)\frac{d\omega}{d\lambda}$$

$$\varphi(\lambda,T)=\frac{\hbar(2\pi c)^3}{4\pi^2c^2\lambda^3}\frac{\frac{2\pi c}{\lambda^2}}{exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}\right)-1}=\frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda^5}\frac{1}{exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}\right)-1}$$

Свойства формулы Планка 3

$$f(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{1}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$$

7) Получаем закон смещения Вина $T\lambda_{max}=b$:

$$\frac{d\varphi(\lambda,T)}{d\lambda}=0=4\pi^2\hbar c^2\left[\frac{1}{\lambda^5 exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}\right)-1}\right]'_\lambda=$$

$$\frac{-5\lambda^{-6}}{exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}\right)-1}+\frac{\lambda^{-5}exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}\right)\cdot\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}\lambda^{-2}}{\left[exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}\right)\ -1\right]^2}$$

Корни $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$ дают минимум функции $\varphi(\lambda,T)$. Обозначим $\frac{2\pi c\hbar}{\lambda_{max}kT}=x$ и тогда получаем трансцендентное уравнение:

$$-5+\frac{xe^x}{e^x-1}=0 \qquad xe^x-5(e^x-1)=0$$

Его решение: $$x_0=\frac{2\pi c\hbar}{\lambda_{max}kT}=4{,}956 \Longrightarrow \boxed{\lambda_{max}T=b=\frac{2\pi c\hbar}{4{,}956\ k}}$$