Лек. для заочников

ИГНД

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов.-М.: Высш. шк., 1986.-416 с.
2. Попов м.в. Теоретическая механика: Учеб. для втузов.-М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит.-1986.-336 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб.пособие для техн.вузов/ Яблонский А.А. и др.-М.: Высш. Шк.,1985.-367 с.
4. Айзенберг Т.Б. и др. Руководство к решению задач по теоретической механике:-М. 1968.

5.Бать М.И. и др. **Теоретическая механика в примерах и задачах, ч.1и 2: -М.,1961** и посл. изд.

Дополнительная литература

1. Бутенин Н.В. и др. **Курс теоретической механики, ч.1 и 2:-М.,1971** и посл. изд.

2. **Сборник задач по теоретической механике:** Учеб. Пособие для студентов технических вузов/ **Бражниченко Н.А.** и др.-М.: Высш. шк.,1986.-480 с. и посл. изд.

Введение

Механика. Механическое движение.

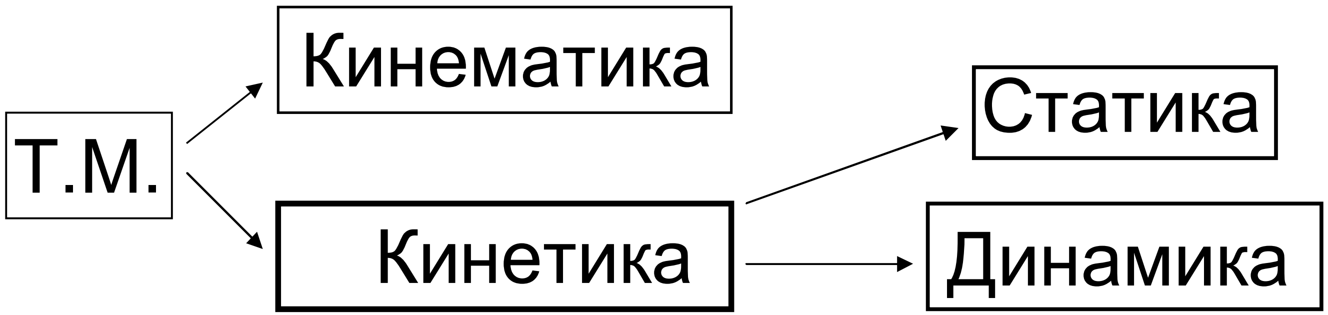
Теоретическая механика.

И. Ньютон (1643-1727)

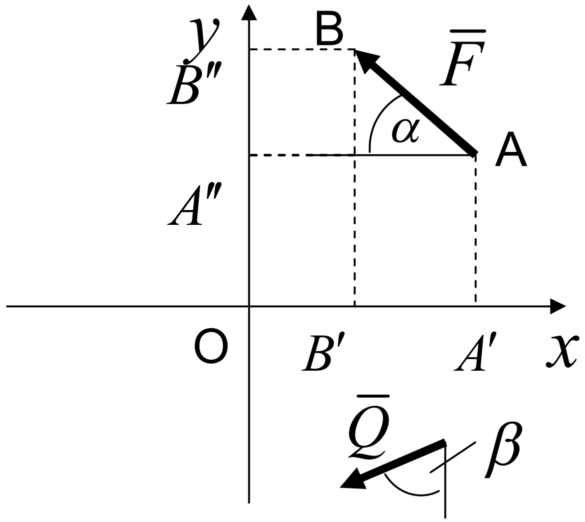
Математические начала натур. философии—1687г

Прикладная механика.

Модели в Т.М.: материальная точка, система мат. точек, абсолютно твёрдое тело—А.Т.Т.



Проекции силы на оси координат



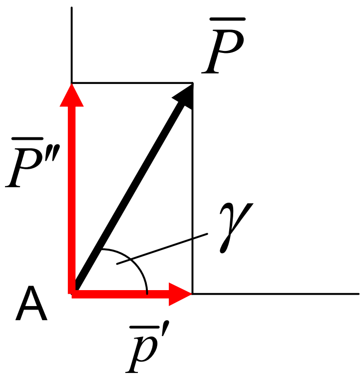
$$F_x = -F \cdot \cos\alpha;$$

$$F_y = F \cdot \sin\alpha.$$

$$Q_x = -Q \cdot \sin\beta;$$

$$Q_y = -Q \cdot \cos\beta.$$

Разложение силы по двум направлениям



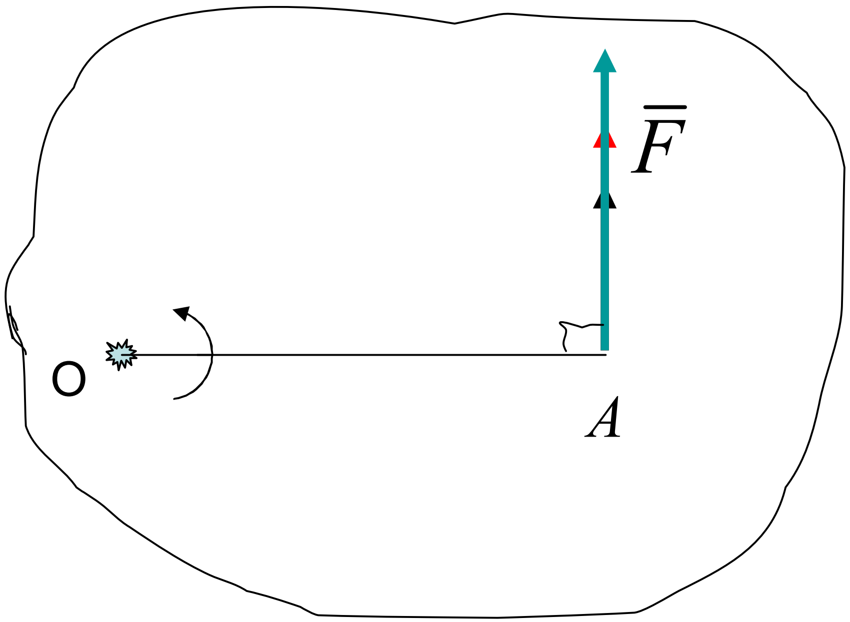
$$P' = P \cdot \cos\gamma;$$

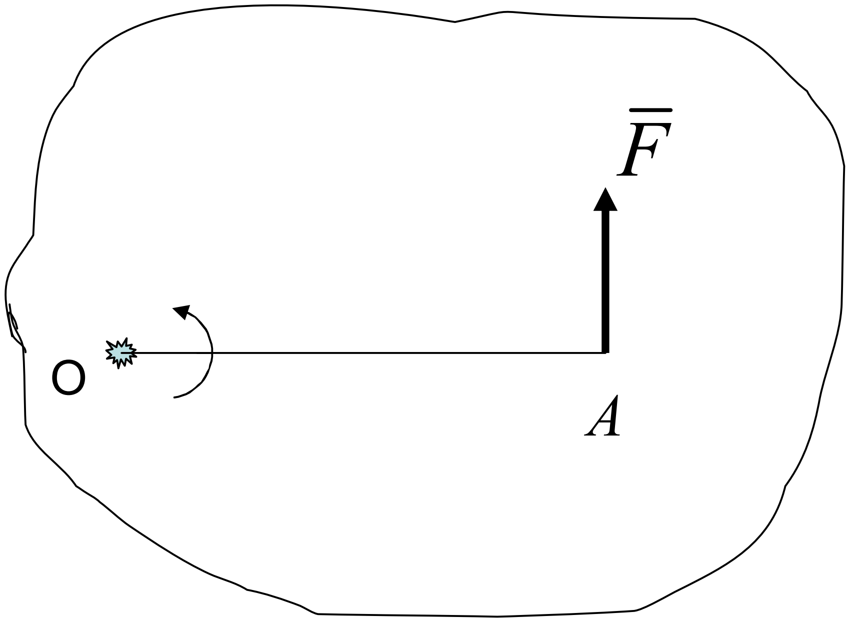
$$P'' = P \cdot \sin\gamma.$$

$$P = \sqrt{P'^2 + P''^2}.$$

$$\overline{P} = \overline{P}' + \overline{P}''.$$

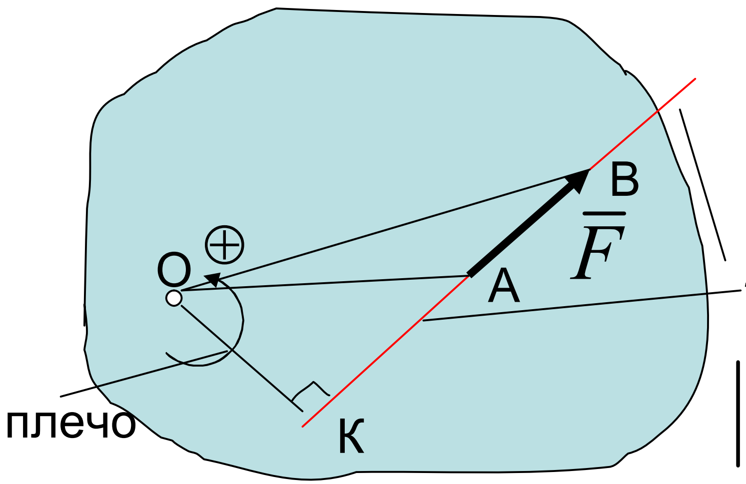
Алгебраический момент силы





$$M_o = OA \cdot F$$

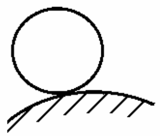
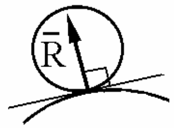
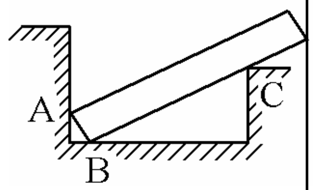
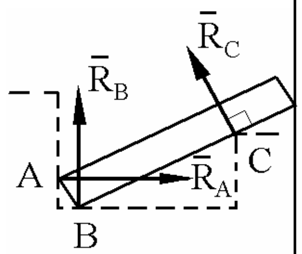
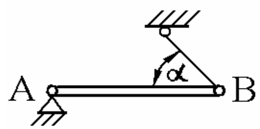
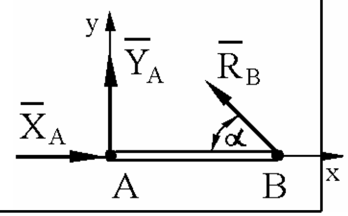
$$OK = h$$

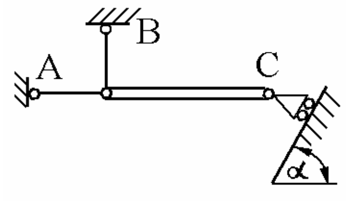
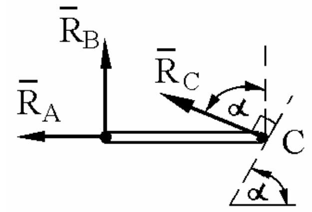
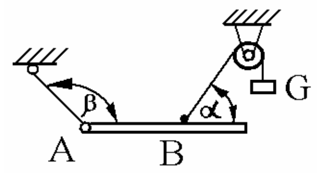
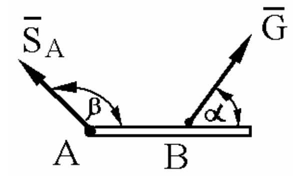
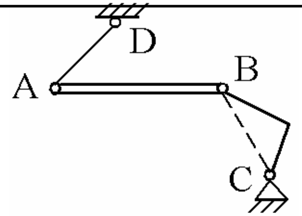
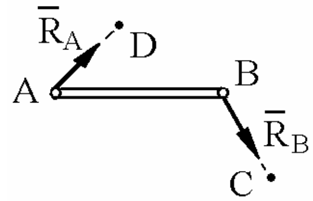
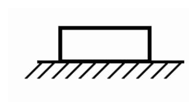
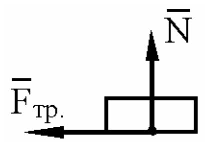


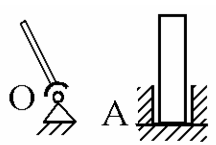
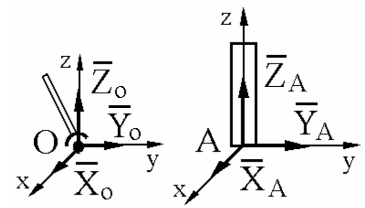
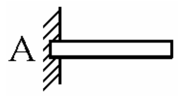
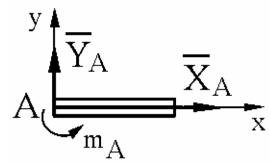
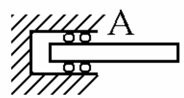
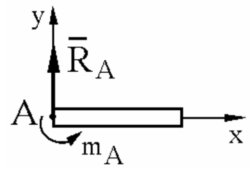
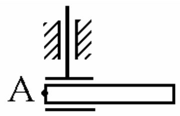
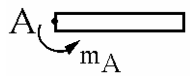
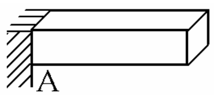
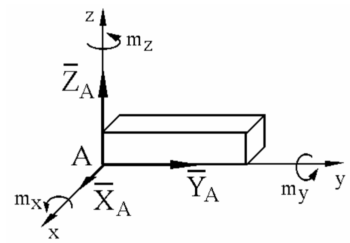
$$\boxed{m_o(\overline{F}) = \pm F \cdot h}$$

$$\left| m_o(\overline{F}) \right| = 2 \cdot S_{\triangle OAB}$$

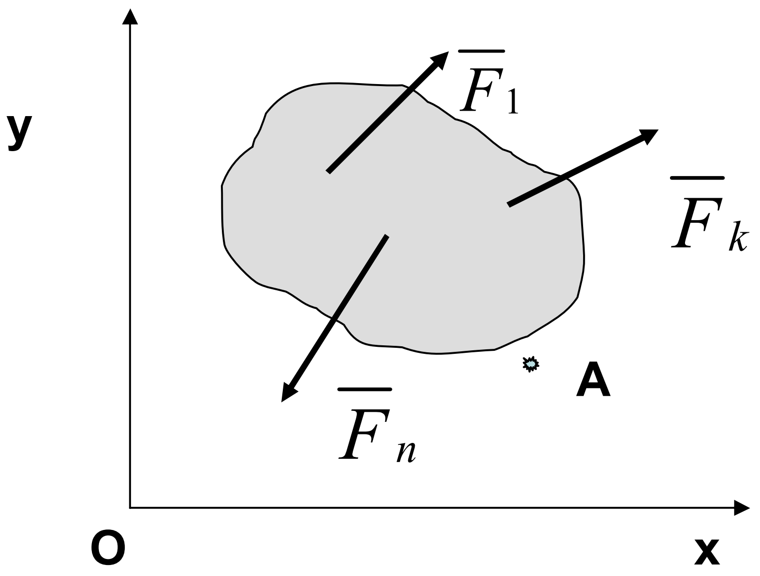
Виды связей и их реакции

Тип связи	Схема связи	Направление реакции
1. Гладкая опорная поверхность.		
2. Точечная гладкая опора.		
3. Неподвиж-ный шарнир (А).		

<table>
<tr>
<td>4.
Подвижный
шарнир
(каток C).</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Гибкая
связь
(нить, трос,
цепь,
ремень).</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Жёсткий
стержень.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>7. Шерохова-
тая поверх-
ность.</td>
<td></td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

8. Сферичес-кий шарнир О и подпятник А.		
9. Жёсткая заделка в плоскости		
10. Скользя-щая заделка.		
11. Свободная заделка.		
12. Жёсткая заделка в пространстве.		

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил



1-я (основная) форма уравн. равн.

$$\boxed{1. \sum F_{kx} = 0; \quad 2. \sum F_{ky} = 0; \quad 3. \sum m_A(\overline{F}_k) = 0.}$$

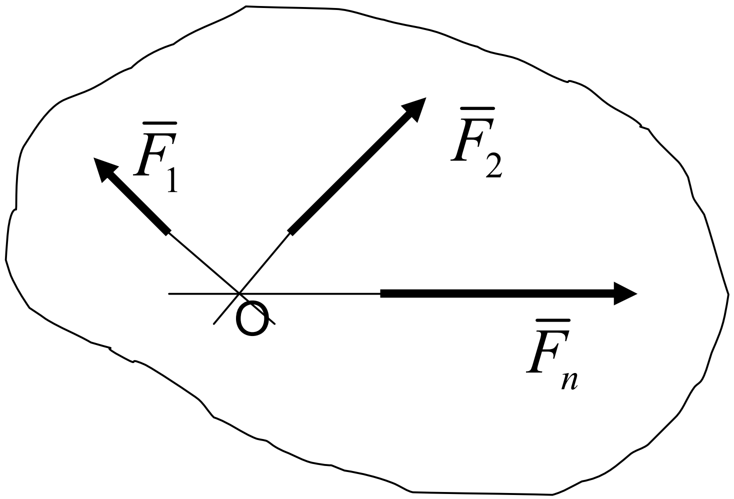
2-я форма уравн. равн.

$$\boxed{1. \sum F_{kx} = 0; \quad 2. \sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad 3. \sum m_B(\overline{F}_k) = 0.}$$

3-я форма уравн. равн.

$$\boxed{1. \sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad 2. \sum m_B(\overline{F}_k) = 0; \quad 3. \sum m_C(\overline{F}_k) = 0.}$$

Сходящаяся система сил



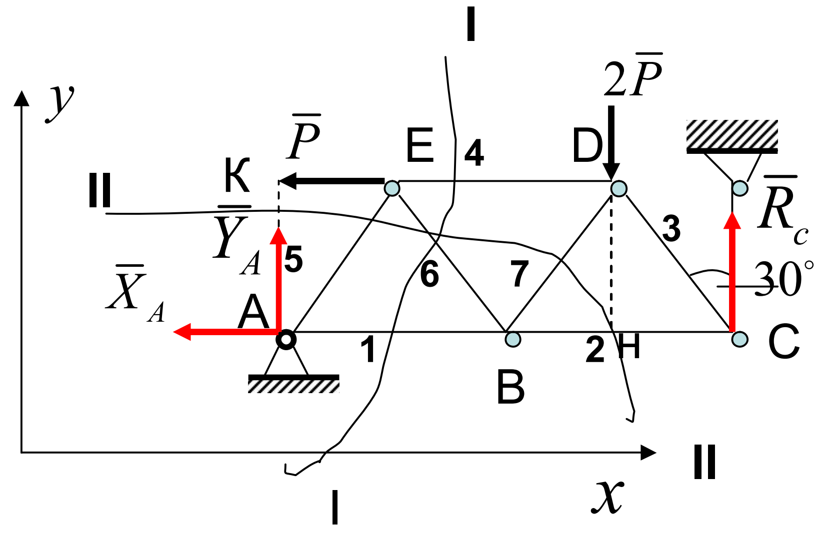
равнодействующая

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$$

Уравнения равн. плоской системы сил

$$\boxed{\begin{aligned} &1.\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ &2.\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \end{aligned}}$$

Расчёт ферм



Дано: АВ=ВС=СД=ДЕ=ЕА=а;

Р=4 Кн.

Условие статической определимости

$$s = 2n - 3$$

S-число стержней; n-число узлов.

$$AH = 1{,}5a; \quad AK = a\sin 60^\circ = a\sqrt{3}/2.$$

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -X_A - P = 0.$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad R_c \cdot 2a - 2P \cdot 1{,}5a + Pa\sqrt{3}/2 = 0.$$

$$\sum m_c(\overline{F}_k) = 0; \quad 2Pa/2 + Pa\sqrt{3}/2 - Y_A \cdot 2a = 0.$$

$$X_A = -4 \quad Кн.$$

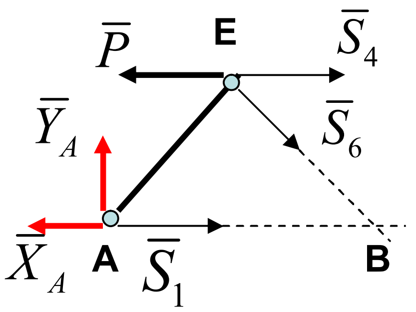
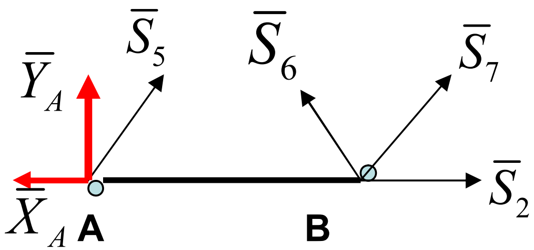
$$R_c \approx 4{,}3 \quad Кн.$$

$$Y_A \approx 3{,}7 \quad Кн.$$

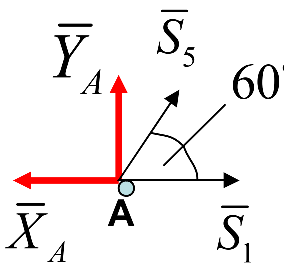
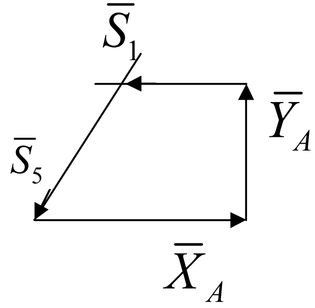
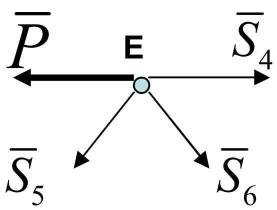
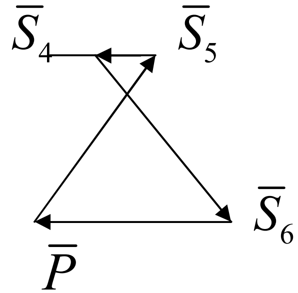
Проверка: $\sum F_{ky} = 0;$

$$Y_A + R_c - 2P = 3{,}7 + 4{,}3 - 2 \cdot 4 \equiv 0.$$

Метод сквозных сечений (метод Риттера)

Сечение	Схема нагружения отсекаемой части	Уравнения равновесия	Значения усилий
I-I		$\sum m_E(\overline{F}_k)=0;$ $S_1 a\sin 60^\circ - X_A a\sin 60^\circ - Y_A a/2 = 0.$ $\sum m_B(\overline{F}_k)=0;$ $Pa\sin 60^\circ - S_4 a\sin 60^\circ - Y_A a = 0.$ $\sum F_{ky} = 0;$ $Y_A - S_6\cos 30^\circ = 0.$	$S_1 \approx -1{,}8\,Кн.$ $(сжатие)$ $S_4 \approx -0{,}3\,Кн.$ $S_6 \approx 4{,}3\,Кн.$ $(растяжение)$
II-II		$\sum m_B(\overline{F}_k)=0;$ $-Y_A a - S_5 a\cos 30^\circ = 0.$	$S_5 \approx -4{,}3\,Кн.$

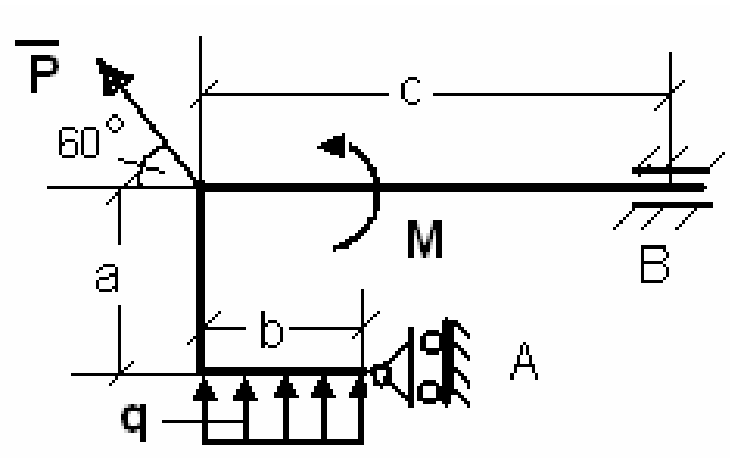
Метод вырезания узлов

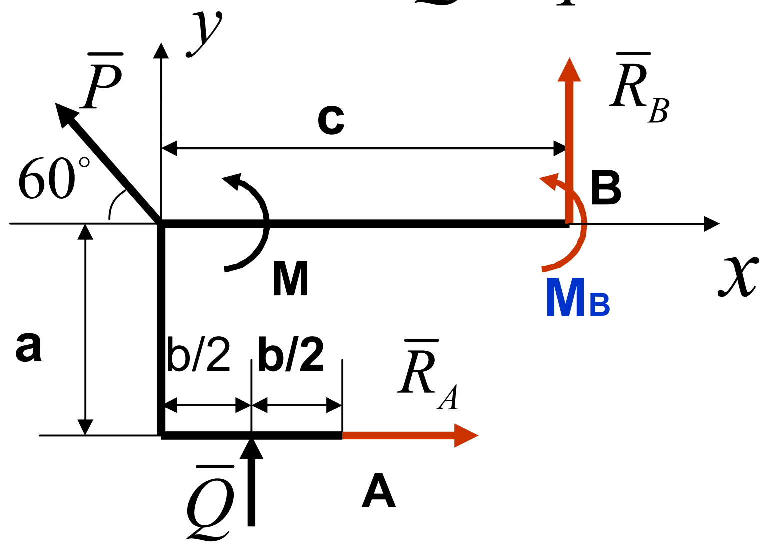
Узел	Схема нагружения	Уравнения равновесия	Значения усилий в Кн	Силовой многоугольник
A		$S_1 - X_A + S_5\cos 60^\circ = 0;$ $Y_A + S_5\sin 60^\circ = 0.$	$S_5 \approx -4{,}3$ $S_1 \approx -1{,}8$	
B		$S_4 + S_6\cos 60^\circ -$ $S_5\cos 60^\circ - P = 0;$ $-S_5\sin 60^\circ - S_6\sin 60^\circ = 0.$	$S_6 \approx 4{,}3$ $S_4 \approx -0{,}3$	

Лек. 2

Пример: Составить уравнения для определения реакций опор.

$$Q = q \cdot b.$$





$$\sum F_{kx} \equiv R_A - P\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} \equiv R_B + Q + P\sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) \equiv -Qb/2 - P\sin 60^\circ b + P\cos 60^\circ a +$$

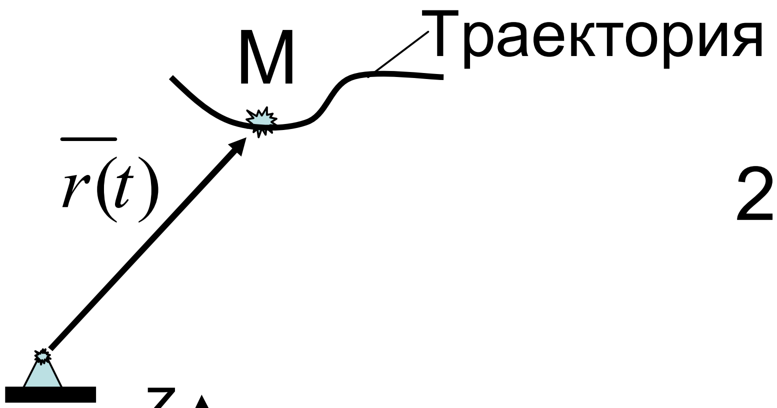
$$+M + M_B + R_B(c-a) = 0.$$

Кинематика точки и А.Т.Т.

§1. Способы задания движения точки

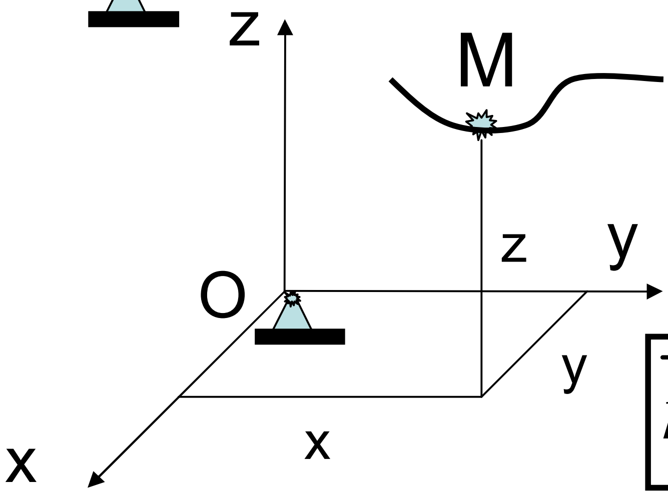
1. Векторный.

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)} \qquad (1.1)$$



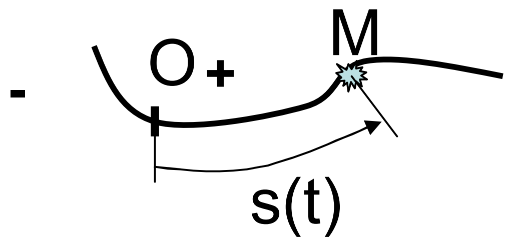
2.Координатный

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned}} \qquad (1.2)$$



$$\boxed{\overline{r(t)} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}} \qquad (1.3)$$

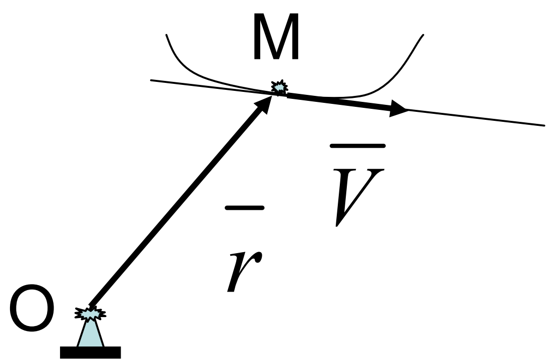
3.Естественный.



$$\boxed{s=s(t)} \quad (1.4)$$

Закон движения точки по траектории.

§ 2.Скорость точки в декартовых координатах



$$\boxed{\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}.} \qquad (2.1)$$

$$\bar{V} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$$

$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \quad V_z = \dot{z};$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad \cos(\bar{i}, \bar{V}) = \frac{\dot{x}}{V}. \qquad (2.2)$$

§ 3.Ускорение точки в декартовых координатах

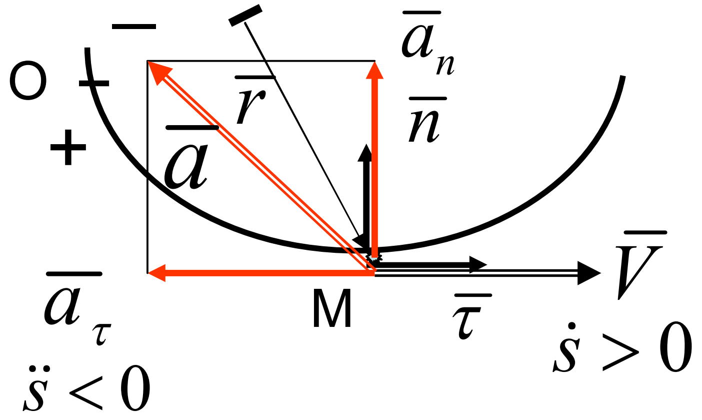
$$\boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}} \qquad (3.1)$$

$$\bar{a} = \dot{V}_x\bar{i} + \dot{V}_y\bar{j} + \dot{V}_z\bar{k} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}.$$

$$\boxed{\begin{gathered} a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}; \\ a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}; \quad \cos(\bar{i}, \bar{a}) = \frac{\ddot{x}}{a}. \end{gathered}} \qquad (3.2)$$

§ 4. Скорость и ускорение точки в Е.С.К.

$$\bar{r} = \bar{r}[s(t)].$$



$$\bar{V} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{V} &= \dot{s} \cdot \bar{\tau} \\ V_\tau &= \dot{s} \end{aligned}} \quad (4.1)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}[s(t)]$$

$$\boxed{\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}.} \quad (4.2)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

$$\bar{a}_\tau = \ddot{s}\bar{\tau}; \qquad \bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}.$$

$$\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$$

§ 5. Касательное и нормальное ускорения точки

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{V}_\tau$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{V^2}{\rho} \qquad (5.1)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

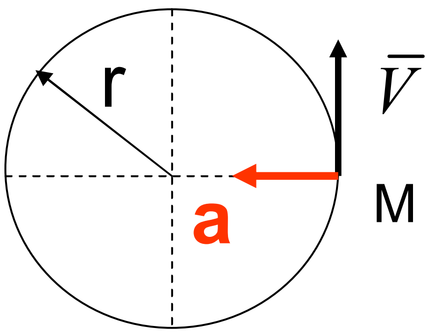
Для окружн. радиуса R

$\rho = R \qquad a_n = V^2 / R.$

Для прямой $\qquad \rho = \infty$

$$a_n = 0; \qquad a = a_\tau = \dot{V}_\tau = \ddot{s}$$

Пример. V=const. | $a = ?$



$$a_\tau = \dot{V}_\tau = 0$$

$$a = a_n = V^2 / r.$$

§ 6.Классификация движений А.Т.Т.

1.Поступательное движение А.Т.Т.– 3 ст. свободы.

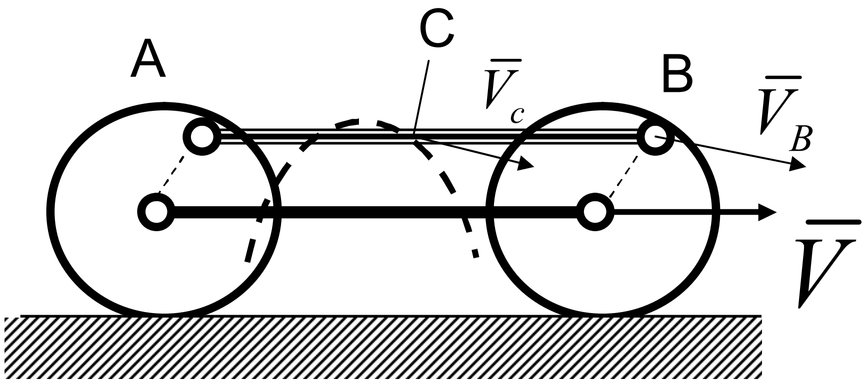
2. Вращательное движение А.Т.Т. -- 1 ст. св.

3. Плоское (плоскопараллельное) дв. –3 ст. св.

4. Сферическое движение А.Т.Т. – 3 ст. св.

5.Свободное движение А.Т.Т. -- 6 ст. св.

§ 7.Поступательное движение А.Т.Т.



$$\overline{V}_A = \overline{V}_c = \overline{V}_B$$

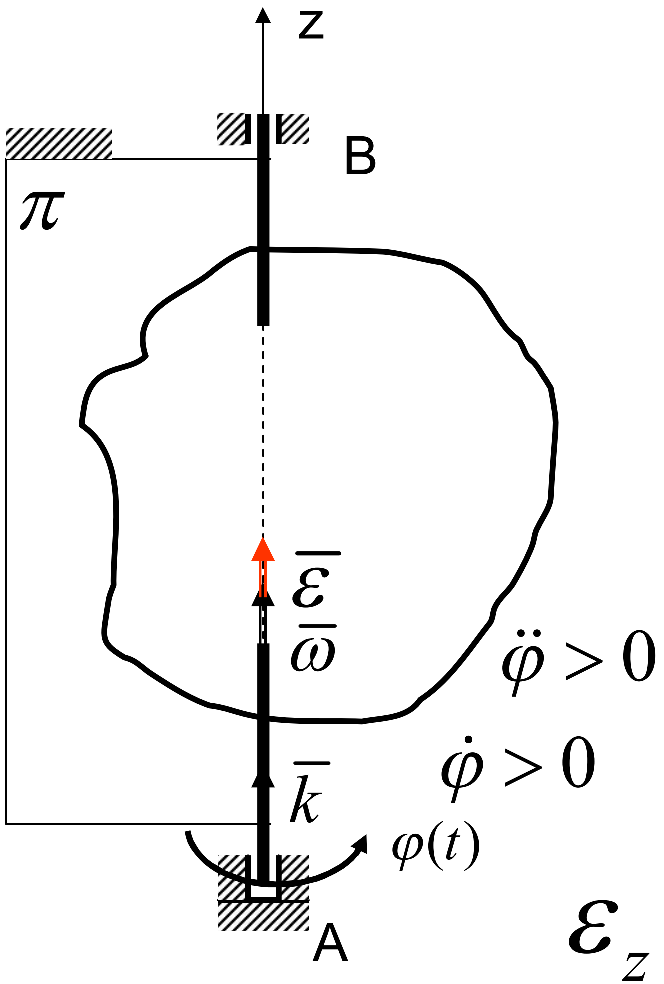
$$\overline{a}_A = \overline{a}_C = \overline{a}_B$$

Теорема: При поступательном движении А.Т.Т. все его точки описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

§8.Вращательное движение А.Т.Т.

(вращение А.Т.Т. вокруг неподвижной оси)

8.1. Закон вращательного движения.



$$\boxed{\varphi = \varphi(t)} \quad (8.1)$$

8.2. Угловая скорость и угловое ускорение тела.

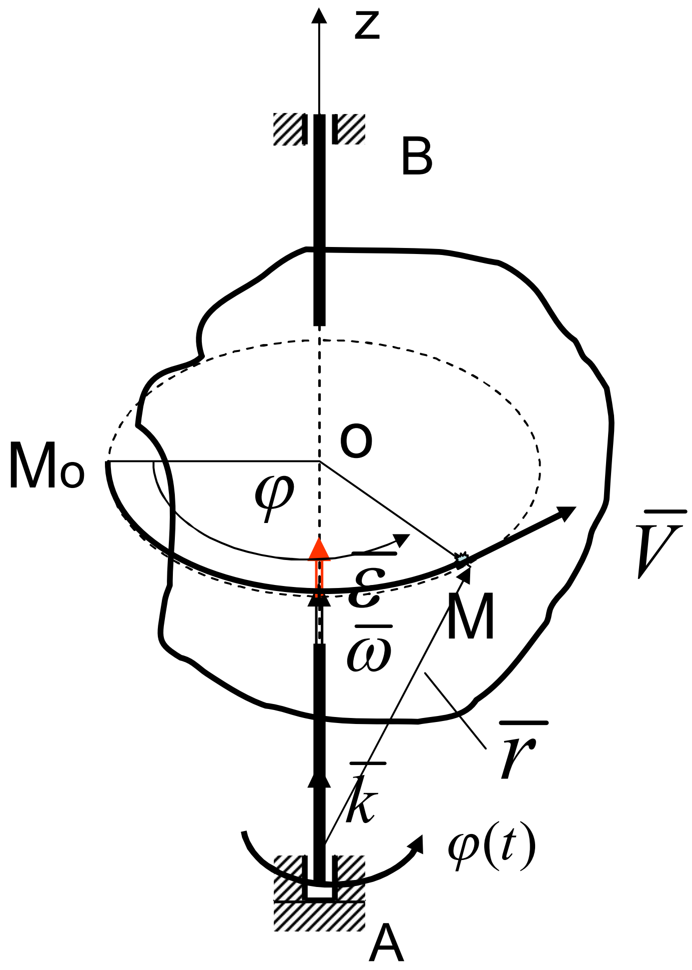
$\omega_z = \dot{\varphi}$ -- алг. угл.скорость

$$\boxed{\overline{\omega} = \dot{\varphi}\overline{k}} \quad (8.2) \qquad \omega = |\dot{\varphi}|$$

$$\boxed{\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \ddot{\varphi}\overline{k}} \quad (8.3)$$

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi} \qquad \varepsilon = \dot{\omega} = |\ddot{\varphi}|$$

8.3. скорость точки. Формула Эйлера.



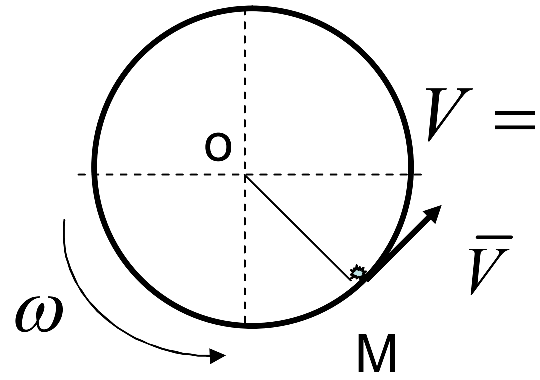
OM=h

$$M_oM = s = \varphi \cdot h$$

$$V = \dot{s} = \dot{\varphi} h = \omega h$$

$$\boxed{\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}} \quad (8.4)$$

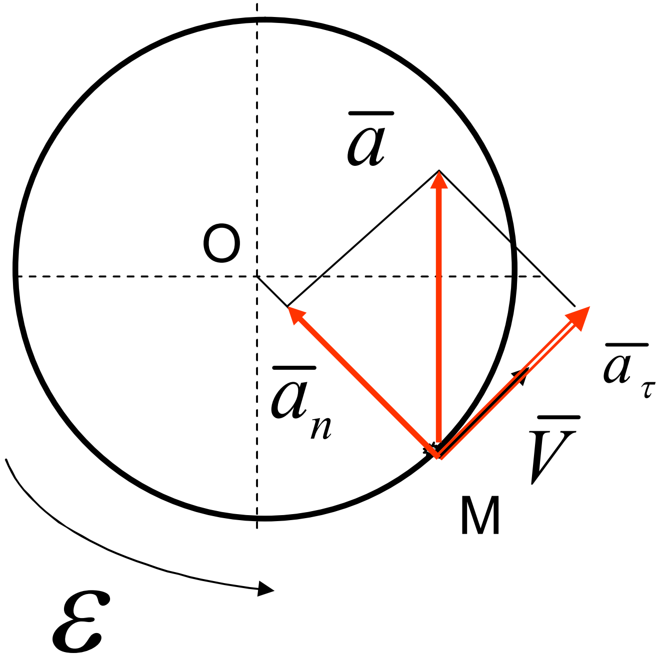
Ф. Эйлера



$$V = OM \cdot \omega = h \cdot \omega$$

8.4. Ускорение точки.

$$\overline{a} = \overline{a}_{\tau} + \overline{a}_{n}$$



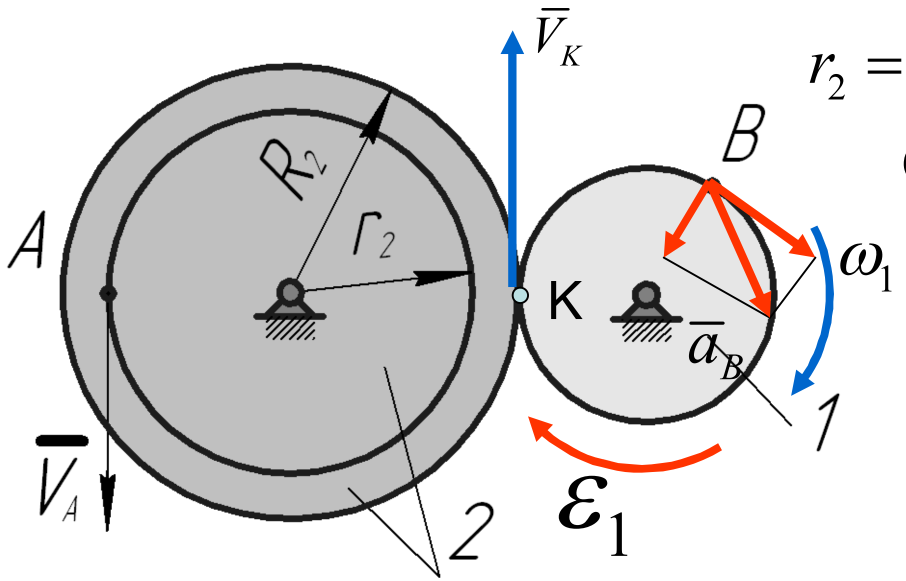
$$a_{\tau} = \dot{V}_{\tau} = \varepsilon h$$

h=OM

$$a_{n} = \frac{V^{2}}{h} = \omega^{2} \cdot h \qquad (8.5)$$

$$a = h\sqrt{\omega^{4} + \varepsilon^{2}}$$

Пример: зубчатая передача.



Дано: $V_A = 4t \quad см/с;$

$r_2 = 4 \quad см; \quad R_2 = 6 \quad см; \quad r_1 = 3 \quad см.$

Определить скорость и ускорение точки В при t=1c.

$$\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{4t}{4} t\, c^{-1};$$

$$V_B = V_K = \omega_2 R_2 = 6t;$$

$$\omega_1 = \frac{V_K}{r_1} = \frac{6t}{3} = 2t;$$

$$a_\tau = \varepsilon_1 r_1 = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$a_n = \omega_1^{\,2} \cdot r_1 = 4t^2 \cdot 3 \Big|_{t=1c.} = 12;$$

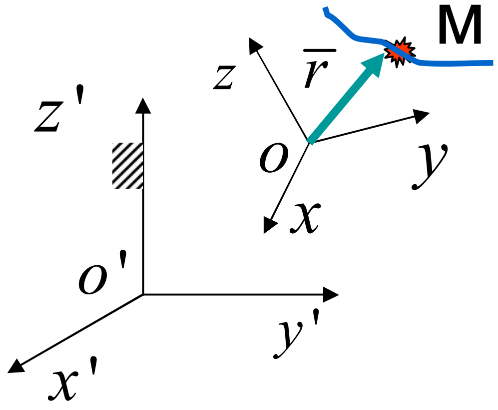
$$\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 2 \quad c^{-2};$$

$$V_B(1) = 6;$$

$$a_B = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 6\sqrt{5} \quad см/с^2;$$

§9.Сложное движение точки.

9.1.Задачи кинематики сложного движения

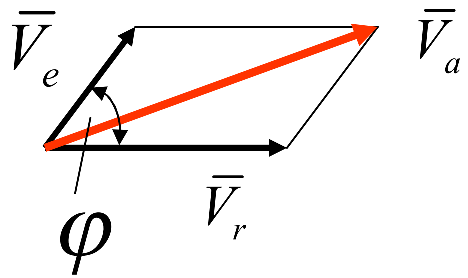


$\bar{V}_a,\quad \bar{a}_a$ - абсолютные

$\bar{V}_r,\quad \bar{a}_r$ - относительные

$\bar{V}_e,\quad \bar{a}_e$ - переносные

9.2. Теорема сложения скоростей

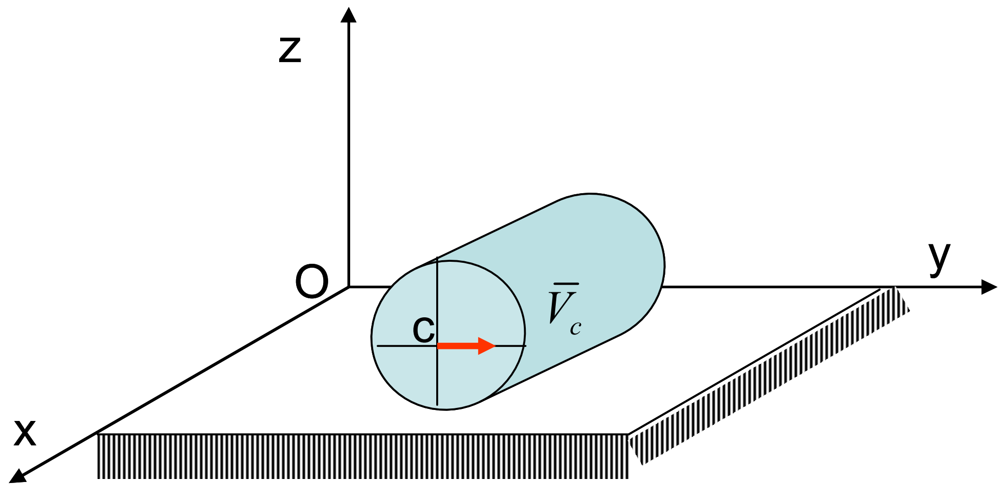


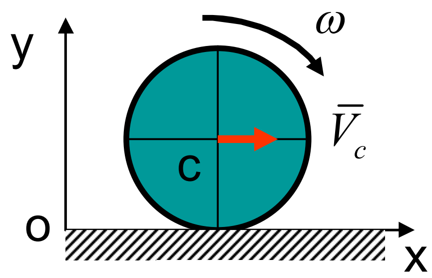
$$\boxed{\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e} \qquad (9.1)$$

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\varphi}$$

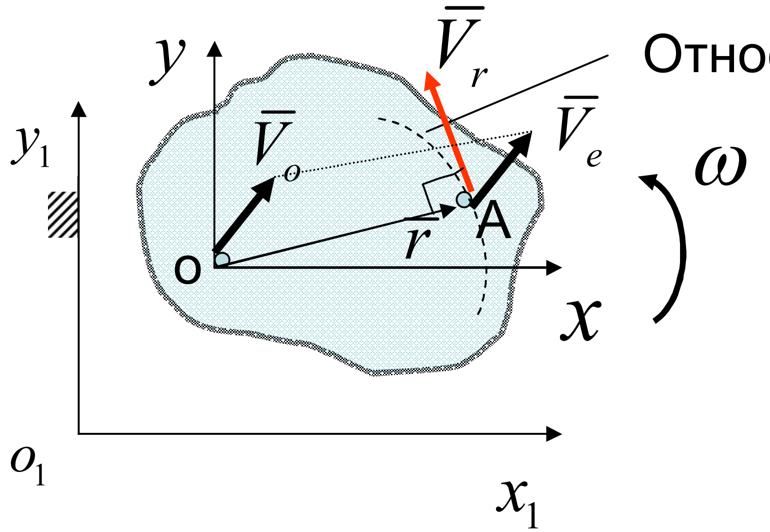
§.10. Плоское движение А.Т.Т.

10.1. Определение.





10.2. Скорости точек плоской фигуры



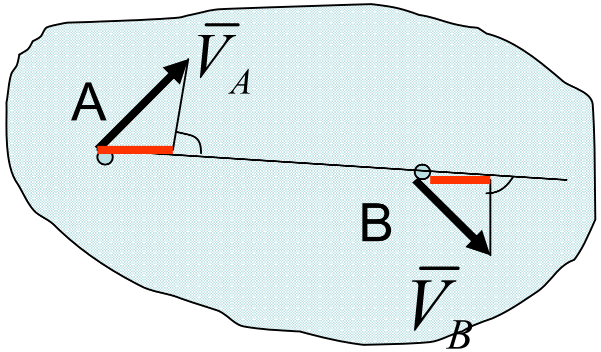
Относительная траектория-окружность

$$\bar V_A = \bar V_e + \bar V_r$$

$$\bar V_e = \bar V_o \qquad \bar V_r = \frac{d\bar r}{dt} = \bar\omega \times \bar r.$$

$$\boxed{\begin{gathered} \bar V_A = \bar V_O + \bar V_{AO}; \\ \bar V_{AO} = \bar\omega \times \bar r; \\ \bar V_{AO} \perp OA; \\ V_{AO} = \omega r = \omega \cdot OA. \end{gathered}} \quad (10.1$$

10.3. Теорема о проекциях скоростей.

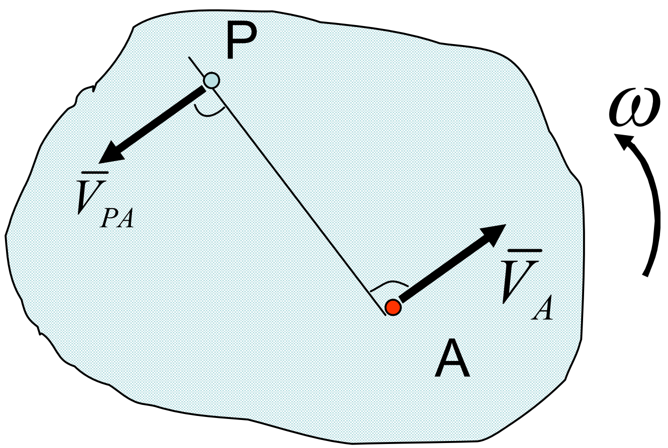


$$\boxed{np_{AB}\overline{V}_A = np_{AB}\overline{V}_B} \qquad (10.2)$$

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$$

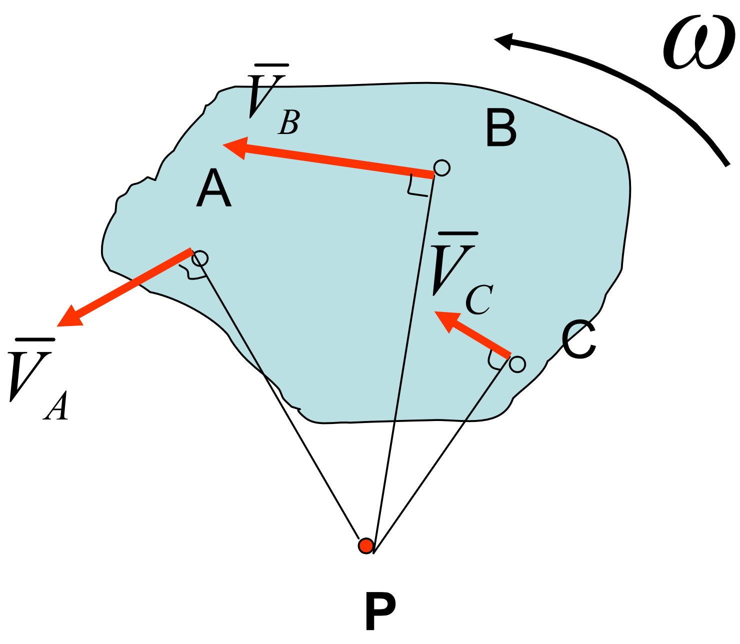
$$\overline{V}_{BA} \perp AB$$

11.5. Мгновенный центр скоростей (М.Ц.С.).



$$AP = \frac{V_A}{\omega} \qquad V_{PA} = \omega \cdot AP = V_A$$

$$\overline{V}_{PA} = -\overline{V}_A; \qquad \overline{V}_P = \overline{V}_A + \overline{V}_{PA} = 0.$$



$$\bar{V}_A = \underbrace{\cancel{\bar{V}_P}}_{0} + \bar{V}_{AP};$$

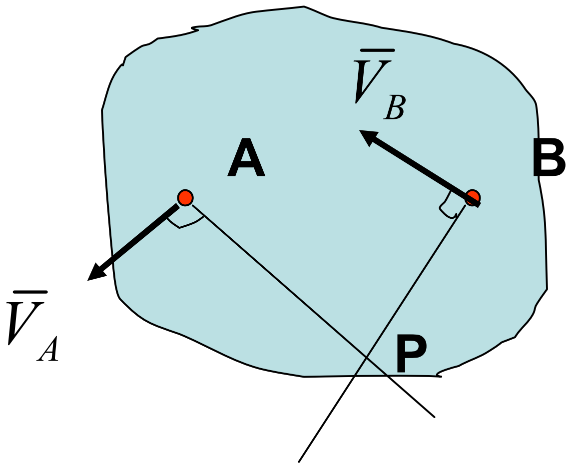
$$\bar{V}_A = \bar{V}_{AP} = \bar{\omega} \times \overline{PA}.$$

$$\boxed{\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \omega} \qquad (10.3)$$

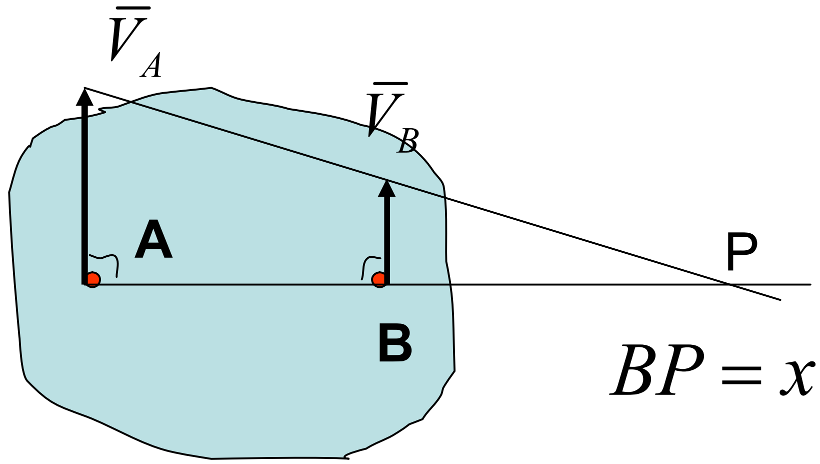
11.6. Способы определения положения М.Ц.С.

а) геометрический.

1.



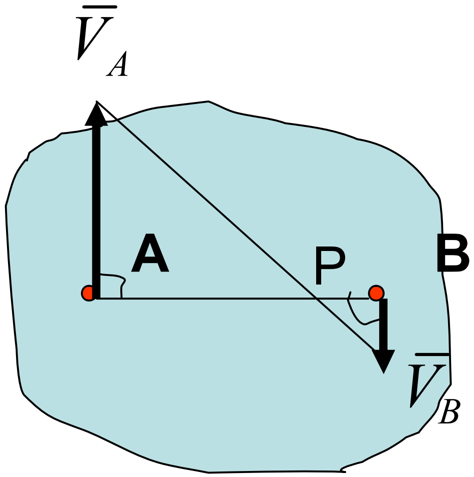
2.



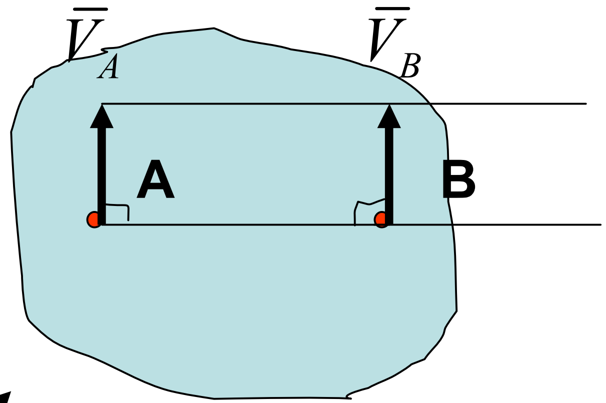
$$BP = x$$

$$\frac{V_A}{AB + x} = \frac{V_B}{x} = \omega.$$

3.



4.

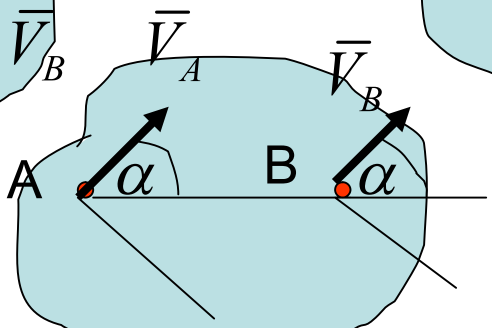


$$\bar{V}_A = \bar{V}_B$$

$$P \Rightarrow \infty$$

$$\omega = 0.$$

5.

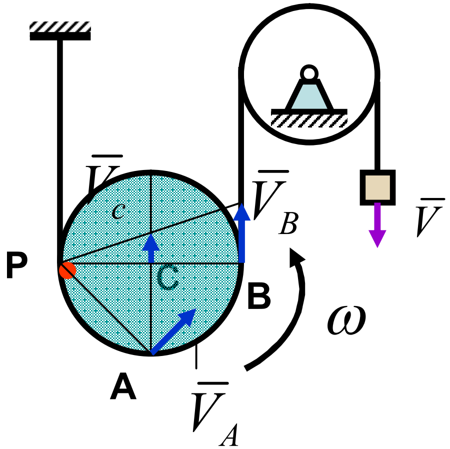


$$P \Rightarrow \infty$$

$$V_A = V_B; \quad \omega = 0.$$

б) естественный.

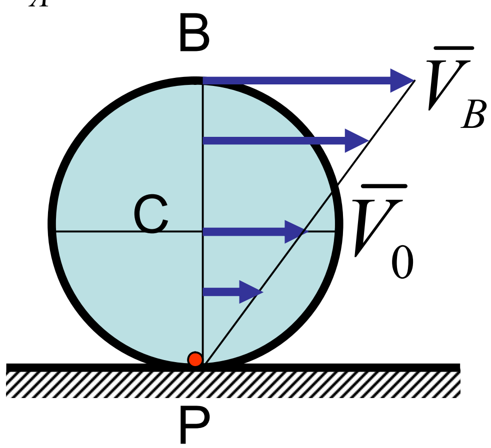
Если $V_P = 0$, то точка Р – М.Ц.С.



PC=CB=R; $V_B = V;$ $\omega = \dfrac{V_B}{PB} = \dfrac{V}{2R};$

$$V_C = \omega \cdot PC = V/2;$$

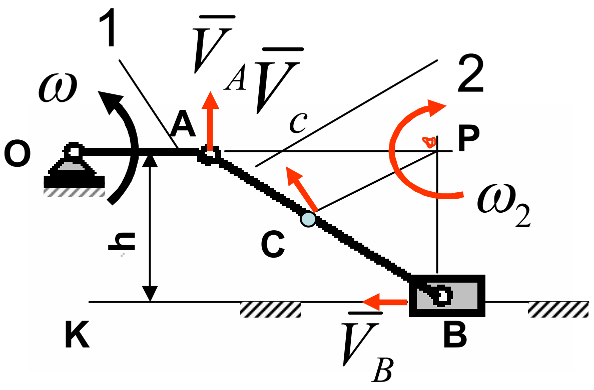
$$V_A = \omega \cdot PA = \frac{\sqrt{2}}{2}V.$$



Качение без скольжения

Р – М.Ц.С.

Пример : Кривошипно - ползунный механизм.



Дано: OA=h=r; AB=2r;

$$\omega = const.$$

AC=CB.

Определить: $V_C, V_B, \varepsilon_2.$

$$AP = AB \cdot \cos 30^\circ = r\sqrt{3}; \quad BP = h = r;$$

Вычисление скоростей.

$$V_A = \omega \cdot OA = \omega r; \qquad \omega_2 = V_A / AP = \omega / \sqrt{3};$$

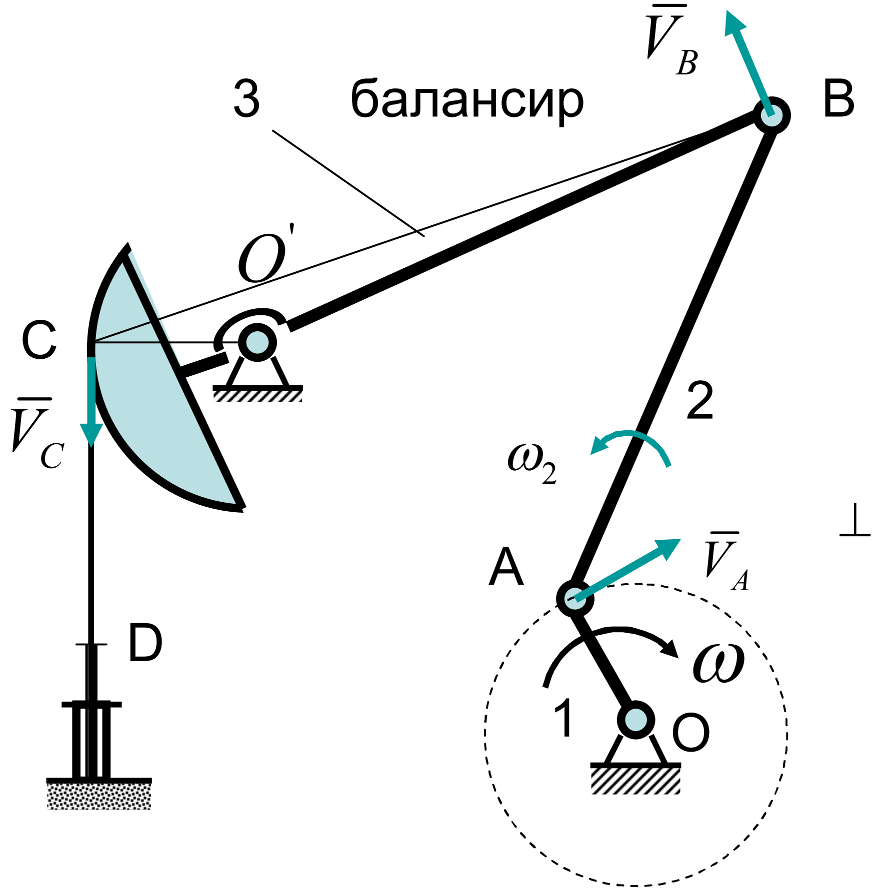
$$\underline{V_B = \omega_2 \cdot BP = \omega r / \sqrt{3};} \qquad CP = BP = r$$

$$\underline{V_C = \omega_2 \cdot CP = \omega r / \sqrt{3}.}$$

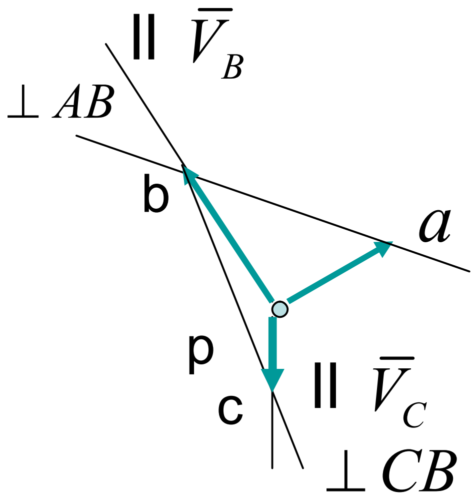
Кинематика станка - качалки

Дано: $l_1, l_2, O'B = k;$ $CO' = R;$ $\omega = const.$ $\Bigg\|$ $V_D = ?$ $a_D = ?$

$$V_A = \omega \cdot l_1;$$



План скоростей



Масштаб скоростей

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} \left(\frac{м}{с \cdot мм} \right)$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \underbrace{\bar{V}_{BA}}_{\perp AB}.$$

$$V_B = pb \cdot \mu_V; \quad V_{BA} = ab \cdot \mu_V;$$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB}; \quad \omega_3 = \frac{V_B}{O'B} = \frac{V_B}{k};$$

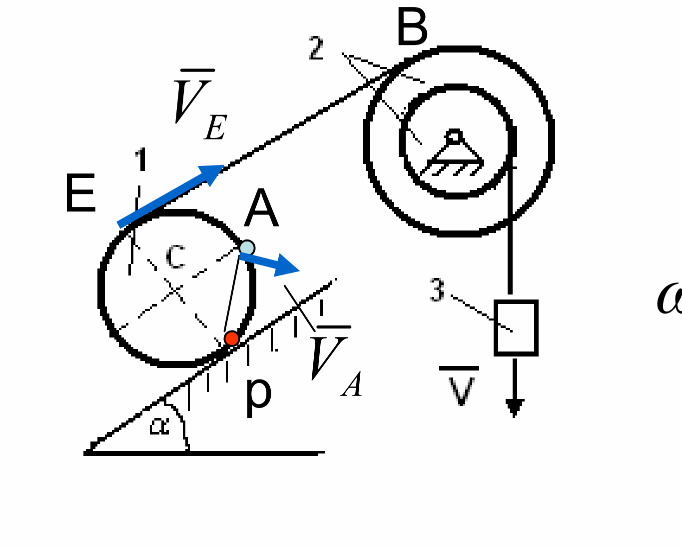
$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \underbrace{\bar{V}_{CB}}_{\perp CB}.$$

$$V_C = pc \cdot \mu_V.$$

$$\underline{V_D = V_C = \omega_3 \cdot CO' = \omega_3 \cdot R.}$$

Пример .   Дано: V=const; $r_1,\ r_2,\ R_2.$

Определить скорость точки А

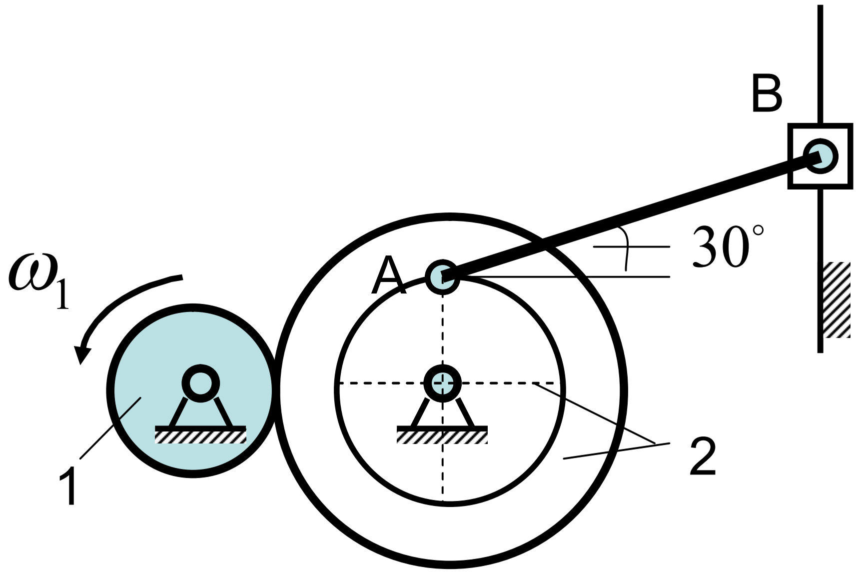


$$V_E = V_B = \frac{V}{r_2} \cdot R_2;$$

P – М.Ц.С.

$$\omega_1 = \frac{V_E}{2r_1} = \frac{V}{r_2 \cdot 2r_1} \cdot R_2; \quad V_C = \omega_1 \cdot r_1 = \frac{V}{2r_2} \cdot R_2;$$

$$V_A = \omega_1 \cdot PA = \omega_1 r_1 \sqrt{2};$$



Дано: $\omega_1 = \sqrt{3}\ \ c^{-1};$

$r_1 = 1;\ \ r_2 = 1,5;\ \ R_2 = 3\,см.$

Определить в указанном положении механизма скорость ползуна B.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

$$m\overline{a} = \sum \overline{F_k} = \overline{F}.$$

Диф. ур. в Д.С.К.

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y; \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned}} \qquad (1.1)$$

§ 2.Две основные задачи динамики точки

Первая (прямая) задача.

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t); \quad m. \quad \Bigg\| \quad \overline{F} = ?$$

Вторая (обратная) задача.

$\overline{F} = \overline{F}(\overline{r}, \overline{V}, t); \quad m;$ Нач. условия

$\overline{r}(0) = \overline{r}_0; \quad \dot{\overline{r}}(0) = \overline{V}_0.$ т.е.

$x_0; \quad y_0; \quad z_0; \quad V_{0x}; \quad V_{0y}; \quad V_{0z}.$

$x(t) = ?;$

$y(t) = ?;$

$z(t) = ?.$

Общее решение системы (2.1)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t, C_1, \ldots C_6); \\ y &= y(t, C_1, \ldots C_6); \\ z &= z(t, C_1, \ldots C_6). \end{aligned}} \qquad (2.1)$$

§ 3.Принцип Даламбера для точки

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R}. \qquad \overline{F} + \overline{R} + \overline{F}^{u} = 0, \quad где \quad \overline{F}^{u} = -m\overline{a}.$$

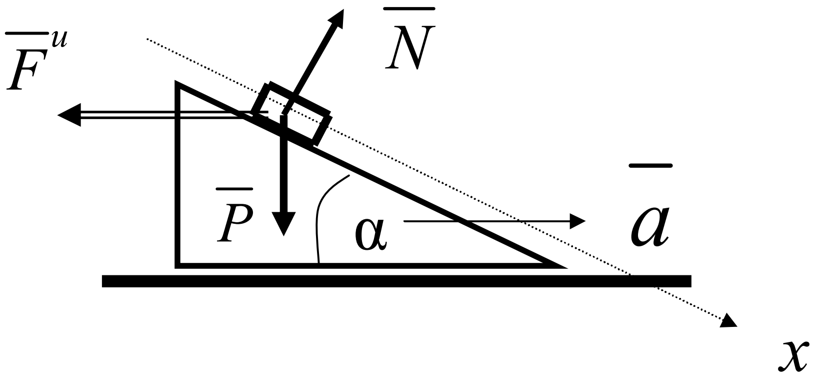
$$F_x + R_x + F_x^{u} = 0;$$

Уравн. кинетостатики

. . . .

. . . .

Пример



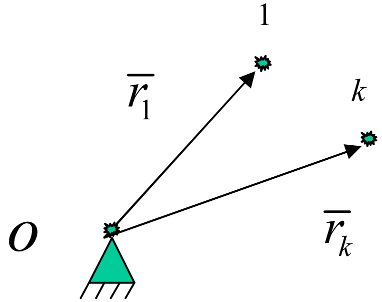
$$a\big|_{V_r=0} = ?$$

$$P = mg \qquad F^{u} = ma$$

$$mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = 0.$$

$$\underline{a = g \cdot tg\alpha}$$

§ 4. Дифференциальные уравнения движения точек механической системы



$n -$ *число точек* $\quad m_k, \overline{a}_k, \overline{V}_k, \overline{r}_k$

$\overline{F}_k^e -$ *равн. внешних сил* $k -$ *ой точки*

$\overline{F}_k^i -$ *равн. внутренних сил* $k -$ *ой точки*

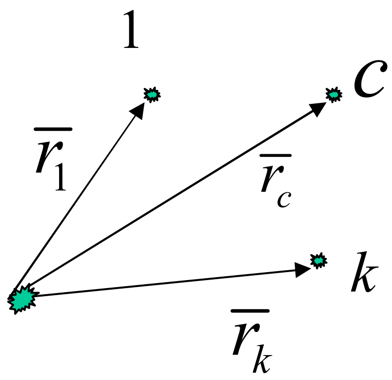
$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i \ , \ (k = 1 \ldots n) \qquad (4.1)$$

Свойства внутренних сил

$$\Sigma\ \overline{F}_k^i = 0;$$

$$\Sigma\ \overline{m}_o(\overline{F}_k^i) = \Sigma\ \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i = 0. \qquad (4.2)$$

§ 5. Центр масс системы.



$$m_k - \text{масса } k-\text{ой точки}$$

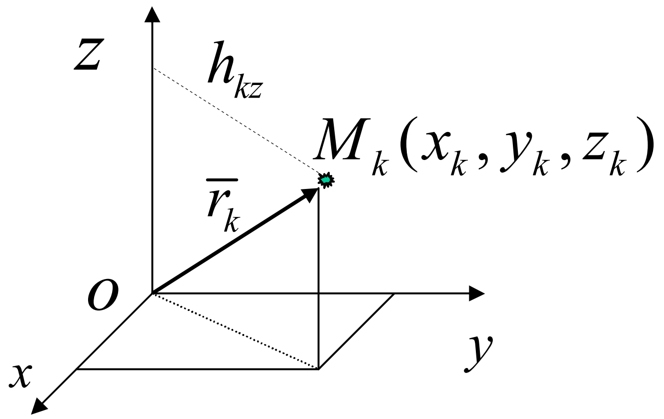
$$\overline{r}_c = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k \qquad (5.1)$$

Здесь

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k .$$

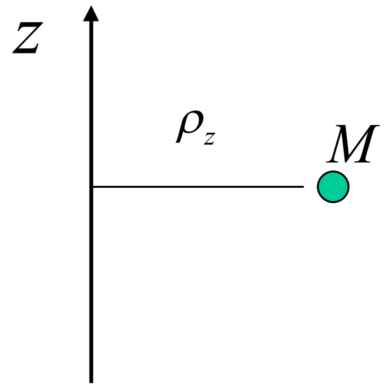
$$\left.\begin{aligned} x_c &= \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \,/\, M; \\ y_c &= \sum_{k=1}^{n} m_k y_k \,/\, M; \\ z_c &= \sum_{k=1}^{n} m_k z_k \,/\, M. \end{aligned}\right| \qquad (5.2)$$

§6. Осевые моменты инерции механической системы. Радиус инерции.



$$m_k - масса\ k - ой\ точки$$

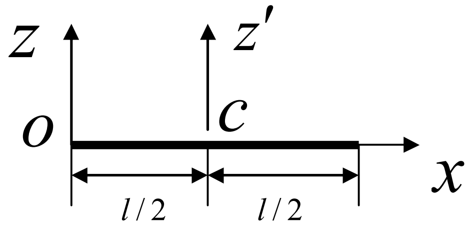
$$I_z = \Sigma m_k h_{kz}^2 = \Sigma m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (6.1)$$



$$\boxed{I_z = M \cdot \rho_z^2} \quad (6.2)$$

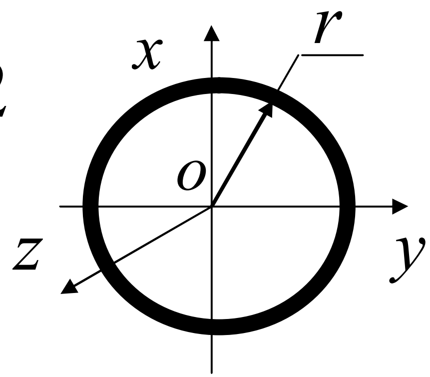
$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

§ 7. Осевые моменты инерции простейших однородных тел

1 

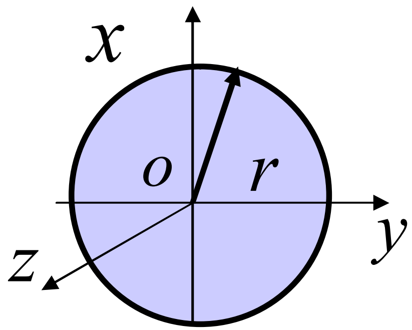
Тонкий стержень.

$$\Im_z = \frac{1}{3} ml^2; \quad \Im_{z'} = \frac{1}{12} ml^2.$$

2 

Тонкое кольцо.

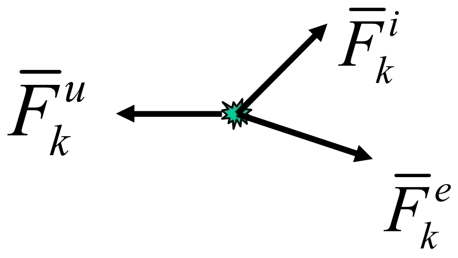
$$\Im_x = \Im_y = \frac{1}{2} m \cdot r^2; \quad \Im_z = m \cdot r^2.$$

3 

Тонкий сплошной диск.

$$\Im_x = \Im_y = \frac{1}{4} m \cdot r^2; \quad \Im_z = \frac{1}{2} m \cdot r^2.$$

§ 8.Принцип Даламбера для системы



$\overline{F}_k^u = -m_k \overline{a}_k$ – *сила инерции* k – *ой точки*

$1-$*ый вид*

$$\overline{F}_k^i + \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^u = 0, \quad (k = 1,...n) \qquad (8.1)$$

$2-$*ой вид*

$$\boxed{\overline{F}^e + \overline{F}^u = 0; \quad \overline{M}_o^e + \overline{M}_o^u = 0.} \qquad (8.2)$$

Здесь

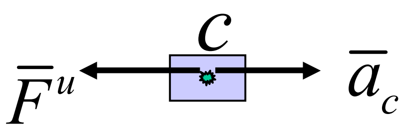
$$\overline{F}^e = \sum \overline{F}_k^e; \Big| \ \overline{F}^u = \sum \overline{F}_k^u; \Big| \ \overline{M}_o^e = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e; \Big| \ \overline{M}_o^u = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^u$$

§ 9. Вычисление сил инерции

$$\overline{F}^{u} = -M\overline{a}_{c} - \textit{главный вектор сил инерции}$$

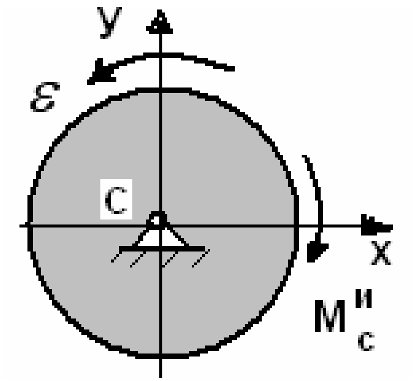
Силы инерции А.Т.Т.

1. *Поступательное движение*



$$F^{u} = Ma_{c}; \qquad \overline{M}_{c}^{u} = 0.$$

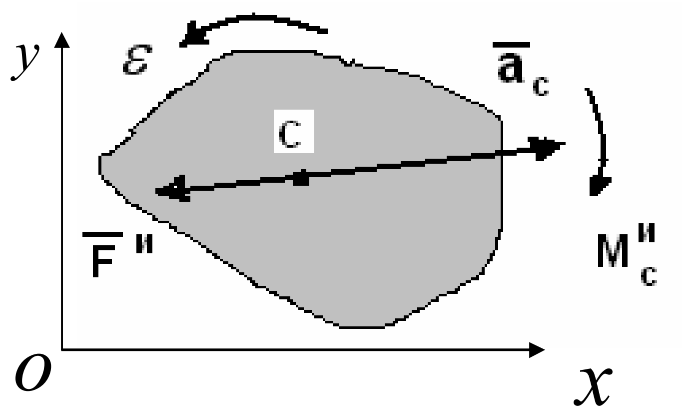
2. *Вращение вокруг главн. центр. оси инерции*



$$\overline{F}^{u} = 0; \quad M_{c}^{u} = M_{z}^{u} = I_{z}\varepsilon$$

$$M_{x}^{u} = 0; \quad M_{y}^{u} = 0.$$

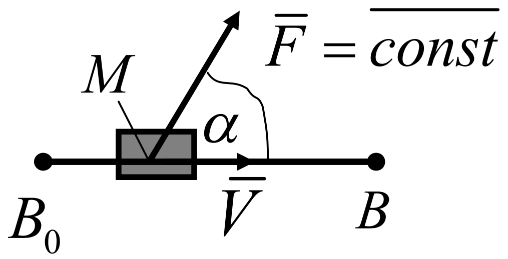
3.*Плоское движение А.Т.Т.*



$$F^u = Ma_c; \quad M_c^u = M_{zc}^u = I_c\varepsilon.$$

$$M_x^u = 0; \quad M_y^u = 0.$$

§10.Работа и мощность силы



$$B_0B = s$$

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

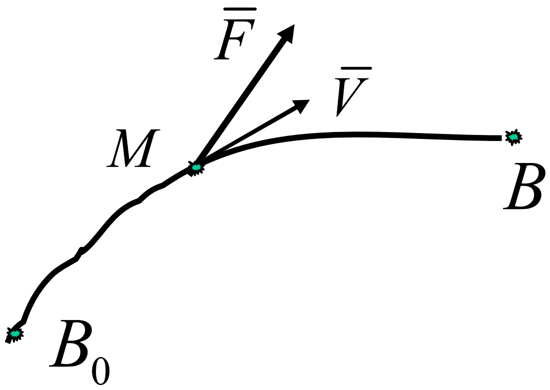
$$A = F_V \cdot s \qquad A = \overline{F} \cdot \overline{B_0B}$$

$$d'A = \overline{F} \cdot d\,\overline{r} \quad - \quad \textit{элементарная работа}$$

$$d'A = F \cdot V \cdot dt \tag{10.1}$$

$$d'A = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \tag{10.2}$$

Работа произвольной силы на любом перемещении



$$A=\int_{B_0}^{B}\overline{F}\cdot d\,\overline{r}=\int_{B_0}^{B}(F_x dx+F_y dy+F_z dz)\qquad(10.3)$$

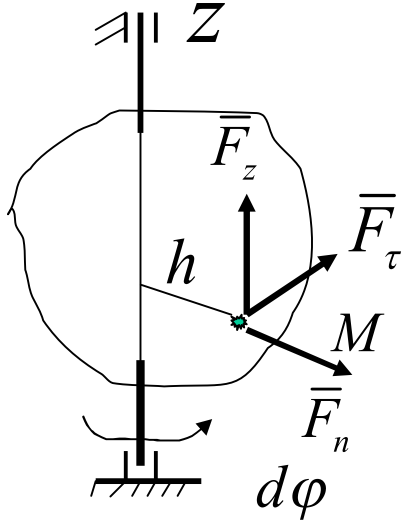
$$N=\overline{F}\cdot\overline{V}=F\cdot V\cdot\cos(\overline{F},\overline{V})\quad - \quad \textit{мощность силы}\qquad(10.4)$$

$$N=F_V\cdot V$$

§ 11. Работа и мощность сил, приложенных к А.Т.Т.

11.1 $A^i = \sum_k \int \overline{F}_k^i \cdot d\ \overline{r}_k = 0$ *или* $d'A^i = \sum_k \overline{F}_k^i \cdot d\ \overline{r}_k = 0$

11.2 *Работа и мощность сил при вращ. движ.*



$$\overline{F} = \overline{F}_n + \overline{F}_\tau + \overline{F}_z$$

$$d'A = F_\tau \cdot h \cdot d\varphi = m_z(\overline{F}) \cdot d\varphi$$

$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z \cdot d\varphi$, *где* $M_z = m_z(\overline{F})$ *вращающий момент*

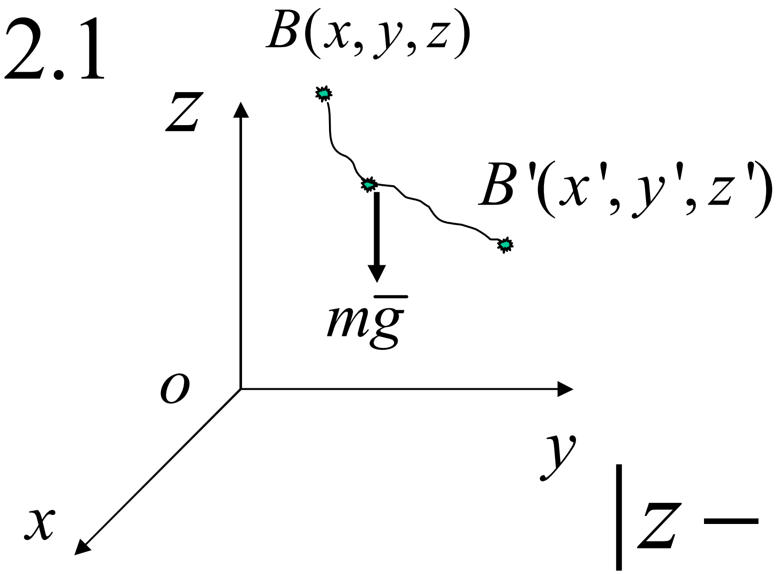
$M_z = const,$ *то* $\quad A = M_z(\varphi - \varphi_0)$

$$N = M_z \omega_z \ (Вт) \qquad мощность \ \ момента$$

$$1 \ Вт = 1 \ Дж / с. = 1 \ Н \cdot м / с.$$

§ 12. Работа силы тяжести и упругой силы

12.1



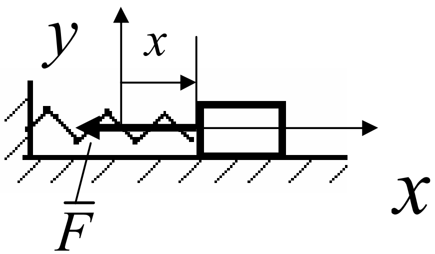
$$F_x = F_y = 0\ ,\quad F_z = -mg$$

$$d'A = -mg \cdot dz$$

$$A = -mg(z' - z)$$

$$|z - z'| = h\ ;\quad \boxed{A = \pm mgh}$$

12.2



$$F_x = -cx \qquad A = -cx^2/2$$

§ 13. Кинетическая энергия системы

$$T = \sum_k \frac{m_k V_k^2}{2} \qquad m_k, V_k \; - \; \textit{масса и скорость } k - \textit{ой точки}$$

Кинетическая энергия А.Т.Т.

13.1 Поступательное движение

$$T = \frac{MV_C^2}{2}$$

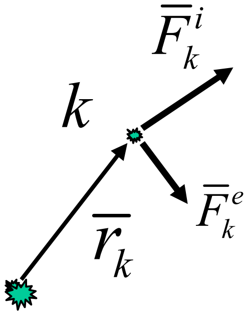
13.2 Вращательное движение

$$T = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2$$

13.3 Плоское движение

$$T = \frac{1}{2} M \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \cdot \omega^2$$

§ 14. Теорема об изменении кинетической энергии системы



$$m_k \frac{d\overline{V}_k}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i \ , \quad (k = \overline{1,n})$$

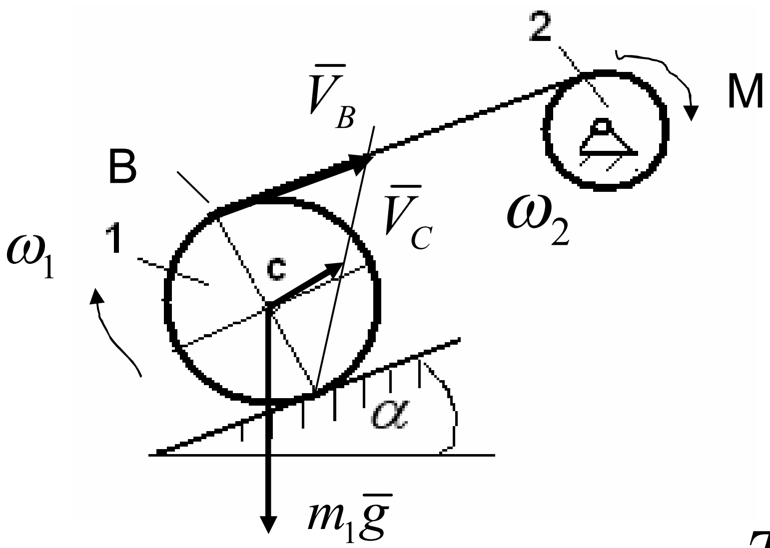
$$d\ \overline{r}_k = \overline{V}_k \cdot dt$$

$$\boxed{d\ T = d'A^e + d'A^i}$$

$$\boxed{T - T_0 = A^e + A^i}$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = N^e + N^i}$$

Пример



Дано: $\omega_2(0) = 0,$

m_1, m_2, r_1, r_2

Определить: $\omega_2(\varphi_2);\quad a_C.$

$$T = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^{\,2} + \frac{1}{2} m_1 V_c^{\,2} + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^{\,2};$$

$$V_c = \omega_2 r_2 / 2$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 r_2}{2 r_1};$$

$$I_1 = \frac{m_1 r_1^{\,2}}{2};\quad I_2 = \frac{m_2 r_2^{\,2}}{2};\quad T = \frac{1}{2} I_{ПР} \omega_2^{\,2};$$

$$I_{ПР} = I_2 + \frac{m_1 r_2^{\,2}}{4} + I_1 \frac{r_2^{\,2}}{4 r_1^{\,2}};$$

$$\frac{1}{2} I_{np} \omega_2^2 = (M - m_1 g \sin\alpha \cdot \frac{r_2}{2}) \cdot \varphi_2 \equiv M_{np} \cdot \varphi_2$$

$$I_{np} \omega_2 \cdot \dot{\omega}_2 = M_{np} \dot{\varphi}_2$$

$$\varepsilon_2 = M_{np} / I_{np}$$

$$\boxed{a_c = \varepsilon_2 r_2 / 2.}$$