ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПК №3

Тема: исследование управления манипулятором .

Цель работы: приобретение опыта динамического описания движения плоских механизмов (метода Лагранжа); ознакомление с методикой решения обратных задач динамики механических систем.

1. Постановка задачи

Рассматривается механическая система типа манипулятора с двумя степенями свободы, движущаяся в горизонтальной плоскости xOy (рис.1). Геометрические и динамические параметры считаются заданными, силы трения в кинематических парах и деформации элементов конструкции отсутствуют.

Требуется определить управляющие усилия, обеспечивающие за время τ сближение захвата C и движущейся детали D, и мощности двигателей управления. Деталь движется прямолинейно с постоянной скоростью V_D в указанном направлении. Начальное положение манипулятора задано обобщёнными координатами s_0, φ_0 .а детали—декартовыми координатами x_{D0}, y_{D0}. К моменту времени t=τ отношение рассогласований координат захвата и детали к начальным рассогласованиям должно составлять малую величину δ .

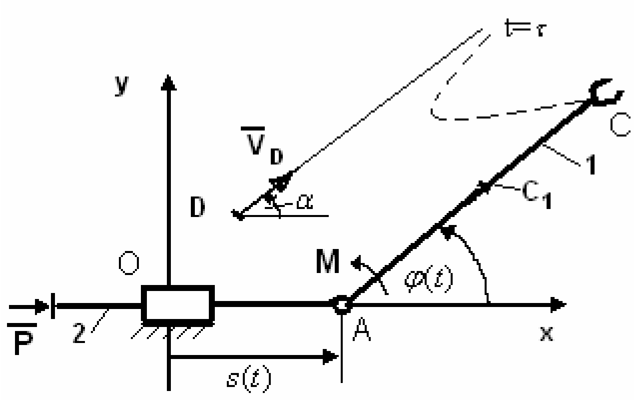


Рис.1. Схема манипулятора

Для рассматриваемого манипулятора приняты следующие значения параметров: AC= l=1м –длина звена 1; $AC_1 = l_1$=0,5м—расстояние до центра масс этого звена; m_1=3кг, m_2=2кг-массы звеньев; I_1=0,8 $кг \cdot м$ -центральный момент инерции 1-го звена относительно оси, перпендикулярной плоскости движения; V_D=2м/с-скорость детали; α=0 рад., τ=1 с-время сближения; x_{D0}=0, y_{D0}=0,5 м, s_0=0, φ_0=-$\pi/4$ рад.

Вычислить управляющие силу P(t) и момент M(t); мощности двигателей N_1(t) и N_2(t); изменения во времени обобщённых координат $s(t), \varphi(t)$ и декартовых координат захвата x_C, y_C .

2. Дифференциальные уравнения движения системы

Дифференциальные уравнения движения составляем в форме уравнений Лагранжа 11-го рода, которые для данной механической системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s \ , \quad \frac{d}{d}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \ , \tag{2.1}$$

где Т-кинетическая энергия, Q_s, Q_φ -обобщённые силы , соответствующие обобщённым координатам s, φ. Точка сверху означает производную по времени.

Вычисляем кинетическую энергию системы Т как функцию обобщённых скоростей $\dot{s}, \dot{\varphi}$ и обобщённых координат s, φ. Эта энергия равна сумме кинетических энергий звеньев.

Кинетическая энергия звена 1, совершающего плоское движение, вычисляется по теореме Кёнига

$$T_1 = \frac{m_1 V_{C_1}^2}{2} + \frac{I_1 \omega_1^2}{2}, \qquad (2.2)$$

где V_{C_1} - скорость центра масс C_1, $\omega_1 = \dot{\varphi}$ -угловая скорость звена 1.

Кинетическая энергия звена 2, движущегося поступательно, имеет вид

$$T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2}, \qquad (2.3)$$

где $V_2 = \dot{s}$ -скорость звена 2.

Скорость точки C_1 вычисляем координатным способом. Согласно рисунку 1 координаты этой точки равны

$$x_{C_1} = s + l_1 \cos\varphi \ , \quad y_{C_1} = l_1 \sin\varphi \ .$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получаем

$$V_{C_1}^2 = (\dot{s} - l_1 \dot{\varphi} \sin\varphi)^2 + (l_1 \dot{\varphi} \cos\varphi)^2 = \dot{s}^2 + l_1^2 \dot{\varphi}^2 - 2 l_1 \dot{s} \dot{\varphi} \sin\varphi \ . \qquad (2.4)$$

Учитывая (2.2-2.4), кинетическую энергию системы записываем в виде

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + I_1)\dot{\varphi}^2 - m_1 l_1 \dot{s} \dot{\varphi} \sin\varphi \ . \qquad (2.5)$$

Для определения обобщённой силы Q_s мысленно накладываем на систему связь $\varphi = const$ и, сообщив системе возможную скорость $\dot{s}$, вычисляем сумму возможных мощностей активных сил, действующих на нее

$$N_s = P \cdot \dot{s} = Q_s \cdot \dot{s}$$

отсюда имеем

$$Q_s = P \ . \qquad (2.6)$$

Аналогично, мысленно накладываем на систему связь $s = const$ и сообщаем ей возможную скорость $\dot{\varphi}$, получаем выражение возможной мощности

$$N_\varphi = M \cdot \dot{\varphi} = Q_\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

отсюда

$$Q_\varphi = M \ . \qquad (2.7)$$

Используя (2.5), вычисляем значения слагаемых в уравнениях Лагранжа

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (m_1 + m_2)\dot{s} - m_1 l_1 \dot{\varphi} \sin\varphi \ , \qquad \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \ ;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (m_1 + m_2)\ddot{s} - m_1 l_1 \ddot{\varphi} \sin\varphi - m_1 l_1 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi \ ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = (m_1 l_1^2 + I_1)\dot\varphi - m_1 l_1 \dot s \sin\varphi\,, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_1 l_1 \dot s \dot\varphi \cos\varphi\,; \tag{2.8}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = (m_1 l_1^2 + I_1)\ddot\varphi - m_1 l_1 \ddot s \sin\varphi - m_1 l_1 \dot s \dot\varphi \cos\varphi \quad .$$

Подставляя (2.6—2.8) в (2.1) , получаем уравнения для определения управляющих усилий P и M

$$(m_1 + m_2)\ddot s - m_1 l_1 \ddot\varphi \sin\varphi - m_1 l_1 \dot\varphi^2 \cos\varphi = P\,;$$
$$(m_1 l_1^2 + I_1)\ddot\varphi - m_1 l_1 \ddot s \sin\varphi = M\,. \tag{2.9}$$

3. Программа движения

Управление движением захвата предполагает, что линейные комбинации рассогласований координат и их производных в каждый момент времени равны нулю, т. е. выполнения равенств

$$\Delta x + T^* \Delta\dot x = 0\ , \qquad \Delta y + T^* \Delta\dot y = 0\ , \tag{3.1}$$

где $\Delta x = x_D - x_C$, $\Delta y = y_D - y_C$ - рассогласования координат детали D и захвата C; T^*=const – коэффициент управления.

Интегрируя (3.1), получаем

$$\Delta x = \Delta x(0) \cdot e^{-\frac{t}{T^*}}\,, \quad \Delta y = \Delta y(0) \cdot e^{-\frac{t}{T^*}}\ . \tag{3.2}$$

Здесь $\Delta x(0) = x_{D0} - x_{C0}$, $\Delta y(0) = y_{D0} - y_{C0}$ - начальные рассогласования координат; x_{C0}, y_{C0} - координаты захвата в начальный момент времени t=0.

Параметр T^* определяем из условия относительной точности сближения к моменту времени $t = \tau$

$$\frac{\Delta x(\tau)}{\Delta x(0)} = \frac{\Delta y(\tau)}{\Delta y(0)} = \exp(-\frac{\tau}{T^*}) = \delta\ .$$

Отсюда

$$T^* = -\tau / \ln\delta\ . \tag{3.3}$$

Уравнения движения захвата C , в соответствии с (3.2), записываем в виде

$$x_C = x_D - (x_{D0} - x_{C0}) \cdot \exp(-t / T^*)\,;$$
$$y_C = y_D - (y_{D0} - y_{C0}) \cdot \exp(-t / T^*)\,. \tag{3.4}$$

Для рассматриваемого случая

$$x_D = V_D \cdot \cos\alpha \cdot t + x_{D0}\,, \quad y_D = V_D \cdot \sin\alpha \cdot t + y_{D0} \tag{3.5}$$

есть закон движения детали .

Из рисунка 1 устанавливаем связь между декартовыми координатами захвата C и обобщёнными координатами манипулятора

$$x_C = s + l \cdot \cos\varphi\,, \qquad y_C = l \cdot \sin\varphi\,. \tag{3.6}$$

Полагая $s = s_0, \varphi = \varphi_0$ по формулам (3.6) вычисляем начальные координаты захвата x_{C0}, y_{C0}. Приравнивая правые части выражений (3.4) и (3.6), получаем систему трансцендентных уравнений относительно s и φ

$$s + l\cdot\cos\varphi = x_D - (x_{D0} - x_{C0})\cdot\exp(-t/T^*);$$
$$l\cdot\sin\varphi = y_D - (y_{D0} - y_{C0})\cdot\exp(-t/T^*). \qquad (3.7)$$

Эти уравнения, являющиеся программой движения в конечной форме, накладывают ограничения на изменения обобщённых координат при сближении захвата и детали. Дифференцируя (3.7) по времени имеем

$$\dot{s} - l\dot{\varphi}\sin\varphi = \dot{x}_C, \qquad l\dot{\varphi}\cos\varphi = \dot{y}_C, \qquad (3.8)$$

где

$$\dot{x}_C = V_D\cos\alpha + (x_{D0} - x_{C0})\cdot\exp(-t/T^*)/T^*;$$
$$\dot{y}_C = V_D\sin\alpha + (y_{D0} - y_{C0})\cdot\exp(-t/T^*)/T^*. \qquad (3.9)$$

Решая систему уравнений (3.8) относительно $\dot{\varphi}, \dot{s}$, получаем программу движения в дифференциальной форме, которая устанавливает связь между обобщёнными скоростями и скоростью захвата

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}_C}{l\cos\varphi}, \qquad \dot{s} = \dot{x}_C + \dot{y}_C\cdot tg\varphi. \qquad (3.10)$$

Из (3.8) следует

$$\ddot{s} - l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi = \ddot{x}_C, \quad l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = \ddot{y}_C.$$

Отсюда получаем обобщённые ускорения, необходимые для вычисления управляющих усилий

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{y}_C + l\dot{\varphi}^2\sin\varphi}{l\cos\varphi}, \qquad \ddot{s} = \ddot{x}_C + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi + tg\varphi\cdot(\ddot{y}_C + l\dot{\varphi}^2\sin\varphi). \qquad (3.11)$$

Здесь $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C$ определяются дифференцированием по времени равенств (3.9)

$$\ddot{x}_C = -(x_{D0} - x_{C0})\cdot\exp(-t/T^*)/T^{*2}, \qquad \ddot{y}_C = -(y_{D0} - y_{C0})\cdot\exp(-t/T^*)/T^{*2}. \qquad (3.12)$$

4. Алгоритм решения задачи о сближении

В начале счёта присваиваются числовые значения параметрам задачи: $m_1, m_2, l_1, l, V_D, \alpha, x_{D0}, y_{D0}, s_0, \varphi_0, \tau, \delta$. Затем по формуле (3.3) вычисляется коэффициент управления T^*, по (3.6) — начальные координаты захвата x_{C0}, y_{C0}. Используя (3.9) , численно получаются решение системы дифференциальных уравнений (3.10) в момент времени t. В этот же момент времени вычисляются: $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C$ по(3.12); $\ddot{\varphi}, \ddot{s}$ по (3.11) ; по(2.9) управляющие усилия P, M и мощности двигателей по формулам

$$N_1 = M\cdot\dot{\varphi}, \qquad N_2 = P\cdot\dot{s}. \qquad (4.1)$$

Траектории захвата и детали получаются соответственно по (3.6) и (3.5). Полученные координаты захвата сравниваются с координатами вычисленными по (3.4).

Процесс вычислений продолжается до момента $t = \tau$. Результаты счёта оформляются в виде графиков.

Все вычисления проводим с использованием стандартных методов Mathcad

5.Численное решение задачи

Текстовый курсор ввода появляется после нажатия клавиши <">.
(Шрифт должен быть Arial CYR)

Исходные данные задачи:

Оператор присваивания ":=" вводится клавишей <:>.

$m1 := 3 \quad m2 := 2 \quad lC := 1 \quad l1 := 0.5 \quad lN := 0.8 \quad VD := 2 \quad xD0 := 0 \quad yD0 := 0$

$\tau := 1$ - время сближения. $s0 := 0$

$\alpha := \frac{\pi}{6} \quad \phi0 := -\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \delta := 0.01$ точность сближения. $\phi0 = -0.785$

Вычисляем коэффициент управления и начальные координаты захвата

$xC0 := s0 + lC \cdot \cos(\phi0) \quad yC0 := lC \cdot \sin(\phi0)$

$T1 := -\left(\frac{\tau}{\ln(\delta)}\right) \quad T1 = 0.217 \quad xC0 = 0.707 \quad yC0 = -0.707$

Вычисляем траектории детали и захвата

$xD(t) := VD \cdot \cos(\alpha) \cdot t + xD0 \qquad yD(t) := VD \cdot \sin(\alpha) \cdot t + yD0$

$\Delta x := xD0 - xC0 \quad \Delta y := yD0 - yC0 \quad \Delta x = -0.707 \quad \Delta y = 0.707$

$xC(t) := xD(t) - \Delta x \cdot e^{\frac{-t}{T1}} \qquad yC(t) := yD(t) - \Delta y \cdot e^{\frac{-t}{T1}}$

Решение трансцендентных уравнений (3.6) с использованием вычислительного блока Given

[Нумерация индексов элементов матрицы начинается со значения,задаваемого встроенной переменной ORIGIN, по умолчанию равной нулю]

$ORIGIN := 1$ {Нумерация строк и столбцов в этом случае начинается с единицы}

$\alpha s := \begin{pmatrix} s0 \\ \phi0 \end{pmatrix}$ {Начальное приближение}

Given

(Здесь символ равенства записывается с помощью логического оператора равенства, вызываемого кнопкой **=** панели инструментов "Булевый" или комбинацией клавиш <Ctrl>+<=>.)

$\alpha s_1 + lC \cdot \cos(\alpha s_2) = xC(t)$

$lC \cdot \sin(\alpha s_2) = yC(t)$

$\alpha s(t) := \mathrm{Find}(\alpha s)$

$\alpha s(0.75) = \begin{pmatrix} 0.635 \\ 0.815 \end{pmatrix} \qquad \alpha s(\tau) = \begin{pmatrix} 1.62 \\ 1.452 \end{pmatrix}$

$s(t) := \alpha s(t)_1 \qquad \phi(t) := \alpha s(t)_2$

$$xCt(t) := VD \cdot \cos(\alpha) + \left(\frac{\Delta x}{T1}\right) \cdot e^{\frac{-t}{T1}} \qquad yCt(t) := VD \cdot \sin(\alpha) + \left(\frac{\Delta y}{T1}\right) \cdot e^{\frac{-t}{T1}}$$

$$st(t) := xCt(t) + yCt(t) \cdot \tan(\phi(t))$$

$$\phi t(t) := \frac{yCt(t)}{lC \cdot \cos(\phi(t))}$$

$$xCtt(t) := -\left(\frac{\Delta x}{T1^2}\right) \cdot e^{\frac{-t}{T1}} \qquad yCtt(t) := -\left(\frac{\Delta y}{T1^2}\right) \cdot e^{\frac{-t}{T1}}$$

$$stt(t) := xCtt(t) + lC \cdot \left(\frac{\phi t(t)^2}{\cos(\phi(t))}\right) + yCtt(t) \cdot \tan(\phi(t))$$

$$\phi tt(t) := \frac{\left(yCtt(t) + lC \cdot \phi t(t)^2 \cdot \sin(\phi(t))\right)}{lC \cdot \cos(\phi(t))}$$

$$P(t) := (m1 + m2) \cdot stt(t) - m1 \cdot l1 \cdot \phi tt(t) \cdot \sin(\phi(t)) - m1 \cdot l1 \cdot \phi t(t)^2 \cdot \cos(\phi(t))$$

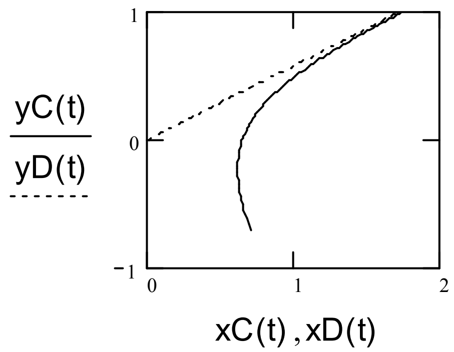
$$M(t) := \left[m1 \cdot (l1)^2 + IN\right] \cdot \phi tt(t) - m1 \cdot l1 \cdot stt(t) \cdot \sin(\phi(t))$$

$$Nm(t) := M(t) \cdot \phi t(t) \qquad Np(t) := P(t) \cdot st(t)$$

$$x(t) := s(t) + lC \cdot \cos(\phi(t)) \qquad y(t) := lC \cdot \sin(\phi(t))$$

$\Delta t := \frac{\tau}{100} \qquad t := 0, \Delta t .. \tau$ Здесь оператор " .. " вводится клавишей < ; >

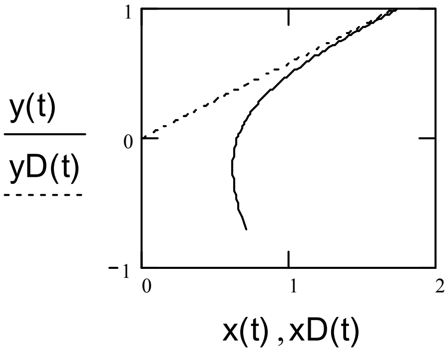
Траектории сближения



$xD(0)=0 \qquad yD(0) = 0 \qquad \frac{\alpha}{deg} = 30 \qquad xD(\tau) = 1.732 \qquad yD(\tau) = 1$

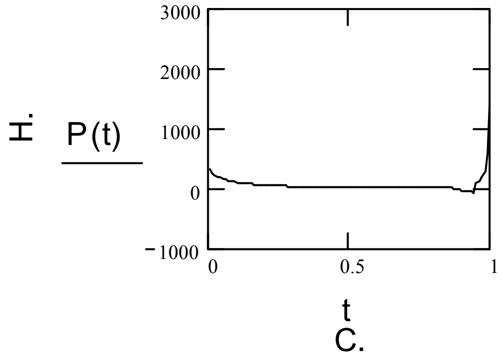
$xC(0) = 0.707 \qquad yC(0) = -0.707 \qquad xC(\tau) = 1.739 \qquad yC(\tau) = 0.993$

Проверка траекторий сближения



$x(0) = 0.707 \quad y(0) = -0.707 \quad x(\tau) = 1.739 \quad y(\tau) = 0.993$

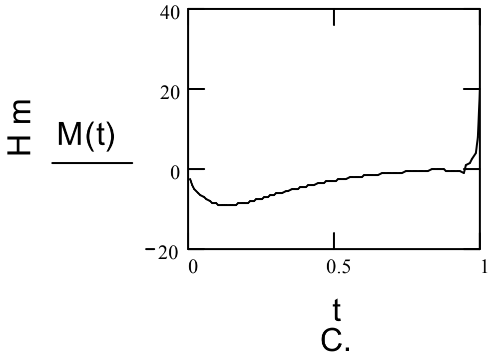
Зависимости управляющих усилий от времени при сближении захвата с деталью.



$P(0) = 306.81$ Н $\quad P(\tau) = 2.227\times 10^3$ Н

Минимальное значение Р

$P(0.94) = -75.005$ Н

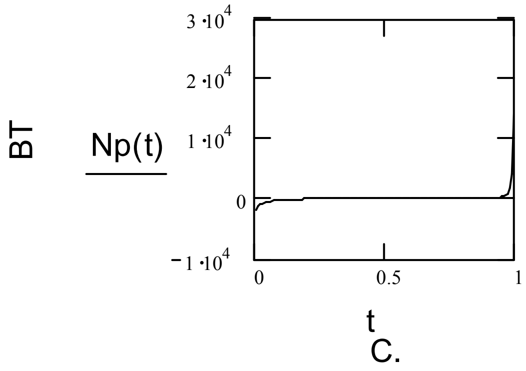


$M(0) = -2.872$ H m $\quad M(\tau) = 31.332$ H m

Минимальное значение М

$M(0.13) = -9.283$ H m

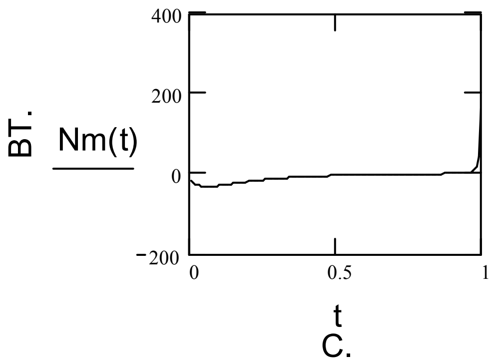
Изменения мощностей двигателей во времени при сближении захвата с деталью.



$\mathrm{Np}(0) = -1.774\times 10^{3}$ ВТ $\quad \mathrm{Np}(\tau) = 2.302\times 10^{4}$ ВТ

Минимальное значение Np

$\mathrm{Np}(0) = -1.774\times 10^{3}$ ВТ



$\mathrm{Nm}(0) = -17.288$ ВТ $\quad \mathrm{Nm}(\tau) = 272.537$ ВТ

Минимальное значение Nm

$\mathrm{Nm}(0.06) = -31.349$ ВТ

Мощности двигателей должны быть :
для первого звена Nm>280 ВТ= 0.28 КВТ,
для второго звена Np>24000 ВТ=24 КВТ.