ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПК №1

Тема: определение кинематических параметров плоского манипулятора при заданном движении захвата.

Цель: приобретение опыта кинематического расчета плоских механизмов; отработка аналитических и численных методов вычислений скоростей и ускорений точек при плоском и сложном движении тела.

§ 1. Постановка задачи

Манипулятор робота представляет собой плоский механизм, звенья которого образуют «механическую руку» с захватом в точке А (Рис. 1).

t>0

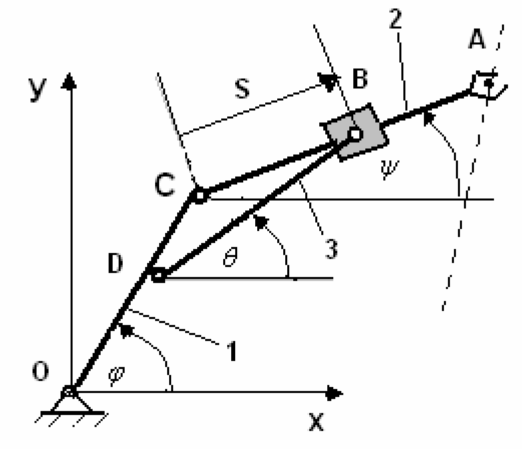

Рис.1.

Известны уравнения движения захвата

$$x_A(t) = 1,5329 - 0,2t; \quad y_A(t) = 0,5487 - 0,089t. \qquad (1.1)$$

Требуется определить в интервале времени $0 \le t \le \tau$ углы φ, ψ, θ и расстояние s. Вычислить угловые скорости и угловые ускорения звеньев, а также относительные скорость и ускорение ползуна В. В момент t=τ вычислить абсолютные скорость ползуна В методом сложного движения точки и координатным способом.

Дано: ОС=а=1,3 м. ; СА=в=1,1 м.; ДВ=с=0,55 м.; ОД=l_1=0,69а м.; ДС=l_2=0,31а; $\varphi = \varphi_0 = 62^\circ$, $\psi = \psi_0 = 33^\circ$ - начальные значения углов.

§ 2. Аналитическое определение углов поворота, угловых скоростей и ускорений звеньев механизма.

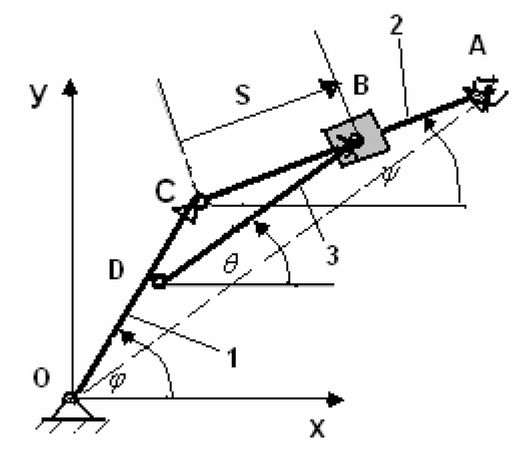

Рис.2.

Для любого положения манипулятора выполняются векторные равенства (Рис.2), являющиеся уравнениями связей

$$\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}, \quad \overline{DB} = \overline{DC} + \overline{CB} \qquad (2.1)$$

Проецируя (2.1) на оси координат, получаем уравнения для определения закона движения звеньев

$$\begin{aligned}
&a\cdot\cos\varphi+b\cdot\cos\psi=x_A(t);\\
&a\cdot\sin\varphi+b\cdot\sin\psi=y_A(t);\\
&l_2\cdot\cos\varphi+s\cdot\cos\psi=c\cdot\cos\theta;\\
&l_2\cdot\sin\varphi+s\cdot\sin\psi=c\cdot\sin\theta.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Дифференцируя (2.2) по времени, имеем уравнения для угловых скоростей

$$\begin{aligned}
&-a\cdot\sin\varphi\cdot\dot\varphi-b\cdot\sin\psi\cdot\dot\psi=\dot x_A(t);\\
&a\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi+b\cdot\cos\psi\cdot\dot\psi=\dot y_A(t);\\
&-l_2\cdot\sin\varphi\cdot\dot\varphi-s\cdot\sin\psi\cdot\dot\psi+c\cdot\sin\theta\cdot\dot\theta+\dot s\cdot\cos\psi=0;\\
&l_2\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi+s\cdot\cos\psi\cdot\dot\psi-c\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta+\dot s\cdot\sin\psi=0.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Уравнения для определения угловых ускорений получаем после дифференцирования (2.3) по времени

$$\begin{aligned}
&-a\cdot\sin\varphi\cdot\ddot\varphi-b\cdot\sin\psi\cdot\ddot\psi=\ddot x_A(t)+a\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi^2+b\cdot\cos\psi\cdot\dot\psi^2;\\
&a\cdot\cos\varphi\cdot\ddot\varphi+b\cdot\cos\psi\cdot\ddot\psi=\ddot y_A(t)+a\cdot\sin\varphi\cdot\dot\varphi^2+b\cdot\sin\psi\cdot\dot\psi^2;\\
&-l_2\cdot\sin\varphi\cdot\ddot\varphi-s\cdot\sin\psi\cdot\ddot\psi+c\cdot\sin\theta\cdot\ddot\theta+\ddot s\cdot\cos\psi=A_x;\\
&l_2\cdot\cos\varphi\cdot\ddot\varphi+s\cdot\cos\psi\cdot\ddot\psi-c\cdot\cos\theta\cdot\ddot\theta+\ddot s\cdot\sin\psi=A_y,
\end{aligned}\tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}
&A_x=l_2\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi^2+s\cdot\cos\psi\cdot\dot\psi^2+2\sin\psi\cdot\dot s\cdot\dot\psi-c\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta^2;\\
&A_y=l_2\cdot\sin\varphi\cdot\dot\varphi^2+s\cdot\sin\psi\cdot\dot\psi^2-2\cos\psi\cdot\dot s\cdot\dot\psi-c\cdot\sin\theta\cdot\dot\theta^2.
\end{aligned}$$

§ 3. Определение скорости и ускорения ползуна В

3.1. Координатный метод.

$$\overline{OB}=\overline{OD}+\overline{DB}$$

отсюда

$$\begin{aligned}
&x_B=l_1\cdot\cos\varphi+c\cdot\cos\theta;\\
&y_B=l_1\cdot\sin\varphi+c\cdot\sin\theta.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

Скорость точки В

$$\begin{aligned}
&\dot x_B=-l_1\cdot\sin\varphi\cdot\dot\varphi-c\cdot\sin\theta\cdot\dot\theta;\\
&\dot y_B=l_1\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi+c\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta;\\
&V_B=\sqrt{\dot x_B{}^2+\dot y_B{}^2}.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

Ускорение точки В

$$\begin{aligned}
&\ddot x_B=-l_1\cdot\sin\varphi\cdot\ddot\varphi-c\cdot\sin\theta\cdot\ddot\theta-l_1\cdot\cos\varphi\cdot\dot\varphi^2-c\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta^2;\\
&\ddot y_B=l_1\cdot\cos\varphi\cdot\ddot\varphi+c\cdot\cos\theta\cdot\ddot\theta-l_1\cdot\sin\varphi\cdot\dot\varphi^2-c\cdot\sin\theta\cdot\dot\theta^2;\\
&a_B=\sqrt{\ddot x_B{}^2+\ddot y_B{}^2}\ .
\end{aligned}\tag{3.3}$$

3.2. Метод сложного движения .

Рассматриваем движение ползуна В как сложное, состоящее из относительного по отношению к звену СА и переносного вместе со звеном СД. Тогда по теореме сложения скоростей имеем

$$\overline{V}_B = \overline{V}_r + \overline{\omega}_1 \times \overline{OC} + \overline{\omega}_2 \times \overline{CB} \quad , \tag{3.4}$$

где $\overline{V}_r = \dot{s} \cdot \cos\psi \cdot \overline{i} + \dot{s} \cdot \sin\psi \cdot \overline{j}$ -вектор относительной скорости.

Абсолютное ускорение точки В согласно теореме Кориолиса равно

$$\overline{a}_B = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k \, , \tag{3.5}$$

где

$\overline{a}_r = \ddot{s} \cdot \cos\psi \cdot \overline{i} + \ddot{s} \cdot \sin\psi \cdot \overline{j}$ -относительное ускорение;

$\overline{a}_e = \overline{\omega}_1 \times (\overline{\omega}_1 \times \overline{OC}) + \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{OC} + \overline{\omega}_2 \times (\overline{\omega}_2 \times \overline{CB}) + \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{CB}$ -переносное ускорение;

$\overline{a}_k = 2 \cdot \overline{\omega}_2 \times \overline{V}_r$ -ускорение Кориолиса.

Проекции векторов на оси координат имеют вид

$$\overline{OC} = \overline{OC}(a \cdot \cos\varphi,\ a \cdot \sin\varphi,\ 0);$$

$$\overline{CB} = \overline{CB}(s \cdot \cos\psi,\ s \cdot \sin\psi,\ 0);$$

$$\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_1(0,\ 0,\ \dot{\varphi});$$

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_2(0,\ 0,\ \dot{\psi});$$

$$\overline{\varepsilon}_1 = \overline{\varepsilon}_1(0,\ 0,\ \ddot{\varphi});$$

$$\overline{\varepsilon}_2 = \overline{\varepsilon}_2(0,\ 0,\ \ddot{\psi}).$$

3.2. Вычисление скорости точки В через мгновенный центр скоростей

Обозначим через Р мгновенный центр скоростей (М.Ц.С.). Тогда из условия РВ$\perp \overline{V}_B$ PD$\perp \overline{V}_D$, получаем уравнения для определения координат точки Р- x_P, y_P

$$x_P \cdot \dot{x}_B + y_P \cdot \dot{y}_B = x_B \cdot \dot{x}_B + y_B \cdot \dot{y}_B;$$
$$x_P \cdot tg\varphi - y_P = 0.$$

Вычисляем угловую скорость звена 3 и скорость точки D

$$\omega_3 = V_B / PB, \quad V_D = \omega_3 \cdot PD \, .$$

Сравниваем с результатами , полученными по формулам

$$\omega_3 = \dot{\theta}, \quad V_D = \dot{\varphi} \cdot OD \, .$$

Здесь

$$PB = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2};$$
$$PD = \sqrt{(x_P - x_D)^2 + (y_P - y_D)^2}.$$

Численное решение задачи с использованием стандартных методов Mathcad.

Исходные данные

$a := 1.30$ $b := 1.10$ $c := 0.55$ $l1 := 0.69 \cdot a$ $l2 := 0.31 \cdot a$ $\phi0 := 62 \cdot deg$ $\psi0 := -33 \cdot deg$

$xa0 := a \cdot \cos(\phi0) + b \cdot \cos(\psi0)$ $xa0 = 1.533$ $ya0 := a \cdot \sin(\phi0) + b \cdot \sin(\psi0)$

$ya0 = 0.549$

Проверяем начальное положение захвата

Уравнения движения захвата

$xa(t) := xa0 - 0.2 \cdot t$ $ya(t) := ya0 - 0.089 \cdot t$

$xat(t) := -0.2$ $yat(t) := -0.089$

$xatt(t) := 0$ $yatt(t) := 0$

{Решение уравнений (2.2)с помощью вычислительного блока Given}

Уравнения движения захвата

ORIGIN:= 1

Нумерация строк и столбцов начинается с единицы

Начальное приближение

$$z := \begin{pmatrix} \phi0 \\ \psi0 \\ 0 \\ c - l2 \end{pmatrix}$$

Given

$a \cdot \cos(z_1) + b \cdot \cos(z_2) = xa(t)$

$a \cdot \sin(z_1) + b \cdot \sin(z_2) = ya(t)$

$c \cdot \cos(z_3) - z_4 \cdot \cos(z_2) = l2 \cdot \cos(z_1)$

$c \cdot \sin(z_3) - z_4 \cdot \sin(z_2) = l2 \cdot \sin(z_1)$

$z(t) := \mathrm{Find}(z)$

$\phi(t) := z(t)_1$ $\psi(t) := z(t)_2$ $\theta(t) := z(t)_3$ $s(t) := z(t)_4$

Формируем матрицы системы линейных уравнений (2.3)

$$A(t) := \begin{pmatrix} -a \cdot \sin(\phi(t)) & -b \cdot \sin(\psi(t)) & 0 & 0 \\ a \cdot \cos(\phi(t)) & b \cdot \cos(\psi(t)) & 0 & 0 \\ -l2 \cdot \sin(\phi(t)) & -s(t) \cdot \sin(\psi(t)) & c \cdot \sin(\theta(t)) & \cos(\psi(t)) \\ l2 \cdot \cos(\phi(t)) & s(t) \cdot \cos(\psi(t)) & -c \cdot \cos(\theta(t)) & \sin(\psi(t)) \end{pmatrix}$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} xat(t) \\ yat(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$zt(t) := A(t)^{-1} \cdot B(t)$

$\phi t(t) := zt(t)_1$ $\psi t(t) := zt(t)_2$ $\theta t(t) := zt(t)_3$ $st(t) := zt(t)_4$

Формируем матрицы системы уравнений (2.4)

$At(t) := A(t)$

$b1(t) := xatt(t) + a\cdot\cos(\phi(t))\cdot\phi t(t)^2 + b\cdot\cos(\psi(t))\cdot\psi t(t)^2$

$b2(t) := yatt(t) + a\cdot\sin(\phi(t))\cdot\phi t(t)^2 + b\cdot\sin(\psi(t))\cdot\psi t(t)^2$

$bb3(t) := 2\cdot\psi t(t)\cdot st(t)\cdot\sin(\psi(t)) - c\cdot\cos(\theta(t))\cdot\theta t(t)^2 + s(t)\cdot\psi t(t)^2\cdot\cos(\psi(t))$

$b3(t) := bb3(t) + l2\cdot\phi t(t)^2\cdot\cos(\phi(t))$

$bb4(t) := -2\cdot st(t)\cdot\psi t(t)\cdot\cos(\psi(t)) - c\cdot\sin(\theta(t))\cdot\theta t(t)^2 + s(t)\cdot\psi t(t)^2\cdot\sin(\psi(t))$

$b4(t) := bb4(t) + l2\cdot\phi t(t)^2\cdot\sin(\phi(t))$

$$Bt(t) := \begin{pmatrix} b1(t) \\ b2(t) \\ b3(t) \\ b4(t) \end{pmatrix}$$

$ztt(t) := At(t)^{-1}\cdot Bt(t)$

$\phi tt(t) := ztt(t)_1 \quad \psi tt(t) := ztt(t)_2 \quad \theta tt(t) := ztt(t)_3 \quad stt(t) := ztt(t)_4$

$t := 0, 0.2 .. 1$

t =	$\phi(t) =$	$\psi(t) =$	$\theta(t) =$	$s(t) =$
0	1.082	-0.576	0.242	0.411
0.2	1.1	-0.607	0.205	0.433
0.4	1.117	-0.638	0.166	0.456
0.6	1.134	-0.669	0.124	0.478
0.8	1.149	-0.7	0.081	0.501
1	1.164	-0.731	0.037	0.524

t =	$\phi t(t) =$	$\psi t(t) =$	$\theta t(t) =$	$st(t) =$
0	0.092	-0.157	-0.181	0.11
0.2	0.088	-0.156	-0.191	0.112
0.4	0.084	-0.155	-0.201	0.113
0.6	0.08	-0.154	-0.211	0.114
0.8	0.076	-0.154	-0.22	0.115
1	0.073	-0.154	-0.228	0.115

t =	$\phi tt(t) =$	$\psi tt(t) =$	$\theta tt(t) =$	$stt(t) =$
0	-0.02	$7.893\cdot10^{-3}$	-0.055	0.012
0.2	-0.02	$5.911\cdot10^{-3}$	-0.052	$9.115\cdot10^{-3}$
0.4	-0.019	$4.025\cdot10^{-3}$	-0.049	$6.517\cdot10^{-3}$
0.6	-0.019	$2.197\cdot10^{-3}$	-0.045	$3.949\cdot10^{-3}$
0.8	-0.019	$3.895\cdot10^{-4}$	-0.043	$1.459\cdot10^{-3}$
1	-0.019	$-1.43\cdot10^{-3}$	-0.04	$-9.181\cdot10^{-4}$

Вычисление скорости и ускорения ползуна В в момент времени $t=\tau$

1.Координатный способ.

$\tau := 1$

$\phi := \phi(\tau) \quad \psi := \psi(\tau) \quad \theta := \theta(\tau) \quad s := s(\tau)$

$\phi = 1.164 \quad \psi = -0.731 \quad \theta = 0.037 \quad s = 0.524$

$\phi t := \phi t(\tau)$ $\psi t := \psi t(\tau)$ $\theta t := \theta t(\tau)$ $st := st(\tau)$

$\phi t = 0.073$ $\psi t = -0.154$ $\theta t = -0.228$ $st = 0.115$

$\phi tt := \phi tt(\tau)$ $\psi tt := \psi tt(\tau)$ $\theta tt := \theta tt(\tau)$ $stt := stt(\tau)$

$\phi tt = -0.019$ $\psi tt = -1.43\times 10^{-3}$ $\theta tt = -0.04$ $stt = -9.181\times 10^{-4}$

$xb := l1\cdot\cos(\phi) + c\cdot\cos(\theta)$ $yb := l1\cdot\sin(\phi) + c\cdot\sin(\theta)$

$xbt := -l1\cdot\sin(\phi)\cdot\phi t - c\cdot\sin(\theta)\cdot\theta t$ $ybt := l1\cdot\cos(\phi)\,\phi t + c\cdot\cos(\theta)\cdot\theta t$

$xbtt := -l1\cdot\sin(\phi)\cdot\phi tt - c\cdot\sin(\theta)\cdot\theta tt - l1\cdot\cos(\phi)\cdot\phi t^2 - c\cdot\cos(\theta)\cdot\theta t^2$

$ybtt := l1\cdot\cos(\phi)\,\phi tt + c\cdot\cos(\theta)\cdot\theta tt - l1\cdot\sin(\phi)\cdot\phi t^2 - c\cdot\sin(\theta)\cdot\theta t^2$

$Vb := \sqrt{xbt^2 + ybt^2}$ $Vb = 0.114$

$\alpha v := \dfrac{angle(xbt, ybt)}{deg}$ $\alpha v = 240.967$

$ab := \sqrt{xbtt^2 + ybtt^2}$ $ab = 0.037$

$\alpha a := \dfrac{angle(xbtt, ybtt)}{deg}$ $\alpha a = 248.393$

αv, αa - углы в градусах между положительным направлением оси OX и направлением скорости,
ускорением

Проверка через мгновенный центр скоростей звена DB

$zp := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Начальное приближение

Given

$zp_1\cdot xbt + zp_2\cdot ybt = xb\cdot xbt + yb\cdot ybt$

$zp_1\cdot\tan(\phi) - zp_2 = 0$

$zp := Find(zp)$

$xp := zp_1$ $yp := zp_2$

$pb := \sqrt{(xp - xb)^2 + (yp - yb)^2}$ $\omega 3 := \dfrac{Vb}{pb}$ $\omega 3 = 0.228$

$dp := \sqrt{(xp - l1\cdot\cos(\phi))^2 + (yp - l1\cdot\sin(\phi))^2}$

$Vd := \omega 3\cdot dp$ $Vd = 0.065$

$Vdo := l1\cdot\phi t$ $Vdo = 0.065$

Так как $\omega 3 = \theta t$, а Vd=Vdo, то расчет проведен верно

2. Способ сложения скоростей и ускорений

Формируем вектора

$\omega 1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi t \end{pmatrix}$ $\omega 2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi t \end{pmatrix}$ $\omega 3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta t \end{pmatrix}$ $Vr := \begin{pmatrix} st\cdot\cos(\psi) \\ st\cdot\sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}$

$ar := \begin{pmatrix} stt\cdot\cos(\psi) \\ stt\cdot\sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\varepsilon 1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi tt \end{pmatrix}$ $\varepsilon 2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi tt \end{pmatrix}$

$$OC := \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\phi) \\ a \cdot \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad CB := \begin{pmatrix} s \cdot \cos(\psi) \\ s \cdot \sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Vb2 := \omega 1 \times OC + \omega 2 \times CB + Vr$$

$$Vb2 = \begin{pmatrix} -0.055 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \sqrt{\left(Vb2_1\right)^2 + \left(Vb2_2\right)^2} = 0.114$$

Совпадает с предыдущим

$$ab2 := ar + \varepsilon 1 \times OC + \omega 1 \times (\omega 1 \times OC) + \varepsilon 2 \times CB + \omega 2 \times (\omega 2 \times CB) + 2 \cdot \omega 2 \times Vr$$

$$ab2 = \begin{pmatrix} -0.014 \\ -0.034 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\left(ab2_1\right)^2 + \left(ab2_2\right)^2} = 0.037$$

Совпадает с ранее вычисленным
ускорением