

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПК №2

**Тема:** определение закона движения и реакций внешних и внутренних связей плоского механизма.

**Цель:** приобретение опыта составления уравнений кинетостатики ; изучение методики решения прямой задачи динамики механической системы.

### 1. Постановка задачи

Рассматриваем движение механизма манипулятора с двумя степенями свободы в горизонтальной плоскости  $xOy$  (рис.1). На звенья механизма действуют движущие сила  $P(t)$  и момент  $M(t)$  со стороны двигателей, установленных на эти же звенья. В кинематических парах  $O$  и  $A$  действуют соответственно восстанавливающие сила  $R_B = c_2 \cdot s$  и момент  $M_B = c_1 \cdot \varphi$ , пропорциональные отклонениям от положения равновесия ( $s=0, \varphi=0$ ), а так же сила вязкого сопротивления  $R_c = b_2 \cdot \dot{s}$  и момент сил вязкого сопротивления  $M_c = b_1 \cdot \dot{\varphi}$ , пропорциональные обобщённым скоростям  $\dot{s}, \dot{\varphi}$ .

При заданных значениях  $AC=l_c, AC_1=l_1, m_1, m_2, I_{c1}$ , пренебрегая сухим трением, определить траекторию захвата  $C$ , изменение во времени обобщённых координат, скоростей, реакций опоры  $O$  и давления в шарнире  $A$ . Здесь  $l_1$  - расстояние от шарнира  $A$  до центра масс  $C_1$ ;  $m_1, m_2$  - массы звеньев;  $I_{c1}$  - центральный момент инерции звена 1.

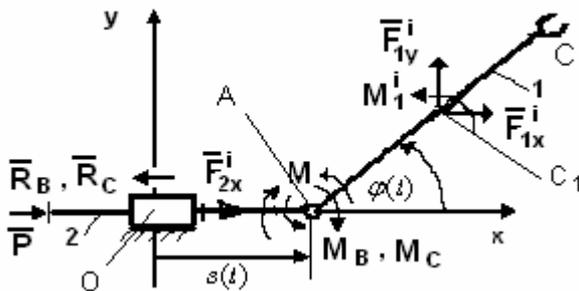


Рис.1. Схема манипулятора

### 2. Уравнения кинетостатики манипулятора

Согласно принципу Даламбера в каждый момент времени внешние силы, приложенные к точкам механической системы, уравновешиваются их силами инерции. Условия равновесия этих сил, записанные в виде проекций на оси координат, называются уравнениями кинетостатики.

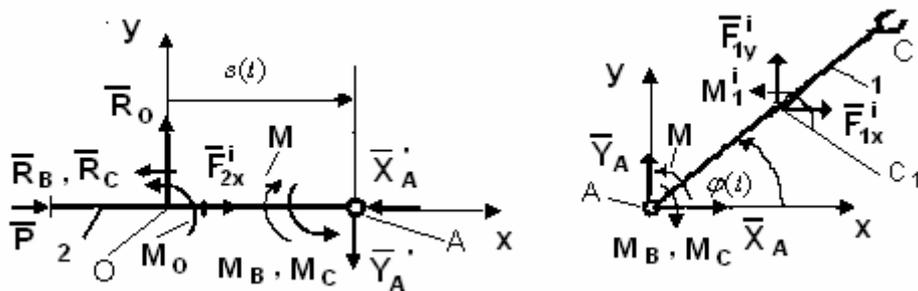


Рис.2. Расчётные схемы звеньев манипулятора

Силы инерции приводим к центрам масс звеньев: получаем главные вектора сил инерции  $\bar{F}_k^i = -m_k \cdot \bar{a}_{ck}$  и главные моменты сил инерции относительно центральных осей  $z_k - M_k^i = -I_{ck} \cdot \varepsilon_k$  ( $\varepsilon_k = \ddot{\varphi}_k$  -угловое ускорение k-го звена). На расчетных схемах силы инерции направляем в положительную сторону осей координат, а моменты сил инерции в сторону возрастания углов поворота звеньев (рис. 1,2).

Для рассматриваемого механизма проекции главного вектора и главного момента сил инерции на оси координат записываем в виде

$$\begin{aligned} F_{1x}^i &= -m_1 \cdot \ddot{x}_{c1}, & F_{1y}^i &= -m_1 \cdot \ddot{y}_{c1}, & M_1^i &= -I_{c1} \cdot \ddot{\varphi}; \\ F_{2x}^i &= -m_2 \cdot \ddot{x}_{c2}, & F_{2y}^i &= 0, & M_2^i &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь координаты центров масс звеньев и их производные по времени выражаются через обобщенные координаты и скорости

$$\begin{aligned} x_{c1} &= s + l_1 \cdot \cos(\varphi), & y_{c1} &= l_1 \cdot \sin(\varphi), & x_{c2} &= s - const; \\ \dot{x}_{c1} &= \dot{s} - l_1 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi), & \dot{y}_{c1} &= l_1 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi), & \dot{x}_{c2} &= \dot{s}; \\ \ddot{x}_{c1} &= \ddot{s} - l_1 \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) - l_1 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\varphi), & \ddot{y}_{c1} &= l_1 \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - l_1 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi), & \ddot{x}_{c2} &= \ddot{s}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Используя рис.2, получаем уравнения равновесия сил

- первого звена:

$$\Sigma F_{kX} = X_A + F_{1X}^i = 0; \quad (2.3)$$

$$\Sigma F_{kY} = Y_A + F_{1Y}^i = 0; \quad (2.4)$$

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = M - M_B - M_C + M_1^i + F_{1Y}^i \cdot l_1 \cdot \cos(\varphi) - F_{1X}^i \cdot l_1 \cdot \sin(\varphi) = 0; \quad (2.5)$$

- второго звена:

$$\Sigma F_{kX} = P - R_B - R_C - X'_A + F_{2X}^i = 0; \quad (2.6)$$

$$\Sigma F_{kY} = R_O - Y'_A = 0; \quad (2.7)$$

$$\Sigma m_O(\bar{F}_k) = M_O - M + M_B + M_C - Y'_A \cdot s = 0; \quad (2.8)$$

- взаимодействия в шарнире А:

$$\Sigma F_{kX} = X_A - X'_A = 0, \quad \Sigma F_{kY} = Y_A - Y'_A = 0. \quad (2.9)$$

### 3. Уравнения движения

Из системы (2.3-2.9) получим уравнения, содержащие только обобщенные координаты и их производные, для этого исключим из них реакции связей. Складывая левые части уравнений (2.3), (2.6) с учётом (2.9) и присоединяя к полученному (2.5) имеем

$$\begin{aligned} P - R_B - R_C + F_{1X}^i + F_{2X}^i &= 0; \\ M - M_B - M_C + M_1^i + F_{1Y}^i \cdot l_1 \cdot \cos(\varphi) - F_{1X}^i \cdot l_1 \cdot \sin(\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляя в (3.1) выражения для сил инерции (2.1-2.2) и расписывая значения восстанавливающих сил и сил сопротивления, получаем

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \cdot \ddot{s} - m_1 \cdot l_1 \cdot \sin(\varphi) \cdot \ddot{\varphi} &= P - b_2 \cdot \dot{s} - c_2 \cdot s + m_1 \cdot l_1 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\varphi); \\ -m_1 \cdot l_1 \cdot \sin(\varphi) \cdot \ddot{s} + (m_1 \cdot l_1^2 + I_{c1}) \cdot \ddot{\varphi} &= M - b_1 \cdot \dot{\varphi} - c_1 \cdot \varphi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Представим систему (3.2) в нормальной форме, т. е. преобразуем её к четырем дифференциальным уравнениям первого порядка, разрешенных относительно производных. Сначала из (3.2) найдем обобщенные ускорения

$$\ddot{s} = stt(t, s, \dot{s}, \varphi, \dot{\varphi}) \equiv \frac{(m_1 l_1^2 + I_{c1}) \cdot Rp(t, s, \dot{s}, \varphi, \dot{\varphi}) + m_1 l_1 \sin(\varphi) \cdot Rm(t, \varphi, \dot{\varphi})}{\Delta(\varphi)} ;$$

$$\ddot{\varphi} = \varphi tt(t, s, \dot{s}, \varphi, \dot{\varphi}) \equiv \frac{(m_1 + m_2) \cdot Rm(t, \varphi, \dot{\varphi}) + m_1 l_1 \sin(\varphi) \cdot Rp(t, s, \dot{s}, \varphi, \dot{\varphi})}{\Delta(\varphi)} , \quad (3.3)$$

где

$$Rp(t, s, \dot{s}, \varphi, \dot{\varphi}) = P(t) - c_2 \cdot s - b_2 \cdot \dot{s} + m_1 l_1 \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\varphi) ;$$

$$Rm(t, \varphi, \dot{\varphi}) = M(t) - c_1 \cdot \varphi - b_1 \cdot \dot{\varphi} ;$$

$$\Delta(\varphi) = (m_1 + m_2) \cdot (m_1 l_1^2 + I_{c1}) - m_1^2 l_1^2 \cdot \sin^2(\varphi) .$$

Вводя обозначения

$$s(t) = U_0(t) , \quad \dot{s}(t) = U_1(t) , \quad \varphi(t) = U_2(t) , \quad \dot{\varphi}(t) = U_3(t) ,$$

получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\dot{U}_0 = U_1(t) ;$$

$$\dot{U}_1 = stt(t, U_0, U_1, U_2, U_3) ;$$

$$\dot{U}_2 = U_3(t) ;$$

$$\dot{U}_3 = \varphi tt(t, U_0, U_1, U_2, U_3) . \quad (3.4)$$

Начальные условия задачи принимают вид

$$U_0(0) = s_0 , \quad U_1(0) = \dot{s}_0 , \quad U_2(0) = \varphi_0 , \quad U_3(0) = \dot{\varphi}_0 .$$

#### 4. Определение реакций связей

Из (2.3), (2.4) следует

$$X_A = -F_{1X}^i , \quad Y_A = -F_{1Y}^i .$$

Тогда полная реакция второго звена на первое в шарнире А

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} . \quad (4.1)$$

Из (2.7), (2.9) имеем реакцию опоры О на второе звено

$$R_O = Y_A = -F_{1X}^i . \quad (4.2)$$

Уравнения (2.8), (2.5), (2.4) и (2.2) позволяют записать момент реакций опоры О в виде

$$M_O = -M_1^i - F_{1Y}^i \cdot x_{c1} + F_{1X}^i \cdot y_{c1} . \quad (4.3)$$

Дальнейшее решение проводим с использованием стандартных методов Mathcad.

## Численное определение закона движения и реакций связей плоского манипулятора

### Исходные данные

$m_1 := 3$   $m_2 := 2$   $I_N := 0.8$   $l_c := 1$   $l_1 := 0.5$   $c_1 := 20$   $c_2 := 200$   $b_1 := 2$   $b_2 := 15$   
 $\tau := 1$  время действия усилий

$$P(t) := \begin{cases} 200 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{\tau}\right) & \text{if } t \geq 0 \wedge t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Сила и момент, приложенные к

звеньям

$$M(t) := \begin{cases} \left(20 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{\tau}\right)\right) & \text{if } t \geq 0 \wedge t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

со стороны двигателей

$s_0 := 0$   $st_0 := 0$   $\phi_0 := -\pi \div 4$   $\phi t_0 := 0$  Начальные условия задачи

$m := m_1 + m_2$   $i := m_1 \cdot l_1^2 + I_N$   $a := m_1 \cdot l_1$

$R_p(t, s, st, \phi, \phi t) := P(t) - c_2 \cdot s - b_2 \cdot st + a \cdot \cos(\phi) \cdot \phi t^2$

$R_m(t, \phi, \phi t) := M(t) - c_1 \cdot \phi - b_1 \cdot \phi t$

$$stt(t, s, st, \phi, \phi t) := \frac{(R_p(t, s, st, \phi, \phi t) \cdot i + R_m(t, \phi, \phi t) \cdot a \cdot \sin(\phi))}{m \cdot i - a^2 \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\phi)}$$

$$\phi tt(t, s, st, \phi, \phi t) := \frac{R_p(t, s, st, \phi, \phi t) \cdot a \cdot \sin(\phi) + R_m(t, \phi, \phi t) \cdot m}{m \cdot i - (a \cdot \sin(\phi))^2}$$

Формируем правые части дифф. уравнений движения механизма в нормальной форме в виде вектора  $D(t, U)$  и начальные условия в виде вектора  $U_0$

$$D(t, U) := \begin{pmatrix} U_1 \\ stt(t, U_0, U_1, U_2, U_3) \\ U_3 \\ \phi tt(t, U_0, U_1, U_2, U_3) \end{pmatrix} \quad U_0 := \begin{pmatrix} s_0 \\ st_0 \\ \phi_0 \\ \phi t_0 \end{pmatrix}$$

В момент времени  $t$  находим численное решение с помощью функции `bulstoer`, которая использует метод Булирша-Штера для поиска гладких решений

$$z1(t) := \begin{cases} z \leftarrow \text{bulstoer}(U0,0,t,TOL,D,2,0.01) & \text{if } t \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s0 & st0 & \phi0 & \phi t0 \end{pmatrix} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} z_{1,0} & z_{1,1} & z_{1,2} & z_{1,3} & z_{1,4} \end{pmatrix}$$

$$s(t) := z1(t)_{0,1} \quad st(t) := z1(t)_{0,2} \quad \phi(t) := z1(t)_{0,3} \quad \phi t(t) := z1(t)_{0,4}$$

Уравнение траектории захвата C

$$x(t) := s(t) + lc \cdot \cos(\phi(t)) \quad y(t) := lc \cdot \sin(\phi(t))$$

Вычисление сил инерции

$$xc1(t) := s(t) + l1 \cdot \cos(\phi(t)) \quad yc1(t) := l1 \cdot \sin(\phi(t))$$

$$x1tt(t) := stt(t, s(t), st(t), \phi(t), \phi t(t)) - l1 \cdot \cos(\phi(t)) \cdot \phi t(t)^2$$

$$xc1tt(t) := x1tt(t) - l1 \cdot \sin(\phi(t)) \cdot \phi t(t, s(t), st(t), \phi(t), \phi t(t))$$

$$yc1tt(t) := l1 \cdot \cos(\phi(t)) \cdot \phi t(t, s(t), st(t), \phi(t), \phi t(t)) - l1 \cdot \sin(\phi(t)) \cdot \phi t(t)^2$$

$$Fx(t) := -m1 \cdot xc1tt(t) \quad Fy(t) := -m1 \cdot yc1tt(t) \quad M1i(t) := -IN \cdot \phi t(t, s(t), st(t), \phi(t), \phi t(t))$$

Реакции внешней опоры O

$$Ro(t) := -Fy(t) \quad Mo(t) := Fx(t) \cdot yc1(t) - Fy(t) \cdot xc1(t) - M1i(t)$$

Реакция 2-го звена на 1-е в шарнире A

$$xa(t) := -Fx(t) \quad ya(t) := -Fy(t) \quad Ra(t) := \sqrt{xa(t)^2 + ya(t)^2}$$

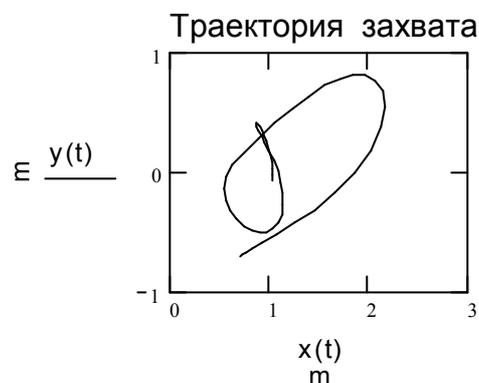
$$\alpha(t) := \frac{\text{angle}(xa(t), ya(t))}{\text{deg}}$$

-- угол (в градусах в интервале  $0 < \alpha < 360$ ) между положительным направлением оси Oх и радиус-вектором с проекциями xa, ya

$$\alpha(1) = 252.709 \quad Ra(1) = 9.985 \quad \alpha(0) = 68.199 \quad Ra(0) = 13.543$$

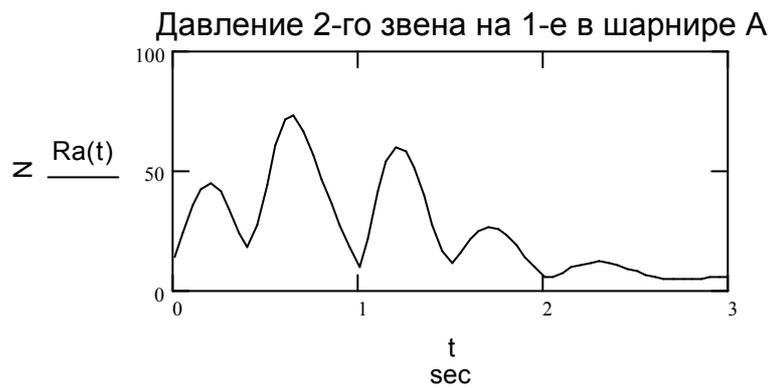
$$t := 0, 0.05 \dots 3\tau$$

-- интервал времени исследования движения механизма.

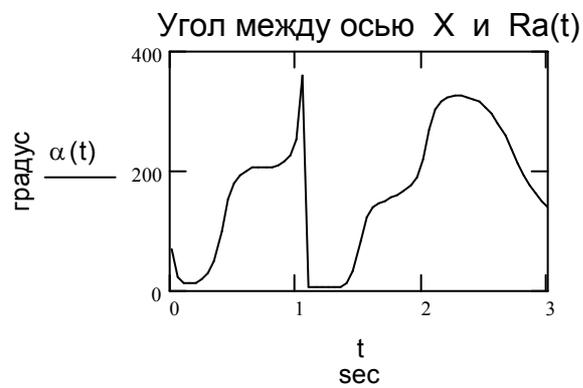


$$x(0) = 0.707 \quad y(0) = -0.707 \quad x(\tau) = 1.224 \quad y(\tau) = 0.525 \quad x(1.5 \cdot \tau) = 0.735 \quad y(1.5 \cdot \tau) = -0.451$$

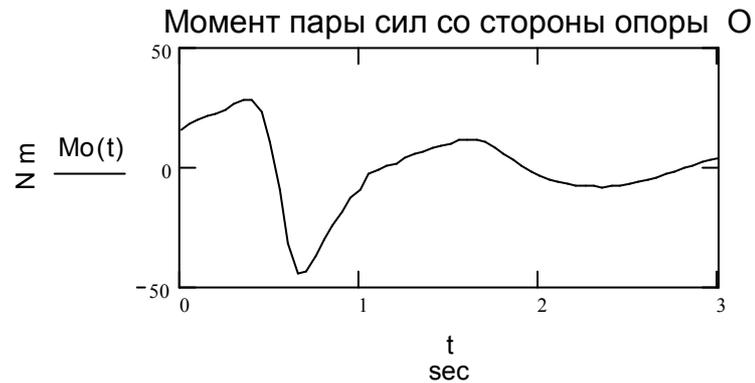
$$x(2 \cdot \tau) = 1.075 \quad y(2 \cdot \tau) = 3.829 \times 10^{-3} \quad x(3\tau) = 1.027 \quad y(3\tau) = -0.082$$



Максимальное значение  $Ra(0.65) = 72.782$



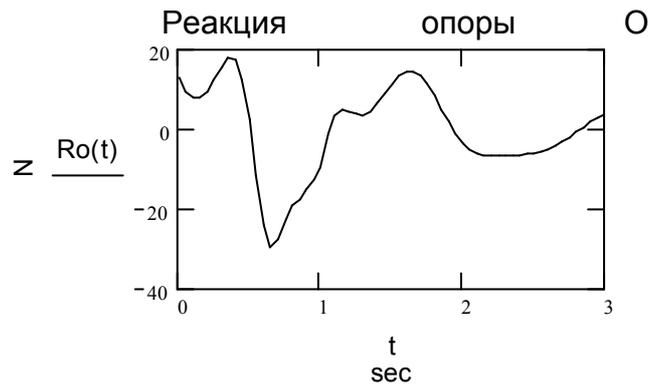
Угол, соответствующий максимальному  $Ra(t)$ ,  $\alpha(0.65) = 204.082$



Максимальное и минимальное значения  $Mo(t)$

$$Mo(0.4) = 27.872$$

$$Mo(0.65) = -44.656$$



Максимальное и минимальное значения  $Ro(t)$

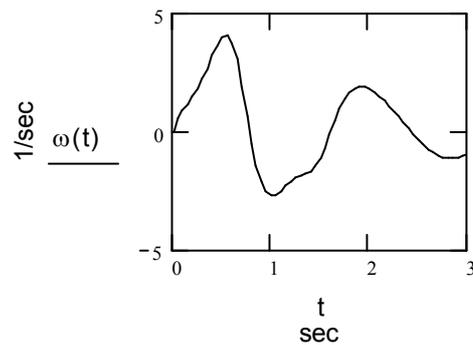
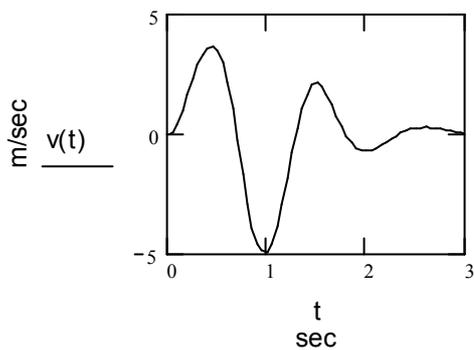
$$Ro(0.35) = 17.769$$

$$Ro(0.65) = -29.698$$

$$v(t) := \dot{s}(t) \quad \omega(t) := \dot{\phi}(t)$$

Зависимость от времени обобщённых скоростей  $V(t)=ds/dt$ ,

$$\omega(t)=d\phi/dt$$



Из расчетов видно, что после прекращения действия движущих сил ( $t=\tau=1$ ) Все реакции достаточно быстро стремятся к нулю, а звенья механизма к положению равновесия.