ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.В. Дробчик, М.П. Шумский,
В.А. Дубовик, Ф.А. Симанкин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 531.8
Д75

Дробчик В.В.

Д75 Теоретическая механика. Часть 1: учебное пособие / В.В. Дробчик, М.П. Шумский, В.А. Дубовик, Ф.А. Симанкин; Томский политехнический университет. − Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 116 с.

В пособии изложены разделы теоретической механики – статика и кинематика. Рассмотрены варианты тестовых заданий, представлены индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов. Показаны примеры расчета.

Предназначено для студентов, обучающихся по всем техническим направлениям подготовки бакалавров и специальностям дневной и заочной форм обучения.

УДК 531.8

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГАСУ
Т.А. Ковалевская

Кандидат физико-математических наук, доцент ТГУ
М.А. Шеремет

ВВЕДЕНИЕ

Механика наряду с математикой и физикой имеет большое общеобразовательное значение: способствует развитию логического мышления, приводит к пониманию весьма широкого круга явлений, относящихся к простейшей форме движущейся материи – механическому движению. Дисциплина «Теоретическая механика» является базой для создания надежных и экономичных конструкций, как на стадии проектирования, так и при изготовлении и эксплуатации.

К основным задачам, рассматриваемым в первой части пособия, относится изучение:

- общих законов равновесия материальных тел;
- законов движения материальных тел.

Изучение методов и приемов теоретической механики вырабатывает навыки для постановки и решения прикладных задач. На базе минимального количества материала обучаемому сообщаются такие знания, которые позволят ему в дальнейшем всю необходимую информацию находить и усваивать самостоятельно.

Для изучения курса нужно иметь соответствующую математическую подготовку. Необходимо использовать положения и методы векторной алгебры, уметь дифференцировать функции одной переменной, знать основы теории кривых второго порядка, находить интегралы от простейших функций, решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

В учебном пособии приведены примеры решения типовых задач по разделам статика и кинематика. Решения задач сопровождаются рядом указаний, которые должны помочь студенту при самостоятельном изучении материала.

Учебное пособие будет полезным студентам технических специальностей и направлений бакалаврской подготовки.

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. Силы, сходящиеся в одной точке

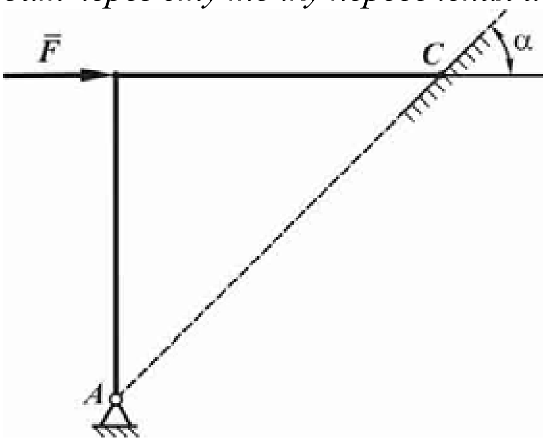
● Уравнения равновесия пространственной сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum F_{kz} = 0.$$

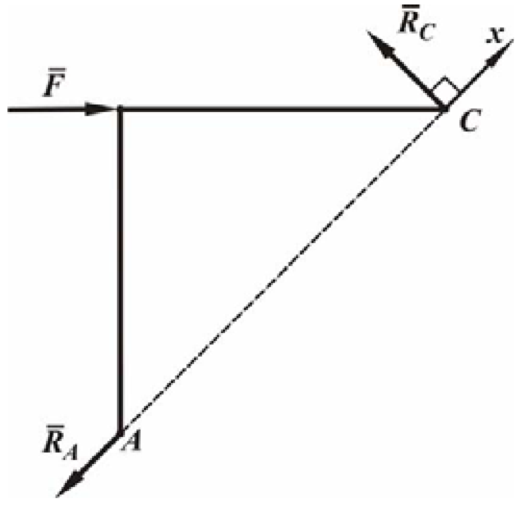
● Уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0.$$

При решении некоторых задач можно использовать теорему о трех силах: *Если тело находится в равновесии под действием трех сил и линии действия двух сил пересекаются, то линия действия третьей силы проходит через эту точку пересечения и все три силы лежат в одной плоскости.*



Пример. Рама закреплена в точке A шарнирно, в точке C опирается на гладкую поверхность; сила $F = 20$ Н; $\alpha = 45^{\circ}$. Необходимо определить реакцию шарнира R_A.



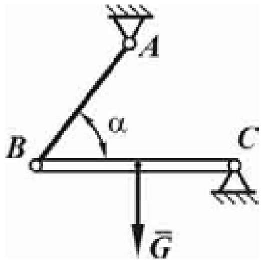
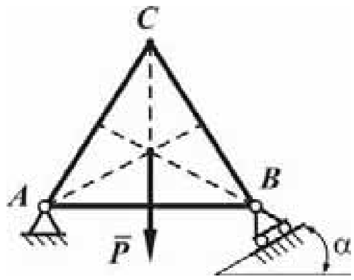
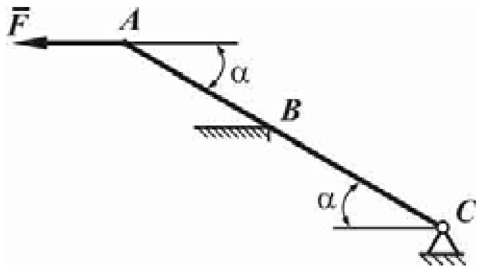
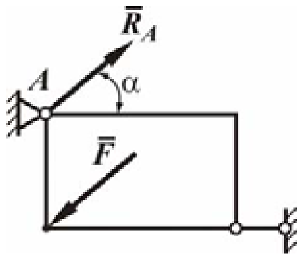
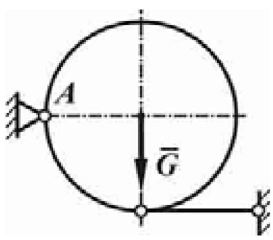
Решение. Линии действия сил $\bar{F}$ и $\bar{R}_C$ пересекаются в точке C. Это определяет направление реакции $\bar{R}_A$. Составляем уравнение равновесия (проецируем все силы, действующие на раму, на ось x):

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F\cos 45^{\circ} - R_A = 0; \quad R_A = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14{,}1\ \text{Н}.$$

Применение теоремы о трех силах позволило обойтись при решении задачи составлением одного уравнения равновесия.

Таблица 1

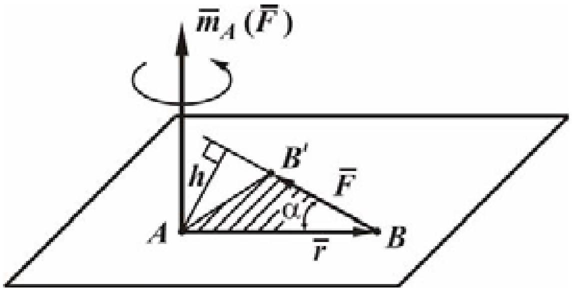
Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Вес однородной балки BC $G = 600\sqrt{3}$ Н, $\alpha = 60^{\circ}$. Реакция шарнира C равна **…** Н. **Ответ**: 600 Н.	
2	Вес однородной равносторонней пластины $P = 4\sqrt{3}$ Н; $\alpha = 30^{\circ}$. Реакция $R_B = \ldots$ Н. **Ответ**: 4 Н.	
3	$AB = BC$, $F = 6$ Н. Балка AC невесома; $\alpha = 30^{\circ}$. Реакция $R_C = \ldots$ Н. **Ответ**: 6 Н.	
4	Пластина невесомая, сила $F \neq 0$. Угол $\alpha = \ldots$ градусов. **Ответ**: 90°	
5	Вес диска $G = 30\sqrt{2}$ Н. Реакция шарнира $R_A = \ldots$ Н. **Ответ**: 60 Н.	

1.2. Момент силы относительно точки

● Линия действия силы $\bar{F}$ – прямая, вдоль которой направлен вектор силы.

● Плечо силы $\bar{F}$ относительно точки A – есть длина перпендикуляра, опущенного из точки A на линию действия силы $\bar{F}$.



● Момент силы $\bar{F}$ относительно точки A равен векторному произведению вектора $\bar{r}$ на силу $\bar{F}$.

$$\bar{m}_A(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F};$$

$$\left|\bar{m}_A(\bar{F})\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h.$$

1.3. Пара сил

● Парой сил называется система двух равных по модулю, противоположных по направлению параллельных сил.

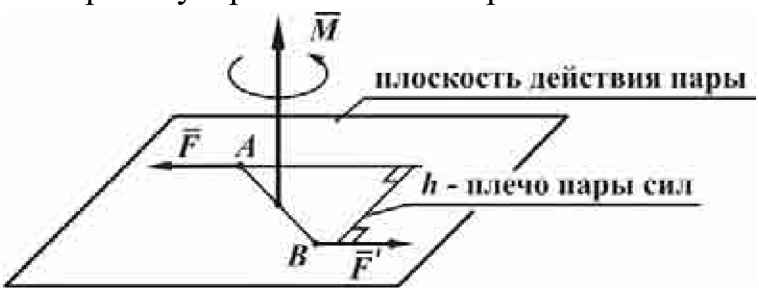
● Плоскость, в которой расположена пара сил, называется плоскостью действия пары.

● Плечом пары h называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару.

● Моментом пары называется вектор, направленный перпендикулярно к плоскости её действия по правилу правого винта и равный по величине произведению модуля одной из сил пары на её плечо.

$$\bar{M} = \overline{BA} \times \bar{F};$$

$$\left|\bar{M}\right| = F \cdot h.$$



● Момент пары – свободный вектор.

● Теорема о сумме моментов сил, составляющих пару:

$$\bar{M}_O(\bar{F}) + \bar{M}_O(\bar{F}') = \overline{BA} \times \bar{F} = \bar{M},$$

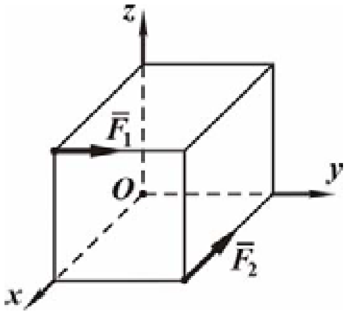
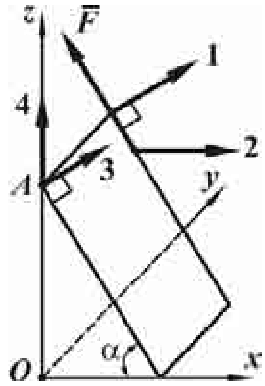
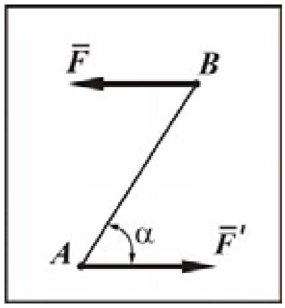
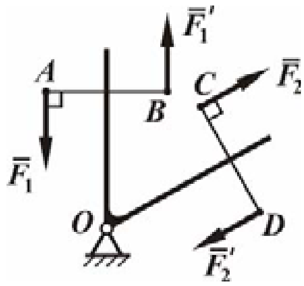
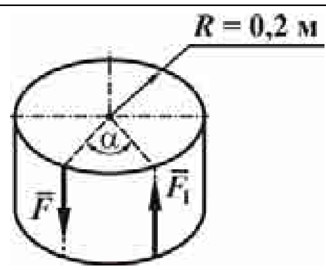
где O – произвольная точка.

● Две пары сил эквивалентны, если равны их моменты $\bar{M}_1 = \bar{M}_2$.

● Система пар сил с моментами $\bar{M}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ эквивалентна одной паре с моментом $\bar{M} = \sum \bar{M}_k$.

Таблица 2

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Вектор момента силы … относительно вершины O куба составляет с осью Oz угол 45°. **Ответ**: $\overline{F}_1$.	
2	$\alpha = 60^{\circ}$; вектор момента силы $\overline{F}$ относительно точки A совпадает по направлению с вектором № … **Ответ**: 3.	
3	В паре сил $F = F' = 30\,\text{Н}$, $AB = 0{,}2\sqrt{3}\,\text{м}$; $\alpha = 60^{\circ}$. Момент пары равен … $\text{Н}\cdot\text{м}$. **Ответ**: 9.	
4	$F_1 = F_1' = 12\,\text{Н}$, $F_2 = F_2' = 6\,\text{Н}$, $AB = 4\,\text{м}$, $CD = 5\,\text{м}$. Момент пары, эквивалентной данным парам, … $\text{Н}\cdot\text{м}$. **Ответ**: 18.	
5	$F = F_1 = 5\,\text{Н}$; $\alpha = 60^{\circ}$; момент пары сил $(\overline{F}, \overline{F}_1)$ равен … $\text{Н}\cdot\text{м}$. **Ответ**: 1.	

1.4. Приведение системы сил к центру

● Лемма о параллельном переносе силы. Силу, не нарушая ее действия на абсолютно твёрдое тело, можно перенести параллельно в любую точку тела, присоединяя пару сил с моментом, равным моменту силы относительно этой точки.

● Главный вектор системы сил:

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_k ;$$
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} ,$$

где $F_x = \sum F_{kx}$; $F_y = \sum F_{ky}$; $F_z = \sum F_{kz}$.

● Главный момент системы сил относительно точки O:

$$\bar{M}_O = \sum \bar{m}_O\left(\bar{F}_k\right);$$
$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} ,$$

где $M_{Ox} = \sum m_x\left(\bar{F}_k\right)$; $M_{Oy} = \sum m_y\left(\bar{F}_k\right)$; $M_{Oz} = \sum m_z\left(\bar{F}_k\right)$.

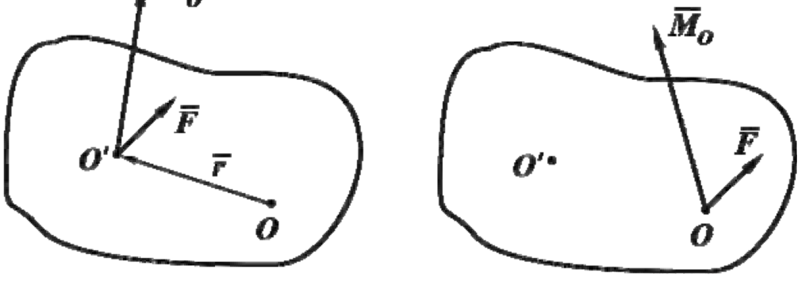
Вектор $\bar{M}_O = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k$, где $\bar{r}_k$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы.

●Теорема Пуансо (основная теорема статики). Произвольная система сил, действующих на твердое тело, эквивалентна главному вектору $\bar{F}$, приложенному в любой точке O тела (центре приведения), и паре сил с моментом, равным главному моменту $\bar{M}_O$ относительно этой точки:

$$\left\{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n\right\} \quad \left\{\bar{F}; \bar{M}_O\right\}.$$

● Две системы сил эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их главные векторы и главные моменты относительно одной и той же точки.

● Зависимость главного момента системы сил от центра приведения

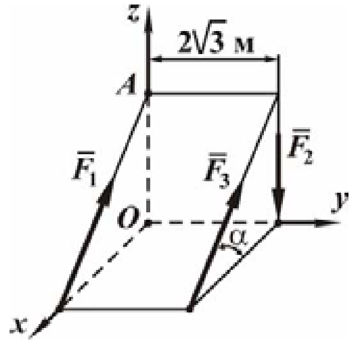
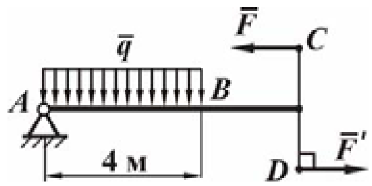
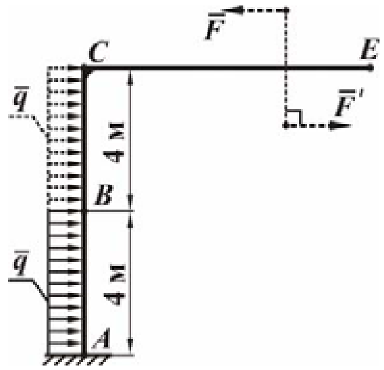
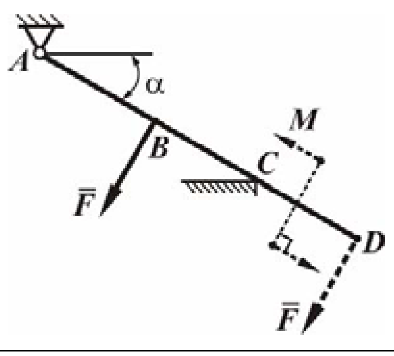


$$\bar{M}_O = \bar{M}_{O'} + \bar{m}_O(\bar{F}),$$

где $\overline{m}_O(\overline{F})$ – момент главного вектора, приложенного в центре O', относительно центра O.

Таблица 3

Тестовые задания

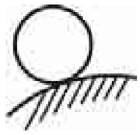
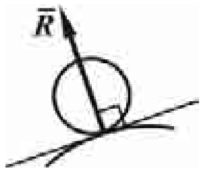
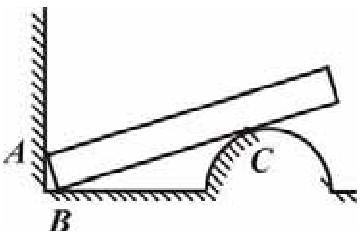
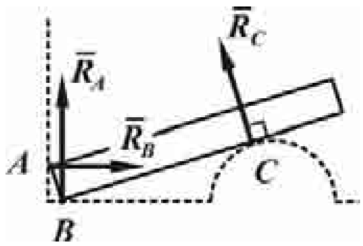
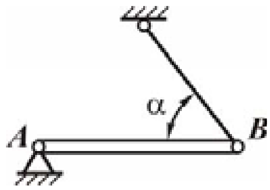
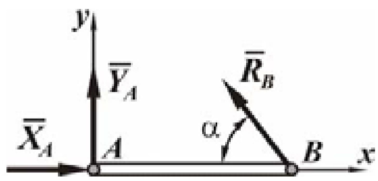
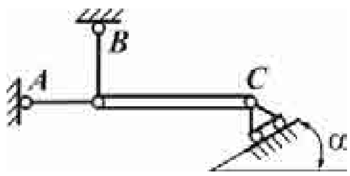
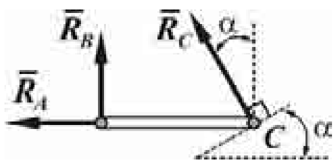
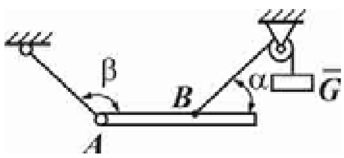
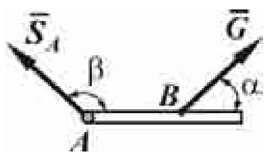
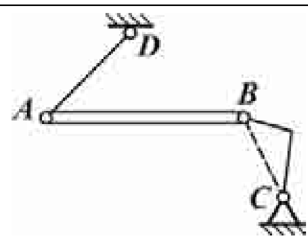
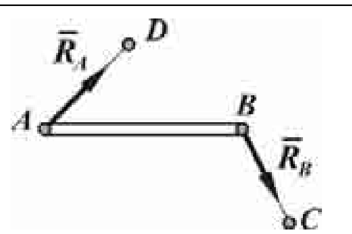
№	Задание/ответ	Схема
1	К призме приложены силы $F_1 = F_3 = 60$ Н; $F_2 = 30$ Н. Модуль главного момента системы сил относительно центра A равен … Н · м. **Ответ**: 180.	
2	$F = F' = 16$ H, $CD = 5$ м, $q = 10$ Н/м. Главный момент пары сил $\left(\overline{F}, \overline{F}'\right)$ и распределённой нагрузки относительно точки A … Н · м. **Ответ**: 0.	
3	Чтобы состояние рамы не изменилось при переносе распределённой нагрузки $q = 3$ кН/м с AB на BC, необходимо приложить к раме пару сил с моментом … кН · м. **Ответ**: 48.	
4	$AB = BC = CD = 2$ м; $\alpha = 30^{o}$. Чтобы состояние балки не изменилось при переносе точки приложения силы $F = 4$ Н из точки B в точку D, необходимо к балке приложить пару сил с моментом … Н · м. **Ответ**: 16.	
5	Модуль главного вектора системы сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right)$, где $\overline{F}_1 = 3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$, $\overline{F}_2 = -2\overline{j} + 6\overline{k}$, $\overline{F}_3 = 2\overline{k}$ равен … Н. **Ответ**: 5.	

1.5. Связи и их реакции

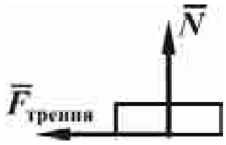
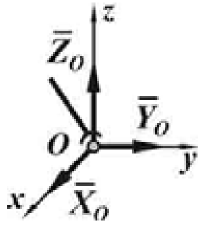
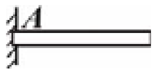
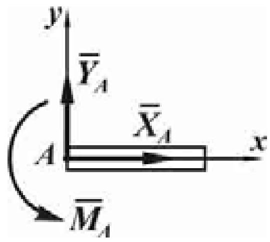
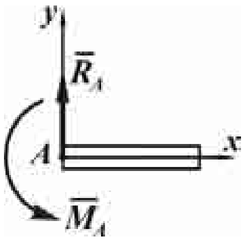
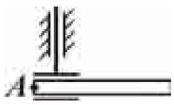
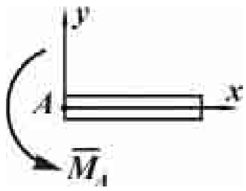
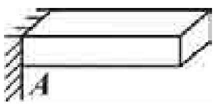
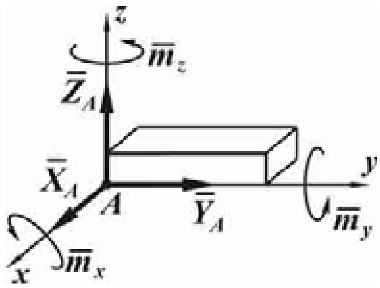
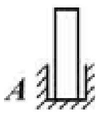
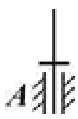
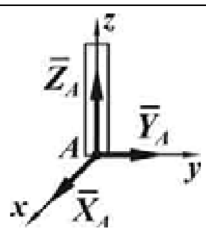
● Связь есть ограничение, накладываемое на перемещение тела или на скорости его точек.
● Сила, действующая на тело со стороны связи, называется реакцией связи.
● Аксиома связей. Несвободное твёрдое тело можно считать свободным, если действие связей заменить их реакциями.
● Виды связей и их реакции (табл. 4).

Таблица 4

Виды связей и их реакции

Тип связи	Схема связи	Направление реакции
1. Гладкая опорная поверхность		
2. Точечная гладкая опора		
3. Неподвижный шарнир (A)		
4. Подвижный шарнир (C)		
5. Гибкая связь (нить, трос, цепь, ремень)		
6. Жёсткий стержень BC		

Окончание табл. 4

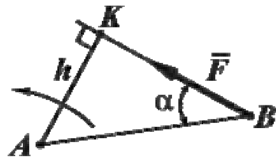
Тип связи	Схема связи	Направление реакции
7. Шероховатая поверхность		
8. Сферический шарнир (O)		
9. Жёсткая заделка в плоскости		
10. Скользящая заделка		
11. Свободная заделка		
12. Жёсткая заделка в пространстве		
13. Радиально-упорный подшипник (A) (подпятник)	 или 	

1.6. Плоская система сил

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, называется плоской.

● Алгебраический момент силы относительно точки A – скалярная величина $m_A\left(\overline{F}\right)$, равная произведению модуля силы на плечо, взятому со знаком плюс или минус. Знак плюс берут, когда сила $\overline{F}$ вращает плечо $h = AK$ вокруг точки A против хода часовой стрелки и знак минус – по ходу часовой стрелки.

$$m_A\left(\overline{F}\right) = \pm F \cdot h.$$



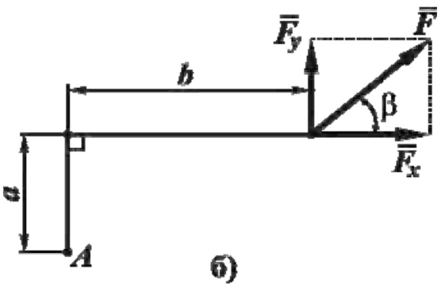
а)

Примеры.

а) $m_A\left(\overline{F}\right) = +F \cdot h = +F \cdot AB \cdot \sin\alpha$;

б) $m_A\left(\overline{F}\right) = m_A\left(\overline{F}_y\right) + m_A\left(\overline{F}_x\right) =$

$F \cdot b \cdot \sin\beta - F \cdot a \cdot \cos\beta.$



б)

Уравнения равновесия плоской системы сил можно получить в трех разных формах.

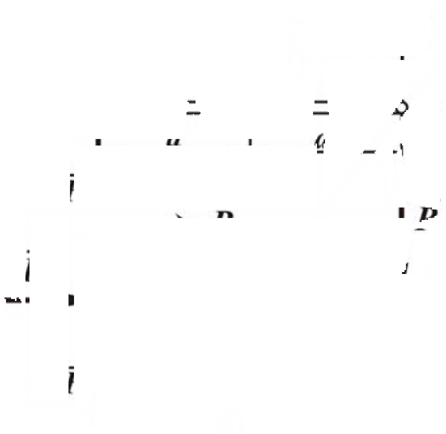
● Основная форма уравнений равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,$$

где $m_A(\overline{F}_k)$ – алгебраический момент k-й силы относительно произвольной точки A.

● Вторая форма уравнений равновесия:

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0;$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0;$$
$$\sum m_C(\overline{F}_k) = 0,$$



где A, B, C – точки, не лежащие на одной прямой.

● Третья форма уравнений равновесия:

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0;$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0;$$
$$\sum F_{kx} = 0,$$

где ось x не перпендикулярна AB.

Пример. Балка нагружена силой $\overline{F}$. Определить реакции связей.
Решение. Для определения реакций связи составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_B(\overline{F}_k) = 0; \quad +F \cdot a - R_C \cdot a = 0; \quad R_C = F.$$

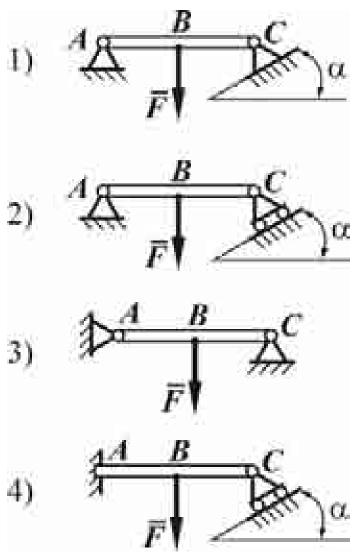
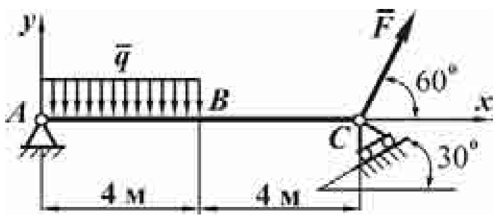
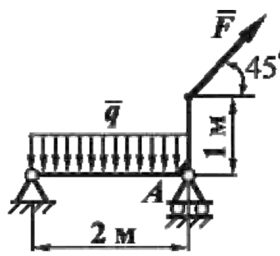
$$\sum M_D(\overline{F}_k) = 0; \quad +F \cdot 2a - R_A \cdot a = 0; \quad R_A = 2F.$$

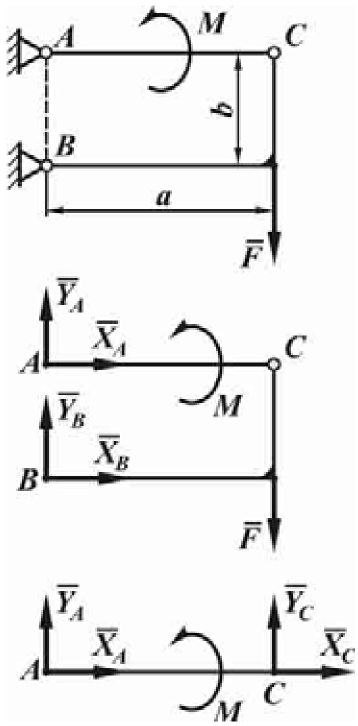
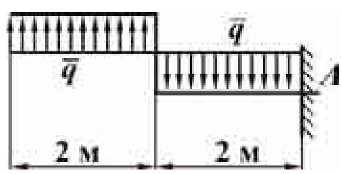
$$\sum M_C(\overline{F}_k) = 0; \quad -R_B \cdot a \cdot \sin 45^{o} + F \cdot 2a = 0; \quad R_B = 2F \big/ \sin 45^{o} = 2\sqrt{2}F.$$

Теорема о моменте равнодействующей: *для системы сил, имеющей равнодействующую, справедлива теорема Вариньона: «момент равнодействующей относительно любого центра О равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра».*

Таблица 5

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Указать статически определимую конструкцию. **Ответ**: № 2.	
2	$F = 4$ Н; $q = 2\sqrt{3}$ кН/м. Реакция $R_C = \ldots$ Н. **Ответ**: 0.	
3	Сила $F = 4\sqrt{2}$ кН, интенсивность распределённой нагрузки $q = 3$ кН/м, реакция $R_A = \ldots$ кН. **Ответ**: 1.	

№	Задание/ответ	Схема
4	Составлено шесть уравнений равновесия системы. Указать уравнения, содержащие ошибки. а) $X_A + X_B + X_C = 0$; б) $Y_A + Y_C = 0$; в) $M - Y_A \cdot a = 0$; г) $X_B + X_C = 0$; д) $Y_B - F - Y_C = 0$; е) $-Y_B \cdot a = 0$. **Ответ**: а), г), е).	
5	Интенсивность распределённой нагрузки $q = 100$ Н/м, момент в заделке $M_A = \ldots$ Н · м. **Ответ**: 400.	

Индивидуальное задание № 1

Определение реакций связей, наложенных на раму

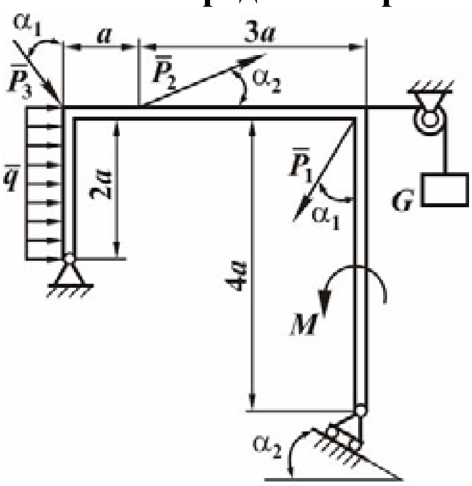


Рис. 1

Найти реакции связей, наложенных на раму. Схемы конструкций представлены в табл. 7. Числовые данные для решения задачи указаны в табл. 6.

Пример выполнения задания.

Дано: схема конструкции (рис. 1); $G = 3$ кН; $P_1 = 2$ кН; $P_2 = 0$; $P_3 = 5$ кН; $q = 8$ кН/м; $M = 4$ кН · м; $\alpha_1 = 30^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$; $a = 1$ м.

Определить реакции связей, наложенных на раму.

Решение.

Заменим связи, наложенные на раму, их реакциями (рис. 2). Направление реакции шарнира A неизвестно, определяем её составляющие по осям координат $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$. Реакция $\overline{R}_B$ подвижной опоры направлена перпендикулярно плоскости опоры и разложена на составляющие $R_B \cdot \cos\alpha_2$ и $R_B \cdot \sin\alpha_2$. Сила натяжения нити $\overline{S}_D$ направлена по нити от рамы и равна по величине весу груза, т. е. $S_D = G = 3\,\text{кН}$.

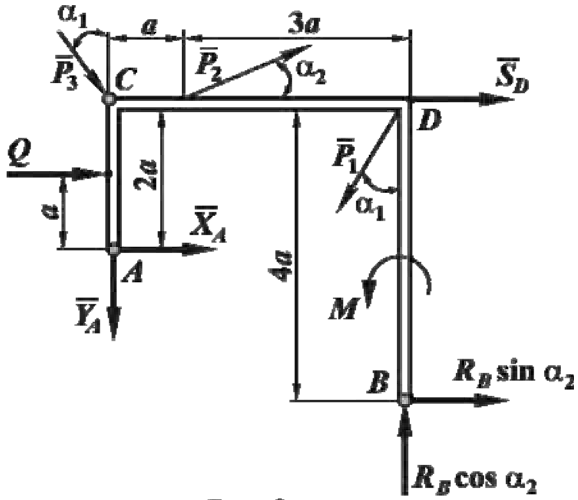


Рис. 2

Равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q заменим её равнодействующей $Q = 2a \cdot q = 2 \cdot 1 \cdot 8 = 16\,\text{кН}$, приложенной в середине участка AC.

Для плоской системы сил, приложенных к раме, составим три уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0;\ \sum X_i = 0;\ \sum Y_i = 0.$$

$$\begin{aligned}\sum M_A = &-Q \cdot a - P_3 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a - P_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot 2a + \\ &+P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot a - S_D \cdot 2a + P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a - P_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot 4a + \\ &M + R_B \cdot \sin\alpha_2 \cdot 2a + R_B \cdot \cos\alpha_2 \cdot 4a = 0;\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\sum X_i = X_A + Q + P_3 \cdot \sin\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ +S_D - P_1 \cdot \sin\alpha_1 + R_B \cdot \sin\alpha_2 = 0;\end{aligned} \tag{2}$$

$$\sum Y_i = -Y_A - P_3 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \sin\alpha_2 - P_1 \cdot \cos\alpha_1 + R_B \cdot \cos\alpha_2 = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (1) определяем реакцию опоры B, принимая $P_2 = 0$:

$$R_B = \frac{+Q \cdot a + P_3 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a + S_D \cdot 2a - P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a + P_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot 4a - M}{\sin\alpha_2 \cdot 2a + \cos\alpha_2 \cdot 4a};$$

$$R_B = \frac{+16 \cdot 1 + 5 \cdot 1/2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1/2 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 4 - 4}{\sqrt{3}/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 4} = +7{,}483\,\text{кН}.$$

Из уравнения (2) определяем X_A:

$$X_A = -Q - P_3 \cdot \sin\alpha_1 - S_D + P_1 \cdot \sin\alpha_1 - R_B \cdot \sin\alpha_2;$$

$$X_A = -16 - 5 \cdot 1/2 - 3 + 2 \cdot 1/2 - 7{,}4833 \cdot \sqrt{3}/2 = -26{,}98\,\text{кН}.$$

Из уравнения (3) определяем Y_A:

$$Y_A = -P_3 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \sin\alpha_2 - P_1 \cdot \cos\alpha_1 + R_B \cdot \cos\alpha_2;$$

$$Y_A = -5 \cdot \sqrt{3}/2 - 2 \cdot \sqrt{3}/2 + 7{,}4833 \cdot \sqrt{3}/2 = +0{,}4185\,\text{кН}\ .$$

Знаки плюс, полученные при вычислении, означают, что выбранные направления векторов $\bar{R}_B$ и $\bar{Y}_A$ совпадают с их действительными направлениями; знак минус при вычислении величины вектора $\bar{X}_A$ указывает на то, что вектор направлен в противоположную сторону от показанного на рисунке.

Для проверки правильности выполненных расчетов составляем уравнение равновесия относительно произвольно выбранной точки (точки C):

$$\sum M_C = +Q \cdot a + X_A \cdot 2a + P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot a - P_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot 4a +$$
$$+M + R_B \cdot \sin\alpha_2 \cdot 4a + R_B \cdot \cos\alpha_2 \cdot 4a = 0;$$

$$\sum M_C = +16 \cdot 1 + (-26{,}9807 \cdot 2) - 2 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 4 + 4 -$$
$$+7{,}4833 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 4 + 7{,}4833 \cdot 1/2 \cdot 4 = 0.$$

Таблица 6

Данные для индивидуального задания № 1

Вариант	M	P_1	P_2	P_3	G	q	α_1	α_2	a
	кН·м	кН	кН	кН	кН	кН/м	градус	градус	м
1	4	0	5	9	10	0,5	45	60	0,5
2	2	6	0	10	12	1,2	30	45	1,0
3	3	4	12	0	14	2,0	60	30	1,2
4	6	0	8	15	6	2,2	45	60	0,8
5	10	16	0	20	8	3,0	30	45	1,0
6	12	8	20	0	13	1,6	60	30	0,5
7	16	0	6	20	5	1,8	45	60	0,6
8	8	12	0	6	9	1,5	30	45	0,4
9	4	20	18	0	30	2,4	60	30	1,0
10	6	0	12	25	22	0,8	30	60	1,2

При защите выполненной работы студент должен быть готов ответить на контрольные вопросы.

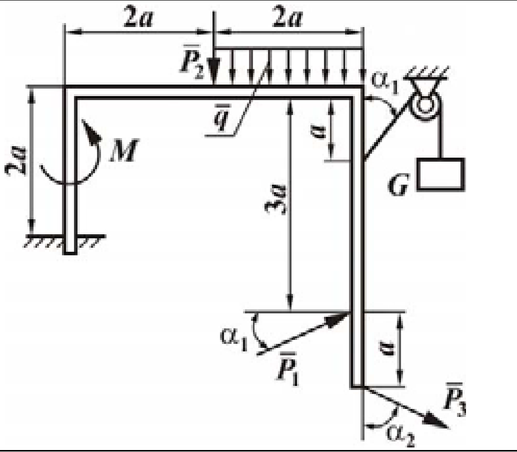
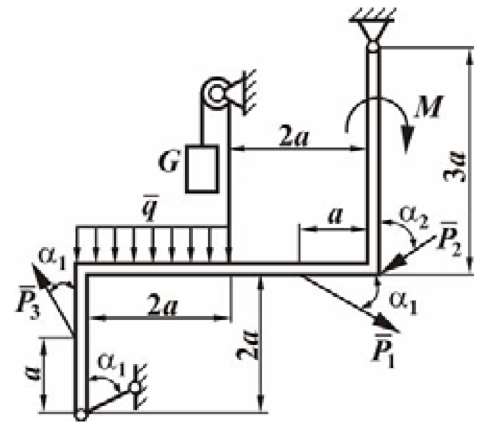
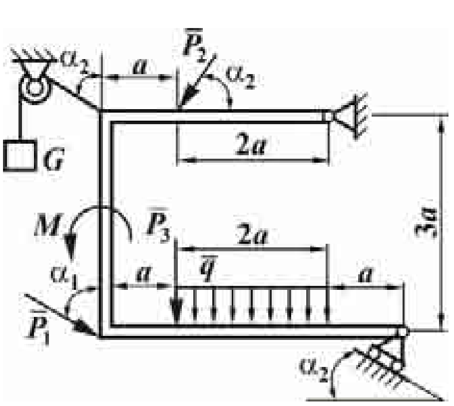
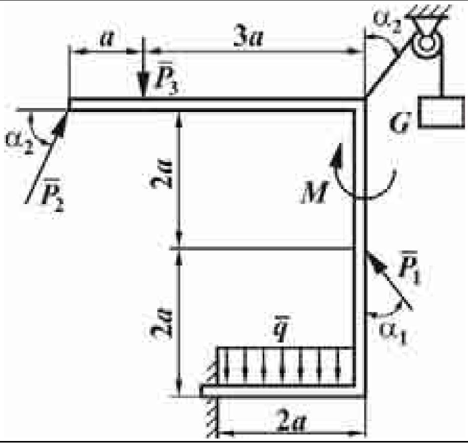
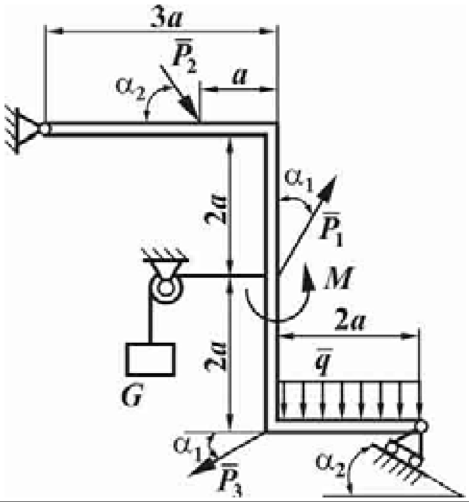
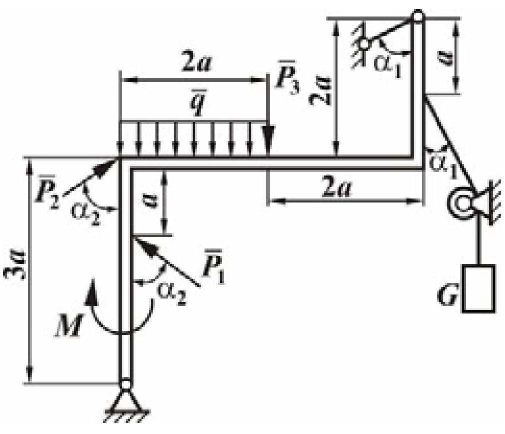
Контрольные вопросы

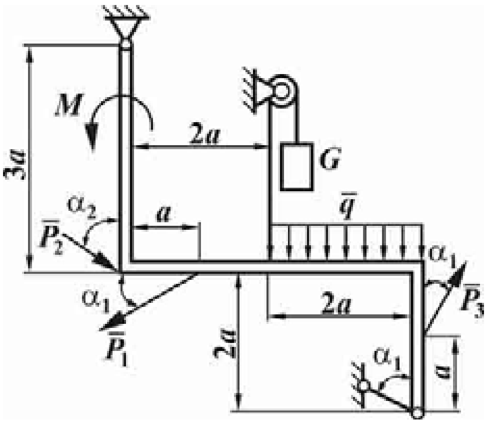
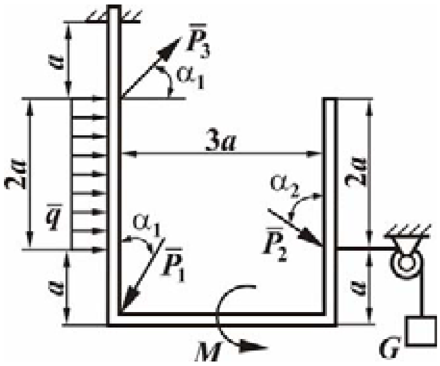
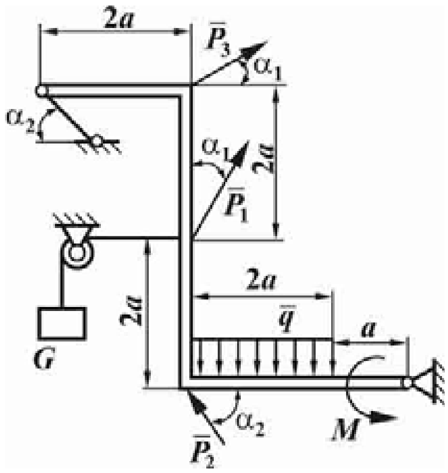
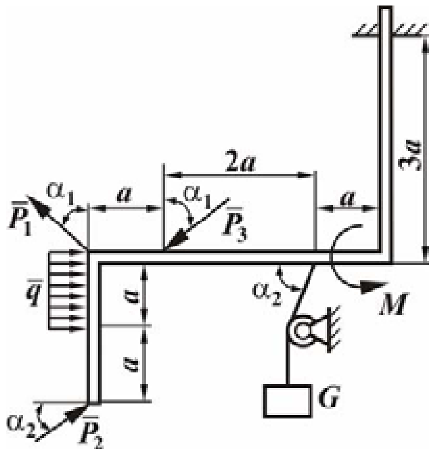
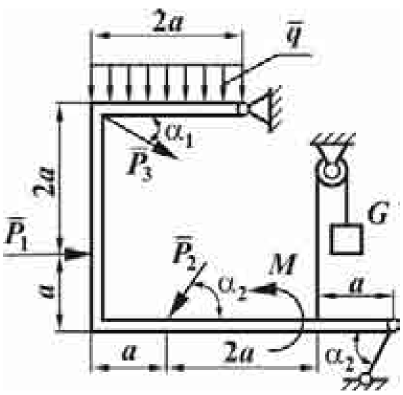
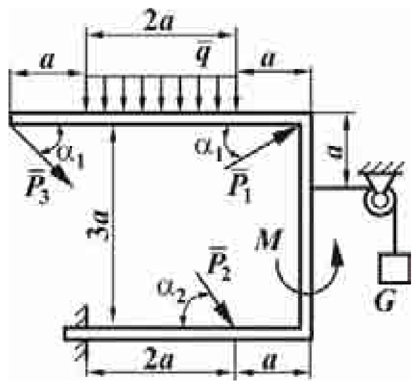
1) Порядок решения задач статики. 2) Виды связей, реакции связей. 3) Аксиома связей (принцип освобождаемости от связей). 4) Алгебраический момент силы относительно центра на плоскости. Правило знаков для момента силы. 5) Уравнения равновесия плоской системы сил.

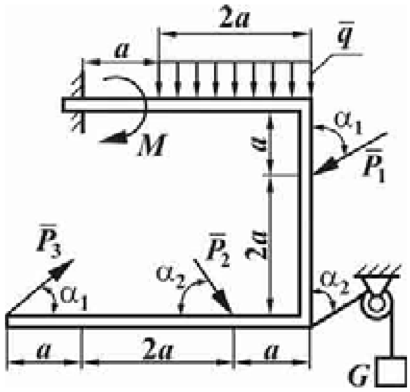
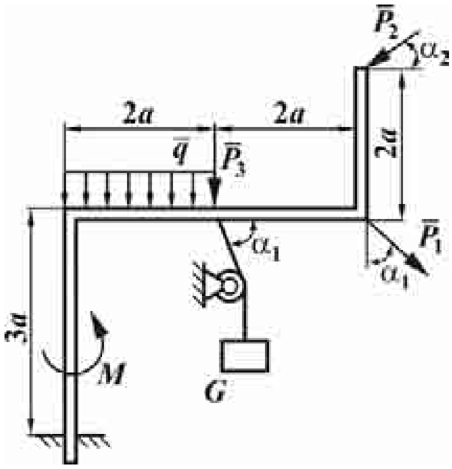
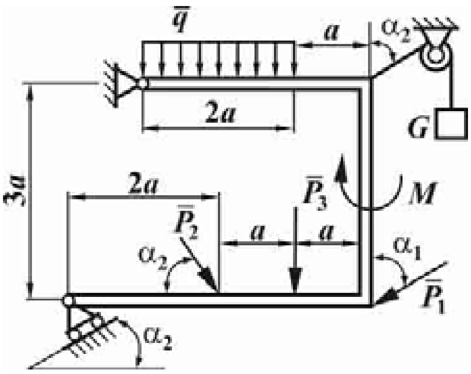
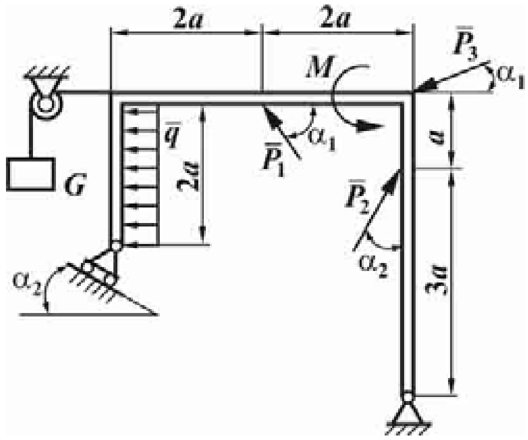
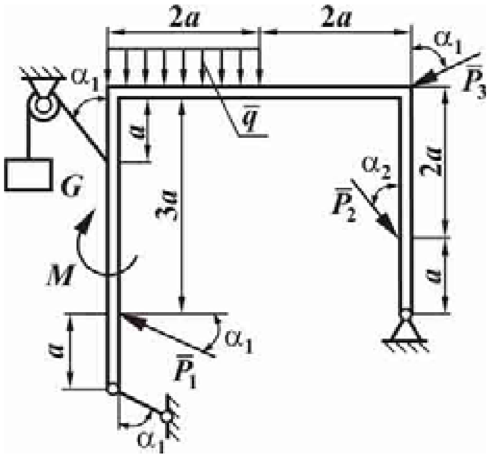
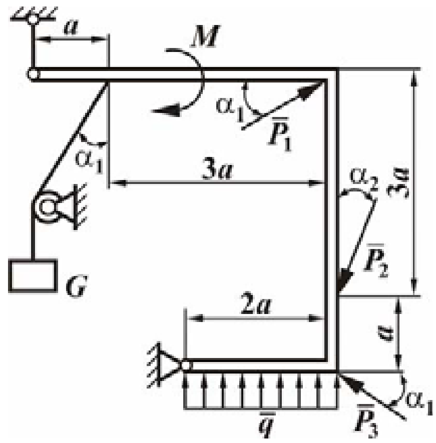
6) Задачи статически определённые и статически неопределённые. 7) Особенности расчёта составных конструкций. 8) В каком соотношении находятся векторы и модули сил взаимодействия двух тел?

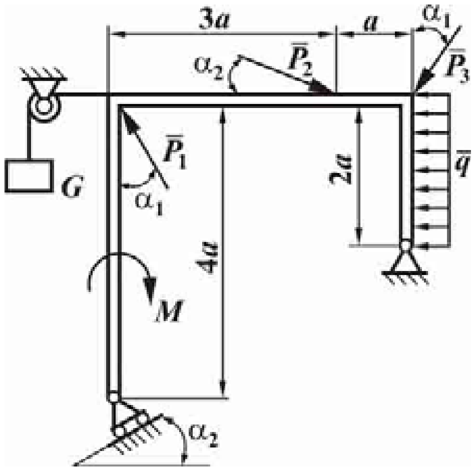
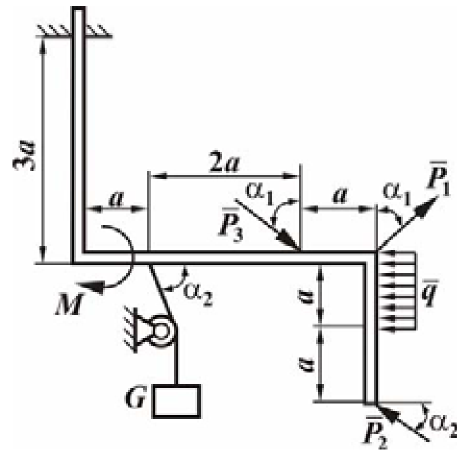
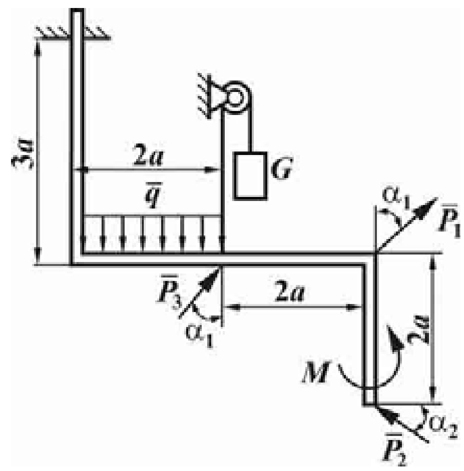
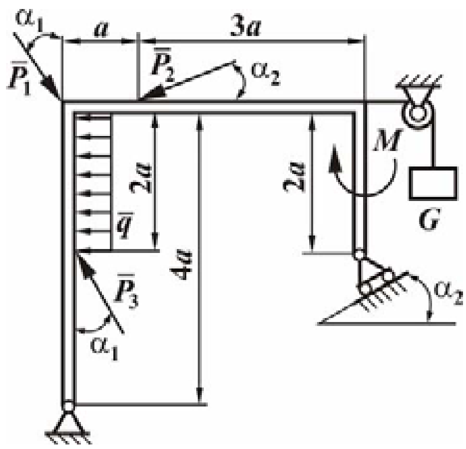
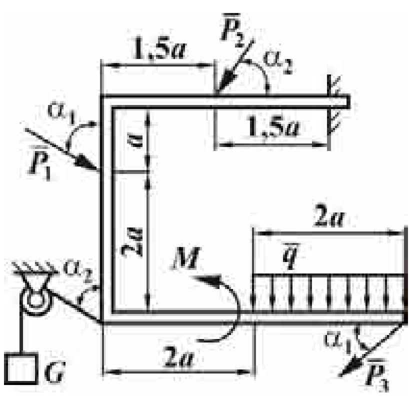
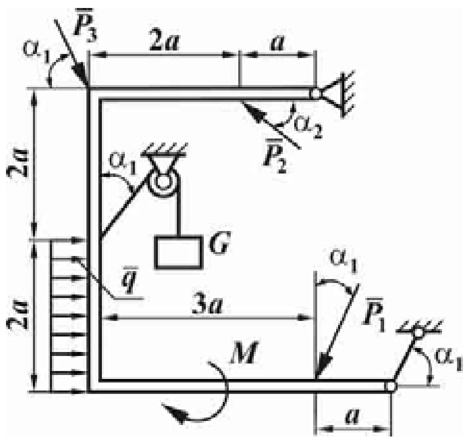
Таблица 7

Схемы конструкций к заданиям № 1

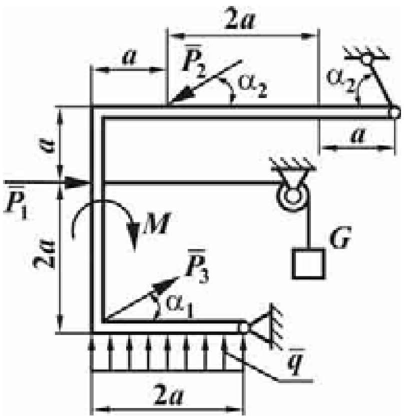
<table>
<tr><td>задание № 1</td><td>задание № 2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 3</td><td>задание № 4</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 5</td><td>задание № 6</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

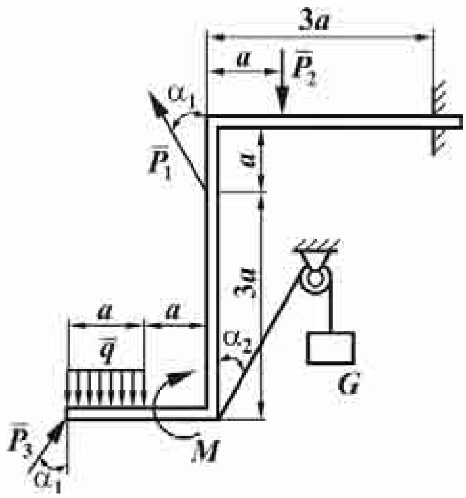
задание № 7	задание № 8
	
задание № 9	задание № 10
	
задание № 11	задание № 12
	

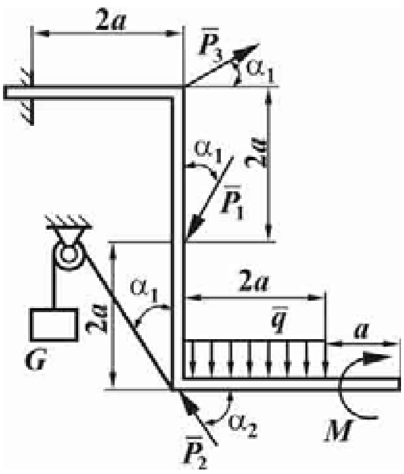
задание № 13	задание № 14
	
задание № 15	задание № 16
	
задание № 17	задание № 18
	

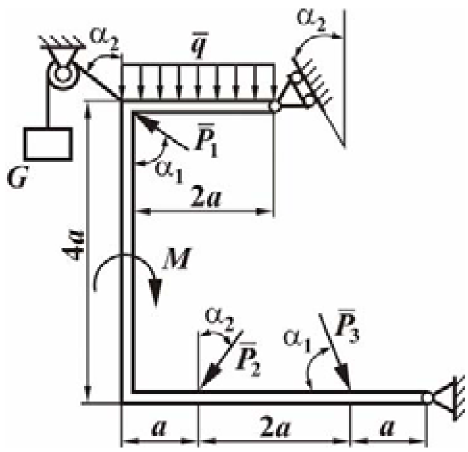
задание № 19	задание № 20
	
задание № 21	задание № 22
	
задание № 23	задание № 24
	

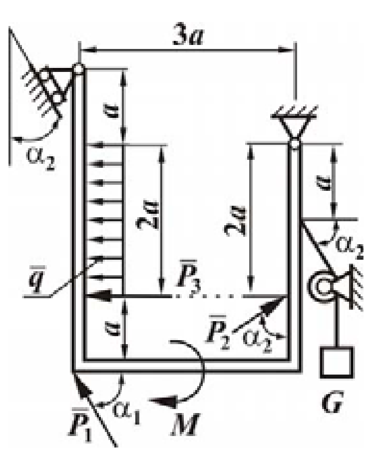
Окончание табл. 7

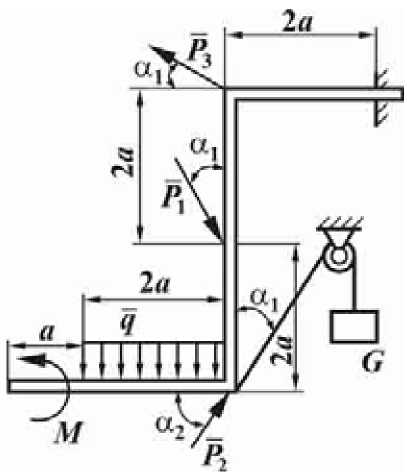
<table>
<tr><td>задание № 25</td><td>задание № 26</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание № 27</td><td>задание № 28</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание № 29</td><td>задание № 30</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

Индивидуальное задание № 2

Определение реакций связей, наложенных на составную конструкцию

Найти реакции связей, наложенных на составную конструкцию. Схемы конструкций представлены в табл. 9. Числовые данные для решения задачи указаны в табл. 8.

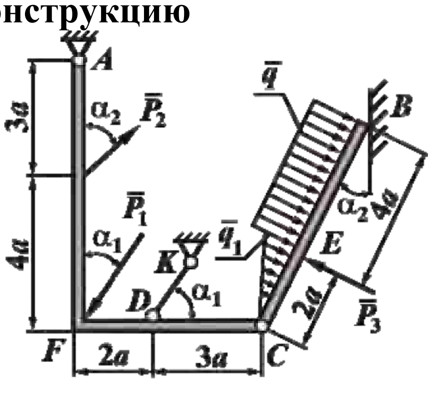


Рис. 3

Пример выполнения задания.

Дано: составная конструкция (рис. 3); $P_1 = 4$ кН; $P_2 = 5$ кН; $P_3 = 0$; $q = 4$ кН/м ; $q_1 = 2$ кН/м ; $M = 1$ кН · м; $\alpha_1 = 60^{\circ}$; $\alpha_2 = 30^{\circ}$; $a = 2$ м.

Определить реакции связей.

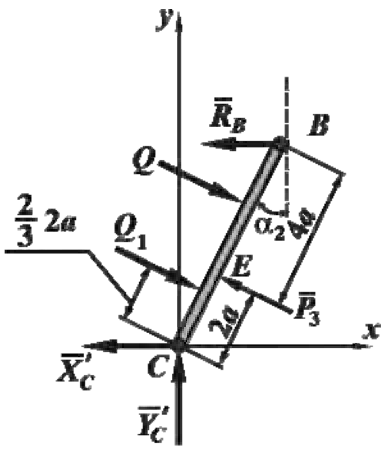


Рис. 4

Решение.

Сначала рассмотрим равновесие балки BC. Связи в точках B и C заменим их реакциями (рис. 4). Равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q заменим её равнодействующей $Q = 4a \cdot q = 4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ кН, приложенной в середине участка BE. Неравномерно распределённую нагрузку интенсивностью q_1 заменим её равнодействующей $Q_1 = \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot 2a = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ кН, приложенной в участке EC на расстоянии $\frac{2}{3} \cdot 2a$ от точки C.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$\sum M_C(\overline{F}_k) = 0.$$

$$\sum X_i = -X'_C + Q_1 \cdot \cos\alpha_2 + Q \cdot \cos\alpha_2 - P_3 \cdot \cos\alpha_2 - R_B = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = Y'_C - Q_1 \cdot \sin\alpha_2 - Q \cdot \sin\alpha_2 + P_3 \cdot \sin\alpha_2 = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_C(\overline{F}_k) = P_3 \cdot 2a - Q_1 \cdot \frac{4}{3}a - Q \cdot 4a + R_B \cdot \cos\alpha_2 \cdot 6a = 0. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) определяем реакцию связи R_B:

$$R_B = \frac{-Q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a - Q \cdot 4a + P_3 \cdot 2a}{\cos\alpha_2 \cdot 6a} = \frac{4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 32 \cdot 8}{12 \cdot \sqrt{3}/2} = 25{,}66\,\text{кН}.$$

Из уравнений (1) и (2) определяем реакции в шарнире C:

$$X'_C = Q_1 \cdot \cos\alpha_2 + Q \cdot \cos\alpha_2 - R_B = 4 \cdot \sqrt{3}/2 + 32 \cdot \sqrt{3}/2 - 25{,}66 = 5{,}5169\,\text{кН}$$

$$Y'_C = Q_1 \cdot \sin\alpha_2 + Q \cdot \sin\alpha_2 = 4 \cdot 1/2 + 32 \cdot 1/2 = 18\,\text{кН}.$$

Вторую расчетную схему составим на основе рамы AFC (рис. 5). Связь в точке A заменяем составляющими реакции по осям координат $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$. Реакцию $\overline{R}_D$ стержня DK, направленную в точку K, разлагаем на составляющие $R_D \cdot \cos\alpha_1$ и $R_D \cdot \sin\alpha_1$. Реакции $\overline{X}_C$ и $\overline{Y}_C$ в точке C направляем противоположно соответствующим реакциям $\overline{X'}_C$ и $\overline{Y'}_C$ на рис. 4, причем $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$.

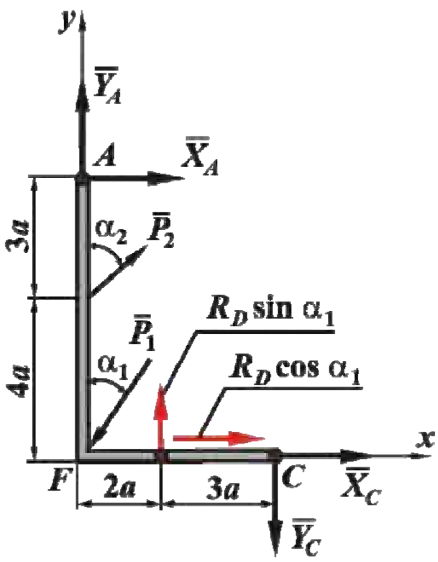


Рис. 5

Составляем уравнения равновесия рамы:

$$\sum X_i = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = 0.$$

$$\sum X_i = X_A + P_2 \cdot \sin\alpha_2 - P_1 \cdot \sin\alpha_1 + R_D \cdot \cos\alpha_1 + X_C = 0; \qquad (4)$$

$$\sum Y_i = Y_A + P_2 \cdot \cos\alpha_2 - P_1 \cdot \cos\alpha_1 + R_D \cdot \sin\alpha_1 - Y_C = 0; \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}\sum M_A(\overline{F}_k) &= P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 3a - P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 7a + R_D \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a + \\ &+ R_D \cdot \cos\alpha_1 \cdot 7a + X_C \cdot 7a - Y_C \cdot 5a = 0.\end{aligned} \qquad (6)$$

Из уравнения (6) определяем реакцию стержня R_D:

$$R_D = \frac{-P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 3a + P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 7a - X_C \cdot 7a + Y_C \cdot 5a}{\sin\alpha_1 \cdot 2a + \cos\alpha_1 \cdot 7a};$$

$$R_D = \frac{-5 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 6 + 4 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 14 - 5{,}5169 \cdot 14 + 18 \cdot 10}{\sin\alpha_1 \cdot 4 + \cos\alpha_1 \cdot 14} = 13{,}022 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4) и (5) определяем реакции шарнира A.

$$X_A = -P_2 \cdot \sin\alpha_2 + P_1 \cdot \sin\alpha_1 - R_D \cdot \cos\alpha_1 - X_C;$$

$$X_A = -5 \cdot \sin\alpha_2 + 4 \cdot \sin\alpha_1 - 13{,}0217 \cdot \cos\alpha_1 - 5{,}5169 = -11{,}063 \text{ кН}.$$

$$Y_A = -P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_1 \cdot \cos\alpha_1 - R_D \cdot \sin\alpha_1 + Y_C;$$

$$Y_A = -5 \cdot \cos\alpha_2 + 4 \cdot \cos\alpha_1 - 13{,}0217 \cdot \sin\alpha_1 + 18 = 4{,}393 \text{ кН}.$$

Знак минус при вычислении величины вектора X_A указывает на то, что вектор направлен в противоположную сторону от показанного на рисунке.

Для проверки правильности выполненных расчетов составляем уравнение равновесия относительно произвольно выбранной точки (точки C):

$$\sum M_C = -R_D \cdot \sin\alpha_1 \cdot 3a + P_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot 5a -$$
$$- P_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot 5a - P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 4a - X_A \cdot 7a -$$
$$-Y_A \cdot 5a - Q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + P_3 \cdot 2a - Q \cdot 2a + R_B \cdot \cos\alpha_2 \cdot 6a = 0.$$

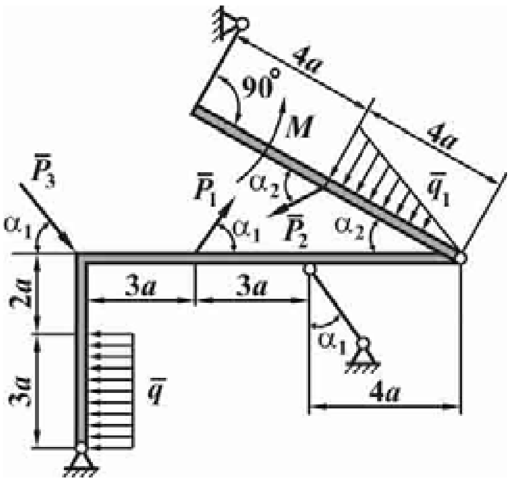
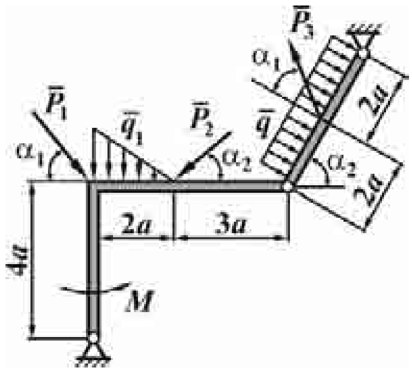
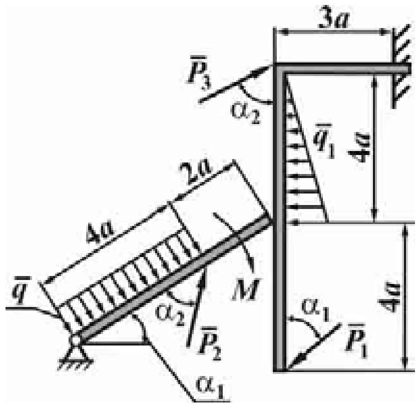
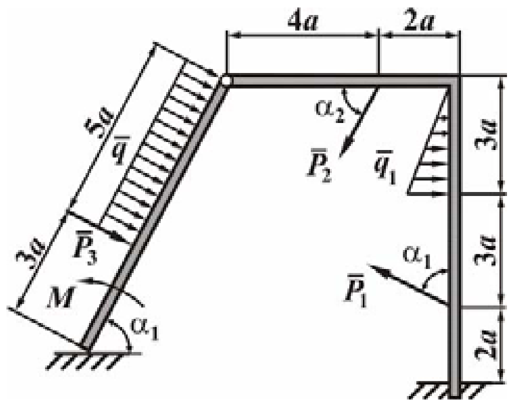
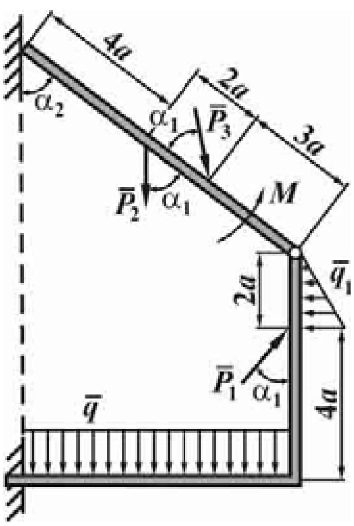
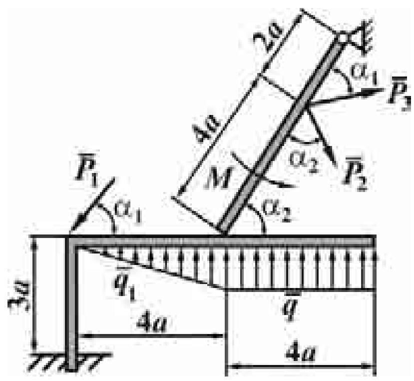
Таблица 8

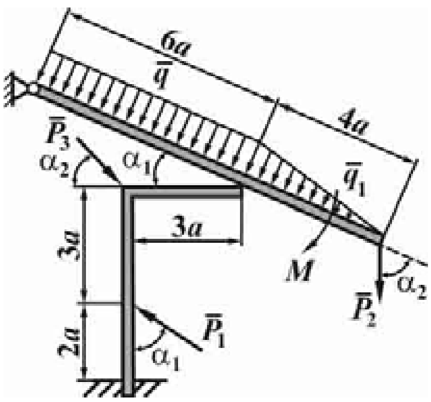
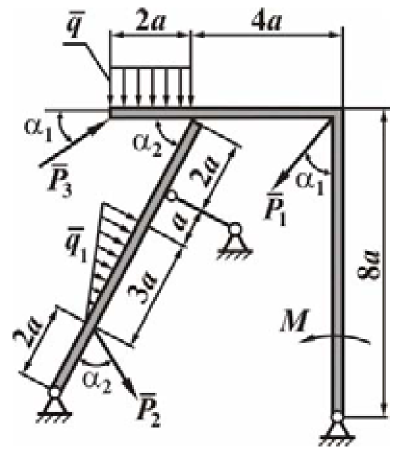
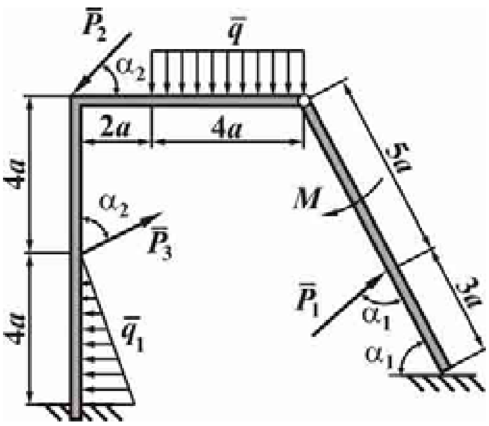
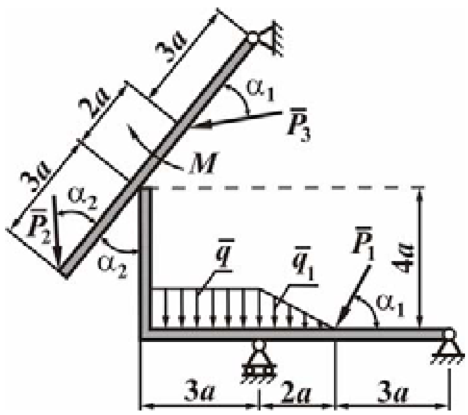
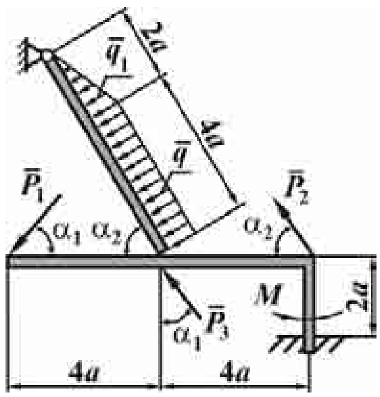
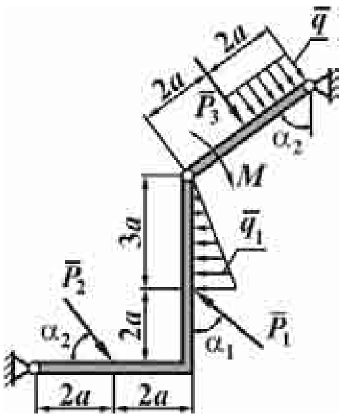
Данные для индивидуального задания № 2

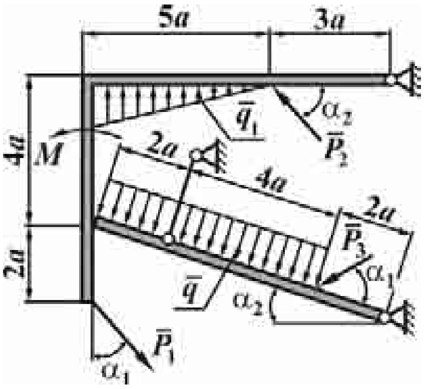
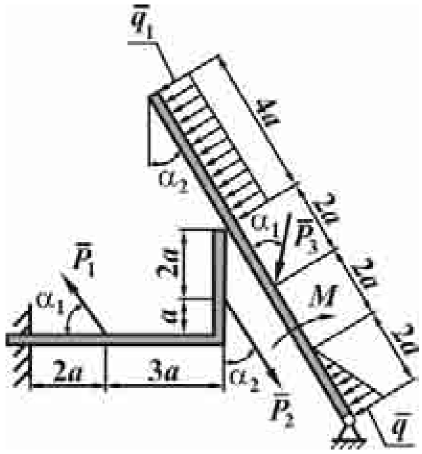
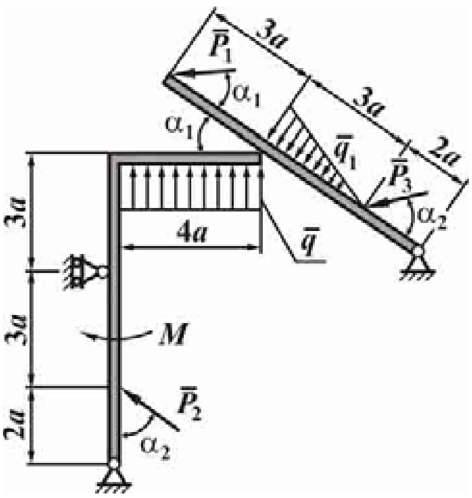
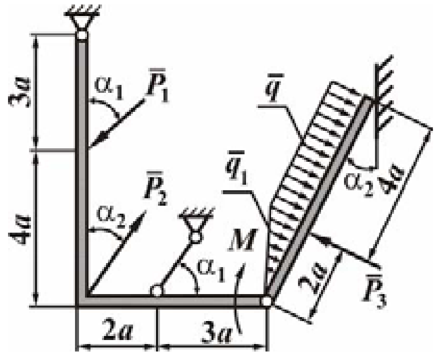
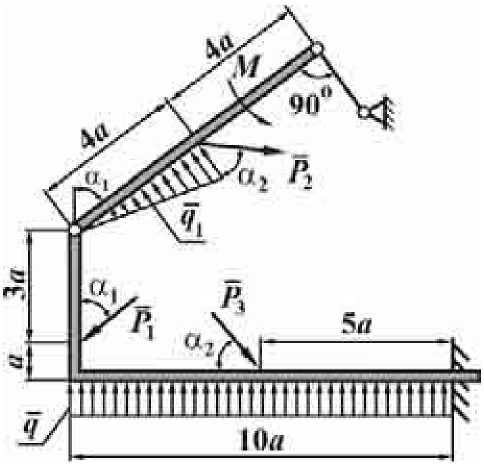
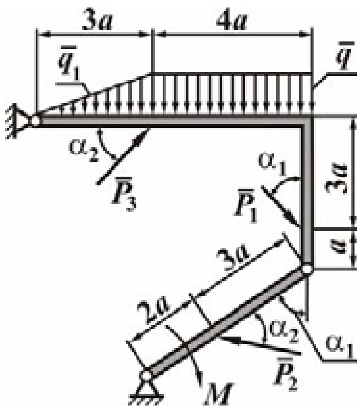
вариант	M	P_1	P_2	P_3	$q = q_1$	α_1	α_2	a
	кН·м	кН	кН	кН	кН/м	градус	градус	м
1	4	0	9	5	1,0	45	60	0,5
2	2	10	0	6	2,0	30	45	1,0
3	3	12	4	0	3,0	60	30	1,2
4	5	0	15	8	4,0	45	60	0,8
5	12	14	0	10	3,0	30	45	1,0
6	10	5	10	0	2,0	60	30	0,5
7	14	0	20	6	5,0	45	60	0,6
8	8	9	0	3	1,0	30	45	0,4
9	4	10	9	0	4,0	60	30	1,0
10	6	0	8	2	6,0	30	60	1,2

Таблица 9

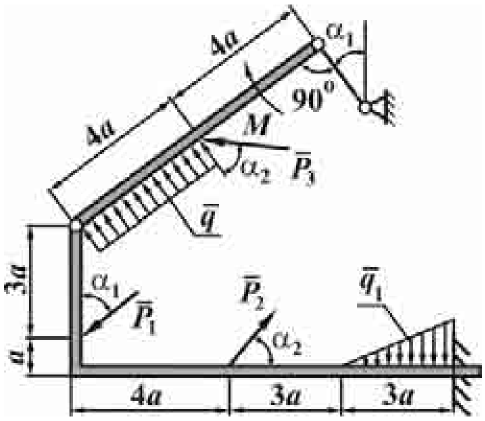
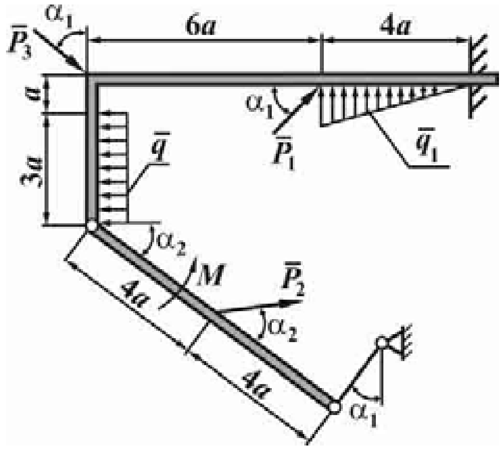
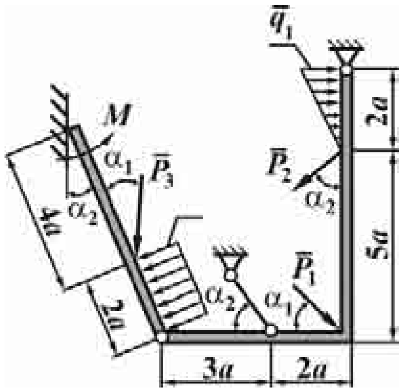
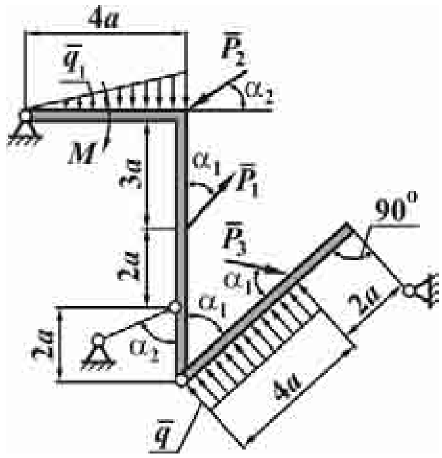
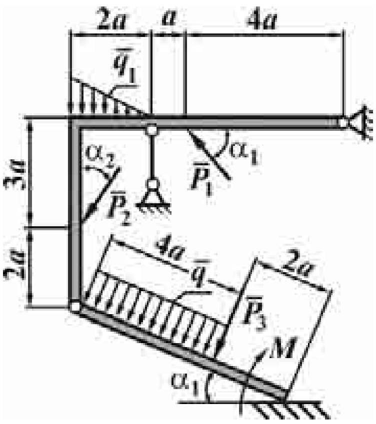
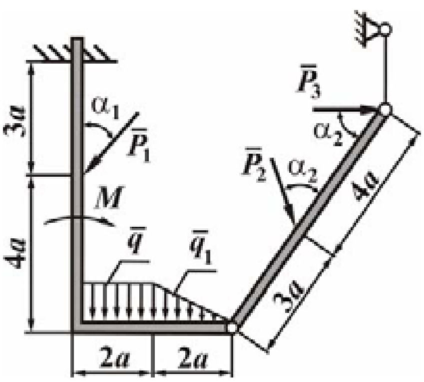
Схемы расчетных конструкций к ИДЗ № 2

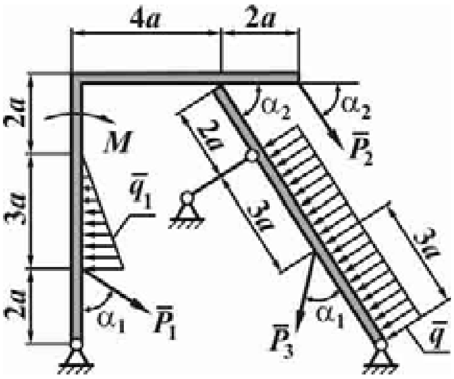
задание № 1	задание № 2
	
задание № 3	**задание № 4**
	
задание № 5	**задание № 6**
	

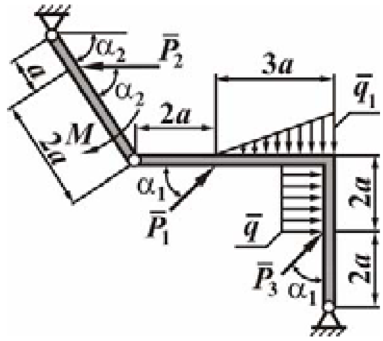
<table>
<tr><td>задание № 7</td><td>задание № 8</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 9</td><td>задание № 10</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 11</td><td>задание № 12</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

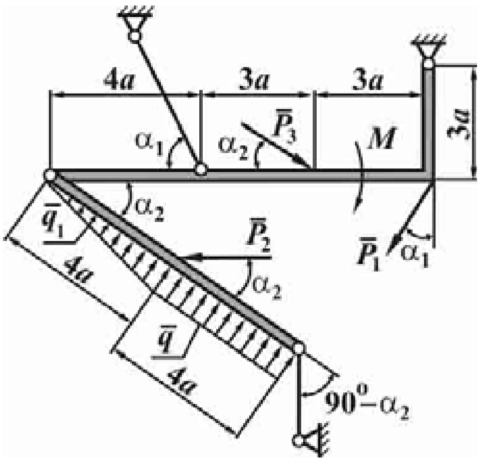
задание № 13	задание № 14
	
задание № 15	задание № 16
	
задание № 17	задание № 18
	

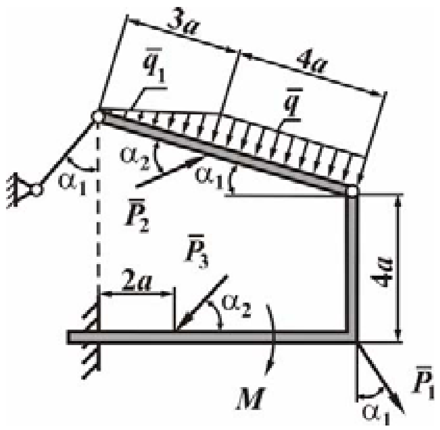
Продолжение табл. 9

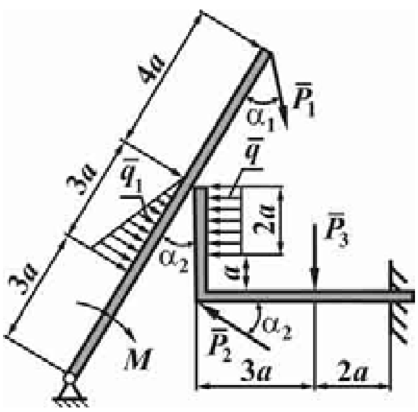
задание № 19	задание № 20
	
задание № 21	задание № 22
	
задание № 23	задание № 24
	

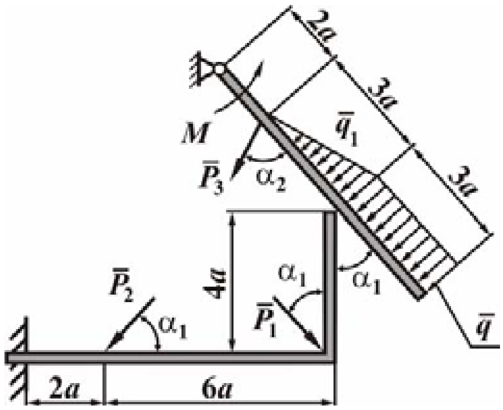
<table>
<tr><td>задание № 25</td><td>задание № 26</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание № 27</td><td>задание № 28</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание № 29</td><td>задание № 30</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

1.7. Пространственная система сил

● Момент силы относительно оси z равен проекции на ось z вектора момента силы относительно любой точки O, принадлежащей данной оси:

$$m_z\left(\bar{F}\right) = \text{пр}_z\, \bar{m}_O(\bar{F}).$$

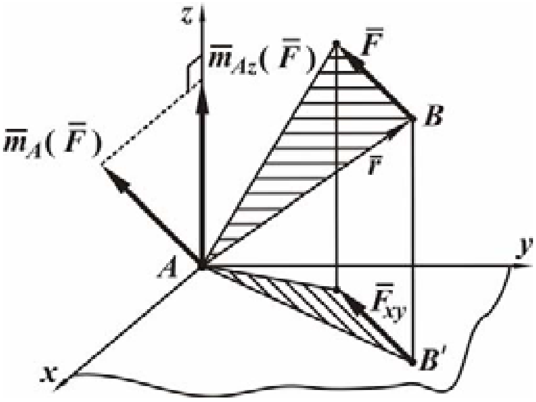
● Моменты силы относительно координатных осей:

$$m_x\left(\bar{F}\right) = y \cdot F_z - z \cdot F_y;$$

$$m_y\left(\bar{F}\right) = z \cdot F_x - x \cdot F_z;$$

$$m_z\left(\bar{F}\right) = x \cdot F_y - y \cdot F_x,$$

где x, y, z – координаты точки приложения силы; F_x, F_y, F_z – проекции силы на оси координат.



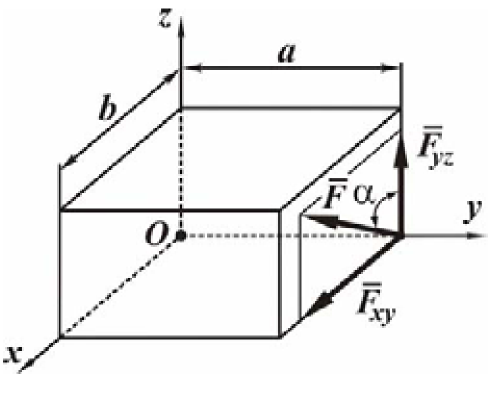
● Момент силы $\bar{F}$ относительно оси Az численно равен алгебраическому моменту (смотрим навстречу оси) проекции этой силы $\bar{F}_{xy}$ на плоскость, перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения (точки A) оси и плоскости:

$$m_{Az}\left(\bar{F}\right) = m_A\left(\bar{F}_{xy}\right).$$

При вычислении моментов полезно иметь в виду следующие частные случаи:

а) если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю;

б) если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси равен нулю.



Пример. Определим моменты силы $\bar{F}$ относительно координатных осей:

$$m_x(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{yz}) = F \cdot \cos\alpha \cdot a;$$

$$m_y(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{xz}) = 0;$$

$$m_z(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{xy}) = -F \cdot \sin\alpha \cdot a.$$

● Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$1.\ \sum F_{kx}=0; \qquad 4.\ \sum m_x\left(\overline{F}_k\right)=0;$$

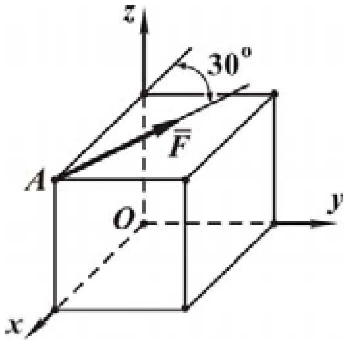
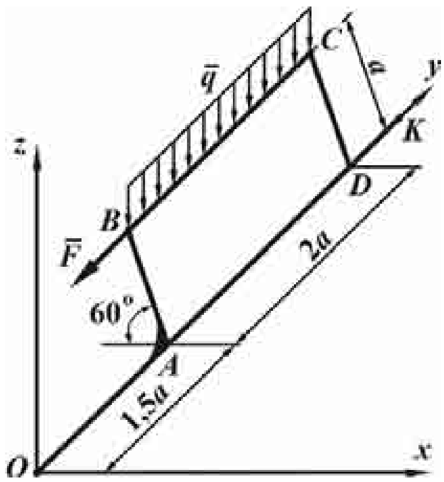
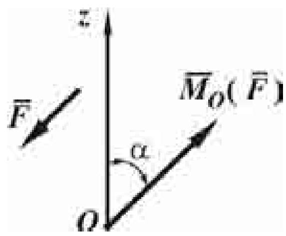
$$2.\ \sum F_{ky}=0; \qquad 5.\ \sum m_y\left(\overline{F}_k\right)=0;$$

$$3.\ \sum F_{kz}=0; \qquad 6.\ \sum m_z\left(\overline{F}_k\right)=0.$$

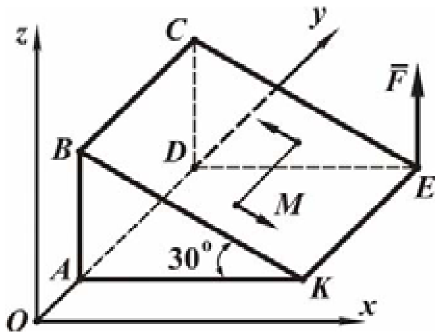
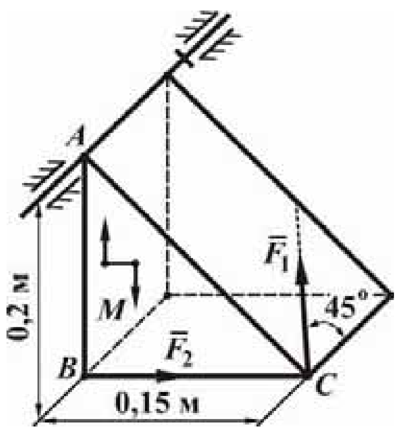
Здесь F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции k-й силы на оси координат;
$m_x(\overline{F}_k)$, $m_y(\overline{F}_k)$, $m_z(\overline{F}_k)$ – моменты k-й силы относительно осей координат.

Таблица 10

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Ребро куба $0{,}4$ м, сила $F=200$ Н. Момент $M_x(F)=\ldots$ Н·м. **Ответ**: -40 Н·м.	
2	$F=30\sqrt{3}$ Н, $a=2$ м, $q=4$ Н/м. Сумма моментов $\overline{q}$ и $\overline{F}$ относительно оси $Ox\ldots$ Н·м. **Ответ**: 10 Н·м.	
3	$\alpha=45^{\circ}$; модуль момента $M_O(\overline{F})=100\sqrt{2}$ Н·м. Момент $M_z(\overline{F})=\ldots$ Н·м. **Ответ**: 100 Н·м.	

Окончание табл. 10

№	Задание/ответ	Схема
4	$M = 4$ Н·м, $F = 6$ Н, $OD = 4$ м. Сумма моментов относительно оси Ox… Н·м. **Ответ**: 26 Н·м.	
5	На призму действуют силы $F_1 = 13$ Н, $F_2 = 25$ Н и в плоскости грани ABC пара сил с моментом M. При равновесии $M = …$ Н·м. **Ответ**: 5 Н·м.	

Индивидуальное задание № 3

Определение реакций опор пространственной конструкции

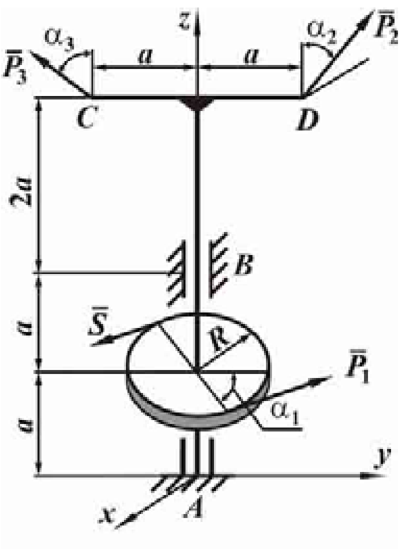


Рис. 6

Найти реакции опор пространственной конструкции. Кроме того, в вариантах 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 20, 25, 26 определить силу $\overline{S}$, уравновешивающую вал. Схемы конструкций представлены в табл. 12. Необходимые для расчёта данные приведены в табл. 11. В точке A в вариантах 3, 4, 6, 11, 12, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 28 расположен шаровой шарнир, в остальных вариантах – подпятник. В точке B во всех вариантах – цилиндрический шарнир (радиальный подшипник). При решении задач учесть, что $r = \dfrac{R}{4}$.

Пример выполнения задания. Дано: вал (рис. 6) установлен в подпятнике (точка A) и в радиальном подшипнике (точка B). $P_1 = 2$ Н; $P_2 = 3$ Н; $P_3 = 6$ Н; $\alpha_1 = 60^{\circ}$;

$\alpha_2 = 30^{\text{o}}$; $\alpha_3 = 45^{\text{o}}$; $a = 2$ м; $R = 1$ м; $\overline{P}_1 \perp Az$; $\overline{P}_2 \perp Ay$; $\overline{P}_3 \perp Ax$; $CD \quad Ay$; $\overline{P}_1 \quad \overline{S}$.

Определить реакции связей, а также величину силы $\overline{S}$, уравновешивающей вал (для положения, указанного на рисунке).

Решение.

Заменим связи их реакциями (рис. 7). В подпятнике A три неизвестные реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и $\overline{Z}_A$. В радиальном подшипнике B – $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$.

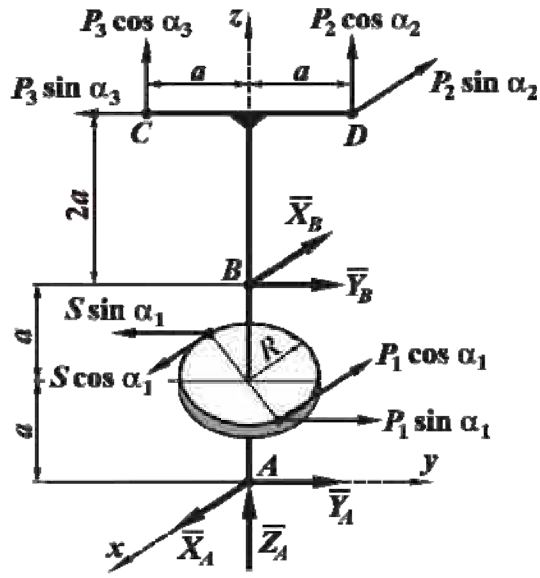


Рис. 7

Рассматриваемая конструкция статически определима. Система сил пространственная, для нее имеют место шесть уравнений равновесия (рис. 7):

$$\sum X_i = 0: X_A - P_1 \cos\alpha_1 + S\cos\alpha_1 - X_B - P_2 \sin\alpha_2 = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: Y_A + P_1 \sin\alpha_1 - S\sin\alpha_1 + Y_B - P_3 \sin\alpha_3 = 0; \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0: Z_A + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 = 0; \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\sum M_x(\overline{F}_k) = 0: -P_1 \sin\alpha_1 \cdot a + S\sin\alpha_1 \cdot a - Y_B \cdot 2a + \\ + P_2 \cos\alpha_2 \cdot a - P_3 \cos\alpha_3 \cdot a + P_3 \cos\alpha_3 \cdot 4a = 0;\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\sum M_y(\overline{F}_k) = 0: -P_1 \cos\alpha_1 \cdot a + S\cos\alpha_1 \cdot a - X_B \cdot 2a - \\ - P_2 \sin\alpha_2 \cdot 4a = 0;\end{gathered} \tag{5}$$

$$\sum M_z(\overline{F}_k) = 0: P_1 \cdot R + S \cdot R + P_2 \sin\alpha_2 \cdot a = 0. \tag{6}$$

Из уравнения (6) определяем уравновешивающую силу S:

$$S = \frac{-P_1 \cdot R - P_2 \sin\alpha_2 \cdot a}{R} = \frac{-2 \cdot 1 - 3 \cdot \sin 30^{\text{o}} \cdot 2}{1} = -5\ \text{Н}.$$

Из уравнения (5) определяем реакцию X_B:

$$X_B = \frac{-P_1 \cos\alpha_1 \cdot a + S\cos\alpha_1 \cdot a - P_2 \sin\alpha_2 \cdot 4a}{2a};$$

$$X_B = \frac{-2 \cdot \cos 60^{\text{o}} \cdot 2 + (-5) \cdot \cos 60^{\text{o}} \cdot 2 - 3 \cdot \sin 30^{\text{o}} \cdot 8}{4} = -4{,}75\ \text{Н}.$$

Из уравнения (4) определяем реакцию Y_B:

$$Y_B = \frac{-P_1 \sin\alpha_1 \cdot a + S \sin\alpha_1 \cdot a + P_2 \cos\alpha_2 \cdot a - P_3 \cos\alpha_3 \cdot a + P_3 \cos\alpha_3 \cdot 4a}{2a};$$

$$Y_B = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + (-5) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 - 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8}{4} = 4{,}6319 \text{ Н}.$$

Из уравнения (3) определяем реакцию Z_A:

$$Z_A = -P_2 \cos\alpha_2 - P_3 \cos\alpha_3 = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5{,}9746 \text{ Н}.$$

Из уравнения (2) определяем реакцию Y_A:

$$Y_A = -P_1 \sin\alpha_1 + S \sin\alpha_1 - Y_B + P_3 \sin\alpha_3;$$

$$Y_A = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-5) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4{,}6319 + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -6{,}4514 \text{ Н}.$$

Из уравнения (1) определяем реакцию X_A:

$$X_A = +P_1 \cos\alpha_1 - S \cos\alpha_1 + X_B + P_2 \sin\alpha_2;$$

$$X_A = 2 \cdot 0{,}5 - (-5) \cdot 0{,}5 + (-4{,}75) + 3 \cdot 0{,}5 = -0{,}25 \text{ Н}.$$

Знаки минус при вычислении величин реакций указывают на то, что их векторы направлены в противоположную сторону от показанных на рисунке.

Таблица 11

Данные для индивидуального задания № 3

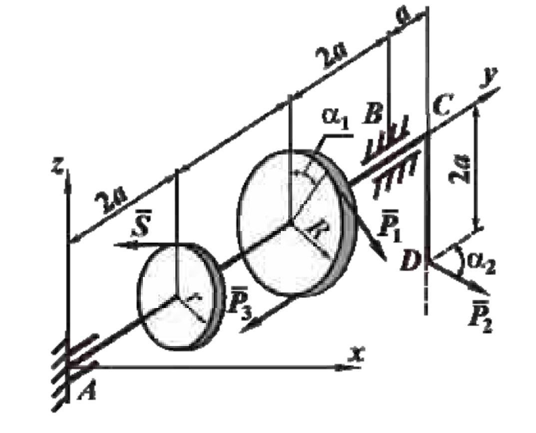
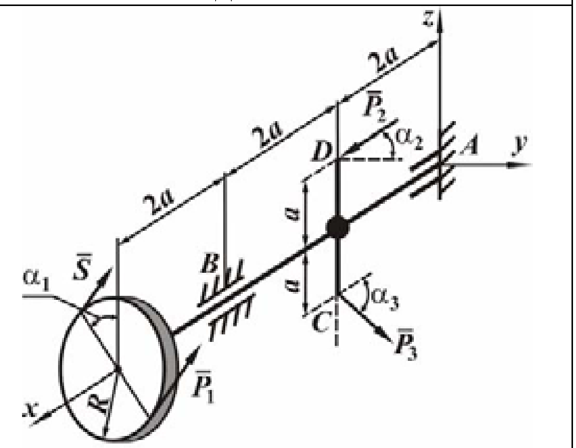
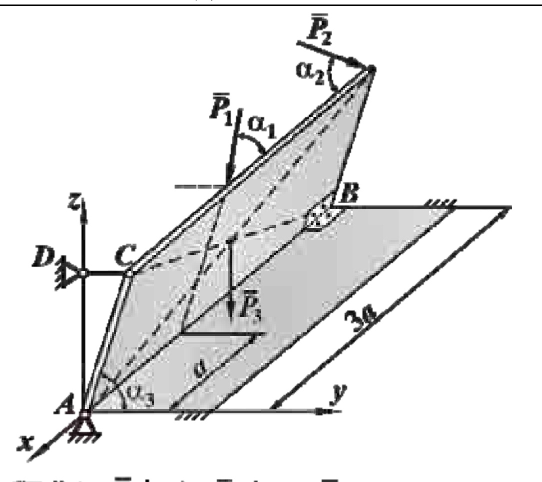
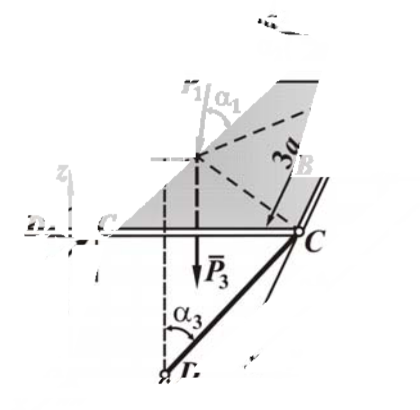
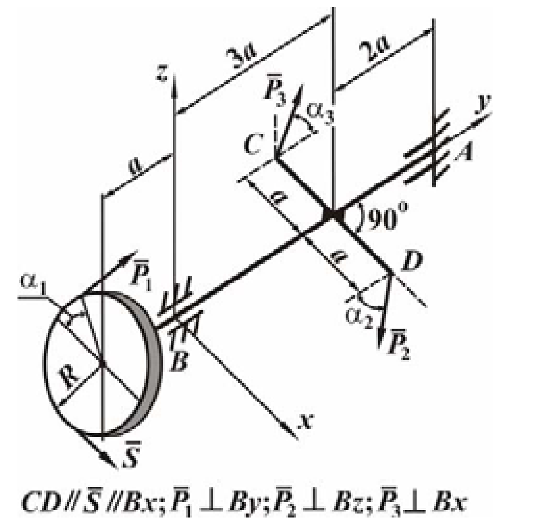
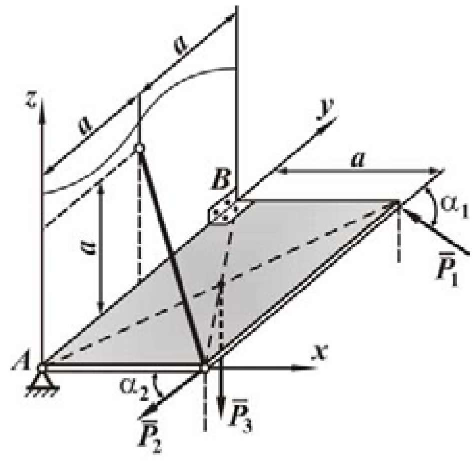
вариант	P_1	P_2	P_3	α_1	α_2	α_3	a	R
	кН	кН	кН	градус	градус	градус	м	м
1	0	10	12	30	45	60	0,5	1,0
2	8	0	6	45	30	45	1,0	2,0
3	12	6	0	60	60	30	1,2	1,5
4	0	8	15	60	45	60	0,8	1,4
5	10	0	14	45	30	45	1,0	1,2
6	5	10	0	30	60	30	0,5	1,8
7	0	12	6	60	45	60	0,6	0,8
8	9	0	3	45	30	45	0,4	0,6
9	10	9	0	30	60	30	1,0	1,6
10	0	8	4	60	30	60	1,2	1,0

Контрольные вопросы

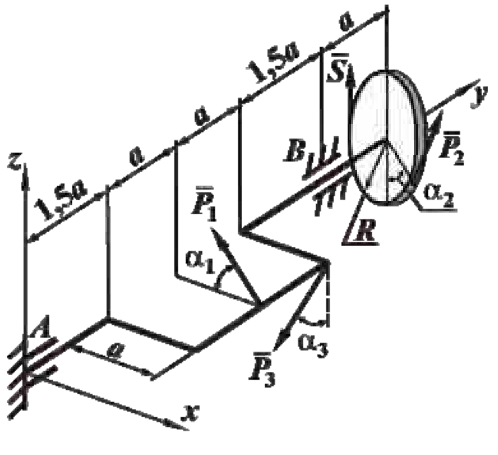
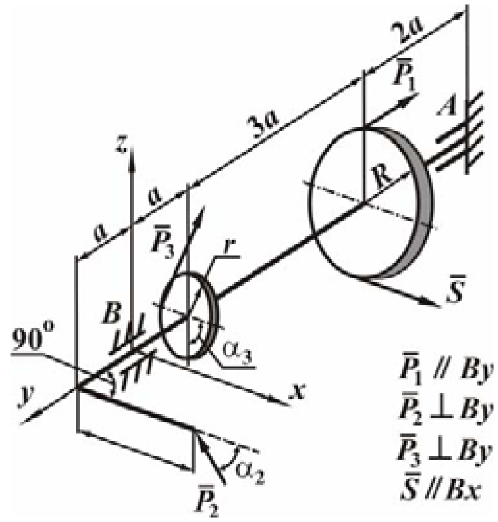
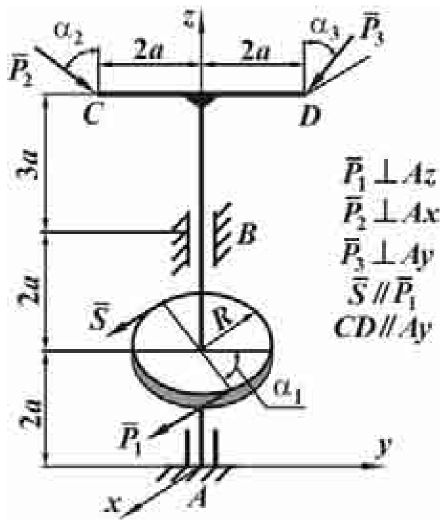
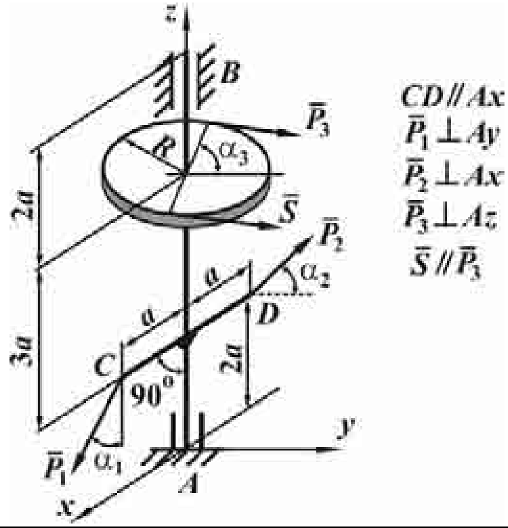
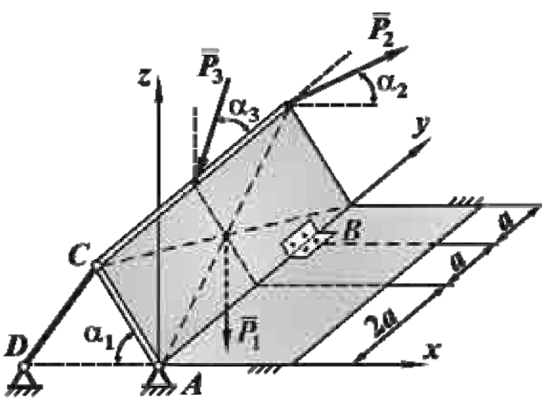
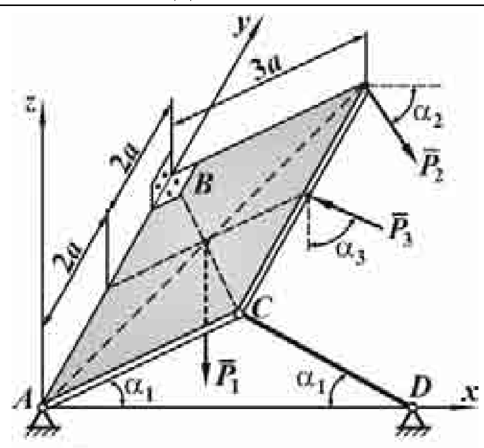
1) Уравнения равновесия пространственной системы сил. 2) Порядок определения момента силы относительно оси. 3) Условия, при которых момент силы относительно оси равен нулю.

Таблица 12

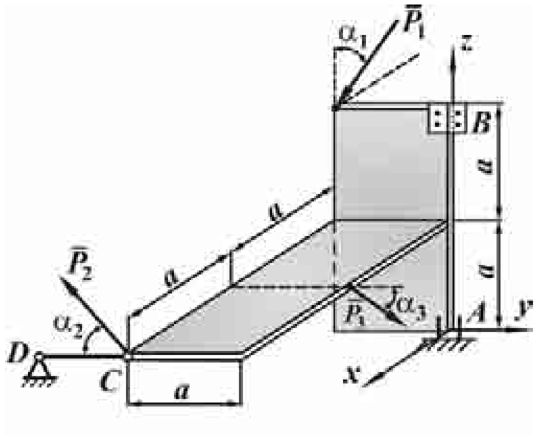
Схемы конструкций к заданиям № 3

задание № 1	задание № 2
 $CD // Az$; $\overline{P}_1 \perp Ay$; $\overline{P}_2 \perp Az$; $\overline{P}_3 // Ay$; $\overline{S} // Ax$	 $CD // Az$; $\overline{P}_1 \perp Ax$; $\overline{P}_2 \perp Ax$; $\overline{P}_3 \perp Az$; $\overline{S} // \overline{P}_1$
задание № 3	**задание № 4**
 $CD // Ay$; $\overline{P}_1 \perp Az$; $\overline{P}_2 \perp Ay$; $\overline{P}_3 // Az$; $AC = 2a$	 [illegible]
задание № 5	**задание № 6**
 $CD // \overline{S} // Bx$; $\overline{P}_1 \perp By$; $\overline{P}_2 \perp Bz$; $\overline{P}_3 \perp Bx$	 $\overline{P}_1 \perp Ax$; $\overline{P}_2 \perp Ay$; $\overline{P}_3 // Az$;

Продолжение табл. 12

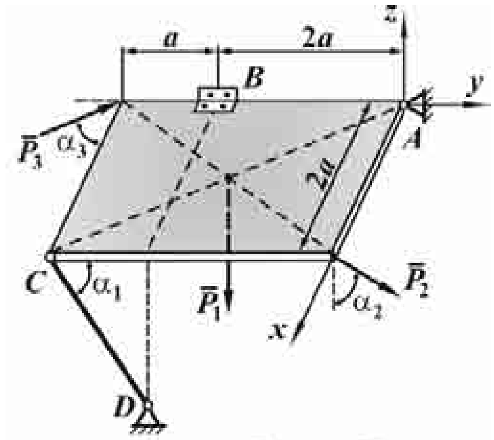
задание № 7	задание № 8
 $\overline{P}_1 \perp Ay; \overline{P}_2 \perp Ay; \overline{P}_3 \perp Ax; \overline{S} \parallel Az$	
задание № 9	задание № 10
	
задание № 11	задание № 12
 $AC = CD = a; \overline{P}_1 \parallel Az; \overline{P}_2 \perp Az; \overline{P}_3 \perp Ax$	 $\overline{P}_1 \parallel Az; \overline{P}_2 \perp Ay; \overline{P}_3 \perp Ax$

задание № 13



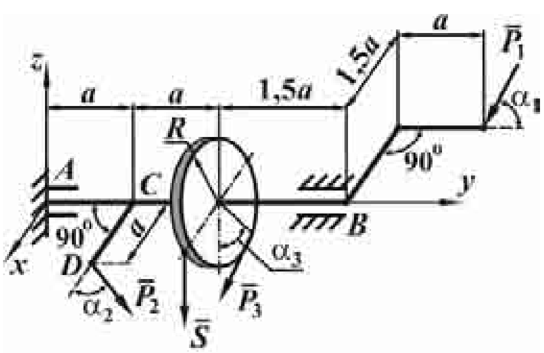
$CD \parallel Ay;\ \bar{P}_1 \perp Ay;\ \bar{P}_2 \perp Az;\ \bar{P}_3 \perp Ax$

задание № 14



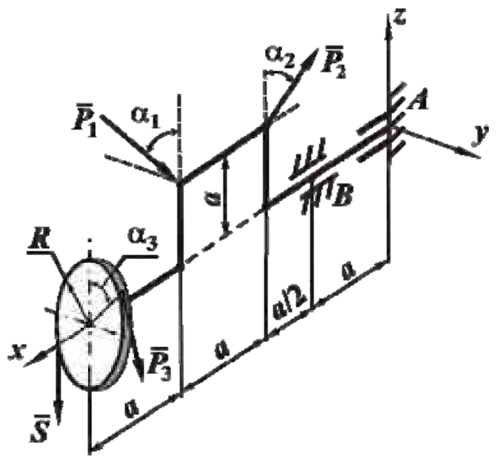
$CD \perp Ax;\ \bar{P}_1 \parallel Az;\ \bar{P}_2 \perp Ay;\ \bar{P}_3 \perp Az$

задание № 15



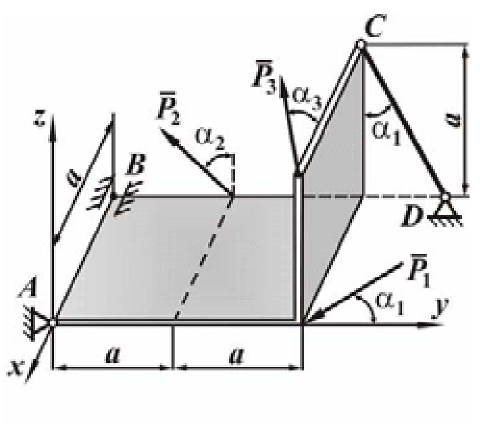
$\bar{P}_1 \perp Ax; \bar{P}_2 \perp Az; \bar{P}_3 \perp Ay; \bar{S} \parallel Az; CD \parallel Ax$

задание № 16



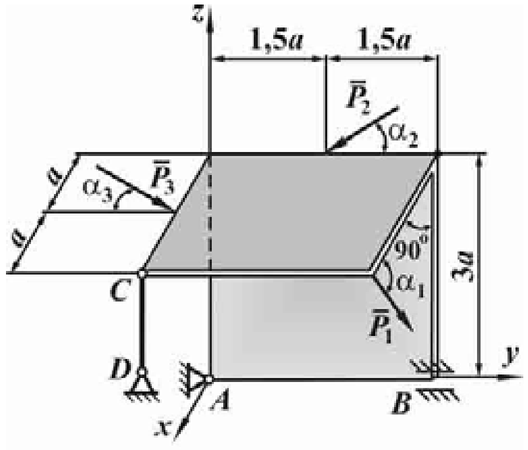
$\bar{P}_1 \perp Ax; \bar{P}_2 \perp Ay; \bar{P}_3 \perp Ax; \bar{S} \parallel Az$

задание № 17



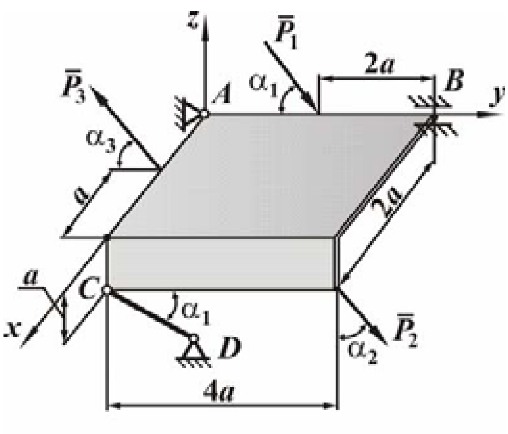
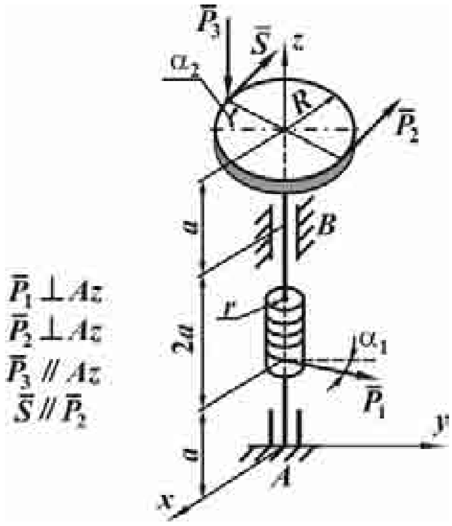
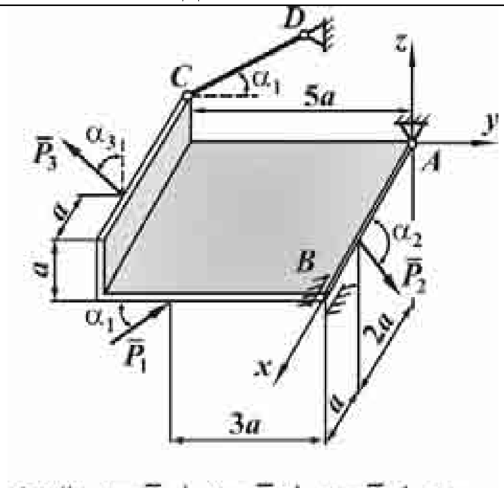
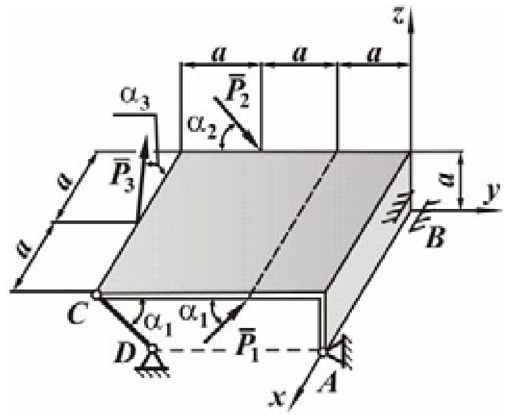
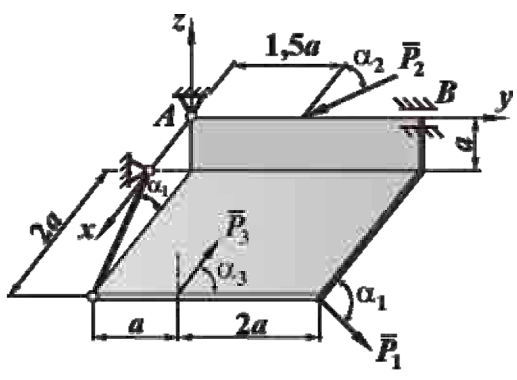
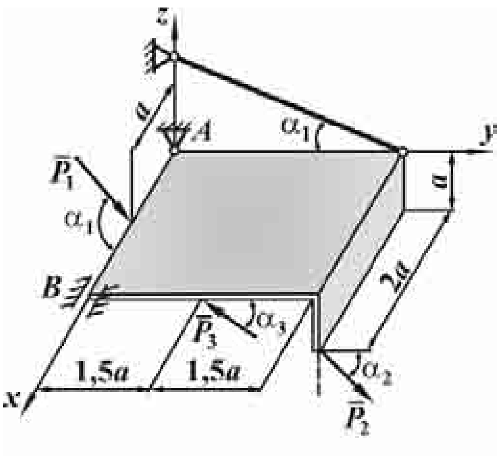
$CD \perp Ax;\ \bar{P}_1 \perp Az;\ \bar{P}_2 \perp Ax;\ \bar{P}_3 \perp Ay$

задание № 18

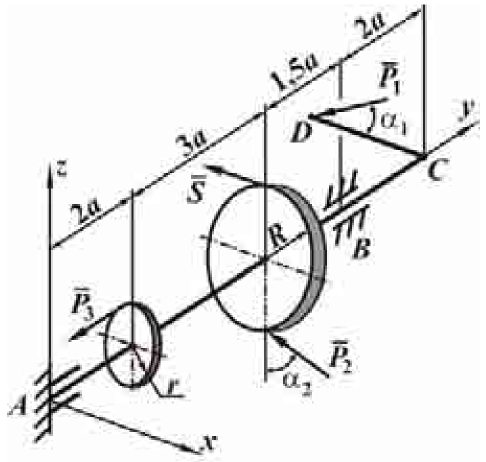
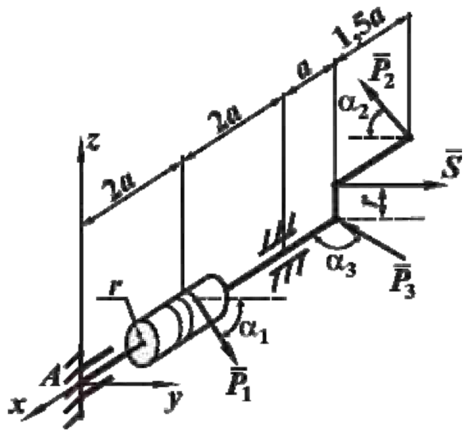
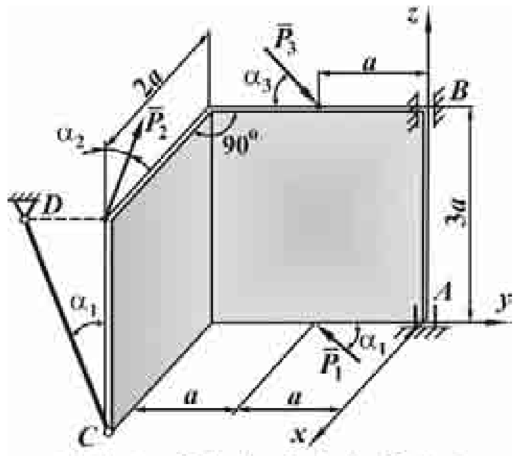
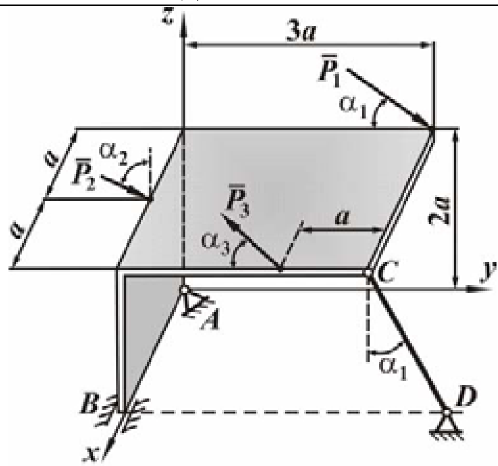
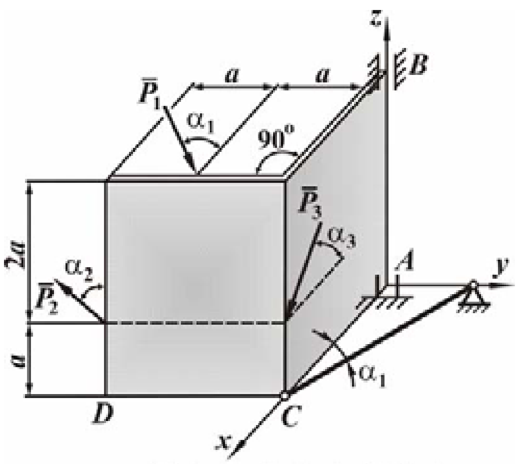
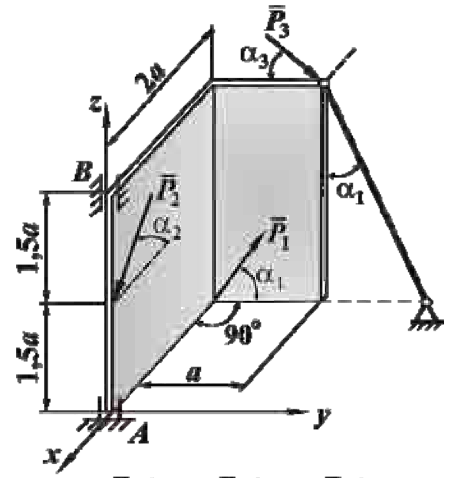


$CD \parallel Az;\ \bar{P}_1 \perp Ay;\ \bar{P}_2 \perp Ax;\ \bar{P}_3 \perp Az$

Продолжение табл. 12

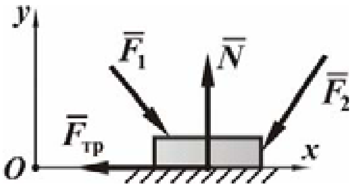
задание № 19	задание № 20
 $CD \perp Ax$; $\bar{P}_1 \perp Ax$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 \perp Az$	
задание № 21	**задание № 22**
 $CD \parallel zAy$; $\bar{P}_1 \perp Az$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 \perp Ax$	 $CD \perp Bx$; $\bar{P}_1 \perp Bz$; $\bar{P}_2 \perp Bx$; $\bar{P}_3 \perp By$
задание № 23	**задание № 24**
 $\bar{P}_1 \perp Ay$; $\bar{P}_2 \perp Az$; $\bar{P}_3 \perp Ax$	 $\bar{P}_1 \perp Ay$; $\bar{P}_2 \perp Ax$; $\bar{P}_3 \perp Az$

Окончание табл. 12

задание № 25	задание № 26
 $\bar{P}_1 \perp Ay$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 /\!/ Ay$; $\bar{S} /\!/ CD /\!/ Ax$	 $\bar{P}_1 \perp Ax; \bar{P}_2 \perp Ax; \bar{P}_3 \perp Az; \bar{S} /\!/ Ay$
задание № 27	задание № 28
 $CD \perp Ax$; $\bar{P}_1 \perp Az$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 \perp Ax$	 $\bar{P}_1 \perp Ax; \bar{P}_2 \perp Ay; \bar{P}_3 \perp Az$
задание № 29	задание № 30
 $CD = AC; \bar{P}_1 \perp Az$; $\bar{P}_2 \perp Ax; \bar{P}_3 \perp Ay$	 $\bar{P}_1 \perp Ax; \bar{P}_2 \perp Ay; \bar{P}_3 \perp Az$

1.8. Равновесие тела при наличии сил трения

● Условия равновесия тела на шероховатой поверхности в случае плоской системы сил:

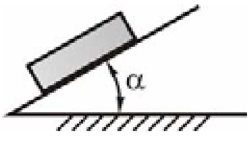


$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum m_A\left(\bar{F}_k\right) = 0;$$
$$0 \le \left|\bar{F}_{тр}\right| \le f \cdot N,$$

где f – коэффициент трения скольжения; $\bar{F}_{тр}, \bar{N}$ – реакции шероховатой поверхности; точка A – произвольная точка.

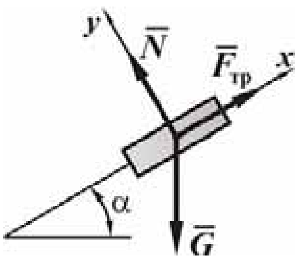
В задачах о равновесии силы трения определяются из уравнений равновесия; полученный результат должен удовлетворять неравенству:

$$F_{тр} \le f \cdot N.$$



Пример. Груз лежит на наклонной плоскости $\alpha = 30^\circ$. Определить силу трения при коэффициентах трения скольжения $f = 0{,}5$ и $f = 0{,}7$.

Решение. Определяем силу трения из уравнений равновесия:



$$\sum F_{kx} = F_{тр} - G\sin\alpha = 0;$$
$$F_{тр} = G\sin\alpha;$$
$$\sum F_{ky} = N - G\cos\alpha = 0;$$
$$N = G\cos\alpha.$$

Найденное значение $F_{тр}$ должно удовлетворять неравенству:

$$F_{тр} \le f \cdot N.$$

При $f = 0{,}5$:

$$G\sin\alpha \le 0{,}5 \cdot G\cos\alpha;$$

$$1 \le 0{,}866.$$

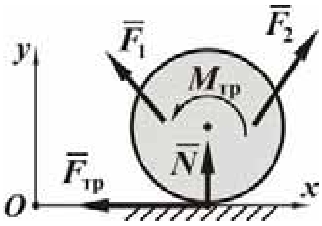
Неравенство не выполняется, следовательно, равновесие не осуществляется.

При $f = 0{,}7$:

$$G\sin\alpha \le 0{,}7 \cdot G\cos\alpha;$$
$$0{,}5 \le 0{,}7 \cdot 0{,}866.$$

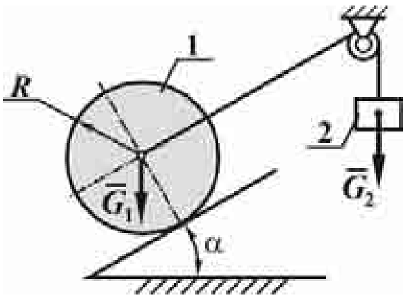
Неравенство выполняется, следовательно, $F_{\text{тр}} = 0{,}5G$.

● Условия равновесия при наличии трения качения в случае плоской системы сил:



$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0;$$

$$0 \le \left|M_{\text{тр}}\right| \le \delta N;$$
$$0 \le \left|\overline{F}_{\text{тр}}\right| \le fN,$$



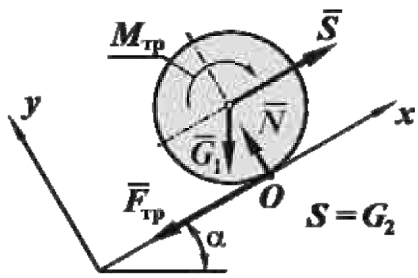
где $\overline{F}_{\text{тр}}$, $\overline{N}$, $M_{\text{тр}}$ – реакции поверхности (сила трения, нормальная реакция, момент трения качения); f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения; точка A – произвольная точка.

Пример. Дано G_1, α, R, δ. Определить минимальный вес груза G_2, обеспечивающий равновесие системы.

Решение. Составляем уравнения равновесия катка:

$$\sum F_{kx} = -F_{\text{тр}} - G_1\sin\alpha + S = 0;$$
$$F_{\text{тр}} = S - G_1\sin\alpha;$$
$$\sum F_{ky} = N - G_1\cos\alpha = 0;$$
$$N = G_1\cos\alpha;$$

$$\sum M_O = G_1\sin\alpha \cdot R - S \cdot R - M_{\text{тр}} = 0,$$



где $M_{\text{тр}} = \delta \cdot N = \delta \cdot G_1\cos\alpha$.

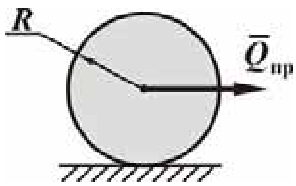
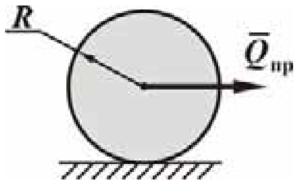
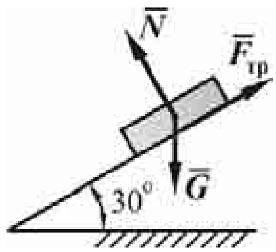
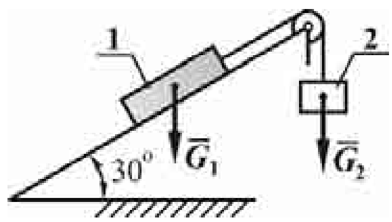
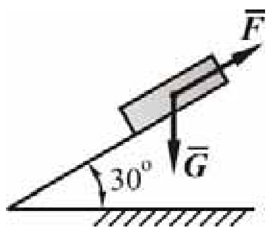
Следовательно:

$$S = \frac{G_1\sin\alpha \cdot R - \delta \cdot G_1\cos\alpha}{R};$$

$$G_{2_{\min}} = G_1\left(\sin\alpha - \frac{\delta}{R}\cdot\cos\alpha\right).$$

Таблица 13

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Вес катка $G = 4$ кН; $R = 2$ м; коэффициент трения качения $\delta = 0{,}0005$ м; Качение начнется при $Q_{\text{пр}} = \ldots$ кН. **Ответ**: 1 кН.	
2	Вес катка $G = 8$ кН, $R = 2$ м, минимальная сила для качения катка $Q_{\text{пр}} = 1{,}6$ Н. Коэффициент трения качения $\delta = \ldots$ м. **Ответ**: 0,0004 м.	
3	Брусок весом $G = 1$ кН находится в равновесии на наклонной плоскости, коэффициент трения $f = 0{,}7$. Сила трения $F_{\text{тр}} = \ldots$ Н. **Ответ**: 500 Н.	
4	Вес тел $G_1 = 800$ Н, $G_2 = 400$ Н, коэффициент трения $f = 0{,}15$; сила трения $F_{\text{тр}} = \ldots$ Н. **Ответ**: 0 Н.	
5	Сила $F = 92$ Н, коэффициент трения $f = 0{,}3$; скольжение тела вправо начнётся при весе тела $G = \ldots$ Н. **Ответ**: 121 Н.	

1.9. Уравнения равновесия некоторых частных систем сил

● Уравнения равновесия пространственной сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum F_{kz} = 0.$$

● Уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0.$$

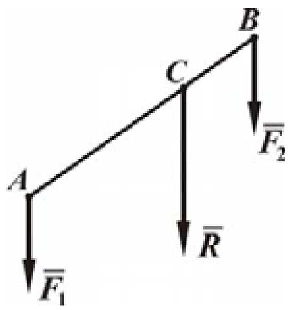
● Уравнения равновесия пространственной системы сил, параллельных оси Oz:

$$\sum F_{kz} = 0;$$
$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0;$$
$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0.$$

● Уравнения равновесия плоской системы сил, параллельных оси Oy:

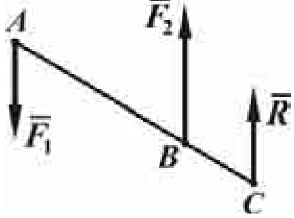
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0.$$

1.10. Сложение параллельных сил и центр тяжести тела



● Две параллельные силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, направленные в одну сторону, имеют равнодействующую, модуль которой $R = F_1 + F_2$, а линия действия проходит через точку C, определяемую равенством:

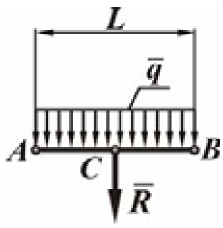
$$AC \cdot F_1 = CB \cdot F_2.$$



● Две параллельные силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ $(F_2 \rangle F_1)$, направленные в противоположные стороны, имеют равнодействующую, модуль которой $R = F_2 - F_1$, а линия действия проходит через точку C, расположенную вне отрезка AB со стороны большей силы, определяемую равенством:

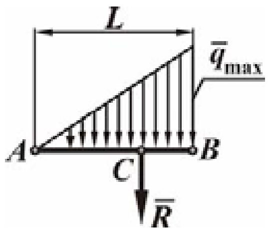
$$AC \cdot F_1 = CB \cdot F_2.$$

● Равнодействующая равномерно распределённых по отрезку длиной L параллельных сил интенсивности q (Н/м):



$$R = q \cdot L;$$
$$AC = L/2.$$

● Равнодействующая линейно распределённых по отрезку длиной L параллельных сил:



$$R = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot L;$$
$$AC = \frac{2}{3} L.$$

● Центр параллельных сил.

Точка, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

$$\overline{r}_C = \frac{\sum F_k \cdot \overline{r}_k}{\sum F_k},$$

где $\overline{r}_C$ – радиус-вектор центра параллельных сил; $\overline{r}_k$ – радиус-вектор точки приложения k-ой силы.

Центром тяжести называется центр параллельных сил тяжести $\overline{p}_k$ *отдельных частиц тела*. Координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P};$$
$$y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P}; \qquad (10.1)$$
$$z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}.$$

Для однородных тел вес p_k отдельных частиц тела пропорционален объемам этих частиц: $p_k = \gamma v_k$, а вес тела пропорционален объему тела $P = \gamma V$ (γ – вес единицы объема). Подставляя данные выражения в (10.1), получаем формулы для определения координат центра тяжести однородных тел:

$$x_C = \frac{\sum v_k x_k}{V};$$
$$y_C = \frac{\sum v_k y_k}{V}; \qquad (10.2)$$
$$z_C = \frac{\sum v_k z_k}{V}.$$

Для однородных плоских пластин и изделий из однородных линейных элементов (например, из однородной проволоки постоянного сечения), вводя вес единицы площади и вес единицы длины, получаем формулы для определения «центра тяжести» площади и «центра тяжести» линии:

$$x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S};$$
$$y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S}; \qquad (10.3)$$
$$z_C = \frac{\sum s_k z_k}{S},$$

где $S-$ площадь сечения всей пластины, s_k- площадь ее части;

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L};$$
$$y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}; \qquad (10.4)$$
$$z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L},$$

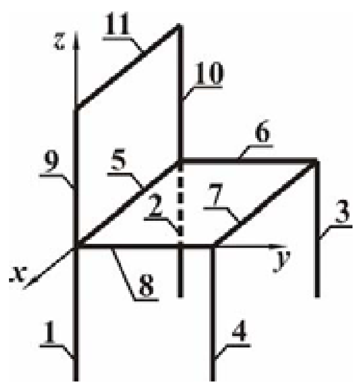
где $L-$ длина всей линии, l_k- длина ее частей.

● Способы определения положения центров тяжести.

а) Учет симметрии. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, ось симметрии или центр симметрии, то его центр тяжести находится соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

б) Способ разбиения. Если тело можно разбить на конечное число частей, для которых положения центров тяжести известны, то координаты центра тяжести всего тела можно вычислить по формулам (10.1).

Пример. Найти координаты центра тяжести тела, имеющего вид стула, состоящего из стержней одинаковой длины и веса. Длина стержня $l = 44\,\text{см}$.



Решение. Так как тело имеет плоскость симметрии и центр тяжести лежит в этой плоскости, то $x_C = -22\,\text{см}$. Остальные координаты определяем по формулам (10.1):

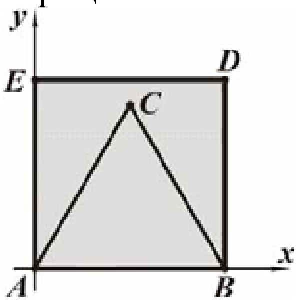
$$y_C = \frac{(l_3 + l_4 + l_7)\cdot 44 + (l_6 + l_8)\cdot 22}{11\cdot 44} = 16\,\text{см};$$

$$z_C = \frac{-22\cdot(l_1+l_2+l_3+l_4)+l_{11}\cdot 44+(l_9+l_{10})\cdot 22}{11\cdot 44} = 0\,\text{см}.$$

в) Интегрирование. Если однородное тело не удается разбить на несколько частей, положение центров тяжести которых известно, то тело разбивают на произвольные малые объемы Δv_k и переходят к пределу при $\Delta v_k \to 0$; формулы (10.2) принимают вид:

$$x_C = \frac{1}{V}\int_V x\,dv; \quad y_C = \frac{1}{V}\int_V y\,dv; \quad z_C = \frac{1}{V}\int_V z\,dv.$$

г) Способ дополнения (способ отрицательных масс). Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы. При этом центры тяжести тел без вырезов и центры тяжести самих вырезов должны быть известны. Масса выреза считается отрицательной.



Пример. Дана однородная квадратная пластина $ABDE$ со стороной a. Найти внутри квадрата такую точку C, чтобы она была центром тяжести пластины, которая получится, если из квадрата вырезать равнобедренный треугольник ACB.

Решение: В силу симметрии $x_C = a/2$. Для определения y_C используем способ дополнения.

Пусть $S-$ площадь квадрата с вырезом; S_1, y_1- площадь квадрата без выреза и координата его центра тяжести; S_2, y_2- площадь и координата центра тяжести треугольника ACB. Согласно формулам (10.3):

$$y_C = \sum\frac{S_k y_k}{S} = \frac{(S_1 y_1 - S_2 y_2)}{S} = \frac{\left(a^2\dfrac{a}{2} - 0{,}5 a y_C \dfrac{y_C}{3}\right)}{a^2 - 0{,}5 a y_C}$$

или
$$2{y_C}^2 - 6 a y_C + 3a^2 = 0.$$

Следовательно, $y_C = 0{,}61a$ (второй корень $y_C = 2{,}4a$ не подходит по смыслу).

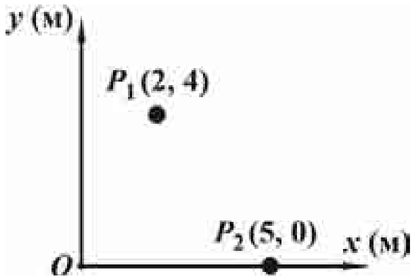
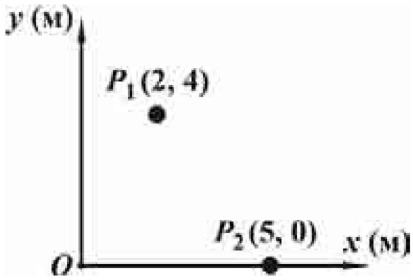
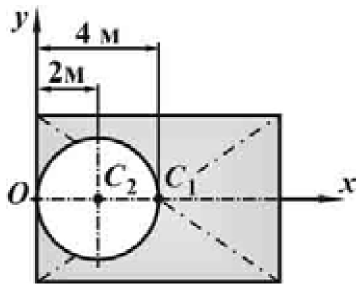
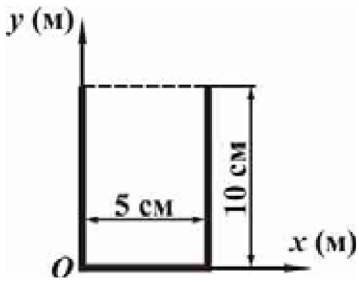
Контрольные вопросы

1) Что называется центром параллельных сил? 2) Что называется центром тяжести тела? 3) Запишите формулы для определения координат центра тяжести однородного тела. 4) Как учитывается симметрия тела при определении положения его центра тяжести? 5) Как определя-

ется положение центра тяжести способом разбиения? 6) В чем суть способа отрицательных масс?

Таблица 14

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Абсцисса центра тяжести двух материальных точек весом $P_1 = 4$ Н и $P_2 = 8$ Н $x_C = \ldots$ м. **Ответ**: 4 м.	
2	Ордината центра тяжести двух материальных точек весом $P_1 = 4$ Н и $P_2 = 4$ Н $y_C = \ldots$ м. **Ответ**: 2 м.	
3	Из однородной пластины весом $P_1 = 30$ Н вырезан круг весом $P_2 = 10$ Н. Абсцисса центра тяжести пластины с вырезом $x_C = \ldots$ м. **Ответ**: 5 м.	
4	Ордината центра тяжести фигуры из однородной проволоки $y_C = \ldots$ см. **Ответ**: 4 см.	
5	Для системы двух материальных точек: M_1 ($x_1 = 3{,}5$ м, $y_1 = -3$ м, $m_1 = 4$ кг) и M_2 ($x_2 = 1$ м, $y_2 = 5$ м, $m_2 = 6$ кг) координата центра тяжести $x_C = \ldots$ м. **Ответ**: 2 м.	

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Кинематика точки

2.1.1. Координатный способ задания движения

Уравнения $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ называются уравнениями движения или законом движения точки в координатной форме. Чтобы получить уравнение траектории, нужно из этих уравнений исключить время t.

● Мгновенная скорость материальной точки:

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \dot{\overline{r}},$$

где $\overline{r}$ – радиус-вектор точки.

● Проекции и модуль скорости точки:

$$V_x = \frac{dx}{dt};\ V_y = \frac{dy}{dt};\ V_z = \frac{dz}{dt};$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

где x, y, z – декартовы координаты точки, зависящие от времени t.

● Мгновенное ускорение точки:

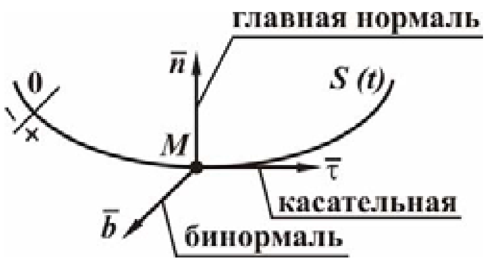
$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \dot{\overline{V}} = \ddot{\overline{r}}.$$

● Проекции и модуль ускорения точки:

$$a_x = \ddot{x};\ a_y = \ddot{y};\ a_z = \ddot{z};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

2.1.2. Естественный способ задания движения точки



Естественный способ задания движения точки состоит в том, что задаются:

- траектория движения;
- начало и положительное направление отсчета;
- закон движения точки по траектории $S = S(t)$,

где S – дуговая координата (расстояние, измеренное от выбранного на траектории начала отсчета до текущего положения точки на траектории).

● Естественная система координат:

Здесь $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$ – орты касательной, главной нормали, бинормали в данной точке M траектории.

● Скорость точки:

$$\overline{V} = \dot{S} \cdot \overline{\tau}\,;\; V_\tau = \dot{S}\,,$$

где V_τ – проекция скорости на касательную к траектории в данной точке.

● Ускорение точки:

$$\overline{a} = a_\tau \cdot \overline{\tau} + a_n \cdot \overline{n}\,.$$

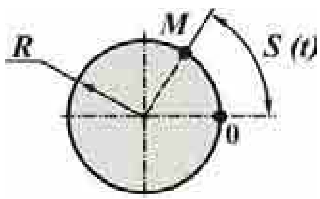
Здесь $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$ – нормальное ускорение, ρ – радиус кривизны траектории в данной точке; $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \ddot{S}$ – касательное ускорение.

Модуль ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,.$$

Таблица 15

Тестовые задания

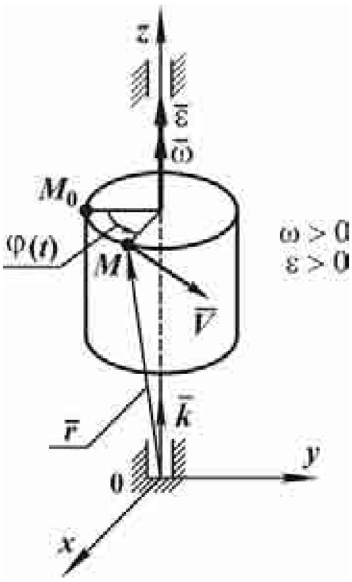
№	Задание/ответ	Схема
1	Закон движения точки $S = 0{,}25t^2 + 3t$ (S в метрах), $t_1 = 2$ с, $R = 4$ м. Нормальное ускорение $a_n = \ldots$ м/с^2. **Ответ**: 4.	
2	Закон движения точки: $x = 2\cos\dfrac{\pi t}{3}$, $y = 2\sin\dfrac{\pi t}{3}$. Уравнение траектории имеет вид … **Ответ**: $x^2 + y^2 = 4$.	
3	Закон движения точки: $x = 4t^2$, $y = 3t^2$. В момент $t_1 = 1$ с скорость точки … м/с. **Ответ**: 10.	
4	Закон движения точки (в метрах): $x = 2t^2$, $y = t^2$, $z = 0{,}5\sqrt{5}\,t^2$. Модуль ускорения … м/с^2. **Ответ**: 5.	
5	Закон движения точки $S = 5t^3 + 8t^2$ (S в метрах). В момент $t_1 = 2$ с касательное ускорение $a_\tau = \ldots$ м/с^2 **Ответ**: 76.	

2.2. Поступательное движение твёрдого тела

Поступательное движение твёрдого тела – это такое движение, при котором любая прямая, неизменно связанная с телом, перемещается параллельно самой себе.

При поступательном движении твёрдого тела скорости и ускорения всех его точек равны, а траектории точек одинаковы и при наложении совпадают.

2.3. Вращательное движение твердого тела



Закон вращательного движения твердого тела:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Здесь φ – угол поворота тела. Угол считается положительным, если он отсчитывается против хода часовой стрелки (для смотрящего навстречу оси z).

● Угловая скорость тела:

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \bar{k} ,$$

где $\dot{\varphi}$ – алгебраическая угловая скорость (проекция угловой скорости на ось вращения); $\bar{k}$ – орт оси вращения.

● Угловое ускорение тела:

$$\bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \cdot \bar{k} ,$$

где $\ddot{\varphi}$ – проекция углового ускорения на ось вращения.

● Скорость точки тела:

$$V = \omega \cdot h,$$

где ω – модуль угловой скорости; h – расстояние от точки до оси вращения.

● Формула Эйлера

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} ,$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор, проведенный из любой точки на оси вращения.

● Ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} ;\ a_\tau = \varepsilon \cdot h;\ a_n = \omega^2 h.$$

● Угол наклона вектора ускорения к радиусу (к главной нормали):

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Пример. Точка M движется по окружности $R = 0,4$ м, полное ускорение точки M $a_M = 8\ \text{м}/\text{с}^2$, $\gamma = 30^\circ$. Определить угловое ускорение ε.

Решение. Ускорение точки M $\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau$. Из рисунка находим $a_M^\tau = a_M \cdot \sin\gamma = 8 \cdot \sin 30^\circ = 4\ \text{м}/\text{с}^2$. Так как $a_M^\tau = \varepsilon \cdot R \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{a_M^\tau}{R} = \dfrac{4}{0,4} = 10\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

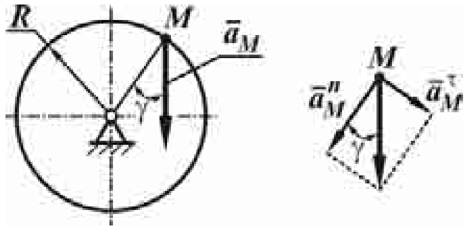
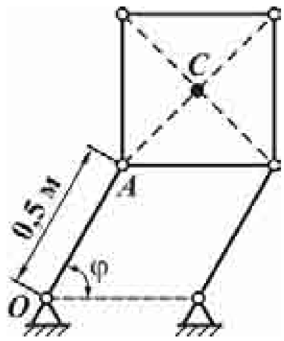
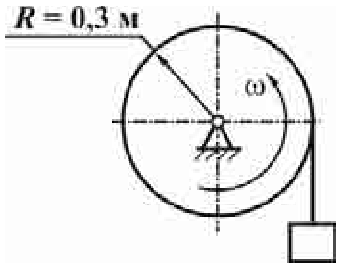
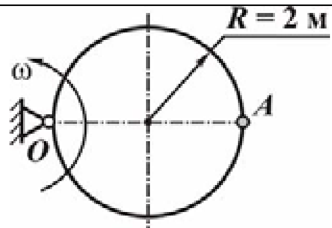
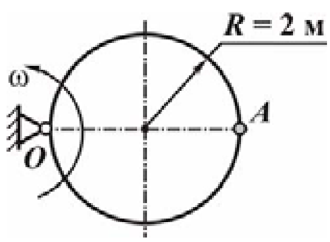
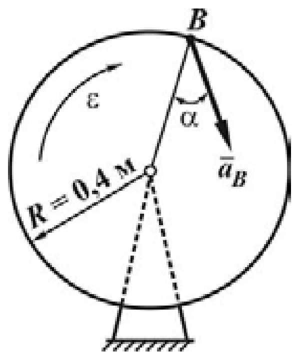


Таблица 16

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Скорость точки C пластины $V = (6t^2 + 5t)$ м/с. В момент $t_1 = 1$ с угловая скорость кривошипа OA …рад/с. **Ответ**: 22.	
2	Закон вращения барабана $\varphi = 6t + 2t^3$ рад. В момент $t_1 = 2$ с скорость груза …м/с. **Ответ**: 9.	
3	Угловая скорость диска $\omega = 4t^2 + 2t$ рад/с. В момент $t_1 = 2$ с скорость точки A …м/с. **Ответ**: 80.	
4	Угловая скорость диска $\omega = 6t^2 + 8t$ рад/с. В момент $t_1 = 2$ с касательное ускорение точки A …м/с^2. **Ответ**: 128.	

№	Задание/ответ	Схема
5	Угловое ускорение диска $\varepsilon = 5\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $\alpha = 30^\circ$. Полное ускорение точки B $a_B = \ldots \text{м/с}^2$. **Ответ**: 4.	

Индивидуальное задание № 4

Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 1 определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки M механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен S. Схемы механизмов показаны в табл. 19, а необходимые для расчёта данные помещены в табл. 18.

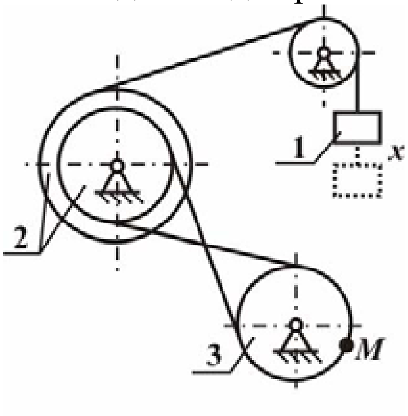


Рис. 8

Пример. Дано: схема механизма (рис. 8); $R_2 = 50\,\text{см}$; $r_2 = 40\,\text{см}$; $R_3 = 20\,\text{см}$; $S = 45\,\text{см}$; закон движения груза **1** $x = 5 + 10t^2\,\text{см}$ (t – в секундах).

Определить скорость V_M и полное ускорение a_M точки M, угловую скорость ω_3 и угловое ускорение ε_3 звена **3**.

Решение. Определим момент времени t, когда путь S, пройденный грузом **1**, равен 45 см:

$$x = x(t) = 5 + 10t^2 = 45\,\text{см},$$

следовательно:

$$t = \sqrt{\frac{45-5}{10}} = 2\,\text{с}.$$

Для определения скорости груза дифференцируем по времени уравнение его движения:

$$V_1 = \dot{x} = 20t\,\text{см/с}.$$

Линейная скорость точки A (рис. 9), равна скорости груза:

$$V_A = V_1 = 20t \text{ см/с}.$$

Точка C, находящаяся на колесе **2**, с помощью гибкой связи соединяется с вспомогательным блоком, на котором лежат точки B и A, следовательно, её линейная скорость равна скорости точки B:

$$V_C = V_B = V_A = 20t \text{ см/с}.$$

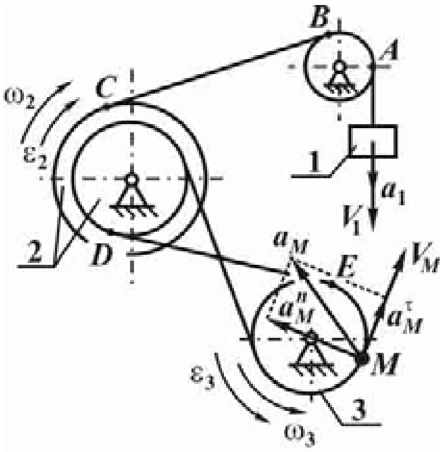


Рис. 9

Определив линейную скорость точки C, находим угловую скорость ω_2 колеса **2**:

$$\omega_2 = \frac{V_C}{R_2} = \frac{20t}{50} = 0,4t \, \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Точка D принадлежит колесу **2** и лежит на окружности меньшего радиуса. Зная угловую скорость ω_2 колеса **2**, определим линейную скорость точки D:

$$V_D = \omega_2 \cdot r_2 = 0,4t \cdot 40 = 16t \text{ см/с}.$$

Точка E, находящаяся на колесе **3**, с помощью гибкой связи соединяется с колесом **2**, следовательно, её линейная скорость равна скорости точки D:

$$V_E = V_D = 16t \text{ см/с}.$$

Точки M и E колеса **3** лежат на одной окружности, следовательно, $V_M = V_E = 16t$ см/с. Вектор скорости V_M направлен перпендикулярно к радиусу в сторону вращения колеса **3**.

Зная линейную скорость точки M, находим угловую скорость ω_3 колеса **3**:

$$\omega_3 = \frac{V_M}{R_3} = \frac{16t}{20} = 0,8t \, \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Определив угловую скорость ω_3 колеса **3**, находим угловое ускорение ε_3 колеса **3**:

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 0,8 \, \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Касательное ускорение точки M :

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 0{,}8 \cdot 20 = 16\ \text{см/с}^2 .$$

Вектор касательного ускорения имеет с вектором скорости одинаковое направление, так как в рассматриваемом примере вращение колес равноускоренное (ω_3 и ε_3 направлены в одну сторону).

Нормальное ускорение точки M :

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 20\,\omega_3^2\ \text{см/с}^2,$$

направлено по радиусу к центру колеса **3** (см. рис. 9).

Полное ускорение точки M :

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^\tau\right)^2} .$$

Значения определяемых величин для момента времени $t = 2$ с приведены в табл. 17.

Таблица 17

Расчетные значения величин

$V_M, \dfrac{\text{см}}{\text{с}}$	ускорение, $\dfrac{\text{см}}{\text{с}^2}$			$\omega_3, \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$	$\varepsilon_3, \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$
	a_M^n	a_M^τ	a_M		
32	51,2	16	53,64	1,6	0,8

Контрольные вопросы

1. Какое движение тела называется поступательным?
2. Может ли траектория точки тела, совершающего поступательное движение, быть пространственной кривой линией?
3. Каковы основные свойства поступательного движения тела?
4. Какое движение твердого тела называется вращательным?
5. По каким траекториям движутся точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
6. Каким образом задается вращательное движение тела?
7. Какими уравнениями связаны угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение тела?
8. Какое положение относительно вращающегося тела занимает вектор угловой скорости?
9. Как определяется вектор скорости точки вращающегося тела?

10. Как направлены и как определяются составляющие ускорения точки вращающегося тела?
11. Как вычисляется ускорение точки вращающегося тела по его составляющим?

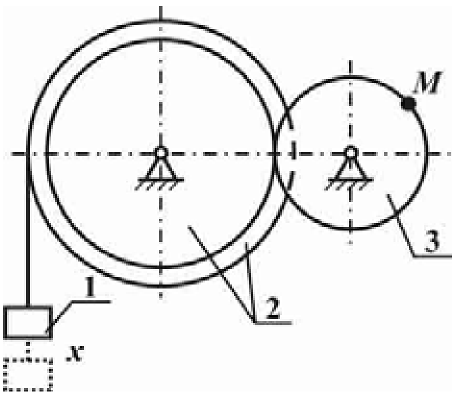
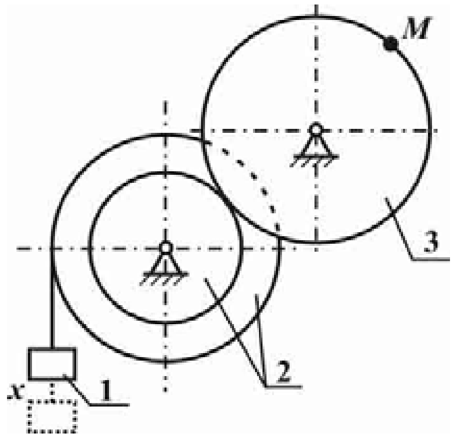
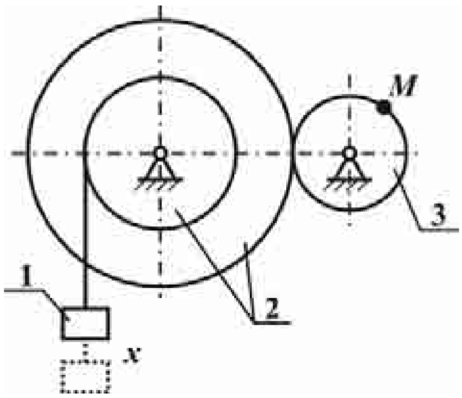
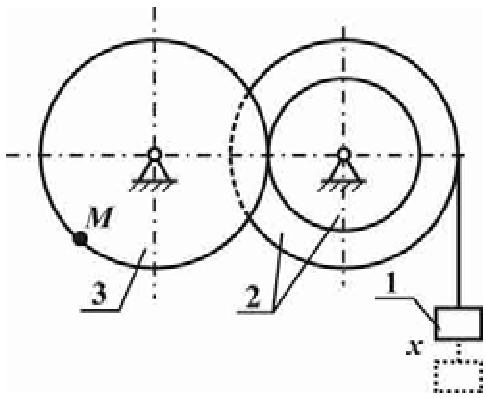
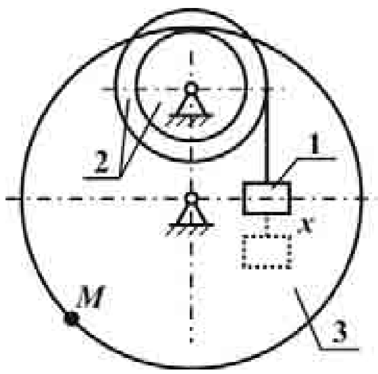
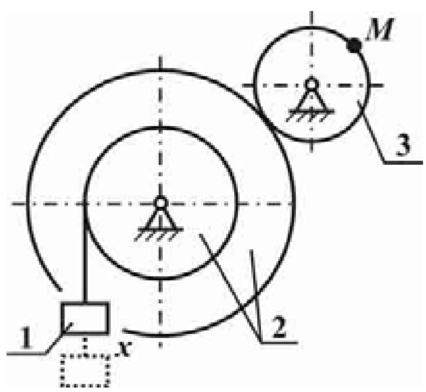
Таблица 18

Данные для индивидуального задания № 4

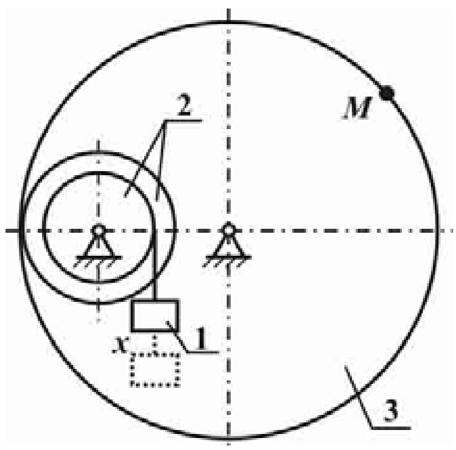
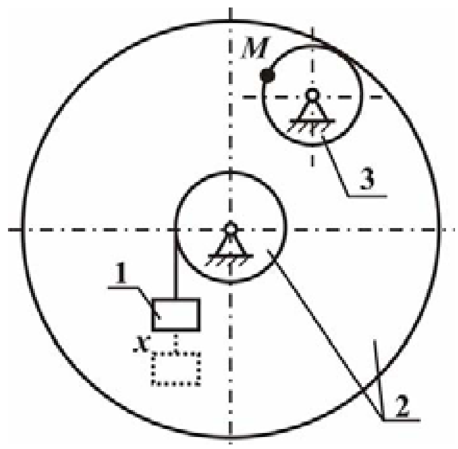
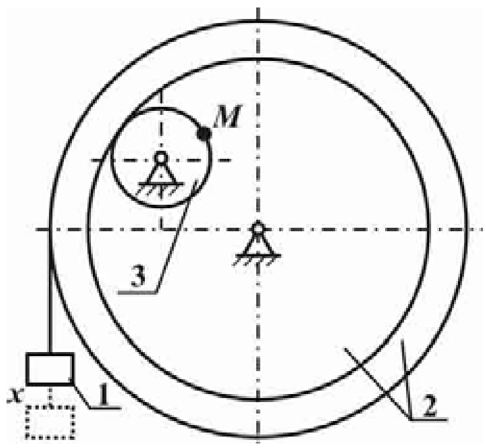
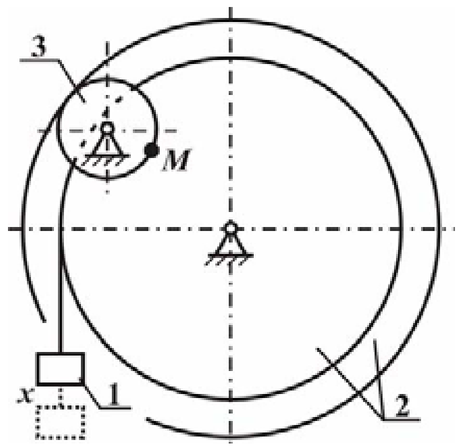
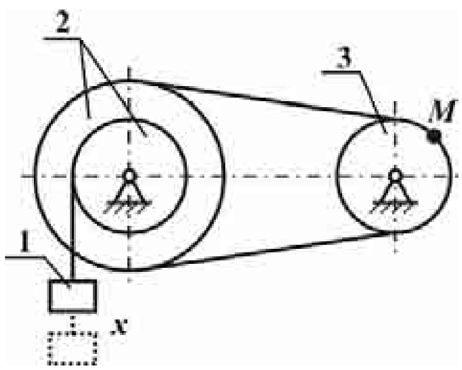
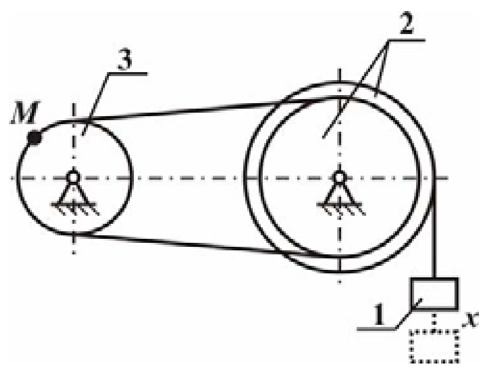
Номер Задания (табл. 19)	Радиусы, см				Закон движения груза **1** $x = x(t)$ (x – см, t – с)	S, см
	R_2	r_2	R_3	r_3		
1	60	45	36	–	$10+100\,t^2$	50
2	80	50	60	–	$80\,t^2$	10
3	100	60	75	–	$18+70\,t^2$	20
4	58	45	60	–	$50\,t^2$	50
5	30	20	100	–	$8+40\,t^2$	10
6	100	60	15	–	$5+60\,t^2$	50
7	45	35	110	–	$7+90\,t^2$	20
8	90	20	10	–	$4+30\,t^2$	50
9	120	100	30	–	$3+80\,t^2$	20
10	100	80	20	–	$70\,t^2$	40
11	40	25	10	–	$5+40\,t^2$	30
12	50	30	20	–	$2+50\,t^2$	10
13	30	20	60	–	$60\,t^2$	40
14	25	10	15	–	$6+20\,t$	10
15	15	–	15	10	$8+40\,t^2$	30
16	30	–	20	15	$3+40\,t^2$	40
17	40	30	70	–	$80\,t^2$	60
18	30	15	20	–	$4+20\,t$	30
19	15	10	50	–	$5+80\,t^2$	20
20	25	15	30	–	$50\,t^2$	30
21	20	10	50	30	$4+90\,t^2$	50
22	40	20	30	15	$10+40\,t^2$	50
23	30	20	15	10	$7+40\,t$	60
24	10	30	40	–	$90\,t^2$	20
25	50	20	32	–	$20+50\,t$	50
26	32	16	40	16	$5+60\,t^2$	10
27	40	18	30	10	$6+30\,t^2$	30
28	50	25	60	15	$50\,t^2$	40
29	25	20	30	60	$3+30\,t$	60
30	30	15	22	–	$5+60\,t^2$	20

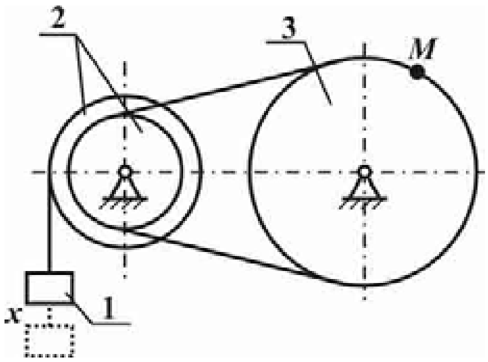
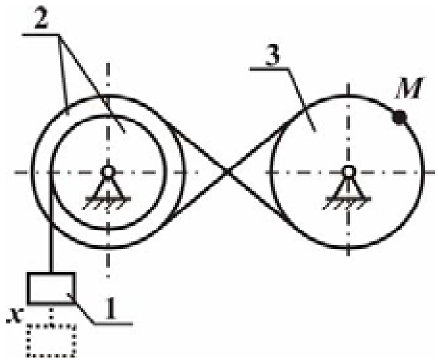
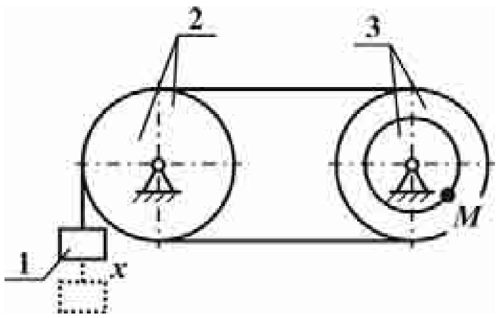
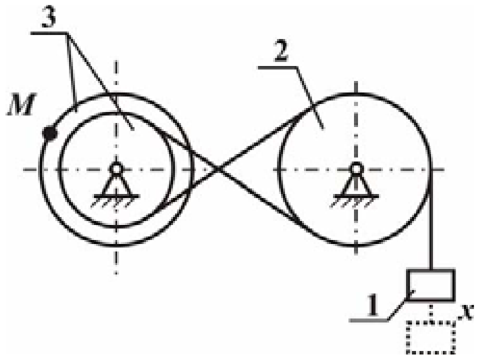
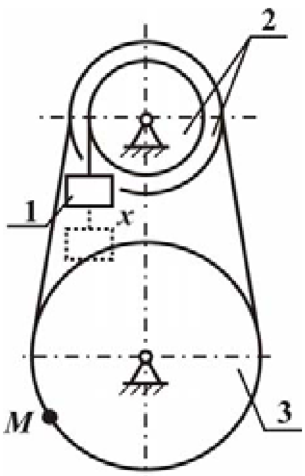
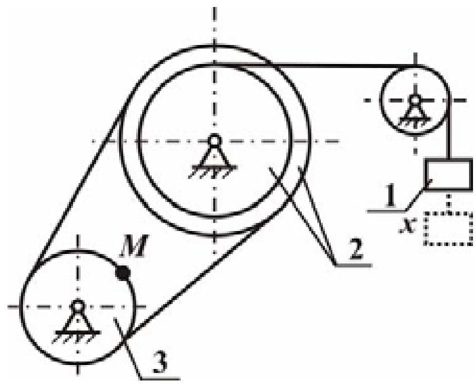
Таблица 19

Схемы механизмов к ИДЗ № 4

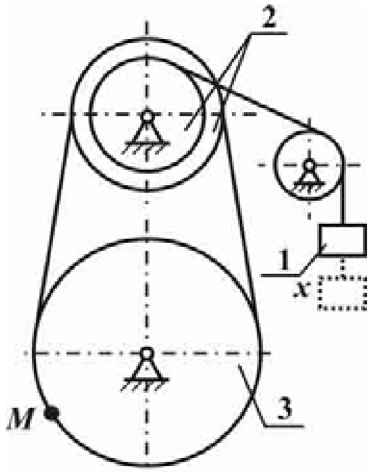
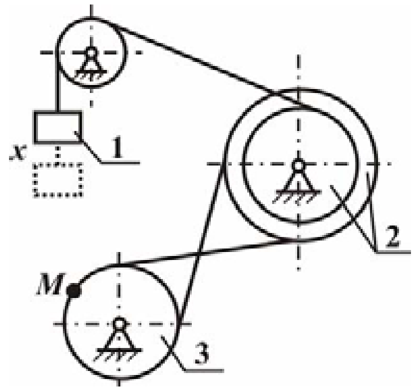
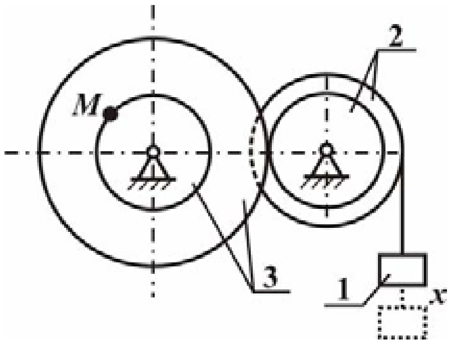
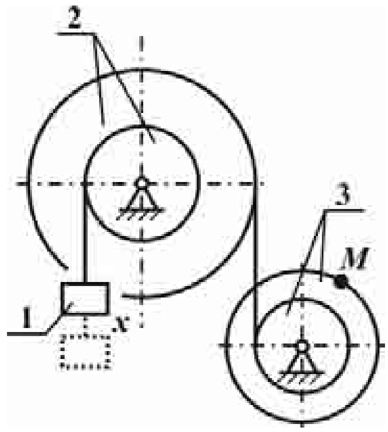
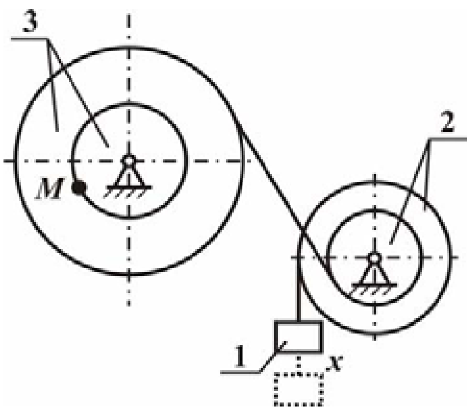
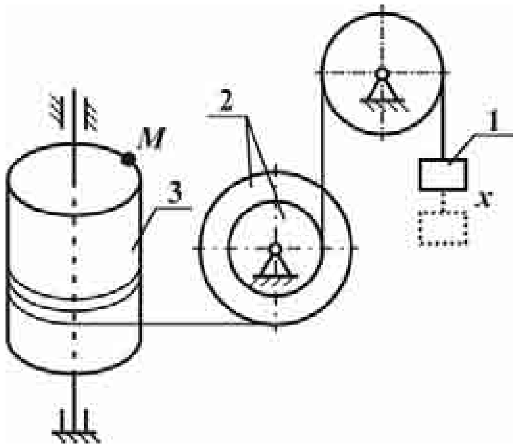
задание № 1	задание № 2
	
задание № 3	задание № 4
	
задание № 5	задание № 6
	

Продолжение табл. 19

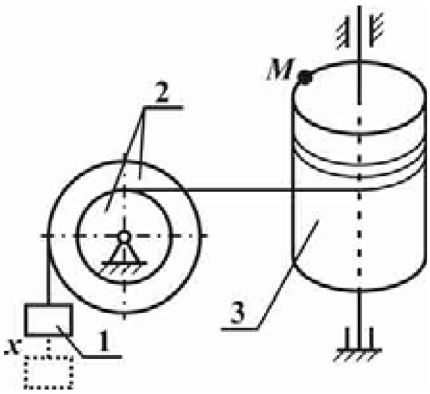
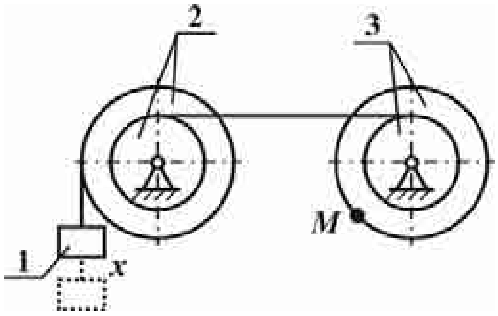
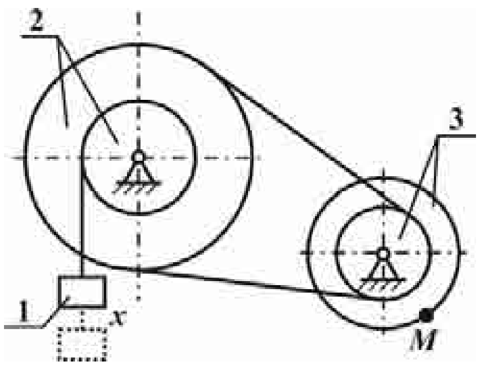
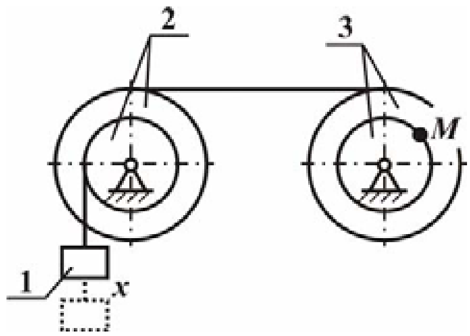
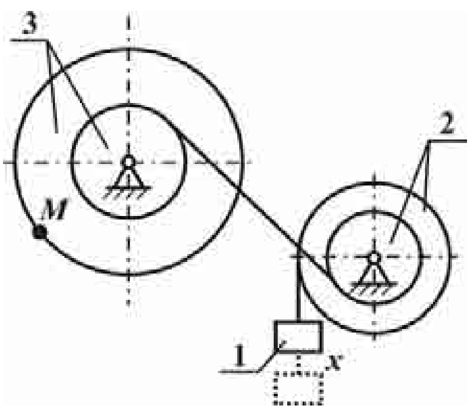
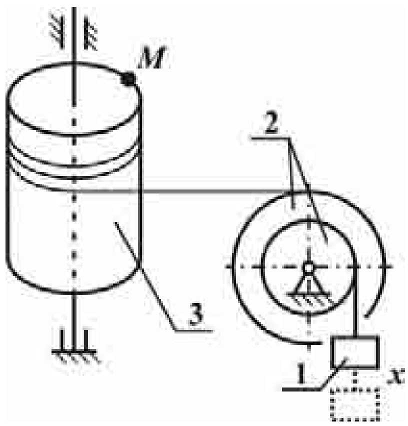
задание № 7	задание № 8
	
задание № 9	задание № 10
	
задание № 11	задание № 12
	

задание № 13	задание № 14
	
задание № 15	задание № 16
	
задание № 17	задание № 18
	

Продолжение табл. 19

задание № 19	задание № 20
	
задание № 21	задание № 22
	
задание № 23	задание № 24
	

Окончание табл. 19

задание № 25	задание № 26
	
задание № 27	задание № 28
	
задание № 29	задание № 30
	

2.4. Плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела

При плоском движении все точки тела движутся параллельно какой либо неподвижной плоскости.

При плоском движении твердого тела исследуется движение одного сечения тела (плоской фигуры) в системе координат xOy.

● Уравнения движения плоской фигуры:

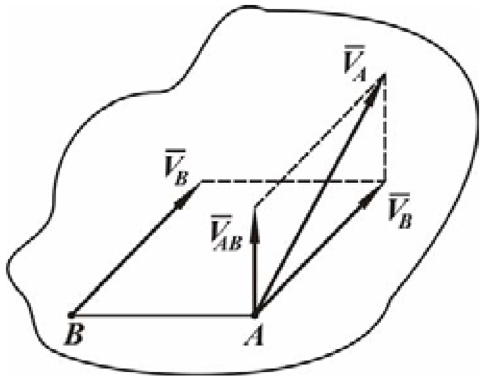
$$x_0 = f_1(t);\ y_0 = f_2(t);$$
$$\varphi = f_3(t),$$

где x_0, y_0 – координаты полюса; φ – угол поворота фигуры в своей плоскости вокруг полюса.

2.4.1. Скорости точек тела в плоском движении

● Скорость любой точки A тела:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B + \bar{V}_{AB};$$
$$\bar{V}_{AB} = \bar{\omega} \times \overline{AB};$$
$$V_{AB} = \omega \cdot AB,$$



где $\bar{V}_B$ – скорость полюса; $\bar{V}_{AB}$ – скорость точки A во вращательном движении фигуры вокруг полюса B.

● Теорема о проекциях скоростей двух точек твердого тела:

$$\text{пр}_{AB}\bar{V}_A = \text{пр}_{AB}\bar{V}_B,$$

где $\bar{V}_A, \bar{V}_B$ – скорости точек A и B.

● Мгновенный центр скоростей (МЦС)

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Свойства МЦС:

а) векторы скоростей перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с МЦС, и направлены в сторону вращения;

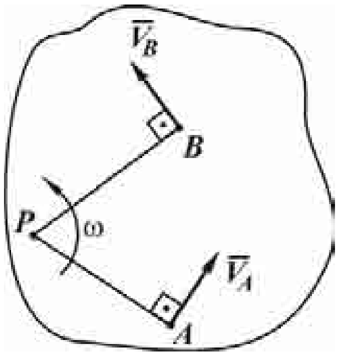
б) модули скоростей пропорциональны расстояниям от точек до мгновенного центра скоростей.

● Скорости точек плоской фигуры в любой момент времени распределяются так же, как при вращении фигуры в своей плоскости вокруг МЦС:

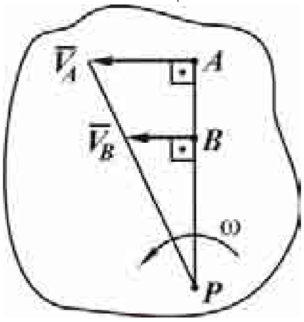
$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \omega,$$

где AP, BP – расстояния от точек A, B до МЦС (точки P); V_A, V_B – скорости точек A и B; ω – угловая скорость фигуры.

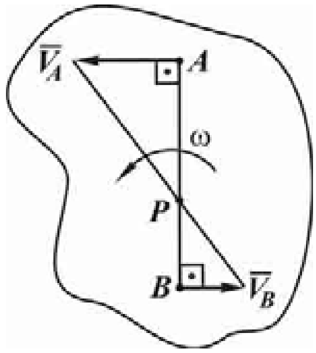
● Способы определения мгновенного центра скоростей.



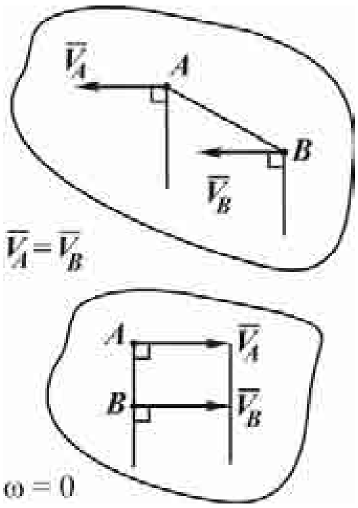
Первый случай, когда известны направления векторов скоростей двух точек – A и B. Восстанавливаем перпендикуляры в точках A и B к векторам $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ до их пересечения. Точка P – МЦС.



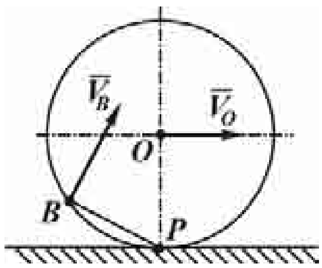
Второй случай: скорости $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ точек A и B параллельны, направлены в одну сторону и перпендикулярны к отрезку AB. Проведём прямую через концы векторов $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ до пересечения с прямой AB. Точка P – МЦС.



Третий случай: скорости $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ точек A и B параллельны, направлены в разные стороны и перпендикулярны к отрезку AB. Проведём прямую через концы векторов $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ до пересечения с прямой AB. Точка P – МЦС.



Четвертый случай: скорости $\bar{V}_A$, $\bar{V}_B$ параллельны, но не перпендикулярны отрезку AB или перпендикулярны, но равны. В этом случае прямые, перпендикулярные к $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$, пересекаются в бесконечности, и поэтому мгновенный центр скоростей не существует, $V_A = V_B$, $\omega = 0$.

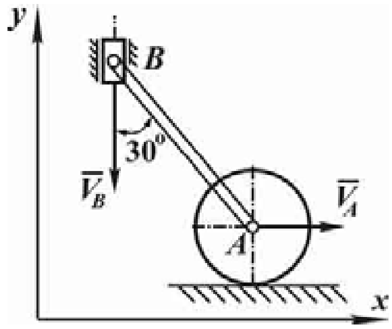
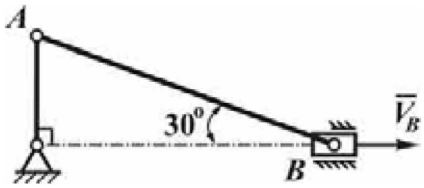
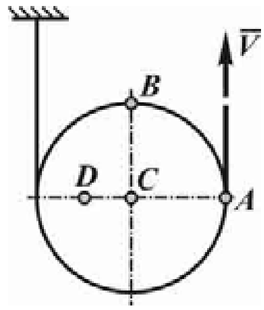
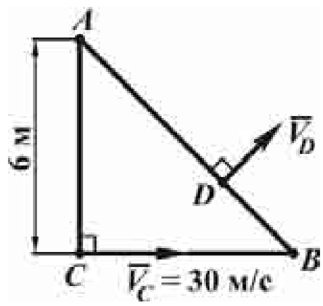


Пятый случай: При качении без скольжения тела по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения, так как её скорость равна нулю.

$$\frac{V_O}{OP} = \frac{V_B}{BP} = \omega.$$

Таблица 20

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Скорость $V_A = 7\sqrt{3}$ м/с, скорость точки B $V_B = \ldots$ м/с. **Ответ**: 7.	
2	Скорость $V_B = 6$ м/с, $V_A = \ldots$ м/с. **Ответ**: 6.	
3	Конец троса имеет скорость V. Скорости точек диска убывают в последовательности … **Ответ**: $V_A \rangle V_B \rangle V_C \rangle V_D$.	
4	Движение стержня AB плоское: $AB = 0{,}3$ м, $V_A = 0{,}4$ м/с, $V_B = 0{,}7$ м/с; Угловая скорость …рад/с. **Ответ**: 1.	
5	В показанном на рисунке положении угловая скорость треугольника $\omega = \ldots$ рад/с. **Ответ**: 5.	

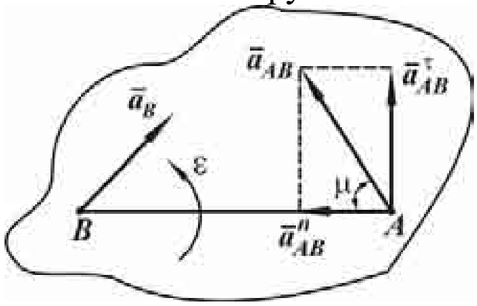
2.4.2. Ускорения точек тела в плоском движении

● Ускорение любой точки тела в плоском движении равно геометрической сумме ускорения точки тела в поступательном движении совместно с полюсом и ускорения точки во вращательном движении тела вокруг полюса:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau;$$

$$a_{AB}^n = \omega^2 \cdot AB;$$

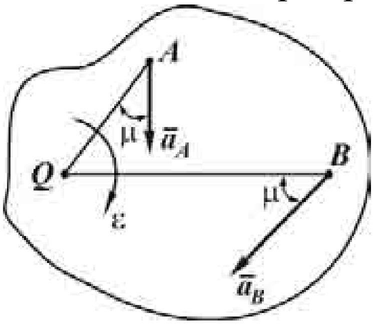
$$a_{AB}^\tau = \varepsilon \cdot AB.$$



Здесь $\bar{a}_B -$ ускорение полюса; $\bar{a}_{AB} = \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau -$ ускорение точки A во вращательном движении тела вокруг полюса B.

● Мгновенный центр ускорений (МЦУ) – точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

● Ускорения точек плоской фигуры в любой момент времени распределяются так, как при вращении фигуры вокруг МЦУ:



$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

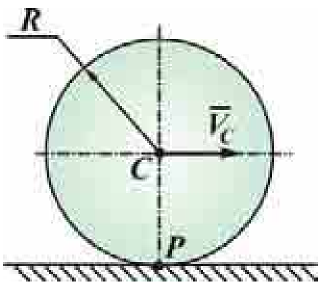
где $AQ, BQ -$ расстояния от точек A и B до мгновенного центра ускорений.

● Положение МЦУ плоской фигуры определяется по ускорениям двух точек

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Здесь $\mu -$ угол между векторами ускорений точек и линиями, соединяющими их с МЦУ (точкой Q).

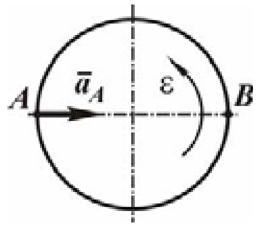
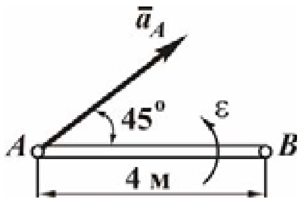
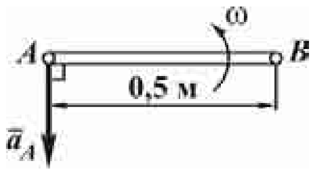
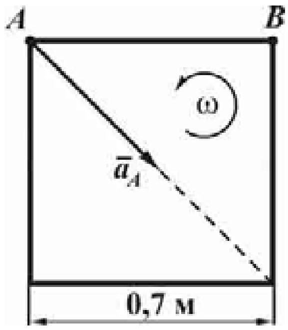
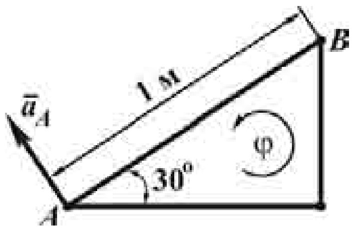
Пример. Диск радиусом R катится по неподвижной плоскости. Скорость точки C, лежащей в центре диска, $V_C = \text{const}$. Определить МЦС и МЦУ.



Решение. Мгновенный центр скоростей находится в точке касания диска с опорной плоскостью (точка P). Точка C диска движется по прямой с постоянной скоростью, ее ускорение равно нулю. Следовательно, точка $C -$ мгновенный центр ускорений.

Таблица 21

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Движение диска плоское: $a_A = 4\,\text{м/с}^2$, $AB = 1\,\text{м}$, $\omega = 0$, $\varepsilon = 3\,\text{рад/с}^2$. Ускорение $a_B = \ldots\,\text{м/с}^2$. **Ответ**: 5.	
2	$a_A = 8\sqrt{2}\,\text{м/с}^2$; в плоском движении стержня AB $\omega = \sqrt{2}\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$, $\varepsilon = 0{,}25\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Ускорение $a_B = \ldots\,\text{м/с}^2$. **Ответ**: 9.	
3	В плоском движении стержня AB $\omega = 2t\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; в момент $t_1 = 1\,\text{с}$ $a_A = 1\,\text{м/с}^2$, ускорение $a_B = \ldots\,\text{м/с}^2$. **Ответ**: 2.	
4	В плоском движении квадрата $\omega = t\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; в момент $t_1 = 1\text{с}$ $a_A = 0{,}7\sqrt{2}\,\text{м/с}^2$, ускорение $a_B = \ldots\,\text{м/с}^2$. **Ответ**: 0.	
5	В плоском движении треугольника $\varphi = \left(t^2 - 2t\right)$ рад. В момент $t_1 = 1\text{с}$ $a_A = 1\,\text{м/с}^2$; Ускорение $a_B = \ldots\,\text{м/с}^2$. **Ответ**: 3.	

Индивидуальное задание № 5

Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела при плоском движении

Найти для заданного положения механизма скорости точек B и C, ускорение точки C. Схемы механизмов помещены в табл. 23, необходимые для расчёта данные приведены в табл. 22.

Примечание: ω_{OA} и ε_{OA} – угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_1– угловая скорость колеса **1** (постоянная); $\overline{V}_A$ и $\overline{a}_A$ – скорость и ускорение точки A. Качение происходит без скольжения.

Пример. Схема механизма в заданном положении (рис. 10); исходные данные: $l_{OA} = 10$ см, $l_{AB} = 60$ см, $l_{AC} = 20$ см, $\omega_{OA} = 1{,}5$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 1{,}5$ рад/с^2.

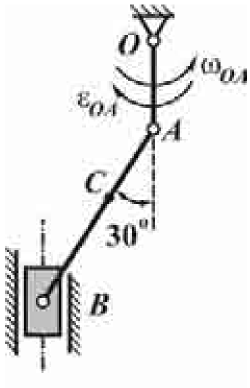


Рис. 10

Определить скорости и ускорения точек B и C.

Решение.

1. Вычисляем скорость точки A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1{,}5 \cdot 10 = 15 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости точки A перпендикулярен к кривошипу OA. Вектор скорости точки B направлен по вертикали.

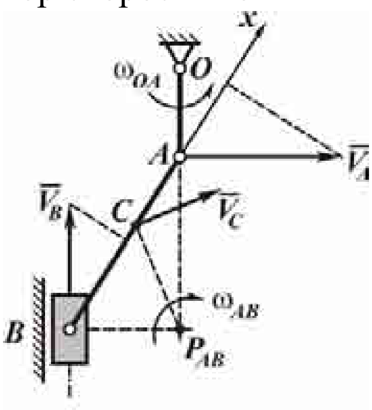


Рис. 11

Мгновенный центр скоростей P_{AB} звена AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведённых из точек A и B к их векторам скоростей (рис. 11).

Угловая скорость звена AB:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{15}{60 \cdot \cos 30^{\circ}} = 0{,}29 \text{ рад/с}.$$

Скорости точек B и C:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}, \; V_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB},$$

где: $$BP_{AB} = AB \cdot \sin 30^{\circ} = 60 \cdot 0{,}5 = 30 \text{ см};$$

$$CP_{AB} = \sqrt{BC^2 + BP_{AB}^2 - 2 \cdot BC \cdot BP_{AB} \cos 60^{\circ}};$$

$$CP_{AB} = \sqrt{40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0{,}5} = 36{,}1 \text{ см}$$

Следовательно,

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 0{,}29 \cdot 30 = 8{,}7 \text{ см/с};$$
$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB} = 0{,}29 \cdot 36{,}1 = 10{,}5 \text{ см/с}.$$

Вектор $\bar{V}_C$ направлен перпендикулярно к отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению угловой скорости ω_{AB} вращения звена AB.

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекций скоростей точек на ось, проведённую через эти точки.

Направим ось x из точки B вдоль звена AB.

Имеем:

$$V_A \cdot \cos(\bar{V}_A, x) = V_B \cdot \cos(\bar{V}_B, x)$$

Или, как видно из рис. 11:

$$V_A \cdot \cos 60^\circ = V_B \cdot \cos 30^\circ$$

Отсюда:

$$V_B = V_A \cdot \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 15 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{3}/2} = 8{,}7 \text{ см/с}$$

2. Определяем ускорения точек B и C. Ускорение точки A складывается из касательного и нормального ускорений (рис. 12):

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau,$$

где

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1{,}5^2 \cdot 10 = 22{,}5 \text{ см/с}^2;$$
$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см/с}^2.$$

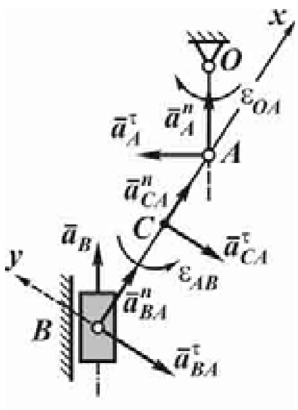


Рис. 12

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен к точке O.

Вектор $\bar{a}_A^\tau$ перпендикулярен вектору $\bar{a}_A^n$ и направлен в соответствии с направлением углового ускорения ε_{OA}.

Определяем ускорение точки B.

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры имеем:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n,$$

где за полюс принята точка A.

Разложим полное ускорение точки A на составляющие:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}. \tag{1}$$

$$a_{BA}^{n} = \omega_{AB}^{2} \cdot AB = \frac{1}{12} \cdot 60 = 5{,}00 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{BA}^{n}$ направлен к точке A, а касательное ускорение $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ точки B перпендикулярно к нему.

Проектируя векторное равенство (1) на оси x и y, получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A^{\tau} \cos 60^\circ + a_A^{n} \cos 30^\circ + a_{BA}^{n}; \tag{2}$$

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^{\tau} \cos 30^\circ + a_A^{n} \cos 60^\circ - a_{BA}^{\tau}. \tag{3}$$

Из уравнения (2) определяем величину полного ускорения точки B:

$$a_B = \frac{-a_A^{\tau} \cos 60^\circ + a_A^{n} \cos 30^\circ + a_{BA}^{n}}{\cos 30^\circ};$$

$$a_B = \frac{-20 \cdot 0{,}5 + 22{,}5 \cdot 0{,}866 + 5}{0{,}866} = 16{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Из уравнения (3) находим:

$$a_{BA}^{\tau} = a_A^{\tau} \cos 30^\circ + a_A^{n} \cos 60^\circ - a_B \cos 60^\circ;$$

$$a_{BA}^{\tau} = 20 \cdot 0{,}866 + 22{,}5 \cdot 0{,}5 - 16{,}7 \cdot 0{,}5 = 20{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Касательное ускорение a_{BA}^{τ} можно определить по формуле:

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB,$$

следовательно,

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{20{,}2}{60} = 0{,}34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление касательного ускорения $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ определяет направление углового ускорения ε_{AB}.

Определяем ускорение точки C:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^{\tau} + \bar{a}_{CA}^{n},$$

где за полюс принята точка A.

Заменим полное ускорение точки A его составляющими:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{CA}^{\tau} + \bar{a}_{CA}^{n}. \tag{4}$$

Касательное и нормальное ускорения точки C во вращательном движении звена AB вокруг полюса A:

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0{,}34 \cdot 20 = 6{,}8 \text{ см/с}^2 ;$$
$$a_{CA}^{n} = \omega_{AB}^{2} \cdot AC = \frac{1}{12} \cdot 20 = 1{,}7 \text{ см/с}^2 .$$

Вектор $\bar{a}_{CA}^{n}$ направлен к точке A, вектор $\bar{a}_{CA}^{\tau}$ перпендикулярен к вектору $\bar{a}_{CA}^{n}$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB}.

Ускорение точки C найдём, проектируя равенство (4) на оси x и y (рис. 13):

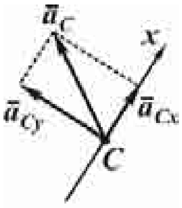


Рис. 13

$$a_{Cx} = a_{CA}^{n} + a_{A}^{n} \cos 30^{\circ} - a_{A}^{\tau} \cos 60^{\circ} ;$$

$$a_{Cx} = 1{,}7 + 22{,}5 \cdot 0{,}866 - 20 \cdot 0{,}5 = 11{,}2 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{Cy} = a_{A}^{n} \cos 60^{\circ} + a_{A}^{\tau} \cos 30^{\circ} - a_{CA}^{\tau} ;$$

$$a_{Cy} = 22{,}5 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot 0{,}866 - 6{,}8 = 21{,}8 \text{ см/с}^2 .$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{11{,}2^2 + 21{,}8^2} = 24{,}5 \text{ см/с}^2 .$$

Контрольные вопросы

1. Какое движение тела называется плоским?
2. Какими уравнениями задается плоское движение?
3. Как найти скорость полюса и угловую скорость тела по закону движения плоской фигуры?
4. Какой векторной формулой связаны скорость полюса и скорость произвольной точки плоской фигуры?
5. Каковы величина и направление скорости $\bar{V}_{BA}$ в уравнении $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$?
6. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры?
7. Как определяется положение мгновенного центра скоростей в различных случаях?
8. Как распределяются скорости точек плоской фигуры относительно ее мгновенного центра скоростей?
9. Каковы величины и направления ускорений $\bar{a}_{BA}^{n}$ и $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ в уравнении $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau}$?

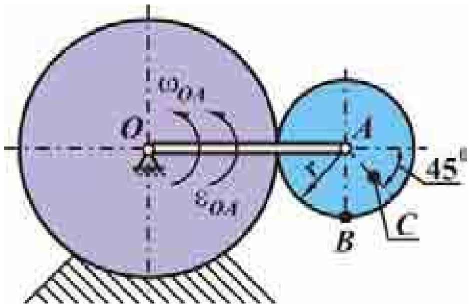
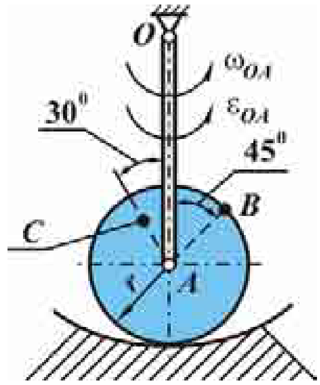
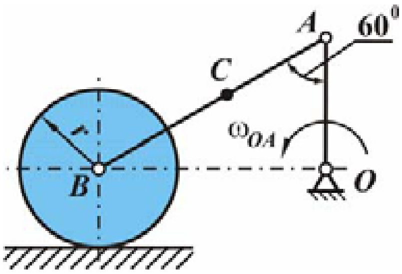
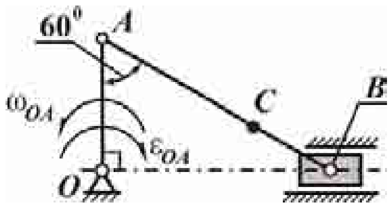
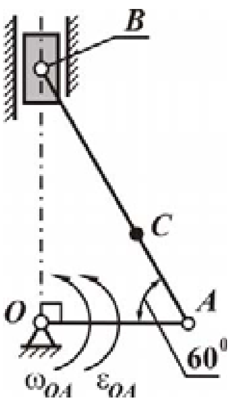
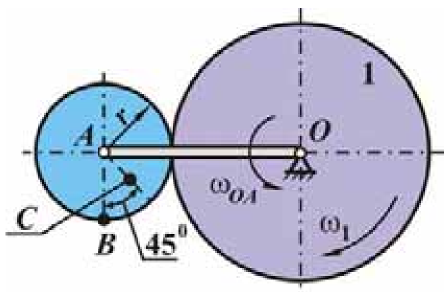
Таблица 22

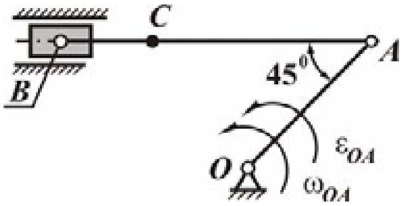
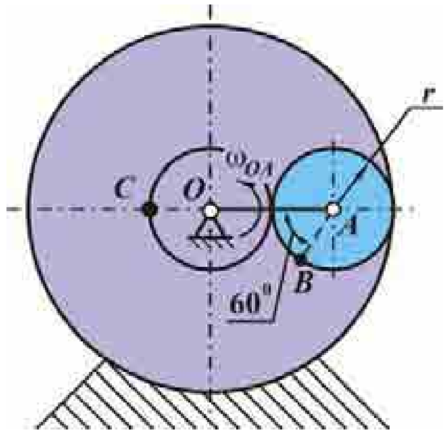
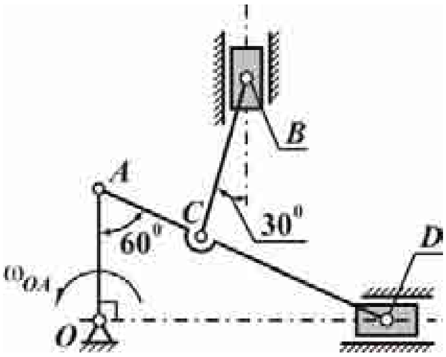
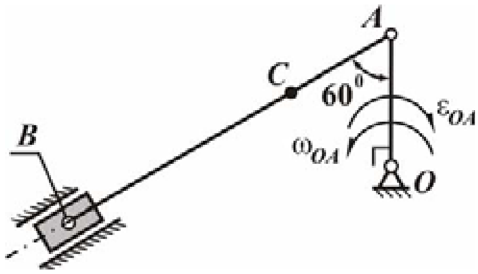
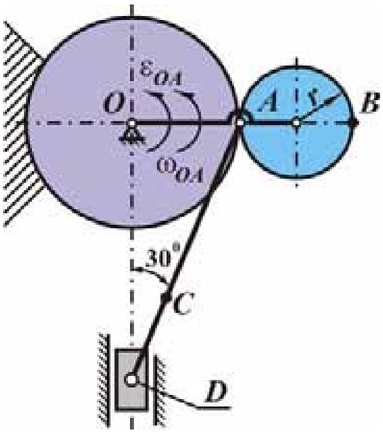
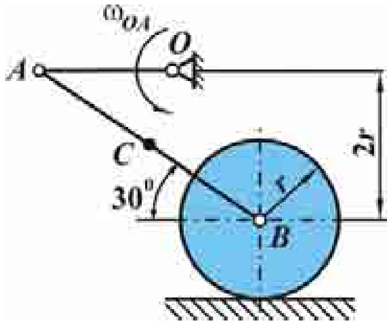
Данные для индивидуального задания № 5

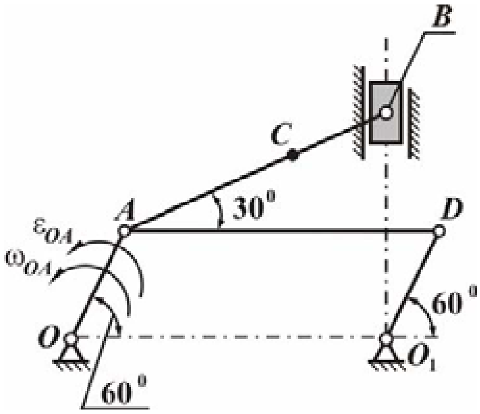
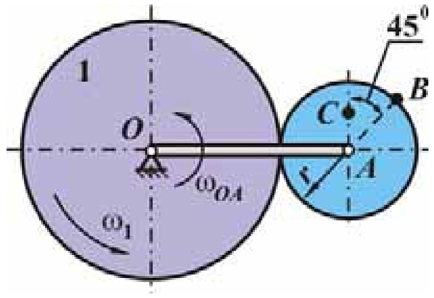
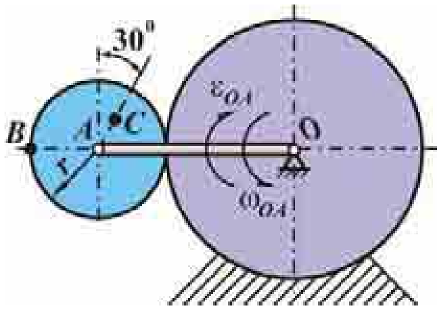
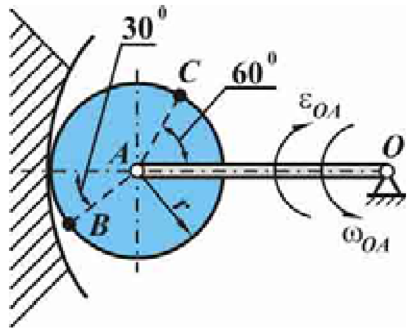
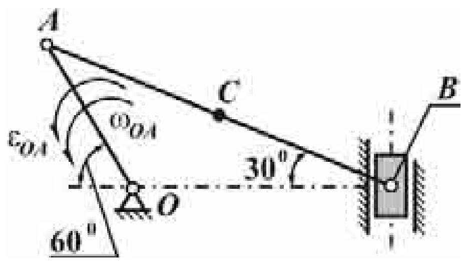
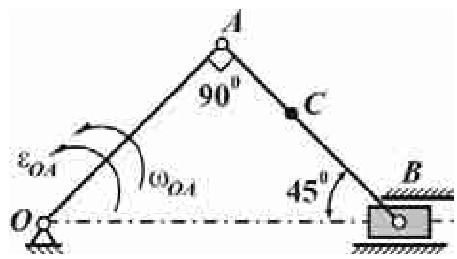
Номер задания табл. 23	Размеры, см				ω_{OA}, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	ω_1, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	ε_{OA}, $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$	V_A, $\frac{\text{см}}{\text{с}}$	a_A, $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$
	OA	r	AB	AC					
1	40	15	–	8	2	–	2	–	–
2	30	15	–	8	3	–	2	–	–
3	20	40	–	40	–	–	–	40	100
4	35	–	–	45	4	–	8	–	–
5	25	–	–	20	1	–	1	–	–
6	40	15	–	6	1	1	0	–	–
7	35	–	75	60	5	–	10	–	–
8	25	–	–	40	–	–	–	50	125
9	10	–	–	5	–	–	–	20	50
10	25	–	80	20	1	–	2	–	–
11	15	10	–	20	2	–	3	–	–
12	10	–	40	20	–	–	–	20	50
13	25	–	60	30	2	–	4	–	–
14	45	15	–	8	3	12	0	–	–
15	40	15	–	8	1	–	1	–	–
16	35	20	–	–	2	–	5	–	–
17	20	–	–	0,5AB	2	–	4	–	–
18	10	–	10	5	2	–	6	–	–
19	20	15	–	10	1	2,5	0	–	–
20	40	15	15	5	2	–	4	–	–
21	40	–	15	15	3	–	8	–	–
22	35	–	60	40	4	–	10	–	–
23	40	15	90	45	–	–	–	20	20
24	25	–	35	15	2	–	3	–	–
25	20	–	70	20	1	–	2	–	–
26	20	15	–	10	2	1,2	0	–	–
27	10	–	40	20	2	–	–	–	50
28	20	–	50	25	1	–	1	–	–
29	16	–	–	20	–	–	–	8	5
30	40	–	–	20	5	–	10	–	–

Таблица 23

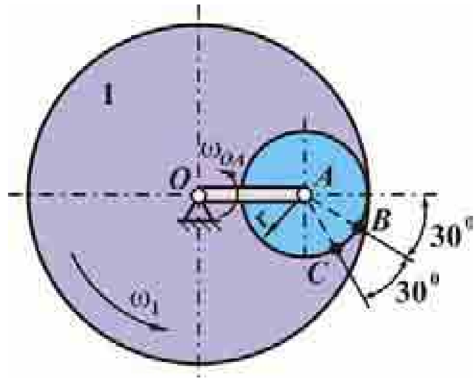
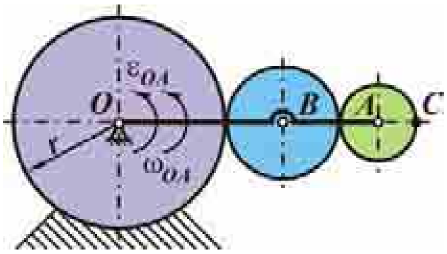
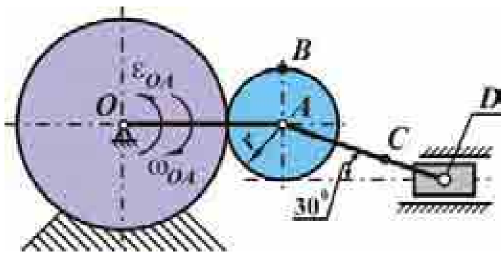
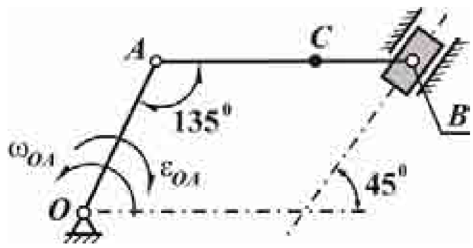
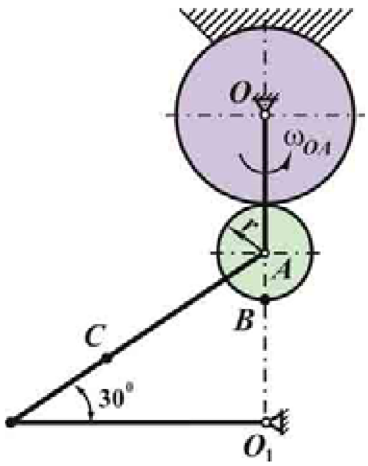
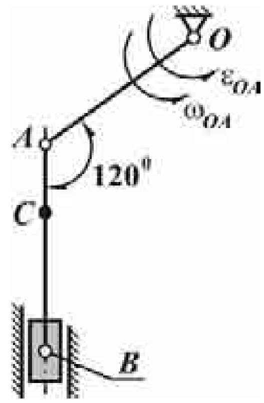
Схемы механизмов к ИДЗ № 5

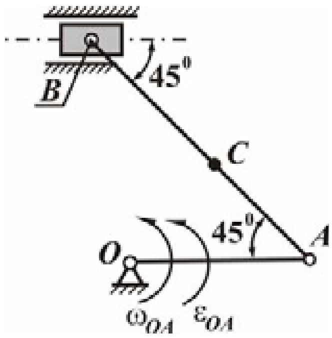
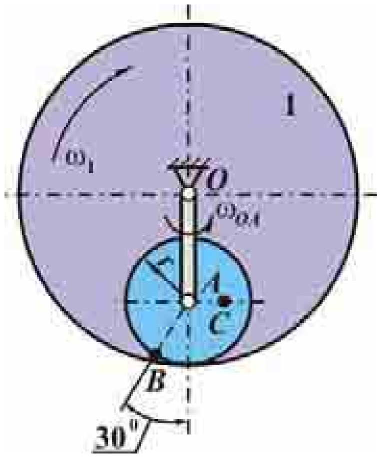
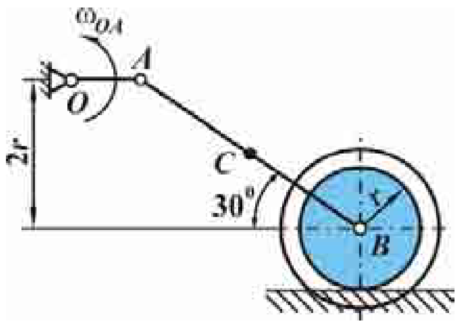
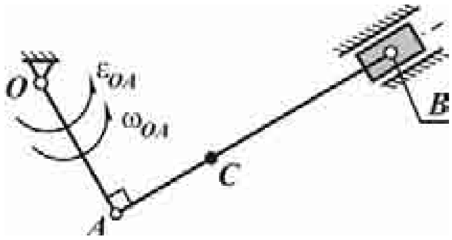
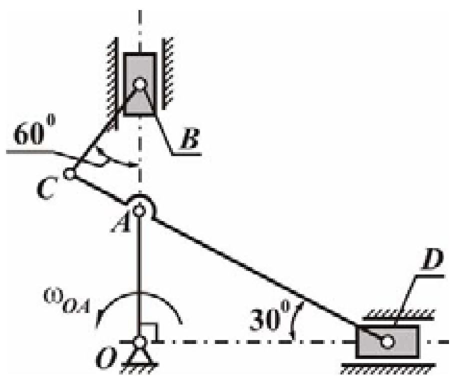
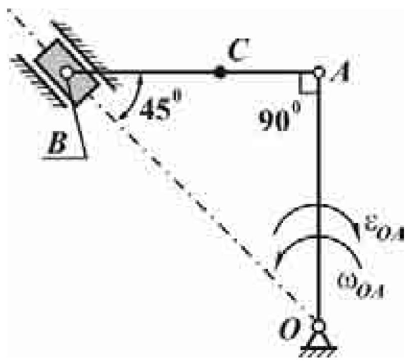
<table>
<tr><td>задание № 1</td><td>задание № 2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 3</td><td>задание № 4</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 5</td><td>задание № 6</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>задание № 7</td><td>задание № 8</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 9</td><td>задание № 10</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 11</td><td>задание № 12</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

задание № 13	задание № 14
	
задание № 15	**задание № 16**
	
задание № 17	**задание № 18**
	

Продолжение табл. 23

задание № 19	задание № 20
	
задание № 21	**задание № 22**
	
задание № 23	**задание № 24**
	

<table>
<tr><td>задание № 25</td><td>задание № 26</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 27</td><td>задание № 28</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание № 29</td><td>задание № 30</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

2.4.3. Определение скоростей и ускорений точек многозвенного механизма

Механизмом называется система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

Механизм состоит из деталей, называемыми ***звеньями механизма***.

Звено механизма не совершающее движения называется ***неподвижной стойкой*** и изображается на схеме:

или


Для определения скоростей и ускорений точек многозвенного механизма применяют метод графоаналитического исследования, основанный на построении планов положений, скоростей и ускорений.

● ***планом механизма*** называется графическое изображение взаимного расположения звеньев. Построение плана механизма следует начинать с изображения по заданным координатам неподвижных элементов звеньев: неподвижных точек и направляющих. Затем чертится начальное звено для заданного угла поворота. Положения остальных звеньев находятся элементарным методом засечек с помощью циркуля и линейки.

● ***планом скоростей (ускорений) механизма*** называется графическое построение, представляющее собой пучок, лучи которого изображают абсолютные скорости (ускорения) точек звеньев механизма, а отрезки, соединяющие концы лучей – относительные скорости (ускорения) соответствующих точек при заданном положении звена. На плане скоростей полюс обозначается символом p_v, на плане ускорений символом p_a.

При решении задачи принимается, что вращательное и поступательное движения тела в плоскости рассматриваются как частные случаи плоского движения, когда полюс является неподвижной точкой.

При построении плана механизма, а также планов скоростей и ускорений применяют масштабы, под которыми понимают отношение числового значения изображаемой величины к отрезку на планах в миллиметрах. Обозначаются масштабы буквой μ с соответствующим индексом:

μ_l – масштаб длин, $\dfrac{\text{м}}{\text{мм}}$;

μ_v – масштаб линейных скоростей, $\dfrac{\text{м/с}}{\text{мм}}$;

μ_a – масштаб линейных ускорений, $\dfrac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$.

Индивидуальное задание № 6

Определение скоростей и ускорений точек многозвенного механизма

Для заданного положения механизма определить:

1) скорости точек A, B, C, … механизма и угловые скорости всех звеньев при помощи плана скоростей;
2) ускорения точек A и B, а также угловое ускорение звена AB;
3) ускорение точки M, делящей звено AB пополам;
4) скорости точек A, B, C, … механизма и угловые скорости звеньев при помощи мгновенного центра скоростей;
5) положение мгновенного центра ускорений звена AB.

Схемы механизмов помещены в табл. 25, необходимые для расчёта данные приведены в табл. 24.

Пример. Задана схема механизма в заданном положении (рис. 14) при $\varphi = 60^\circ$; исходные данные: $l_{O_1A} = 0{,}12$ м, $l_{O_2D} = 0{,}19$ м, $l_{AB} = 0{,}55$ м, $l_{BC} = 0{,}19$ м, $l_{CD} = 0{,}23$ м, $l_{DE} = 0{,}27$ м, $l_{EF} = 0{,}22$ м, $a = 0{,}19$ м, $b = 0{,}19$ м, $c = 0{,}1$ м, $d = 0{,}22$ м. Угловая скорость звена $O_1A - \omega_1 = 2$ рад/с.

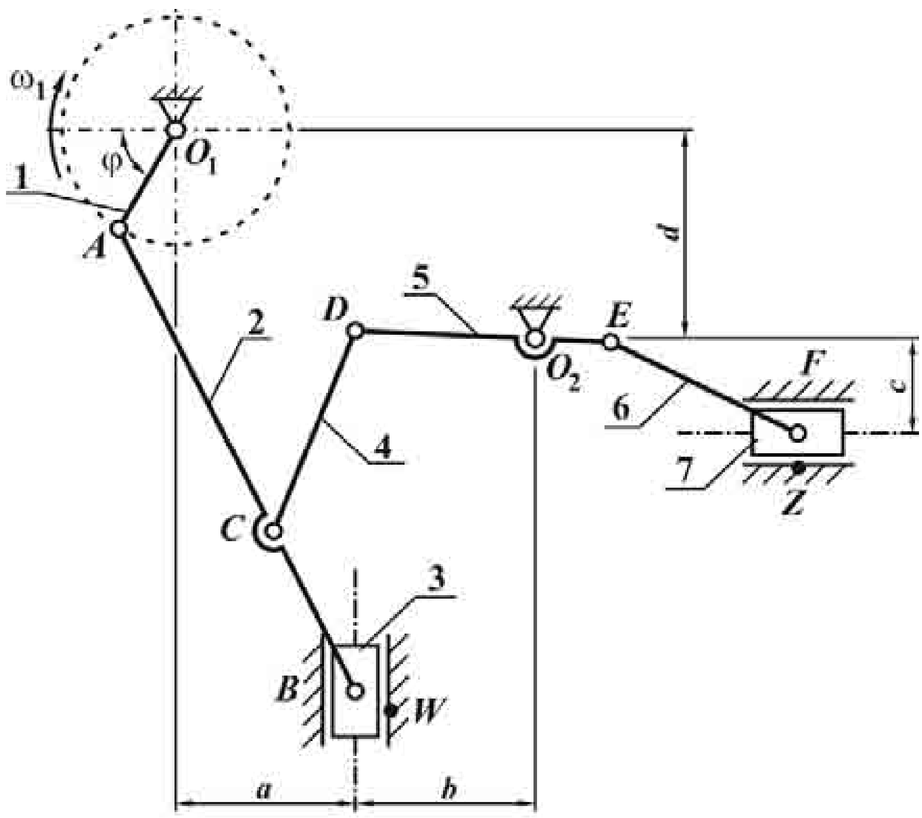


Рис. 14

Решение.

1. *Построение положения механизма.*

Выбираем масштаб плана положений $\mu_l = 0{,}008 \dfrac{\text{м}}{\text{мм}}$ и вычисляем длины отрезков, изображающих звенья на плане механизма:

$$O_1A = \frac{l_{O_1A}}{\mu_l} = \frac{0{,}12}{0{,}008} = 15\,\text{мм},\ AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l} = \frac{0{,}55}{0{,}008} = 68{,}75\,\text{мм},$$

$$CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0{,}23}{0{,}008} = 28{,}75\,\text{мм},\ O_2D = \frac{l_{O_2D}}{\mu_l} = \frac{0{,}19}{0{,}008} = 23{,}75\,\text{мм и т. д.}$$

С помощью масштаба μ_l определяем расстояния a, b, c и d на плане:

$$a = b = \frac{0{,}19}{0{,}008} = 23{,}75\,\text{мм},\ c = \frac{0{,}1}{0{,}008} = 12{,}5\,\text{мм},\ d = \frac{0{,}22}{0{,}008} = 27{,}5\,\text{мм}.$$

План механизма строим методом засечек. Сначала вычерчиваем звено **1** длиною O_1A в заданном положении, а затем определяем положения других звеньев механизма.

2. *Определение линейных скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма.*

Вычисляем скорость точки A звена **1** при заданном положении механизма:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{O_1A} = 2 \cdot 0{,}12 = 0{,}24\,\text{м/с}.$$

Вектор скорости точки A перпендикулярен к звену O_1A (см. рис. 15).

Строим план скоростей. Выбираем масштаб плана скоростей $\mu_v = 0{,}002 \dfrac{\text{м/с}}{\text{мм}}$. Из произвольно выбранного полюса p_v проводим луч p_va, изображающий в выбранном масштабе скорость точки A (рис. 15):

$$p_va = \frac{V_A}{\mu_v} = \frac{0{,}24}{0{,}002} = 120\,\text{мм}.$$

Для определения скорости точки B, рассмотрим движение этой точки относительно точек, скорости которых нам известны (точка A и неподвижная стойка).

Обозначим неподвижную стойку дополнительной точкой W ($V_W = 0$, на плане скоростей точка w находится в полюсе p_v) и составим систему уравнений, описывающих движение точки B:

$$\begin{cases} \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA} \\ \bar{V}_B = \bar{V}_W + \bar{V}_{BW} \end{cases}.$$

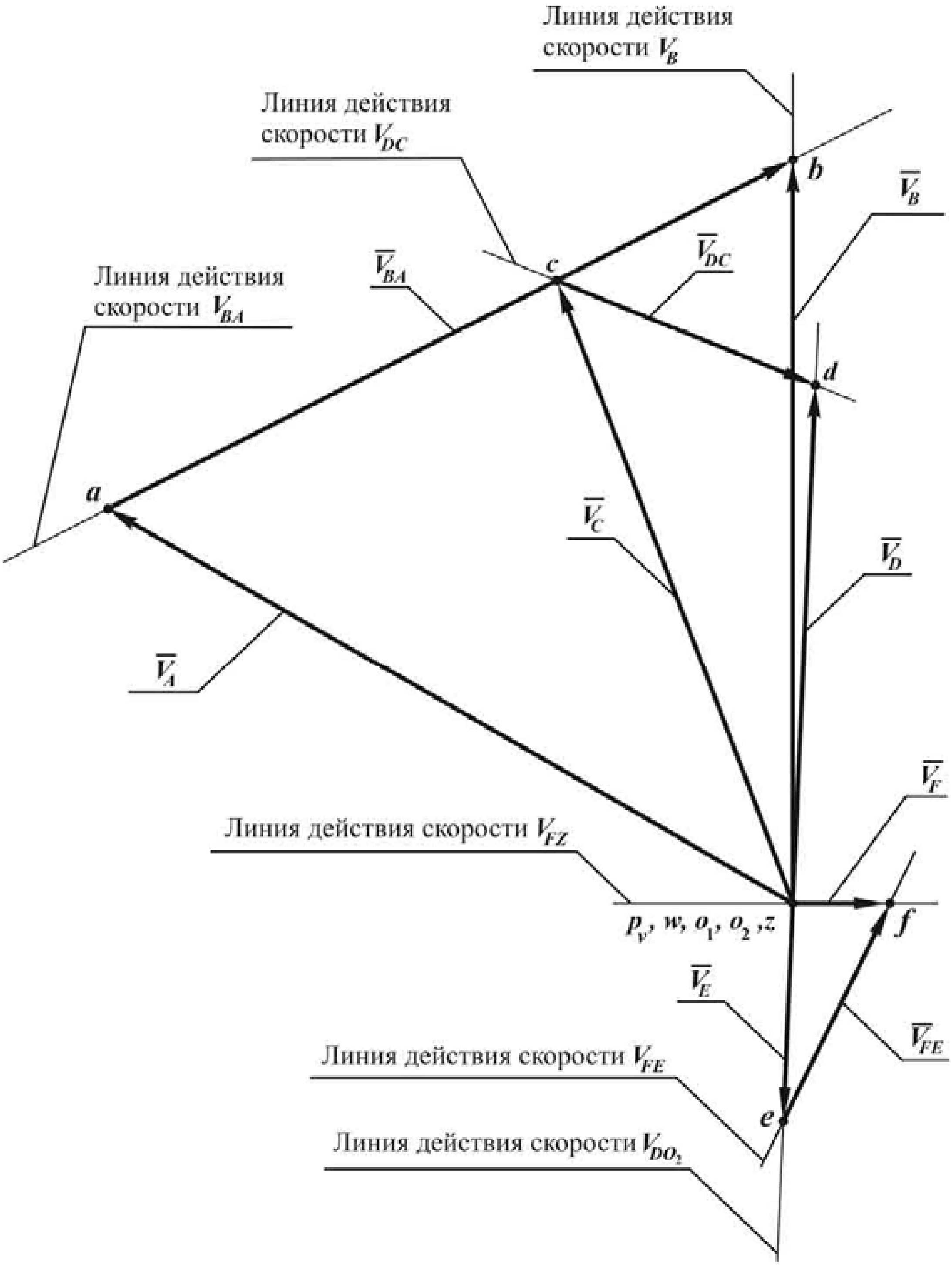


Рис. 15

Вектор скорости $\overline{V}_{BA}$ направлен перпендикулярно отрезку AB, а вектор скорости $\overline{V}_{BW}$ направлен параллельно движению ползуна относительно неподвижной стойки.

Проводим через полюс p_v вертикальную прямую, а через точку a прямую, перпендикулярную отрезку AB. На пересечении прямых линий получаем точку b (рис. 15). Отрезок $p_v b$ показывает направление и величину скорости точки B. Измеряем длину отрезка $p_v b$ и, пользуясь масштабом плана скоростей, находим:

$$V_B = V_{BW} = p_v b \cdot \mu_v = 113 \cdot 0{,}002 = 0{,}226 \text{ м/с}.$$

Отрезок ab плана скоростей изображает скорость $\overline{V}_{BA}$ точки B при вращении звена **2** вокруг полюса A:

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_v = 116{,}5 \cdot 0{,}002 = 0{,}233 \text{ м/с}.$$

Следовательно, угловая скорость звена AB:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{0{,}233}{0{,}55} \approx 0{,}423 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Для определения скорости точки C, лежащей на звене AB (шатун), составим пропорцию, выражающую равенство отношений длин отрезков:

$$\frac{l_{AB}}{l_{BC}} = \frac{ab}{bc} \Rightarrow bc = \frac{l_{BC} \cdot ab}{l_{AB}} = \frac{0{,}19 \cdot 116{,}5}{0{,}55} = 40{,}245 \text{ мм}.$$

Определив положение точки c на отрезке ab плана скоростей, соединяем точку c с полюсом p_v. Измеряем длину отрезка $p_v c$ и, пользуясь масштабным коэффициентом плана скоростей, находим:

$$V_C = p_v c \cdot \mu_v = 101 \cdot 0{,}002 = 0{,}202 \text{ м/с}$$

Для определения скорости точки D воспользуемся тем, что она принадлежит звену **4**, совершающему плоское движение, и звену 5, вращающемуся вокруг неподвижной оси O_2 ($V_{O_2} = 0$, на плане скоростей точка o_2 находится в полюсе p_v). Составим систему уравнений, описывающих движение точки D:

$$\begin{cases} \overline{V}_D = \overline{V}_C + \overline{V}_{DC} \\ \overline{V}_D = \overline{V}_{O_2} + \overline{V}_{DO_2} \end{cases}.$$

Вектор скорости $\bar{V}_{DC}$ направлен перпендикулярно отрезку DC; вектор скорости $\bar{V}_{DO_2}$ направлен перпендикулярно отрезку O_2D.

Проводим через точку c прямую, перпендикулярную отрезку DC, а через полюс p_v – прямую, перпендикулярную отрезку O_2D. На пересечении прямых линий получаем точку d (см. рис. 15). Отрезок $p_v d$ показывает направление и величину скорости точки D. Измеряем длину отрезка $p_v d$ и, пользуясь масштабом плана скоростей, находим:

$$V_D = V_{DO_2} = p_v d \cdot \mu_v = 79 \cdot 0{,}002 = 0{,}158 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость звена **5**:

$$\omega_5 = \frac{V_D}{l_{O_2D}} = \frac{0{,}158}{0{,}19} \approx 0{,}831 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Отрезок cd плана скоростей изображает скорость $\bar{V}_{DC}$ точки D при вращении звена **4** вокруг полюса C:

$$V_{DC} = cd \cdot \mu_v = 42{,}4 \cdot 0{,}002 = 0{,}085 \text{ м/с}.$$

Следовательно, угловая скорость звена CD:

$$\omega_4 = \frac{V_{DC}}{l_{CD}} = \frac{0{,}085}{0{,}23} \approx 0{,}37 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Для определения скорости точки E, принадлежащей звену DE (коромысло), составим пропорцию, выражающую равенство отношений длин отрезков:

$$\frac{l_{O_2E}}{l_{O_2D}} = \frac{p_v e}{p_v d} \Rightarrow p_v e = \frac{p_v d \cdot l_{O_2E}}{l_{O_2D}} = \frac{79 \cdot 0{,}08}{0{,}19} = 33{,}26 \text{ мм}.$$

Точка e на плане скоростей находится на линии действия скорости V_{DO_2} с обратной стороны полюса p_v. Зная длину отрезка $p_v e$ и, пользуясь масштабным коэффициентом плана скоростей, находим:

$$V_E = p_v e \cdot \mu_v = 33{,}26 \cdot 0{,}002 = 0{,}066 \text{ м/с}.$$

Определим скорость точки F. Точка F принадлежит звену **6**, совершающему плоское движение, и ползуну **7**, движущемуся поступательно в горизонтальном направлении. Составим систему уравнений, описывающих движение точки F:

$$\begin{cases} \bar{V}_F = \bar{V}_E + \bar{V}_{FE} \\ \bar{V}_F = \bar{V}_Z + \bar{V}_{FZ} \end{cases}.$$

Здесь $V_Z = 0$ (на плане скоростей точка z находится в полюсе p_v), вектор скорости $\bar{V}_{FE}$ направлен перпендикулярно отрезку EF, а вектор скорости $\bar{V}_{FZ}$ направлен параллельно движению ползуна относительно неподвижной стойки (точка Z).

Проводим через полюс p_v прямую, параллельную скорости $\bar{V}_{FZ}$, а через точку e прямую, перпендикулярную отрезку EF. На пересечении прямых линий получаем точку f (см. рис. 15). Отрезок $p_v f$ показывает направление и величину скорости точки F. Измеряем длину отрезка $p_v f$ и, пользуясь масштабом плана скоростей, находим:

$$V_F = V_{FZ} = p_v f \cdot \mu_v = 14{,}7 \cdot 0{,}002 = 0{,}0294 \text{ м/с}$$

Отрезок ef плана скоростей изображает скорость $\bar{V}_{FE}$ точки F при вращении звена **6** вокруг полюса E:

$$V_{FE} = ef \cdot \mu_v = 37 \cdot 0{,}002 = 0{,}074 \text{ м/с}.$$

Следовательно, угловая скорость звена EF:

$$\omega_6 = \frac{V_{FE}}{l_{EF}} = \frac{0{,}074}{0{,}22} \approx 0{,}336 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

3. *Определение линейных ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.*

Определяем ускорение точки A звена O_1A при помощи теоремы об ускорениях точек плоской фигуры:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}^n_{AO_1} + \bar{a}^\tau_{AO_1}.$$

Ускорение точки $\bar{a}_{O_1}$ равно 0 (точка O_1 принадлежит неподвижному звену). Так как звено O_1A вращается равномерно ($\omega_1 = \text{const}$), следовательно, ускорение $\bar{a}^\tau_{AO_1}$ равно 0. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} a_A &= a^n_{AO_1} = \omega_1^2 \cdot l_{O_1A} = \\ &= 2^2 \cdot 0{,}12 = 0{,}48 \text{ м/с}^2 \end{aligned}.$$

Вектор нормального ускорения $\bar{a}^n_{AO_1}$ направлен параллельно звену O_1A от точки A к центру O_1.

Строим план ускорений. Выбираем масштаб плана ускорений $\mu_a = 0{,}005 \dfrac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$. Из произвольно выбранного полюса p_a проводим луч

$p_a a'$, изображающий в выбранном масштабе ускорение точки A (рис. 16):

$$p_a a' = \frac{a_A}{\mu_a} = \frac{0{,}48}{0{,}005} = 96\,\text{мм}.$$

Для определения ускорения точки B, рассмотрим движение этой точки относительно точек, ускорения которых нам известны (точка A и W, на плане ускорений точка w' находится в полюсе p_a).

Составим систему уравнений, описывающих движение точки B:

$$\begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau \\ \bar{a}_B = \bar{a}_W + \bar{a}_{BW} \end{cases}$$

Вектор $\bar{a}_{BA}^n$ нормального ускорения точки B, возникающий при рассмотрении движения относительно точки A, направлен параллельно AB от точки B к точке A. Величина этого ускорения равна:

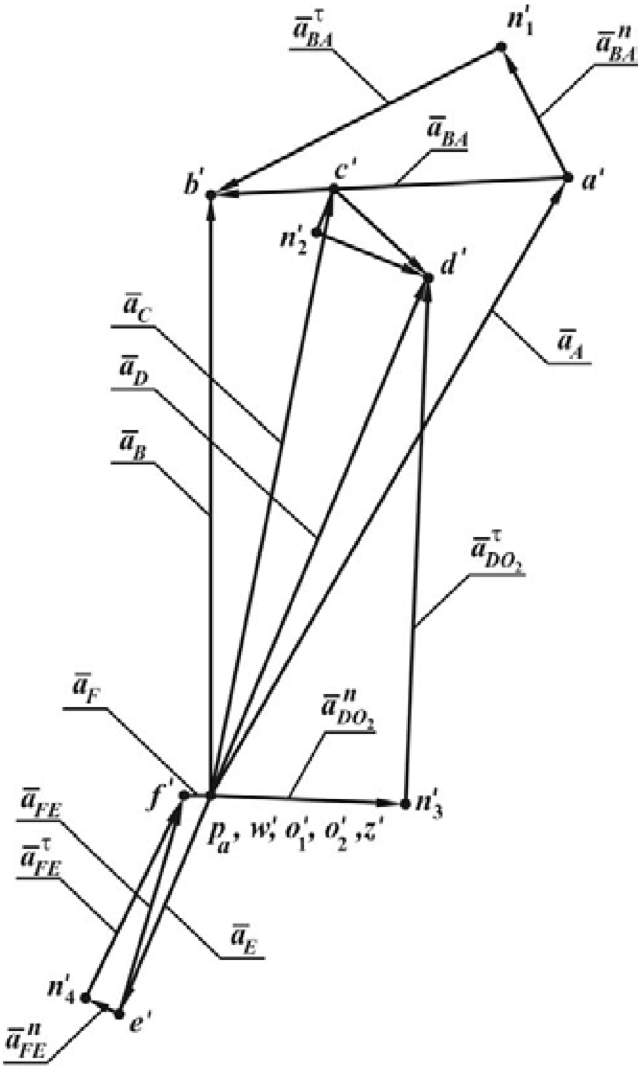


Рис. 16

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = 0{,}423^2 \cdot 0{,}55 = 0{,}0984\,\text{м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{BA}^\tau$ тангенциального ускорения точки B в ее движении относительно точки A направлен перпендикулярно к звену AB.

Вектор $\bar{a}_{BW}$ ускорения точки B направлен параллельно движению звена **3** относительно точки W.

Чтобы решить графически составленные векторные уравнения ускорений необходимо:

На плане ускорений из точки a' провести отрезок $a'n'_1$, показывающий направление и величину нормального ускорения точки B относительно точки A. Длина отрезка $a'n'_1$ с учетом масштабного коэффициента:

$$a'n'_1 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{0{,}0984}{0{,}005} = 19{,}7\,\text{мм}.$$

Из точки n_1' проводим линию действия вектора тангенциального ускорения $\bar{a}_{BA}^{\tau}$. Из полюса p_a (так как точка w' лежит в полюсе) проводим линию действия вектора ускорения $\bar{a}_{BW}$.

На пересечении линий действия получаем точку b'. Соединяем точку b' с полюсом p_a. Отрезок $p_a b'$ показывает величину и направление ускорения a_B:

$$a_B = p_a b' \cdot \mu_a = 81 \cdot 0{,}005 = 0{,}405\ \text{м/с}^2.$$

Из плана ускорений находим величину тангенциального ускорения a_{BA}^{τ} и полного ускорения a_{BA}:

$$a_{BA}^{\tau} = n_1' b' \cdot \mu_a = 44 \cdot 0{,}005 = 0{,}22\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{BA} = a' b' \cdot \mu_a = 48 \cdot 0{,}005 = 0{,}24\ \text{м/с}^2$$

Определяем величину углового ускорения ε_2 звена **2**:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{l_{AB}} = \frac{0{,}22}{0{,}55} \approx 0{,}4\ \text{с}^{-2}.$$

Направление ε_2 определяем по направлению вектора $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ переносом его в точку B плана механизма. Угловое ускорение ε_2 направлено по часовой стрелке.

Для определения ускорения точки C, лежащей на звене AB (шатун), составим пропорцию, выражающую равенство отношений длин отрезков:

$$\frac{l_{AB}}{l_{BC}} = \frac{a'b'}{b'c'} \Rightarrow b'c' = \frac{l_{BC} \cdot a'b'}{l_{AB}} = \frac{0{,}19 \cdot 48}{0{,}55} = 16{,}58\ \text{мм}.$$

Определив положение точки c' на отрезке $a'b'$ плана ускорений, соединяем точку c' с полюсом p_a. Измеряем длину отрезка $p_a c'$ и, пользуясь масштабным коэффициентом плана ускорений, находим:

$$a_C = p_a c' \cdot \mu_a = 83{,}2 \cdot 0{,}005 = 0{,}416\ \text{м/с}^2.$$

Для определения ускорения точки D, рассмотрим движение этой точки относительно точек C и O_2 (на плане ускорений точка o_2' находится в полюсе p_a).

Составим систему уравнений, описывающих движение точки D:

$$\begin{cases} \bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}^{n} + \bar{a}_{DC}^{\tau} \\ \bar{a}_D = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{DO_2}^{n} + \bar{a}_{DO_2}^{\tau} \end{cases}$$

Вектор $\bar{a}_{DC}^{n}$ нормального ускорения точки D, возникающий при рассмотрении движения относительно точки C, направлен параллельно CD от точки D к точке C. Величина этого ускорения равна:

$$a_{DC}^{n} = \omega_4^2 \cdot l_{CD} = 0{,}37^2 \cdot 0{,}23 = 0{,}0315\,\text{м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{DC}^{\tau}$ тангенциального ускорения точки D в ее движении относительно точки C направлен перпендикулярно к звену CD.

Вектор $\bar{a}_{DO_2}^{n}$ нормального ускорения точки D, возникающий при рассмотрении движения относительно точки O_2, направлен параллельно O_2D от точки D к точке O_2. Величина этого ускорения равна:

$$a_{DO_2}^{n} = \omega_5^2 \cdot l_{O_2D} = 0{,}831^2 \cdot 0{,}19 = 0{,}131\,\text{м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{DO_2}^{\tau}$ тангенциального ускорения точки D в ее движении относительно точки O_2 направлен перпендикулярно к звену O_2D.

На плане ускорений из точки c' следует провести отрезок $c'n_2'$, показывающий направление и величину нормального ускорения точки D относительно точки C. Длина отрезка $c'n_2'$ с учетом масштабного коэффициента:

$$c'n_2' = \frac{a_{DC}^{n}}{\mu_a} = \frac{0{,}0315}{0{,}005} = 6{,}3\,\text{мм}.$$

Из точки n_2' проводим линию действия вектора тангенциального ускорения $\bar{a}_{DC}^{\tau}$.

Из полюса p_a (так как точка o_2' лежит в полюсе) проводим отрезок $p_a n_3'$, показывающий направление и величину нормального ускорения точки D относительно точки O_2. Длина отрезка $p_a n_3'$ с учетом масштабного коэффициента:

$$p_a n_3' = \frac{a_{DO_2}^{n}}{\mu_a} = \frac{0{,}131}{0{,}005} = 26{,}2\,\text{мм}.$$

Из точки n_3' проводим линию действия вектора тангенциального ускорения $\bar{a}_{DO_2}^{\tau}$.

На пересечении линий действия получаем точку d'. Соединяем точку d' с полюсом p_a. Отрезок $p_a d'$ показывает величину и направление ускорения a_D:

$$a_D = p_a d' \cdot \mu_a = 75{,}5 \cdot 0{,}005 = 0{,}3775 \text{ м/с}^2.$$

Из плана ускорений находим величины тангенциальных ускорений a_{DC}^{τ} и $a_{DO_2}^{\tau}$, а также полного ускорения a_{DC}:

$$a_{DC}^{\tau} = n_2' d' \cdot \mu_a = 16 \cdot 0{,}005 = 0{,}08 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{DC} = c' d' \cdot \mu_a = 17{,}5 \cdot 0{,}005 = 0{,}0875 \text{ м/с}^2$$

$$a_{DO_2}^{\tau} = n_3' d' \cdot \mu_a = 71 \cdot 0{,}005 = 0{,}355 \text{ м/с}^2.$$

Определяем величину углового ускорения ε_4 звена **4**:

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^{\tau}}{l_{DC}} = \frac{0{,}08}{0{,}23} \approx 0{,}35 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ε_4 определяем по направлению вектора $\bar{a}_{DC}^{\tau}$ переносом его в точку D плана механизма. Угловое ускорение ε_4 направлено по часовой стрелке.

Определяем величину углового ускорения ε_5 звена **5**:

$$\varepsilon_5 = \frac{a_{DO_2}^{\tau}}{l_{DC}} = \frac{0{,}355}{0{,}19} \approx 1{,}87 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ε_5 определяем по направлению вектора $\bar{a}_{DO_2}^{\tau}$ переносом его в точку D плана механизма. Угловое ускорение ε_5 направлено по часовой стрелке.

Для определения ускорения точки E, принадлежащей звену DE (коромысло), составим пропорцию, выражающую равенство отношений длин отрезков:

$$\frac{l_{O_2E}}{l_{O_2D}} = \frac{p_a e'}{p_a d'} \Rightarrow p_a e' = \frac{p_a d' \cdot l_{O_2E}}{l_{O_2D}} = \frac{75{,}5 \cdot 0{,}08}{0{,}19} = 31{,}8 \text{ мм}.$$

Точка e' на плане ускорений находится на линии действия ускорения a_D с обратной стороны полюса p_a. Зная длину отрезка $p_a e'$ и, пользуясь масштабным коэффициентом плана ускорений, находим:

$$a_E = p_a e' \cdot \mu_v = 31{,}8 \cdot 0{,}005 = 0{,}159 \text{ м/с}^2.$$

Определение ускорения точки F проводим по аналогии определения ускорения точки B, рассматривая движение этой точки относительно точек E и Z.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \bar{a}_F = \bar{a}_E + \bar{a}_{FE}^n + \bar{a}_{FE}^\tau \\ \bar{a}_F = \bar{a}_Z + \bar{a}_{FZ} \end{cases}$$

$$a_{FE}^n = \omega_6^2 \cdot l_{EF} = 0{,}336^2 \cdot 0{,}22 = 0{,}025 \text{ м/с}^2.$$

$$e'n'_4 = \frac{a_{FE}^n}{\mu_a} = \frac{0{,}025}{0{,}005} = 5 \text{ мм}.$$

Из плана ускорений находим:

$$a_F = p_a f' \cdot \mu_a = 3{,}5 \cdot 0{,}005 = 0{,}0175 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{FE}^\tau = n'_4 f' \cdot \mu_a = 30 \cdot 0{,}005 = 0{,}15 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{FE} = e'f' \cdot \mu_a = 30{,}5 \cdot 0{,}005 = 0{,}1525 \text{ м/с}^2.$$

Определяем величину углового ускорения ε_2 звена **2**:

$$\varepsilon_6 = \frac{a_{FE}^\tau}{l_{EF}} = \frac{0{,}15}{0{,}22} \approx 0{,}68 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ε_6 определяем по направлению вектора $\bar{a}_{FE}^\tau$ переносом его в точку F плана механизма. Угловое ускорение ε_6 направлено против хода часовой стрелки.

Направления угловых скоростей и ускорений звеньев механизма представлены на рис. 17.

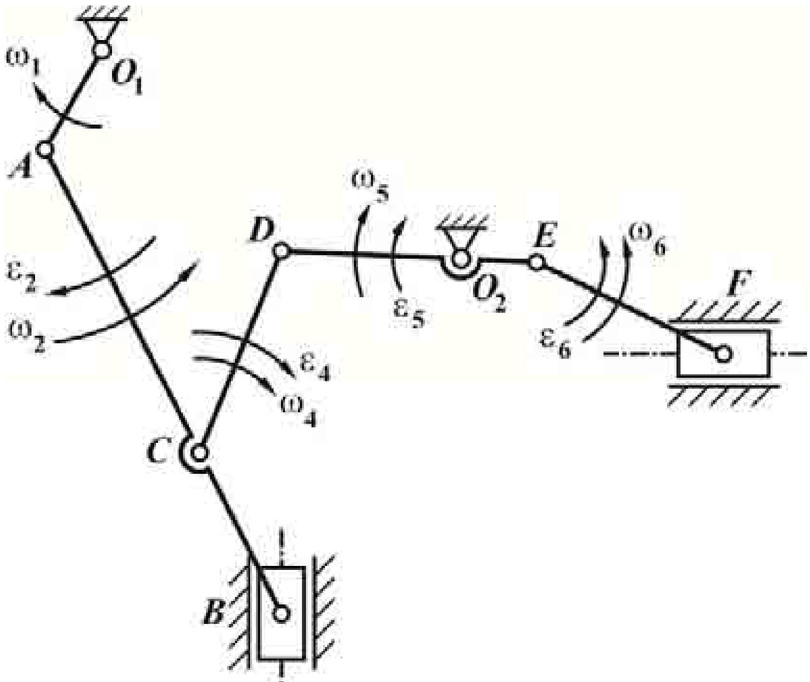


Рис. 17

Таблица 24

Данные для индивидуального задания № 6

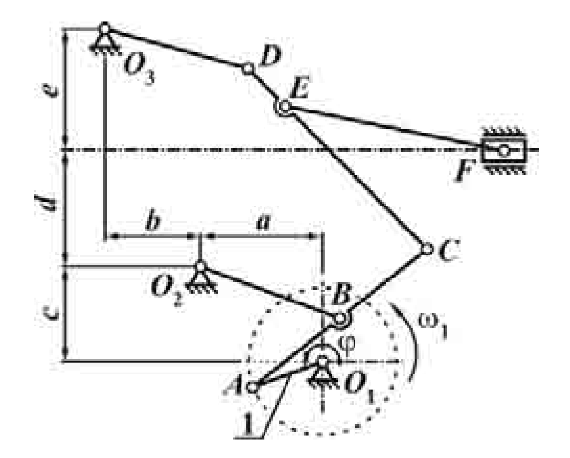
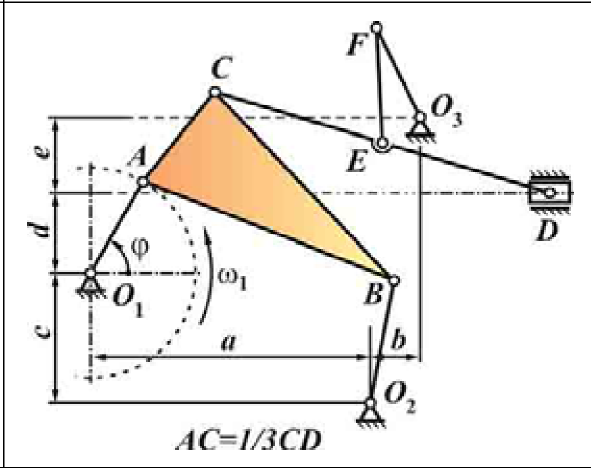
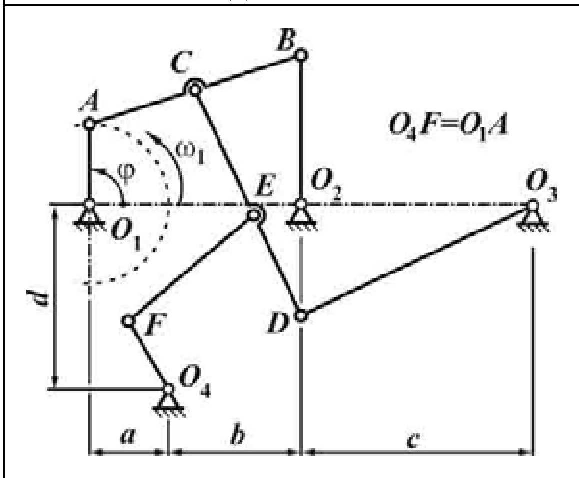
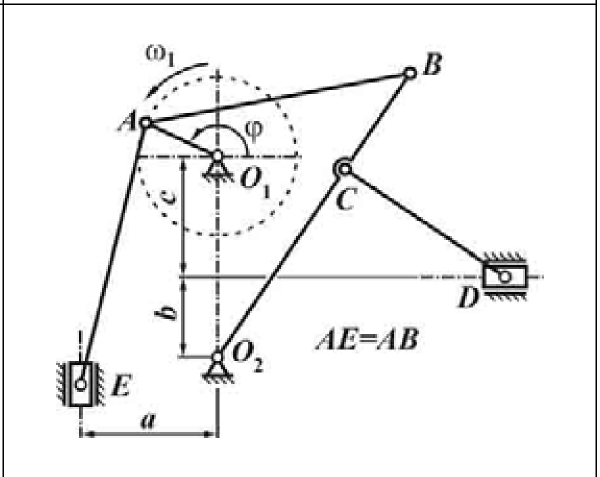
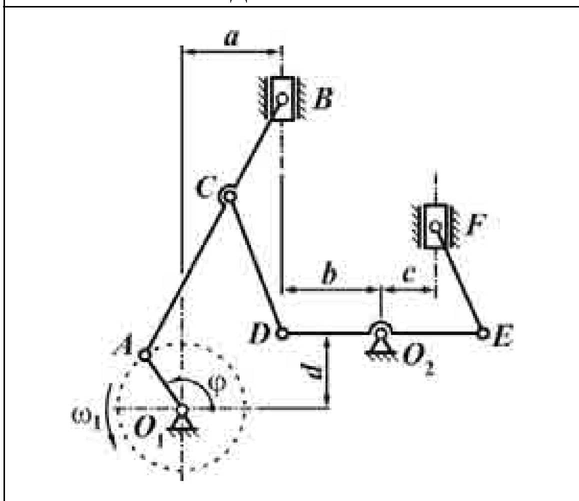
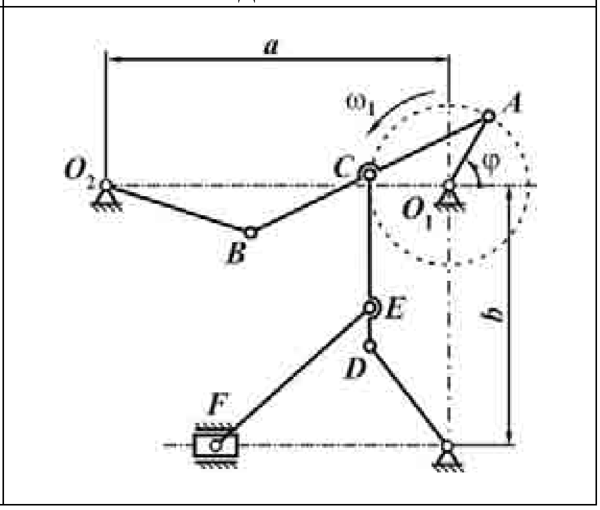
№ варианта	φ, град.	Расстояние, см					Длины звеньев, см										
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	O_1A	O_2B	O_2D	O_3D	O_3F	*AB*	*BC*	*CD*	*CE*	*DE*	*EF*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	200	18	23	18	22	23	14	28	–	28	–	21	21	48	38	–	42
2	60	56	10	26	16	25	21	25	–	–	20	54	52	69	35	–	32
3	90	15	25	54	35	–	15	28	–	58	–	42	21	47	26	–	31
4	155	26	15	23	–	–	15	65	–	–	–	51	22	38	–	–	–
5	125	19	19	10	22	–	12	–	19	–	–	55	19	23	–	38	22
6	60	65	49	–	–	–	15	29	–	24	–	50	25	32	23	–	39
7	250	11	42	11	7	24	16	34	–	–	41	25	25	42	21	–	49
8	90	27	18	14	15	30	14	29	–	23	–	55	32	15	–	45	–
9	200	23	19	20	28	21	21	31	–	25	–	65	62	31	–	11	29
10	110	55	21	25	–	–	15	–	24	–	–	70	35	33	–	17	12
11	50	50	30	–	–	–	14	29	–	–	–	45	54	34	–	37	–
12	55	10	86	32	28	–	21	–	–	55	–	60	30	19	60	–	49
13	45	17	54	–	–	–	15	–	40	–	–	50	35	40	22	22	50
14	90	28	40	6	18	15	15	31	–	15	–	50	25	70	35	–	50
15	130	46	31	–	–	–	15	20	–	20	–	45	15	31	17	17	37
16	40	36	22	15	–	–	15	20	40	–	–	45	20	24	–	40	–
17	145	96	–	–	–	–	15	28	–	–	–	84	20	51	–	–	–
18	45	70	9	37	–	–	16	–	39	–	25	78	38	41	19	–	57
19	40	42	39	–	–	–	20	–	20	–	–	71	30	–	–	57	–

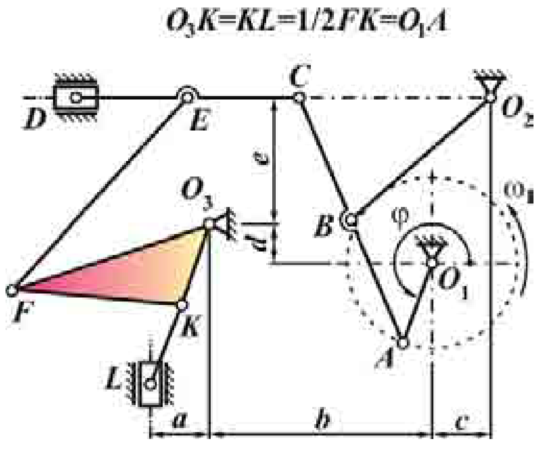
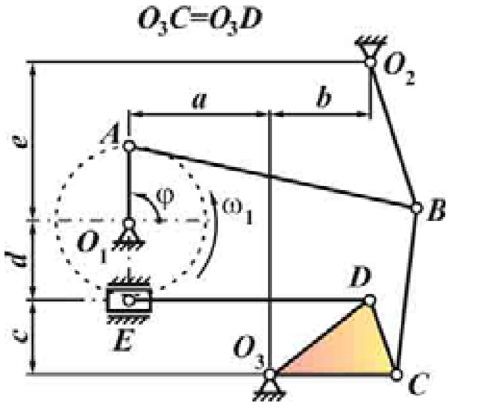
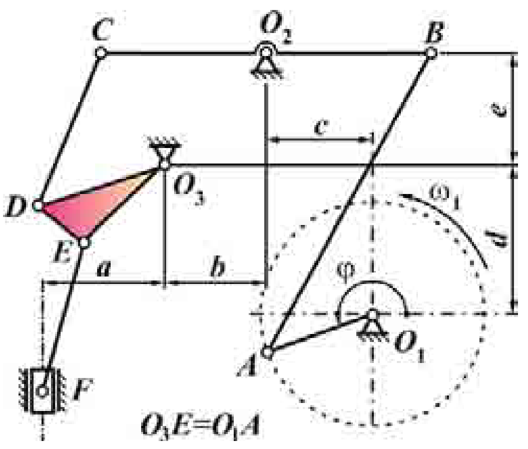
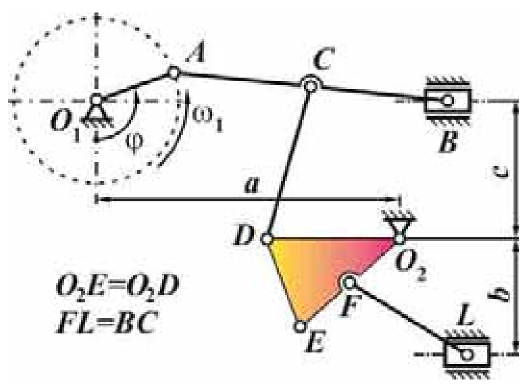
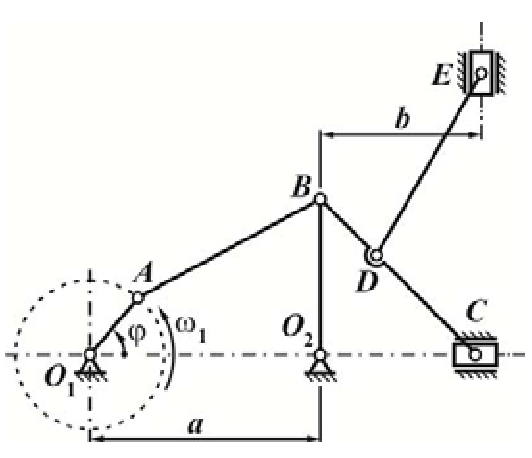
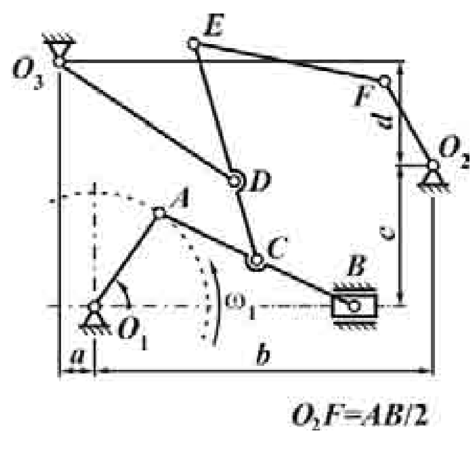
Окончание табл. 24

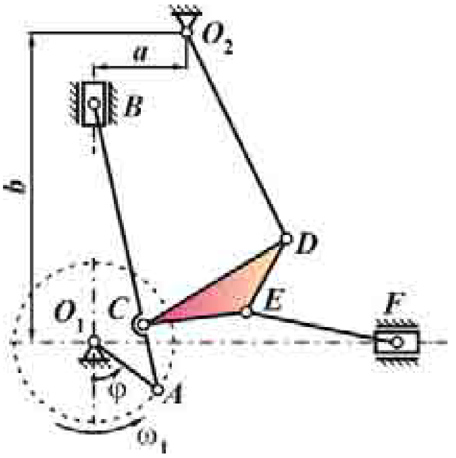
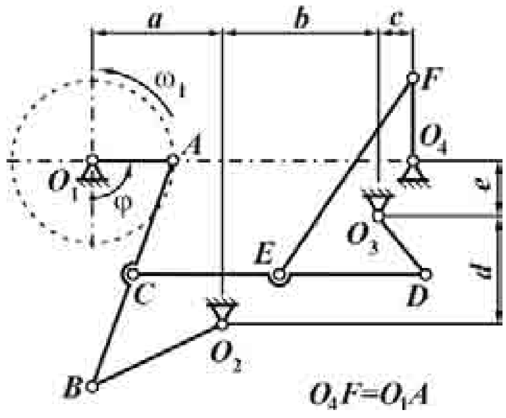
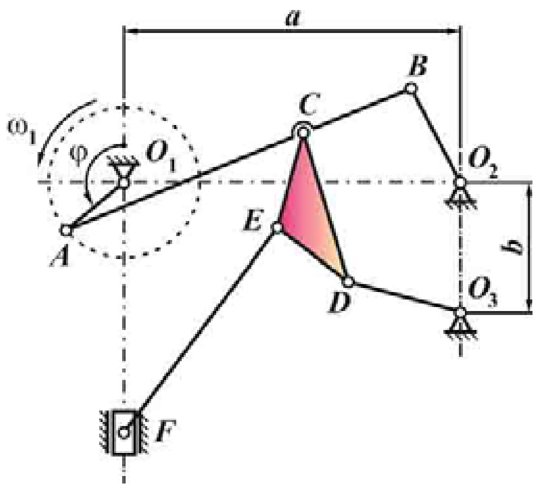
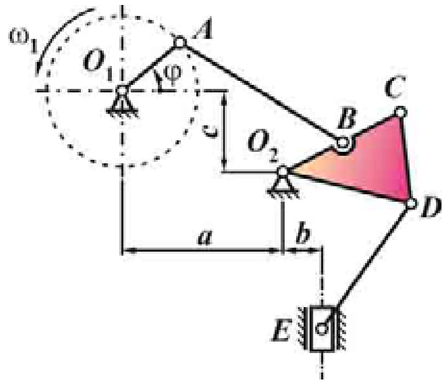
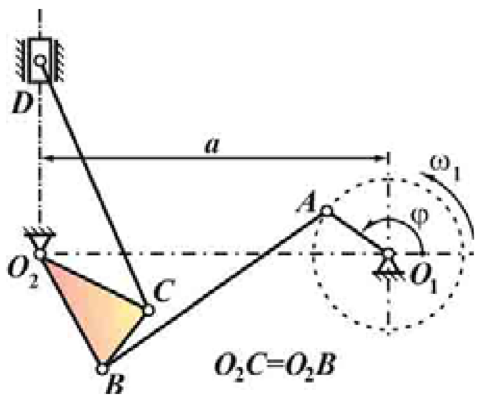
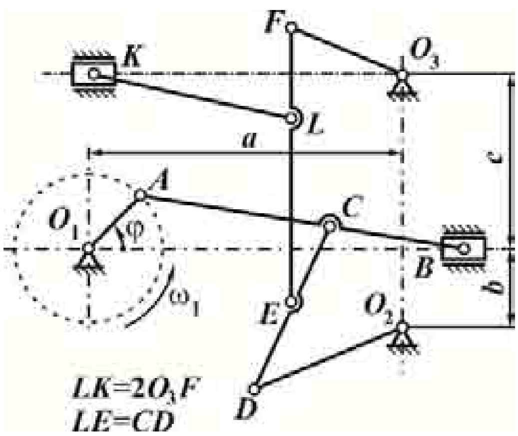
№ варианта	φ, град.	Расстояние, см					Длины звеньев, см										
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	O_1A	O_2B	O_2D	O_3D	O_3F	*AB*	*BC*	*CD*	*CE*	*DE*	*EF*
20	145	27	24	30	–	–	20	50	–	–	30	80	32	58	29	–	35
21	115	46	–	–	–	–	15	–	45	–	–	78	39	26	52	–	38
22	35	46	23	11	–	–	15	15	–	38	–	44	25	30	22	15	40
23	130	31	30	50	–	–	15	30	–	50	–	40	16	60	30	–	30
24	115	36	39	13	31	–	17	23	–	17	–	35	11	45	25	25	44
25	55	72	36	–	–	–	15	–	30	–	–	76	46	50	35	–	51
26	135	36	53	36	32	–	19	40	–	–	19	76	38	68	35	–	29
27	140	71	27	32	40	–	16	30	–	50	–	46	33	40	20	–	50
28	215	30	20	35	–	–	19	–	19	–	–	59	29	24	–	48	36
29	90	35	15	38	7	–	10	16	–	15	–	50	33	16	–	45	33
30	25	46	28	17	–	–	16	25	–	75	–	50	11	33	–	26	44

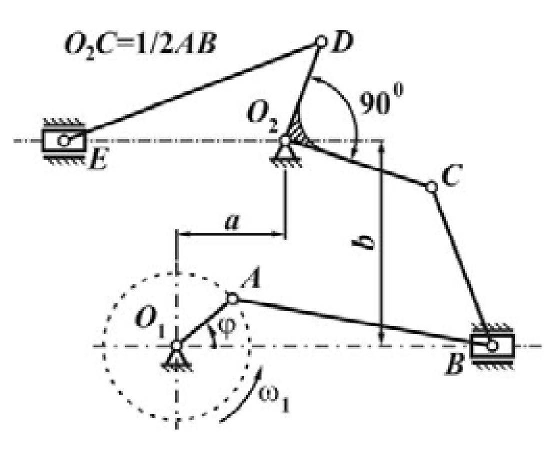
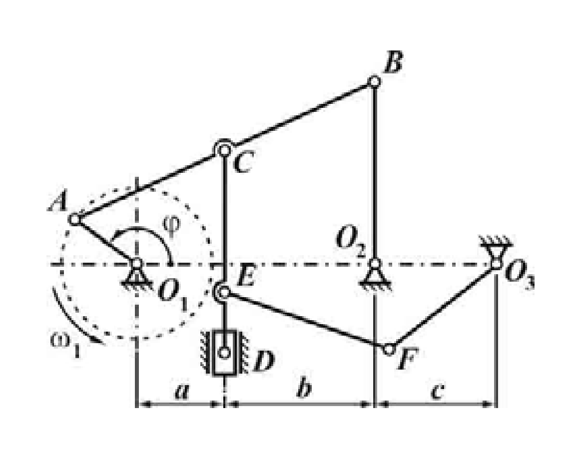
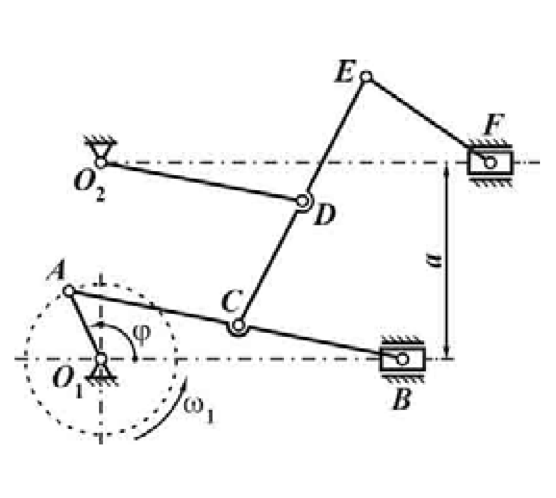
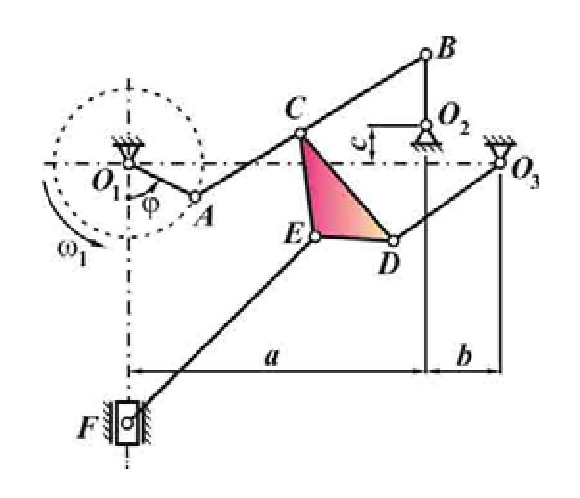
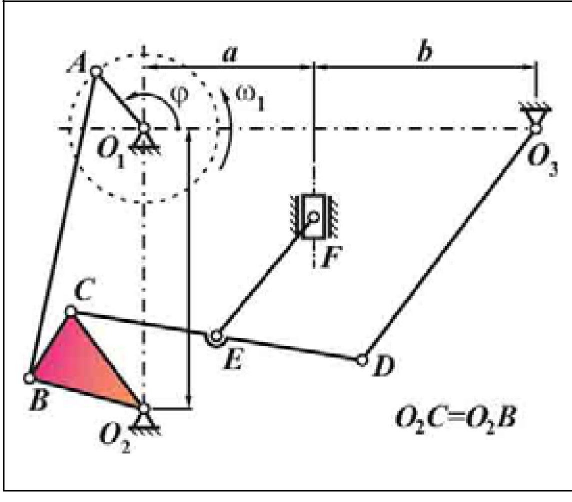
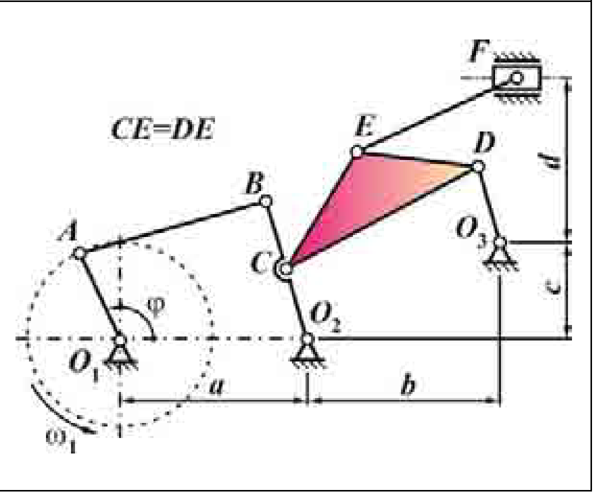
Таблица 25

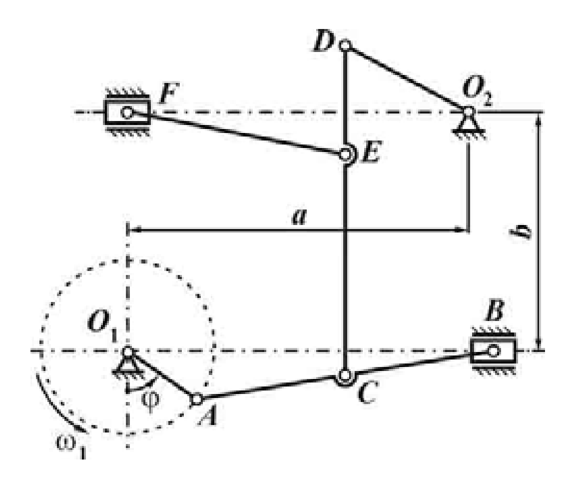
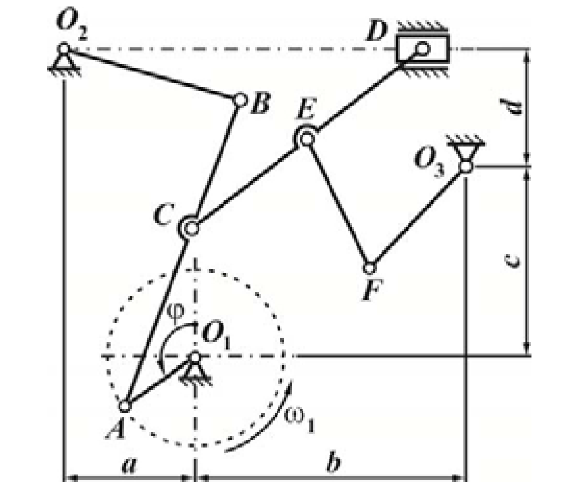
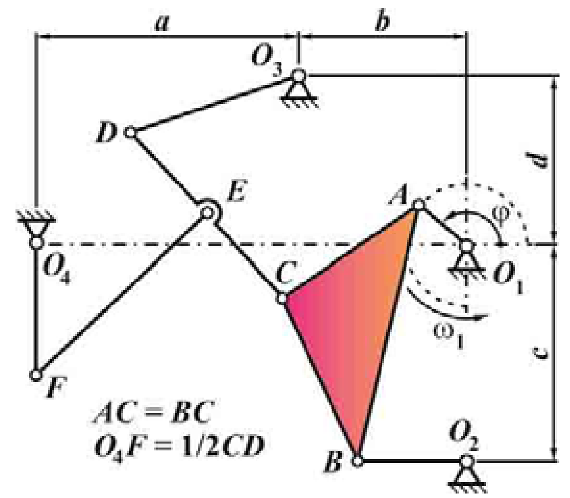
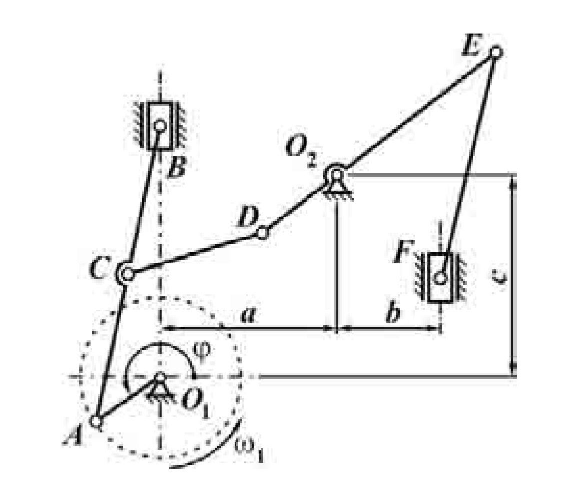
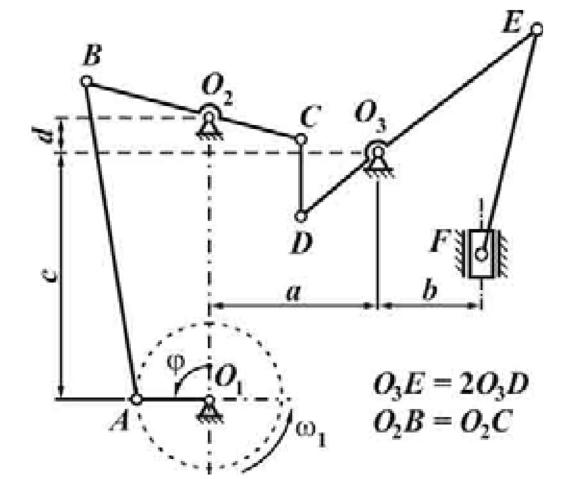
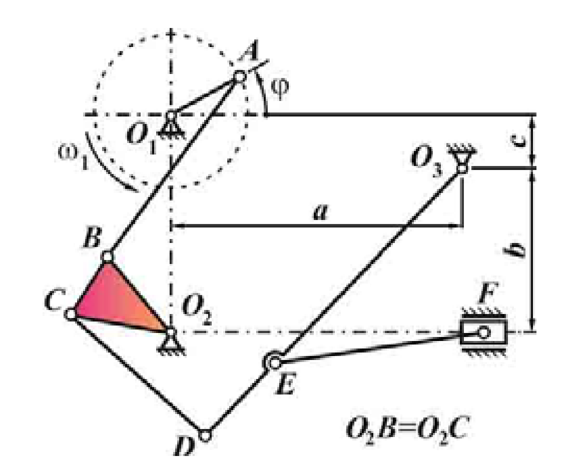
Схемы механизмов к ИДЗ № 6

задание № 1	задание № 2
	
задание № 3	задание № 4
	
задание № 5	задание № 6
	

задание № 7	задание № 8
	
задание № 9	**задание № 10**
	
задание № 11	**задание № 12**
	

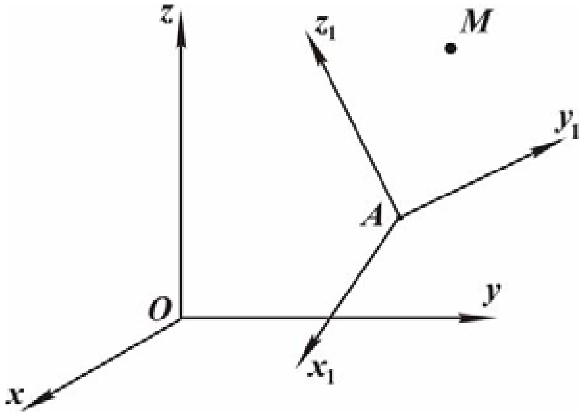
задание № 13	задание № 14
	
задание № 15	**задание № 16**
	
задание № 17	**задание № 18**
	

задание № 19	задание № 20
	
задание № 21	задание № 22
	
задание № 23	задание № 24
	

задание № 25	задание № 26
	
задание № 27	задание № 28
	
задание № 29	задание № 30
	

2.5. Сложное движение точки

В ряде случаев полезно рассматривать движение точки относительно двух систем отсчета, полагая одну из них неподвижной. В этом случае движение точки называется сложным.



Пусть движение точки исследуется в двух системах координат, одна из которых $Oxyz$ неподвижна, а вторую – $Ax_1y_1z_1$ считаем подвижной.

Движение точки относительно неподвижной системы координат называется абсолютным движением.

Движение точки относительно подвижной системы координат называется относительным движением. Все параметры относительного движения точки пишутся с подстрочным индексом r, например, относительная скорость точки – $\overline{V}_r$.

Движение подвижной системы координат относительно неподвижной системы координат называется переносным движением.

Все параметры переносного движения пишутся с подстрочным индексом e, например, угловая скорость вращения подвижной системы координат в неподвижной – $\overline{\omega}_e$, переносная скорость точки – $\overline{V}_e$.

● Скорость точки при её сложном движении

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e,$$

где $\overline{V}_a$, $\overline{V}_r$, $\overline{V}_e$ – абсолютная, относительная и переносная скорости.

● Ускорение точки при ее сложном движении

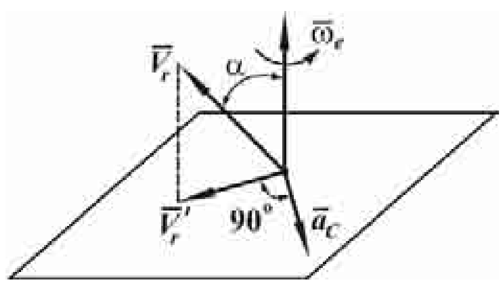
$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c,$$

где $\overline{a}_a$, $\overline{a}_r$, $\overline{a}_e$, $\overline{a}_c$ – абсолютное, относительное, переносное, кориолисово ускорения.

● Ускорение Кориолиса

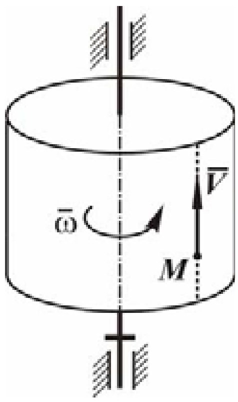
$$\overline{a}_c = 2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r\right);$$

$$a_c = 2\,\omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\widehat{\overline{\omega}_e, \overline{V}_r}).$$



● ***Правило Жуковского.*** Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо спроецировать вектор $\overline{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения и повернуть эту проекцию в указанной плоскости на 90° в сторону переносного вращения.

Здесь $\overline{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\overline{V}_r$ – относительная скорость точки; $\overline{a}_c$ – ускорение Кориолиса.



Пример. Цилиндр вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω. По образующей цилиндра движется точка M с относительной скоростью V. Полагая, что подвижная система координат связана с цилиндром, определить для точки M ускорение Кориолиса.

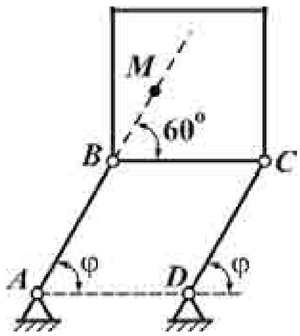
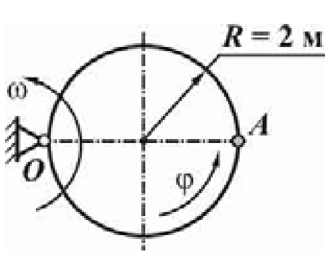
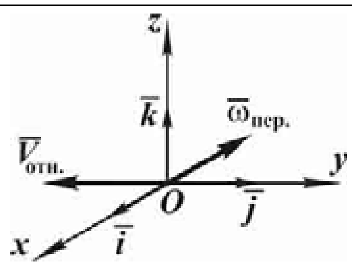
Решение.

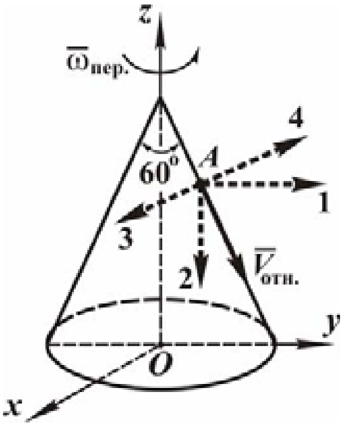
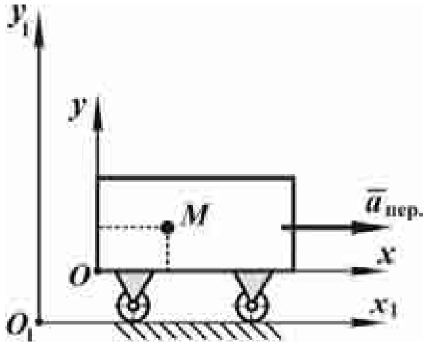
$$\overline{a}_C = 2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r\right).$$

Вектор $\overline{\omega}_e$ лежит на оси вращения, $\overline{\omega}_e // \overline{V}_r$. Следовательно, $a_C = 0$.

Таблица 26

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	$\varphi = \frac{\pi}{3}t$, рад; $BM = 3\pi t^2$, см; $AB = CD = 24$ см. В момент $t_1 = 1$ с абсолютная скорость точки M равна $k\pi \frac{\text{см}}{\text{с}}$, где $k = \ldots$ **Ответ**: 10.	
2	При вращении кольца вокруг точки O $\omega = 4$ рад/с, закон движения точки A по кольцу $\varphi = 1{,}5t$ рад, абсолютная скорость $V_A^{\text{абс.}} = \ldots$ м/с. **Ответ**: 19 м/с.	
3	При заданных направлениях векторов относительной скорости точки и угловой скорости переносного движения вектор ускорения Кориолиса имеет направление … **Ответ**: $\overline{k}$.	

4	Направление вектора ускорения Кориолиса точки A совпадает с вектором № … **Ответ**: 4.	
5	Ускорение тележки $3\,м/с^2$. По стенке кузова движется точка M согласно уравнениям: $x=-4{,}5t^2, y=4t^2$ (в метрах). Абсолютное ускорение точки …$м/с^2$. **Ответ**: $10\,м/с^2$.	

Индивидуальное задание № 7.

Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в сложном движении

По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D определить для момента времени $t=t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Схемы механизмов представлены в табл. 28, а необходимые для расчёта данные приведены в табл. 27.

Примечание.

1. В вариантах 5, 6, 10, 12, 13, 20 – 22, 24, 27, 28 OM – дуга окружности.
2. На схемах 5, 10, 12, 21, 24, 27 OM – дуга, соответствующая меньшему центральному углу.
3. Положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r.

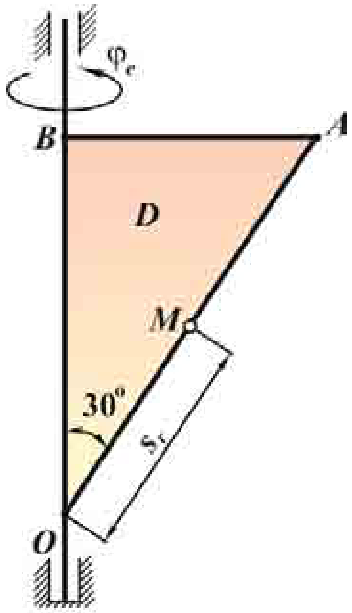


Рис. 18

Пример. Треугольник *OAB* (рис. 18), вращается относительно вертикальной оси по закону

$\varphi_e = 0{,}9t^2 - 9t^3$ рад. По гипотенузе OA движется точка M, дуговая координата которой $s_r = OM = 16 - 8\cos 3\pi t$ см. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = \dfrac{2}{9}$ с.

Решение.

Будем считать, что в расчётный момент времени плоскость чертежа (рис. 19) совпадает с плоскостью треугольника. Положение точки M на треугольнике определяется расстоянием $s_r = OM$.

При $t_1 = \dfrac{2}{9}$ с:

$$s_r = OM = 16 - 8\cos(3\pi t_1) = 16 - 8\cos\left(3\pi \cdot \frac{2}{9}\right) = 20 \text{ см}.$$

Введем подвижную систему координат, связанную с треугольником OAB.

Относительное движение точки задано естественным способом. Определим величину относительной скорости точки M:

$$V_r = \frac{ds_r}{dt} = 24\pi \sin 3\pi t_1, \text{ при } t_1 = \frac{2}{9} \text{ с}:$$

$$V_r = 24 \cdot \pi \cdot \sin\left(3 \cdot 180 \cdot \frac{2}{9}\right) = 65{,}2 \text{ см/с}.$$

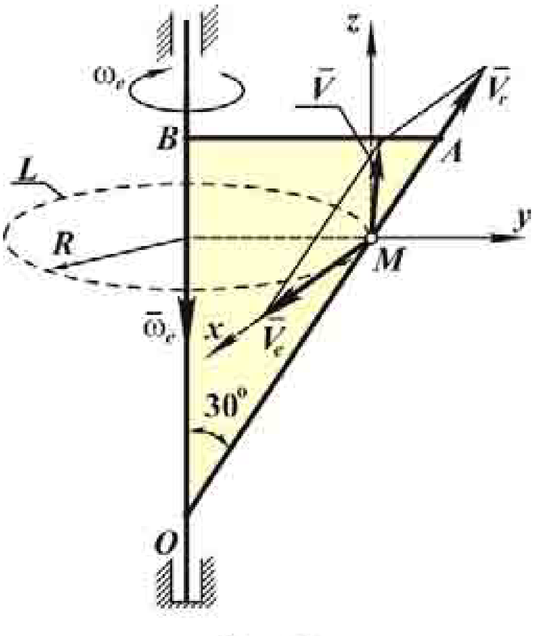


Рис. 19

Положительный знак у величины V_r показывает, что вектор относительной скорости $\bar{V}_r$ направлен в сторону возрастания s_r.

Переносная скорость, то есть скорость той точки гипотенузы, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка M, направлена в сторону вращения по касательной к окружности, которую описывает точка в переносном движении (рис. 19):

$$V_e = \omega_e \cdot R,$$

где R – радиус окружности L, описываемой той точкой тела, с которой в данный момент времени $t_1 = \frac{2}{9}$ с совпадает точка M:

$$R = OM \cdot \sin 30^{\circ} = 20 \cdot 0{,}5 = 10 \text{ см},$$

ω_e – угловая скорость тела:

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 1{,}8t - 27t^2 \text{ рад/с}.$$

При $t_1 = \frac{2}{9}$ с:

$$\omega_e = 1{,}8 \cdot \frac{2}{9} - 27 \cdot \frac{4}{81} = -0{,}93 \text{ рад/с}.$$

Отрицательный знак у величины ω_e показывает, что вращение треугольника происходит вокруг вертикальной оси в сторону, обратную направлению отсчёта угла φ. Поэтому вектор $\overline{\omega}_e$ направлен по вертикальной оси вниз (рис. 19).

Следовательно, переносная скорость:

$$V_e = 0{,}93 \cdot 10 = 9{,}3 \text{ см/с}.$$

Абсолютную скорость точки M найдём как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей

$$\overline{V} = \overline{V}_r + \overline{V}_e .$$

Вектор $\overline{V}_e$ направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела. Так как $\overline{V}_e$ и $\overline{V}_r$ взаимно перпендикулярны, то модуль абсолютной скорости точки M:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{9{,}3^2 + 65{,}2^2} = 65{,}9 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение точки M равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c . \qquad (*)$$

В рассматриваемом примере относительное движение прямолинейно, вектор $\overline{a}_r$ не делится на составляющие, лежит на траектории движения точки M по гипотенузе OA:

$$a_r = \frac{d^2 s_r}{dt^2} = 72\pi^2 \cos 3\pi t .$$

При $t_1 = \frac{2}{9}$ с: $a_r = -36\pi^2 = \ -355$ см/с^2.

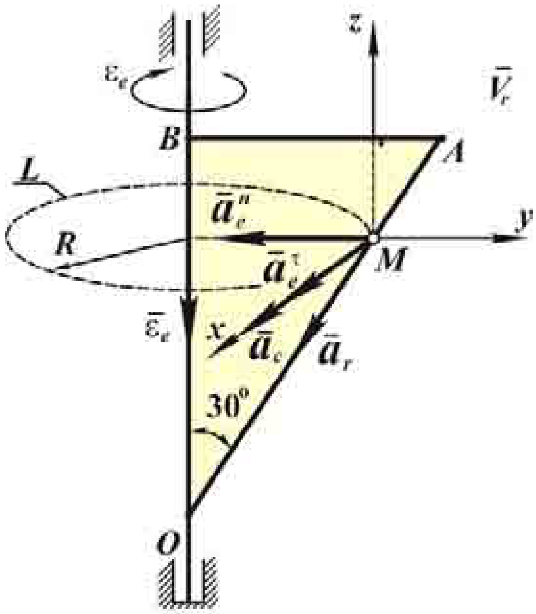


Рис. 20

Отрицательный знак a_r показывает, что вектор $\bar{a}_r$ направлен в сторону отрицательных значений s_r (см. рис. 20).

При вычислении переносного ускорения $\bar{a}_e$ следует учитывать, что при движении точки по криволинейной траектории (по окружности) ускорение имеет две составляющие:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n.$$

Переносное касательное ускорение:

$$a_e^\tau = R \cdot \varepsilon_e,$$

где ε_e – угловое ускорение треугольника;

$$\varepsilon_e = \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = 1{,}8 - 54t.$$

При $t_1 = \frac{2}{9}$ с:

$$\varepsilon_e = 1{,}8 - 54 \cdot \frac{2}{9} = -10{,}2 \text{ рад/с}^2.$$

Одинаковые знаки у величин ε_e и ω_e указывают на то, что вращение треугольника ускоренное, направления векторов $\bar{\varepsilon}_e$ и $\bar{\omega}_e$ совпадают (рис. 19 и 20).

$$a_e^\tau = 10 \cdot 10{,}2 = 102 \text{ см/с}^2.$$

Вектор переносного касательного ускорения $\bar{a}_e^\tau$ направлен в ту же сторону, что и вектор переносной скорости $\bar{V}_e$.

Переносное нормальное ускорение:

$$a_e^n = R \cdot \omega_e^2 = 10 \cdot 0{,}93^2 = 8{,}7 \approx 9 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a}_e^n$ направлен к центру окружности L.

Кориолисово ускорение $\overline{a}_c = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r)$.

Модуль кориолисова ускорения:

$$a_c = 2\left|\overline{\omega}_e\right| \cdot \left|\overline{V}_r\right| \cdot \sin(\overline{\omega}_e, \wedge \overline{V}_r).$$

Так как $\sin(\overline{\omega}_e, \wedge \overline{V}_r) = \sin 150^{\circ} = 0{,}5$, следовательно:

$$a_c = 2 \cdot 0{,}93 \cdot 65{,}2 \cdot 0{,}5 = 61 \text{ см/с}^2.$$

В соответствии с правилом Жуковского вектор $\overline{a}_c$ направлен перпендикулярно к плоскости треугольника в ту же сторону, что и вектор $\overline{a}_e^{\tau}$ (см. рис. 20).

Модуль абсолютного ускорения точки M находим, проектируя равенство $(*)$ на оси x, y, z:

$$a_x = a_e^{\tau} + a_c = 102 + 61 = 163 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = -a_e^n - a_r \cos 60^{\circ} = -9 - 355 \cdot 0{,}5 = -186 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = -a_r \cos 30^{\circ} = -355\frac{\sqrt{3}}{2} = -308 \text{ см/с}^2.$$

Следовательно:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 395 \text{ см/с}^2.$$

Результаты расчёта сведены в таблицу:

ω_e, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	Скорость, см/с			ε_e, $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$	Ускорение, см/с^2							
	V_e	V_r	V		a_r	a_e^{τ}	a_e^n	a_c	a_x	a_y	a_z	a
– 0,93	9,3	65,2	65,9	– 10,2	– 355	102	9	61	163	– 186	– 308	395

Контрольные вопросы

1. При каких условиях движение точки считается сложным? 2. Какое движение точки называется абсолютным; относительным; переносным? 3. Как определяется абсолютная скорость точки в её сложном движении? 4. Как определяется кориолисово ускорение? 5. В каких случаях ускорение Кориолиса обращается в нуль? 7. Как определяется абсолютное ускорение точки в её сложном движении? 8. Правило Жуковского.

Таблица 27

Данные для индивидуального задания № 7

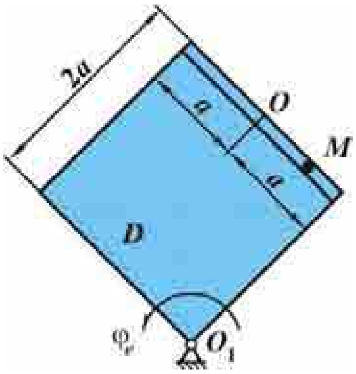
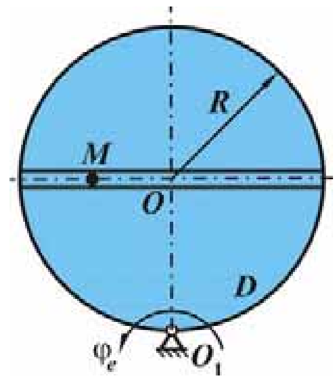
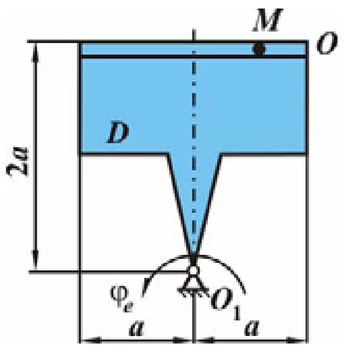
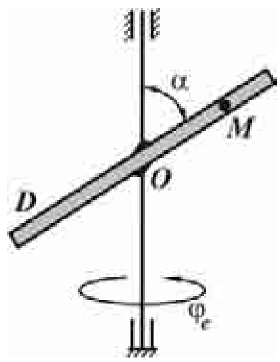
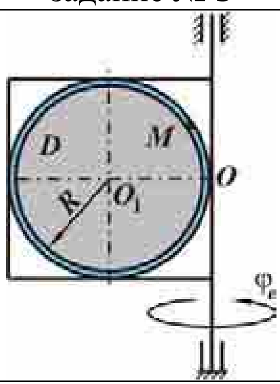
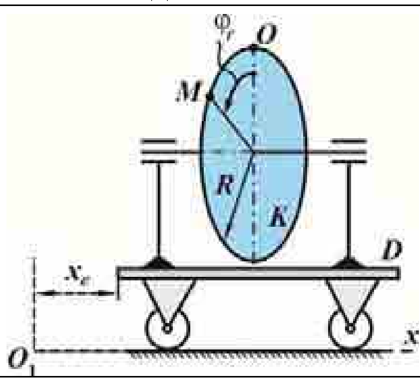
Номер задания табл. 26	Уравнение движения тела D $\varphi_e = f_1(t)$, рад	Уравнение относительного движения точки M $s_r = OM = f_2(t)$, см	t_1, с	R, см	a, см	α, град
1	$2t^3 - t^2$	$18\sin(\pi t/4)$	2/3	–	25	–
2	$0,4t^2 + t$	$20\sin\pi t$	5/3	20	–	–
3	$2t + 0,5t^2$	$6t^3$	2	–	30	–
4	$0,6t^2$	$10\sin(\pi t/6)$	1	–	–	60
5	$3t - 0,5t^3$	$40\pi\cos(\pi t/6)$	2	30	–	–
6	$x_e = 2t + 1t^2$	$\varphi_r = 150\pi t^2$	1/6	25	–	–
7	$0,5t^2$	$20\cos 2\pi t$	3/8	–	40	60
8	$t^3 - 5t$	$6\left(t + 0,5t^2\right)$	2	–	–	30
9	$4t + 1,6t^2$	$10 + 10\sin 2\pi t$	1/8	–	–	–
10	$1,2t - t^2$	$20\pi\cos(\pi t/4)$	4/3	20	20	–
11	$2t^2 - 0,5t$	$25\sin(\pi t/3)$	4	–	25	–
12	$5t - 4t^2$	$15\left(\pi t^3/8\right)$	2	30	30	–
13	$8t^2 - 3t$	$120\pi t^2$	1/3	40	–	–
14	$4t - 2t^2$	$3 + 14\sin\pi t$	2/3	–	–	30
15	$0,2t^3 + t$	$5\sqrt{2}\left(t^2 + t\right)$	2	–	60	45
16	$t - 0,5t^2$	$20\sin\pi t$	1/3	–	20	–
17	$0,5t^2$	$8t^3 + 2t$	1	–	$4\sqrt{5}$	–
18	$8t - t^2$	$10t + t^3$	2	–	–	60
19	$t + 3t^2$	$6t + 4t^3$	2	45	–	–
20	$6t + t^2$	$30\pi\cos(\pi t/6)$	3	60	–	–
21	$2t - 4t^2$	$25\pi\left(t^2 + t\right)$	1/2	25	–	–
22	$4t - 0,2t^2$	$10\pi\sin(\pi t/4)$	2/3	30	–	–
23	$2t - 0,25t^2$	$3t^2 + 4t$	2	–	–	30
24	$2t - 0,3t^2$	$75\pi\left(0,1t + 0,3t^3\right)$	1	30	–	–

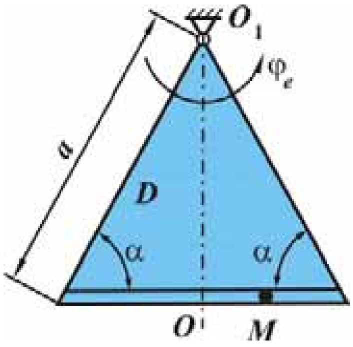
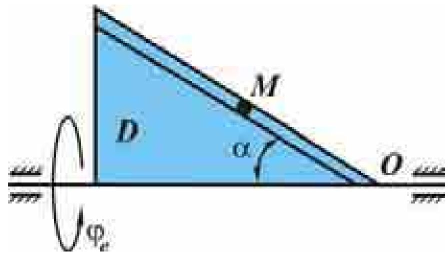
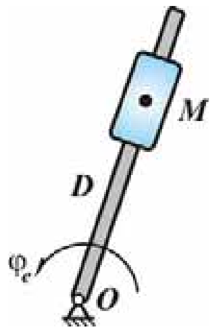
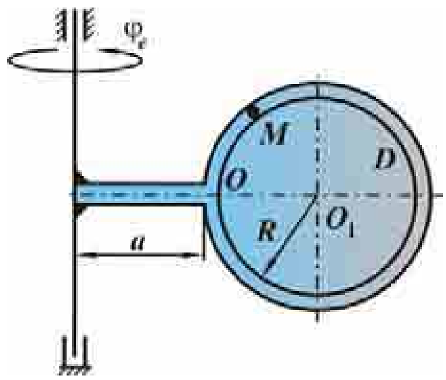
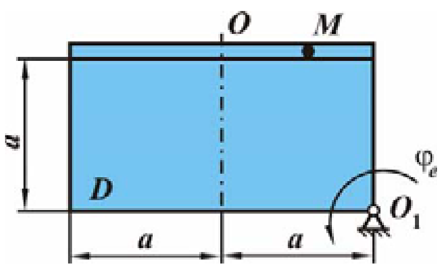
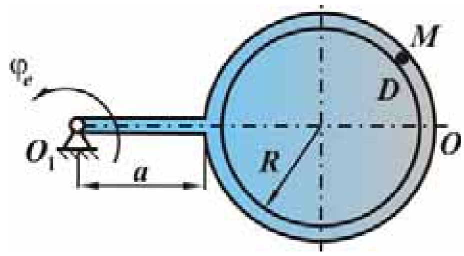
Продолжение табл. 27

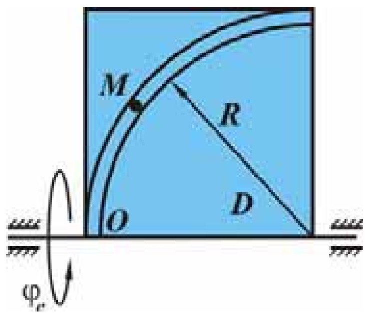
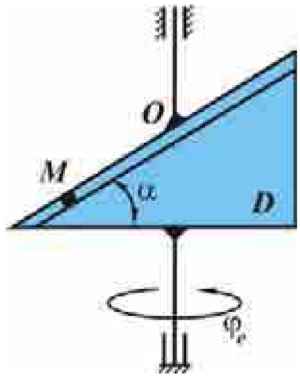
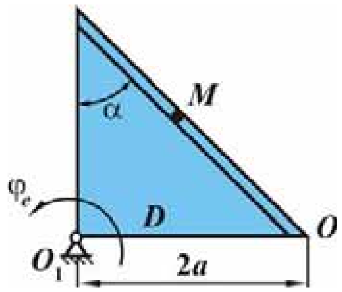
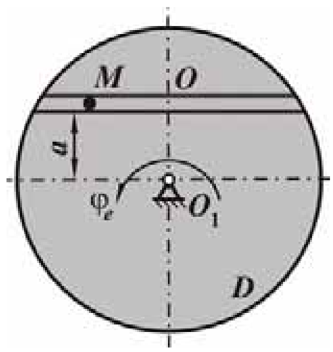
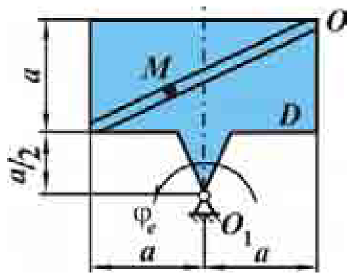
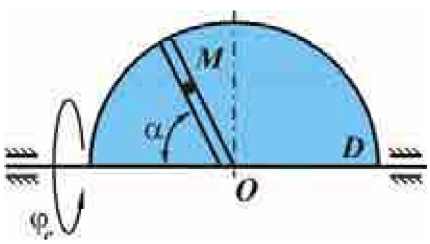
25	$10t-0{,}1t^2$	$15\sin(\pi t/3)$	5	–	–	–
26	$-2\pi t^2$	$8\cos(\pi t/2)$	3/2	–	–	45
27	$t-0{,}5t^3$	$10\sqrt{2}\pi\cos 2\pi t$	1/8	30	–	–
28	$2t^3-5t$	$2{,}5\pi t^2$	2	40	–	–
29	$0{,}6t^2$	$6\sqrt{6}\sin(\pi t/16)$	4	36	–	30
30	$2t^2-3t$	$5\sqrt{3}t^3/3$	2	20	–	30

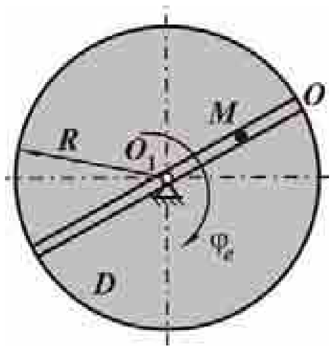
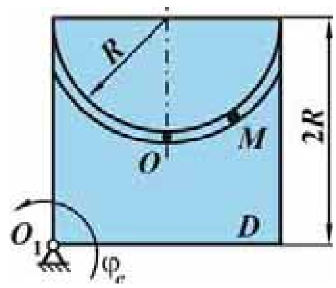
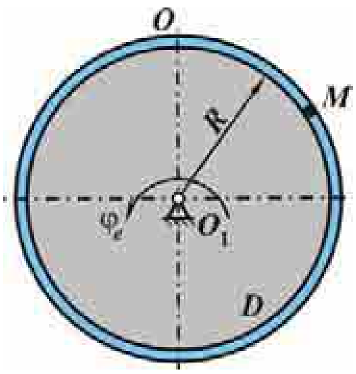
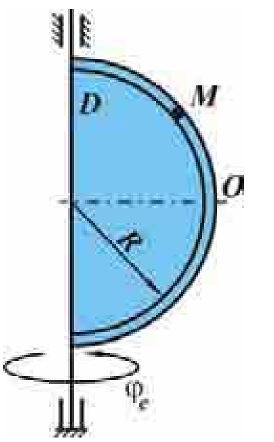
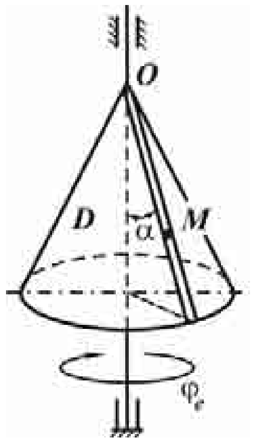
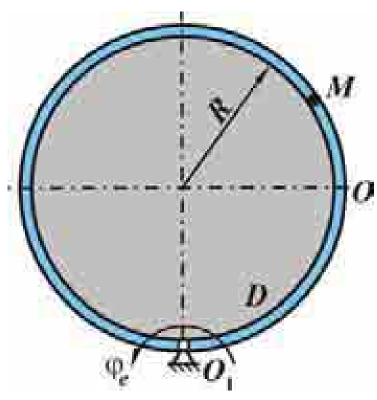
Таблица 28

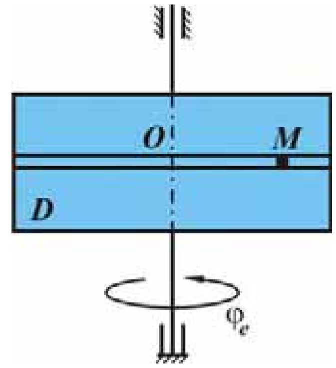
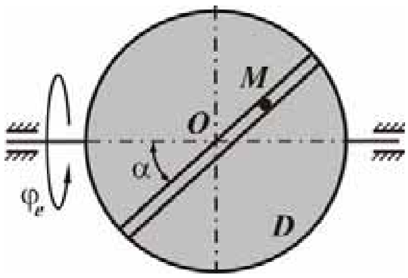
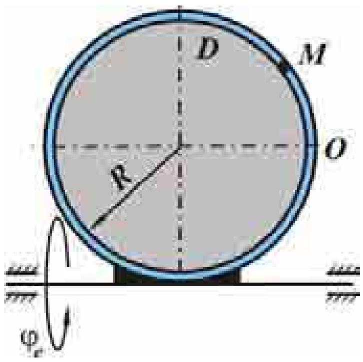
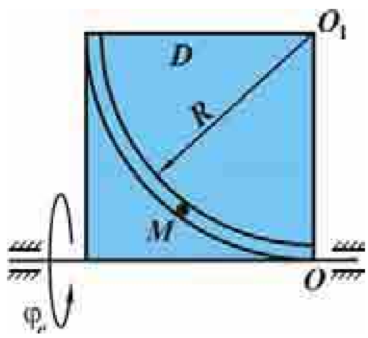
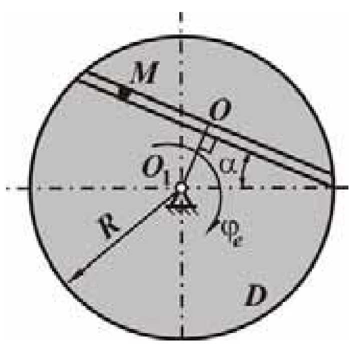
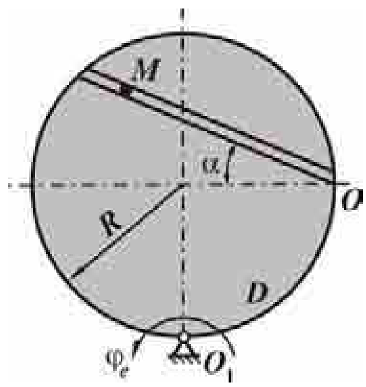
Схемы механизмов к заданиям № 6

задание № 1	задание № 2
	
задание № 3	**задание № 4**
	
задание № 5	**задание № 6**
	

задание № 7	задание № 8
	
задание № 9	**задание № 10**
	
задание № 11	**задание № 12**
	

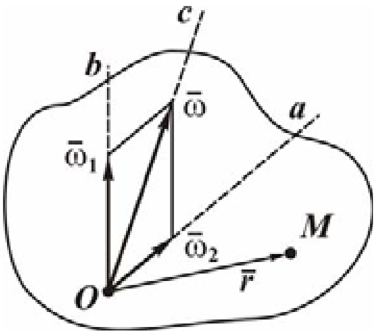
задание № 13	задание № 14
	
задание № 15	**задание № 16**
	
задание № 17	**задание № 18**
	

задание № 19	задание № 20
	
задание № 21	**задание № 22**
	
задание № 23	**задание № 24**
	

задание № 25	задание № 26
	
задание № 27	задание № 28
	
задание № 29	задание № 30
	

2.6. Сложное движение твердого тела

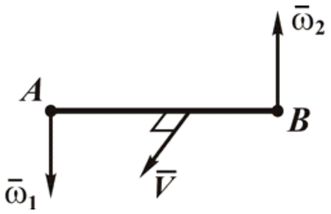
Если тело движется относительно подвижных осей, а эти оси совершают переносное движение по отношению к неподвижным осям, то результирующее (абсолютное) движение называют сложным.



Пусть ось Oa вращается вокруг неподвижной оси Ob с угловой скоростью $\bar{\varpi}_1$, а тело вращается относительно оси Oa с угловой скоростью $\bar{\varpi}_2$. Тогда тело имеет в данный момент абсолютную угловую скорость $\bar{\varpi}$, направленную по мгновенной оси вращения Oc:

$$\bar{\varpi} = \bar{\varpi}_1 + \bar{\varpi}_2;$$

$$\bar{V}_M = \bar{\varpi} \times \bar{r}.$$



● Пара вращений есть одновременное вращение тела вокруг двух параллельных осей с равными по модулю и противоположно направленными угловыми скоростями $\bar{\varpi}_1$ и $\bar{\varpi}_2$:

$$\bar{\varpi}_1 = -\bar{\varpi}_2.$$

Результирующим движением тела является поступательное с линейной скоростью, равной моменту пары угловых скоростей:

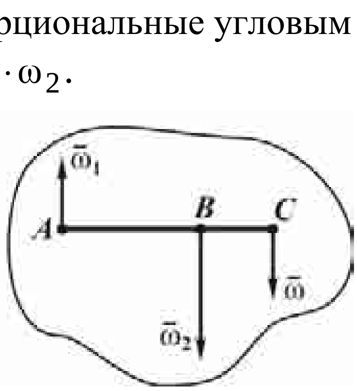
$$\bar{V} = \overline{AB} \times \bar{\varpi}_2.$$

● При вращении тела вокруг двух параллельных осей с угловыми скоростями $\bar{\varpi}_1$ и $\bar{\varpi}_2$ мгновенная угловая скорость абсолютного вращения равна геометрической сумме составляющих угловых скоростей

$$\bar{\varpi} = \bar{\varpi}_1 + \bar{\varpi}_2.$$

● В случае одинакового (противоположного, $\omega_2 > \omega_1$) направления вращений $\omega = \omega_1 + \omega_2$ $(\omega = \omega_2 - \omega_1)$, ось абсолютного вращения делит расстояние между осями составляющих вращений внутренним (внешним) образом на части, обратно пропорциональные угловым скоростям

$$AC \cdot \omega_1 = CB \cdot \omega_2.$$

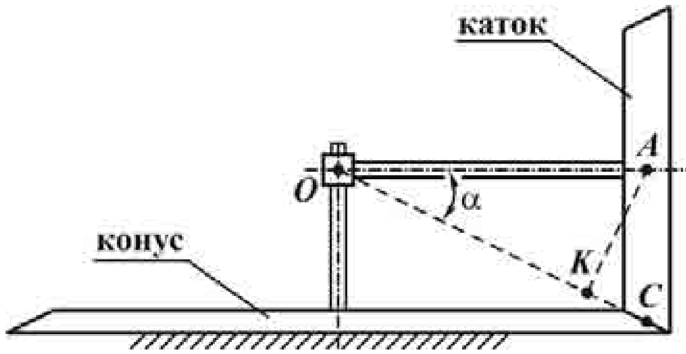


В случае, когда подвижная система координат движется поступательно со скоростью $\overline{V}_1$ и тело относительно подвижной системы координат также движется поступательно со скоростью $\overline{V}_2$, результирующее движение является поступательным с абсолютной скоростью $\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2$.

Пример. Каток катится по неподвижному конусу. Задано: V_A, $OA = l$, $AC = R$. Определить абсолютную угловую скорость катка Ω.

Решение.

Абсолютное движение катка является результатом его относительного вращения вокруг оси OA с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$ и переносного вращения оси OA вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$. При этом:

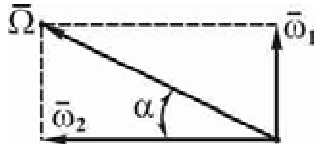


$$\omega_1 = \frac{V_A}{l},\ \omega_2 = \frac{V_A}{R}.$$

Абсолютная угловая скорость катка $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$.

Так как $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной угловой скорости катка:

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = V_A \cdot \sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{R^2}}.$$



Решение можно получить, учитывая, что OC – мгновенная ось вращения катка.

Тогда $V_A = \Omega \cdot |AK|$

Определяем расстояния OC и AK:

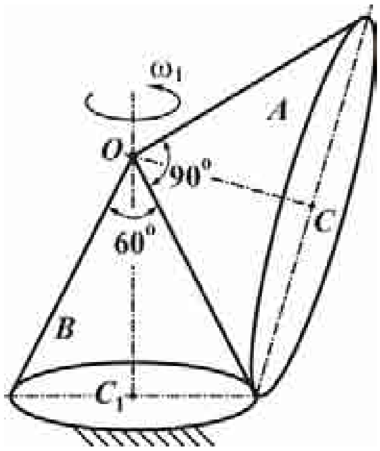
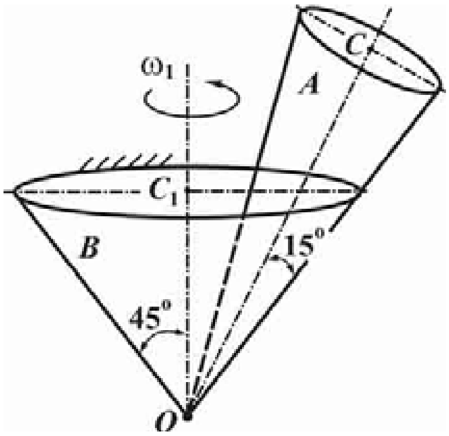
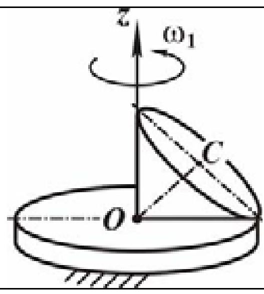
$$OC = \sqrt{l^2 + R^2},\ AK = l \cdot \sin\alpha,\ \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}}.$$

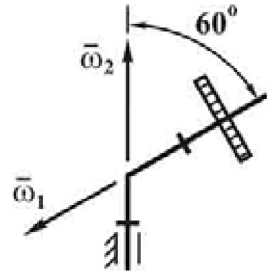
$$\Omega = \frac{V_A}{AK} = V_A \cdot \frac{\sqrt{l^2 + R^2}}{l \cdot R}.$$

Результат совпадает с полученным ранее.

Таблица 29

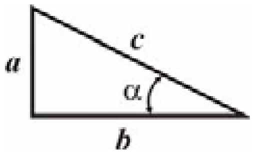
Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Конус A катится по конусу B; угловая скорость вращения оси OC вокруг OC_1 $\omega_1 = 10$ рад/с; угловая скорость вращения конуса A вокруг оси OC $\omega_A = \ldots$ рад/с. **Ответ**: 10.	
2	Конус A катится по конусу B; угловая скорость вращения оси OC вокруг OC_1 $\omega_1 = 5{,}2$ рад/с; абсолютная угловая скорость конуса A $\Omega = \ldots$ рад/с. **Ответ**: 10.	
3	Совокупность двух вращений тела вокруг пересекающихся осей с угловыми скоростями $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ эквивалентна одному вращению с угловой скоростью $\overline{\Omega} = \ldots$. **Ответ**: а).	а) $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ б) $\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2$ в) $\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1$ г) $\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$
4	Конус катится по плоскости; угловая скорость вращения оси OC вокруг Oz $\omega_1 = 9$ рад/с, абсолютная угловая скорость конуса $\Omega = \ldots$ рад/с. **Ответ**: 9.	

5	Диск вращается на изогнутом валу, вал вращается в подшипнике, $\omega_1 = \omega_2 = 3$ рад/с; абсолютная угловая скорость диска $\Omega = \ldots$ рад/с. **Ответ**: 3.	
Справка: $\sin 15^o = \cos 75^o = 0{,}26$, $\sin 75^o = \cos 15^o = 0{,}96$;		

Приложение 1.
Некоторые математические формулы

● Тригонометрические функции и формулы



$$\cos\alpha = b/c; \sin\alpha = a/c; \operatorname{tg}\alpha = a/b;$$

$$\cos\left(90^{o} \pm \beta\right) = \mp\sin\beta;\ \sin\left(90^{o} \pm \beta\right) = \mp\cos\beta;$$

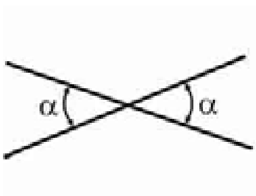
$$\cos\left(180^{o} \pm \beta\right) = -\cos\beta;\ \sin\left(180^{o} \pm \beta\right) = \mp\sin\beta.$$

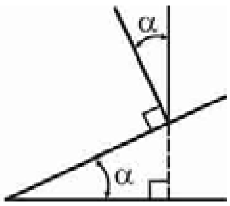
Таблица 1

Значения тригонометрических функций

α	0^{o}	30^{o}	45^{o}	60^{o}	90^{o}
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

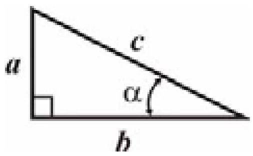
● Два угла равны, если их стороны параллельны, или взаимно перпендикулярны.



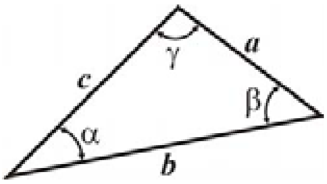


● Вычисление сторон:

а) в прямоугольном треугольнике по тригонометрическим формулам



$$a = c\cdot\sin\alpha, b = c\cdot\cos\alpha;$$



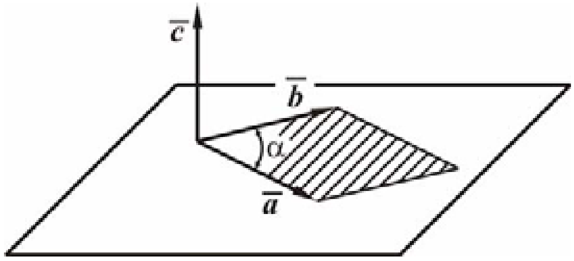
б) в произвольном треугольнике

по теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\beta} = \dfrac{b}{\sin\gamma}$,

по теореме косинусов $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta}$.

● Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – есть вектор $\bar{c}$, направленный перпендикулярно плоскости векторов $\bar{a}$

и $\bar{b}$ в сторону, откуда виден поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ на наименьший угол против хода часовой стрелки и равный по величине площади параллелограмма, построенного на этих векторах.



$$\bar{c} = \left[\bar{a}, \bar{b}\right] \text{ или } \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b};$$

$$c = a \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

● Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – число, равное произведению модулей этих векторов и косинуса угла между ними:

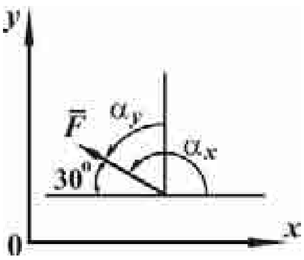
$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = a \cdot b \cdot \cos\alpha, \text{ или } \bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha.$$

Приложение 2. Операции над силами

● Проекции силы на оси координат:

$$F_x = F \cdot \cos\alpha_x;\ F_y = F \cdot \cos\alpha_y;\ F_z = F \cdot \cos\alpha_z,$$

где F – модуль силы, $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – углы между направлениями осей и силы.



Пример: $\alpha_x = 180^\circ - 30^\circ$; $\alpha_y = 90^\circ - 30^\circ$.

$$F_x = F \cdot \cos\alpha_x = F \cdot \cos\left(180^\circ - 30^\circ\right) = = -F \cdot \cos 30^\circ = -F\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$F_y = F \cdot \cos\alpha_y = F \cdot \cos 60^\circ = \frac{F}{2}.$$

● Сложение сил по правилу параллелограмма.

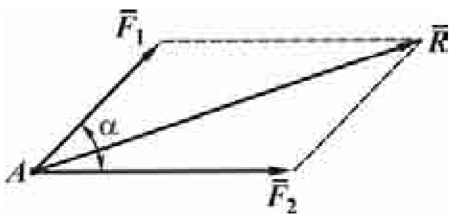
$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2;$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}.$$

Частные случаи:

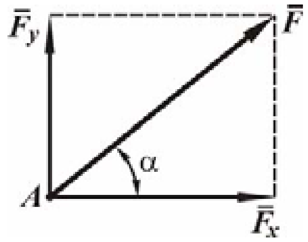
$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow R = F_1 + F_2;$$

$$\alpha = 180^\circ \text{ при } F_2 > F_1 \Rightarrow R = F_2 - F_1;$$



$$\alpha = 90^{\circ} \Rightarrow R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\ .$$

● Разложение силы, приложенной в точке A, по двум взаимно перпендикулярным направлениям.



$$F_x = F \cdot \cos\alpha;$$

$$F_y = F \cdot \sin\alpha.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ДРОБЧИК Виталий Викторович
ШУМСКИЙ Михаил Петрович
ДУБОВИК Вадим Андреевич
СИМАНКИН Федор Аркадьевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор
доктор технических наук,
профессор А.А. Светашков
Дизайн обложки *А.И. Сидоренко*

Подписано к печати 26.11.2010. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 6,11.
Заказ 2055-10. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru