ДИНАМИКА

1. Динамика материальной точки

1.1. Основные понятия и определения

Предметом *динамики* является изучение движения материальных тел под действием сил.

Понятие о силе было введено в статике. Силы в статике мы считали постоянными. В динамике наряду с постоянными силами рассматриваются силы, изменяющиеся по модулю и направлению.

В динамике при изучении движения принимают во внимание инертность тел. Инертность проявляется в том, что тело сохраняет движение в отсутствие действующих на него сил, а когда силы начинают действовать, то скорости точек тела меняются не мгновенно, а постепенно и тем медленнее, чем больше инертность тела. Количественной мерой инертности является *масса* тела. В общем случае движение тела зависит еще и от распределения масс в теле.

В качестве материальных объектов в механике рассматриваются материальная точка, абсолютно твердое тело и система материальных точек или тел. *Материальной точкой* называется точка, обладающая массой. *Абсолютно твердое тело* – это материальное тело, в котором расстояния между двумя любыми точками остаются неизменными. *Механической системой* материальных точек называется такая их совокупность, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных.

1.2. Законы динамики Галилея-Ньютона

В основу динамики положены следующие законы (аксиомы), являющиеся обобщением практической деятельности людей и проверяемые на опыте.

1. Существует *инерциальная система отсчета*. В такой системе материальная точка находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, если на нее не действуют силы.

2. В инерциальной системе отсчета вектор ускорения материальной точки пропорционален вектору силы, действующей на эту точку. Это – *основной закон динамики,* имеющий фундаментальное значение для всей динамики.

3. Две материальные точки взаимодействуют так, что силы взаимодействия равны по величине, противоположны по направлению и имеют общую линию действия.

4. Систему сил, действующих на материальную точку, можно заменить равнодействующей. Ускорение точки под действием системы сил равно ускорению под действием равнодействующей.

1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Основной закон динамики можно рассматривать одновременно как дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\bar{F}\left(\bar{r},\frac{d\bar{r}}{dt},t\right).$$

Проектируя это векторное уравнение на те или иные оси координат, можно получить различные формы скалярных дифференциальных уравнений движения материальной точки.

• Дифференциальные уравнения движения точки в декартовой системе координат:

$$m\ddot{x}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}\,;\ m\ddot{y}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}\,;\ m\ddot{z}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz}\,, \qquad (1.1)$$

где m – масса, x, y, z – координаты точки; F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции k-ой силы на оси координат.

• Дифференциальные уравнения движения точки в естественной системе координат:

$$m\frac{dV_\tau}{dt}=\sum_{k=1}^{n}F_{k\tau}\,;\ m\frac{V^2}{\rho}=\sum_{k=1}^{n}F_{kn}\,;\ 0=\sum_{k=1}^{n}F_{kв}\,, \qquad (1.2)$$

где m – масса; ρ – радиус кривизны; $F_{k\tau}$, F_{kn}, $F_{kв}$ – проекции силы на касательную, главную нормаль, бинормаль в данной точке траектории.

Пример. Груз вследствие толчка приобрел начальную скорость $\bar{V}_0$ и поднимается по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом; коэффициент трения равен f.

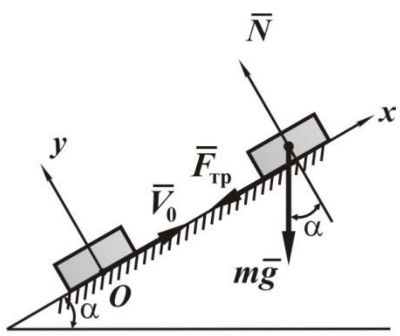


Рис. 1

Составить дифференциальные уравнения движения груза, если его движение происходит в вертикальной плоскости.

Изображаем груз в промежуточном положении на наклонной плоскости. Активной силой будет сила тяжести $m\bar{g}$. Реакцию шероховатой наклонной плоскости представляем в виде силы нормального давления $\bar{N}$ и силы трения скольжения $\bar{F}_{тр}$, равной по величине $f N$ и направленной в сторону, противоположную движению.

Так как груз движется поступательно, принимаем модель материальной точки.

Траектория и силы лежат в одной плоскости, поэтому выбираем плоскую прямоугольную систему координат. Ее начало O совмещаем с начальным положением груза, а ось Ox направляем по наклонной плоскости вправо – вверх. При этом координата груза в промежуточном положении положительна.

Находим проекции сил на оси:

$$F_x = -mg \cdot \sin\alpha - F_{тр}; \; F_y = N - mg\cos\alpha.$$

Дифференциальные уравнения движения груза:

$$m\ddot{x} = -mg \cdot \sin\alpha - F_{тр}; \; m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha.$$

Движение груза происходит только вдоль оси x, поэтому $\ddot{y} = 0$. Следовательно, $N = mg\cos\alpha$, что позволяет определить силу трения $F_{тр} = mg\, f\cos\alpha$. Подставляя значение силы трения в первое уравнение движения груза, получаем дифференциальное уравнение движения груза, поднимающегося по шероховатой наклонной плоскости вследствие толчка:

$$\ddot{x} = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)g.$$

1.4. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

Основной закон динамики и полученные из него дифференциальные уравнения движения материальной точки верны в инерциальной системе отсчета. Во многих случаях задачи динамики целесообразно рассматривать в той или иной неинерциальной системе. Здесь мы получим метод составления уравнений движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета.

Основной закон динамики $m\bar{a} = \bar{F}$ содержит абсолютное ускорение. Согласно кинематической формуле, $\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$, где $\bar{a}_r$ – относительное ускорение, $\bar{a}_e$ – переносное ускорение, $\bar{a}_c$ – кориолисово ускорение.

Подставив в основной закон динамики значение $\bar{a}$ и перенеся часть членов в правую часть, получим

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_c).$$

Введем обозначения $\bar{F}_e^{\text{и}} = -m\bar{a}_e$, $\bar{F}_c^{\text{и}} = -ma_c$. Эти величины имеют размерность силы. Будем называть эти векторы соответственно *переносной* и *кориолисовой силой инерции.* Тогда уравнение примет вид

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_e^{\text{и}} + \bar{F}_c^{\text{и}}. \qquad (1.3)$$

Получаем правило:

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе координат в форме второго закона Ньютона, необходимо к действующим на точку активным силам и реакциям связей присоединить переносную и кориолисову силы инерции.

Пусть в подвижной системе координат материальная точка имеет координаты x, y, z. Тогда проекции ее относительного ускорения на эти оси

$$a_{rx} = \ddot{x}, \quad a_{ry} = \ddot{y}, \quad a_{rz} = \ddot{z}.$$

Проектируя векторное уравнение на оси подвижной системы координат, получаем дифференциальные уравнения относительного движения точки:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + F_{ex}^{\text{и}} + F_{cx}^{\text{и}}, \\ m\ddot{y} &= F_y + F_{ey}^{\text{и}} + F_{cy}^{\text{и}}, \\ m\ddot{z} &= F_z + F_{ez}^{\text{и}} + F_{cz}^{\text{и}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Пример. Проволочная полуокружность радиуса R вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью Ω. По ней из точки A скользит без трения кольцо M массы m. Найти скорость V_1 кольца относительно проволоки в точке B, если его начальная относительная скорость $V_0 = 0$.

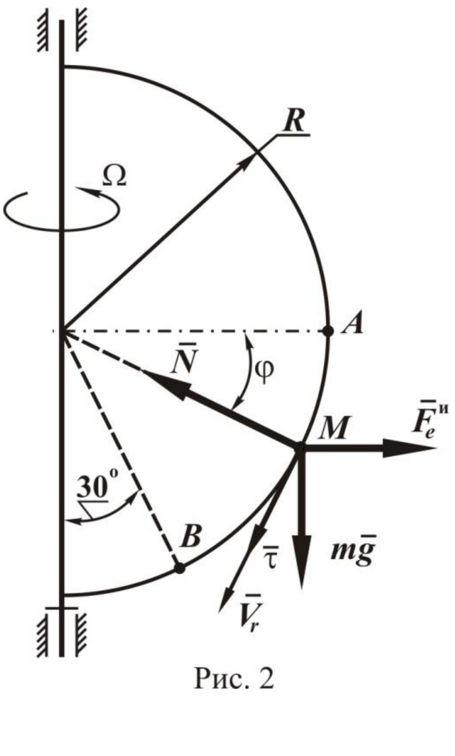


Рис. 2

Решение. Свяжем с полуокружностью систему координат (рис. 2). Выбранная подвижная система координат является неинерциальной. Прибавим к действующим на кольцо силе тяжести $m\bar{g}$ и нормальной реакции $\bar{N}$ силы инерции: переносную $\bar{F}_e^{\text{и}}$ и кориолисову $\bar{F}_c^{\text{и}}$. Так как $\Omega = const$, то

$$a_e = a_e^n = R\cos\varphi \cdot \Omega^2 \text{ и } F_e^{\text{и}} = mR\Omega^2 \cos\varphi.$$

Сила $\bar{F}_e^{и}$ направлена от оси вращения. Кориолисово ускорение $\bar{a}_c = 2\bar{\Omega} \times \bar{V}_r$ и кориолисова сила инерции перпендикулярны плоскости полуокружности.

Уравнение движения кольца в векторном виде в форме второго закона Ньютона

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_e^{и} + \bar{F}_c^{и} . \qquad (a)$$

Найдем проекцию уравнения (a) на направление $\bar{\tau}$, учитывая, что $\bar{N} \perp \bar{\tau}$, $\bar{F}_c^{и} \perp \bar{\tau}$, $a_r^{\tau} = R\ddot{\varphi}$:

$$mR\ddot{\varphi} = mg\cos\varphi - mR\Omega^2 \cos\varphi \sin\varphi .$$

После деления на mR, замены независимой переменной

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$$

и разделения переменных получим

$$\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \frac{g}{R}\cos\varphi\, d\varphi - \Omega^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi .$$

Проинтегрируем это уравнение с учетом заданных начальных условий

$$\int_0^{\dot{\varphi}_1} \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \frac{g}{R}\int_0^{60^0} \cos\varphi\, d\varphi - \Omega^2 \int_0^{60^0} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi .$$

Здесь $\dot{\varphi}_1$ – значение производной $\dot{\varphi}$ в точке B.

Получим

$$\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} = \frac{g}{R}\sin 60^0 - \Omega^2 \frac{\sin^2 60^0}{2} ,$$

откуда $\dot{\varphi}_1 = \sqrt{\dfrac{g\sqrt{3}}{R} - \dfrac{3}{4}\Omega^2}$ и относительная скорость кольца в точке B

$$V_1 = R\dot{\varphi}_1 = R\sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{R} - \frac{3}{4}\Omega^2} .$$

Видно, что не при всяких значениях параметров задача имеет решение. Чтобы кольцо достигло точки B, должно выполняться условие:

$$\Omega^2 \le \frac{4g}{R\sqrt{3}} .$$

1.5. Прямые и обратные задачи динамики

Все задачи динамики делятся на прямые и обратные.

Прямая задача: зная массу точки и ее уравнения движения, определить равнодействующую приложенных к точке сил.

Пусть движение свободной точки массы m задано в координатной форме:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\,.$$

Дважды дифференцируя эти функции по времени и используя уравнения (1.1), находим:

$$\sum F_{kx} = m\ddot{x},\quad \sum F_{ky} = m\ddot{y},\quad \sum F_{kz} = m\ddot{z}\,.$$

Равнодействующая вычисляется по формуле

$$F = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2}\,.$$

Пример. Определить силу, действующую на точку массы m=5 *кг*, закон движения которой задан уравнениями: $x = 5t^2$, $y = 3t$ (x, y – в метрах, t – в секундах).

Решение. Найдем $F_x = m\ddot{x} = 50\,H,\ F_y = m\ddot{y} = 0,\ F_z = 0,$ т.е. $F = 50\,H$.

Обратная задача**:** зная приложенные к свободной материальной точке силы, массу точки, начальные условия (т.е. начальное положение и начальную скорость), определить закон движения. Эта задача называется основной задачей динамики. Чтобы найти уравнения движения точки, необходимо проинтегрировать систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В результате интегрирования этой системы в решении появляются шесть произвольных постоянных. Они определяются по начальным условиям движения. В случае несвободной материальной точки необходимо знать дополнительно уравнения связи, а в роли неизвестных выступают закон движения и реакция связи.

Пример. Материальная точка массой m движется из начала координат вдоль оси x с начальной скоростью V_0, испытывая сопротивление движению $\bar{F}$, где $F = b\cdot\dot{x}$, b – заданная постоянная. Необходимо определить закон движения точки.

Рис. 3

Решение. Дифференциальное уравнение движения точки вдоль оси Ox $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$ в данном случае приобретает вид: $m\ddot{x} = -b\dot{x}$, или

$\ddot{x}+\dfrac{b}{m}\dot{x}=0$. Характеристическое уравнение $k^2+\dfrac{b}{m}k=0$, его корни: $k_1=0,\ k_2=-\dfrac{b}{m}$. Общее решение дифференциального уравнения

$$x=c_1+c_2e^{-\frac{b}{m}t}. \qquad (а)$$

Продифференцируем формулу (*а*) по времени:

$$\dot{x}=-c_2\frac{b}{m}e^{-\frac{b}{m}t}. \qquad (б)$$

При $t=0$ уравнения (*а*) и (*б*), с учетом начальных условий, принимают вид:

$$0=c_1+c_2,\quad V_0=-c_2\frac{b}{m}. \qquad (в)$$

Из уравнений (*в*) находим: $c_1=\dfrac{m}{b}V_0$, $c_2=-\dfrac{m}{b}V_0$.

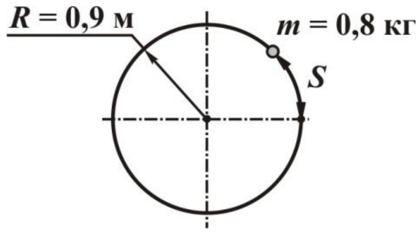
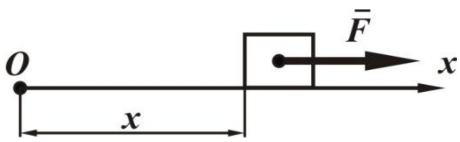
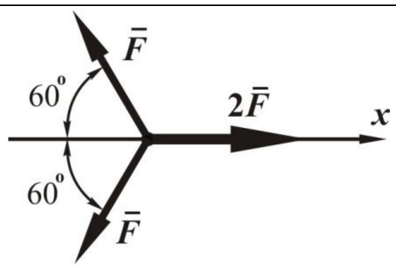
Закон движения $x=\dfrac{m}{b}V_0\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)$.

Контрольные вопросы

1. Что является количественной мерой инертности тела?
2. Напишите дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат и на естественные оси.
3. Запишите основной закон динамики для относительного движения точки.
4. Чему равны переносная и кориолисова силы инерции материальной точки?
5. Какая система отсчета называется инерциальной?
6. Назовите две основные задачи динамики свободной материальной точки.
7. Как определяются произвольные постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений движения материальной точки?
8. Сформулируйте обратную задачу динамики материальной точки.

Таблица 1

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Материальная точка движется под действием силы $\bar{F} = 6\bar{\tau} + 8\bar{n}$ (Н) с ускорением $5\,\text{м/с}^2$. Масса точки $m = ...\,\text{кг}$. **Ответ**: 2.	
2	Материальная точка движется под действием силы по окружности согласно уравнению $S = 9t$ (метры). Модуль силы $F = ...\,\text{Н}$. **Ответ**: 72	
3	Свободная материальная точка массой $m = 2\,\text{кг}$ движется под действием силы $\bar{F} = (5 \times \bar{i} + 2 \times \bar{j} + \sqrt{7} \times \bar{k})\,\text{Н}$. Ускорение $a = ...\,\text{м/с}^2$. **Ответ**: 3	
4	Тело массой $m = 2\,\text{кг}$ движется по закону $x = \frac{32\sqrt{2}}{\pi} \cdot \sin\frac{\pi t}{4}$ (метры) под действием силы $\bar{F}$. В момент $t_1 = 1\,\text{с}$ модуль силы $F(t_1) = ...\,\text{Н}$. **Ответ**: 4	
5	Материальная точка массой $m = 3\,\text{кг}$ движется под действием системы сил, где $F = 6\,\text{Н}$, с ускорением $a = ...\,\text{м/с}^2$. **Ответ**: 2	

2. Введение в динамику механической системы

2.1. Силы внешние и внутренние. Масса системы. Центр масс

Действующие на механическую систему активные силы и реакции связей разделяют на внешние силы $\overline{F}_k^e$ и внутренние силы $\overline{F}_k^i$.

Внешними называют силы, действующие на точки системы со стороны точек, не входящих в систему. *Внутренними* называют силы, с которыми точки системы действуют друг на друга.

Свойства внутренних сил:

1. Геометрическая сумма (главный вектор) внутренних сил системы равняется нулю.
2. Сумма моментов (главный момент) внутренних сил относительно любого центра или оси равняется нулю.

Массой механической системы называется сумма масс всех ее материальных точек или тел:

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k .$$

Центром масс механической системы называется точка, координаты которой определяются формулами:

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k ; \;\; y_c = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k ; \;\; z_c = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k ,$$

где x_k, y_k, z_k – координаты материальной точки, масса которой m_k.

2.2. Момент инерции относительно оси. Радиус инерции

Момент инерции относительно оси z (или осевой момент инерции)

$$J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 ,$$

где m_k – масса k - той точки; h_k – расстояние от этой точки до оси z.

Осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Моменты инерции относительно осей координат $Oxyz$

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2);$$
$$J_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2);$$
$$J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

где $(y_k^2+z_k^2)$, $(z_k^2+x_k^2)$, $(x_k^2+y_k^2)$ – квадраты расстояний k-той точки системы до осей Ox, Oy, Oz, соответственно.

Радиус инерции механической системы относительно оси z

$$\rho_z=\sqrt{J_z/m}\ ,$$

где m – масса системы.

2.3. Моменты инерции относительно параллельных осей

Теорема Гюйгенса–Штейнера: *момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.*

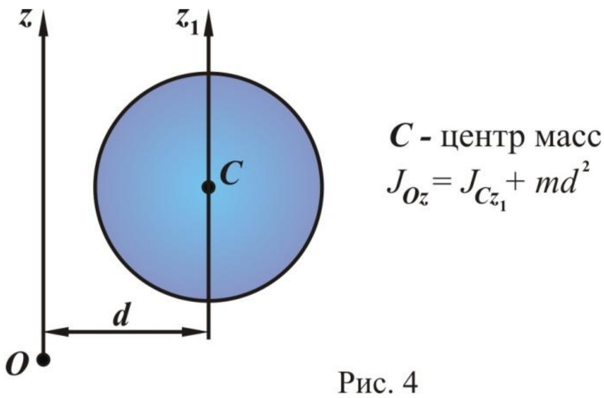


Рис. 4

2.4. Моменты инерции некоторых однородных тел

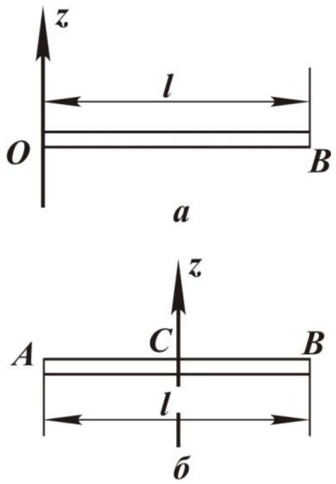


Рис. 5

Момент инерции однородного тонкого стержня массы M и длины l относительно оси z, проходящей перпендикулярно стержню через его конец (рис. 5, *а*), равен

$$J_{Oz}=\frac{ml^2}{3}$$

и относительно оси, проходящей через его центр тяжести (рис. 5, *б*), равен

$$J_{Cz}=\frac{ml^2}{12}.$$

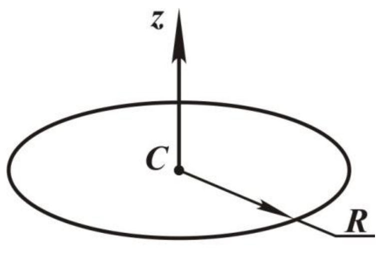


Рис. 6

Момент инерции тонкого однородного кольца с массой m и радиусом R относительно оси z, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр тяжести (рис. 6), равен

$$J_{Cz}=mR^2.$$

Момент инерции однородного круглого цилиндра с массой m и радиусом R (рис. 7) относительно продольной оси z равен

$$J_{Cz}=\frac{mR^2}{2}.$$

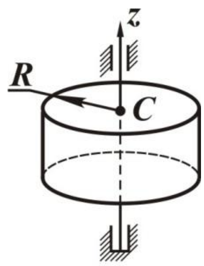


Рис. 7

2.5. Центробежные моменты инерции

Проведем через некоторую точку O тела координатные оси $Oxyz$.

Центробежными моментами инерции по отношению к этим осям называют величины

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k; \; J_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k; \; J_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k ,$$

где x_k, y_k, z_k – координаты k – той точки системы с массой m_k.

Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Ось Ox называется *главной осью инерции* для данной точки механической системы, если центробежные моменты инерции J_{xz}, J_{xy}, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю:

$$J_{xy} = 0; \; J_{xz} = 0 .$$

Ось материальной симметрии механической системы является главной осью инерции в любой точке этой оси.

Любая прямая, перпендикулярная к плоскости материальной симметрии, является главной осью инерции для точки пересечения прямой с плоскостью.

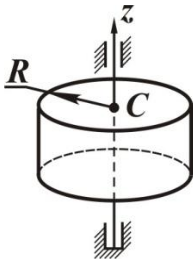
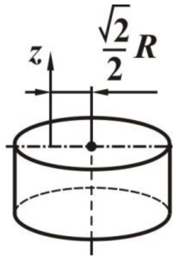
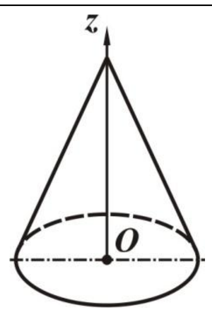
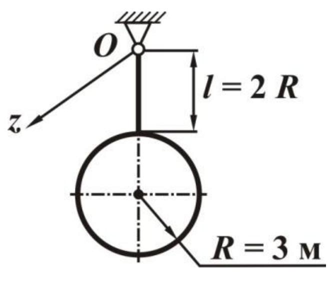
Главные оси инерции, проходящие через центр масс тела, называют *главными центральными осями инерции* тела.

Контрольные вопросы

1. Перечислите свойства внутренних сил механической системы.
2. Чему равна масса системы материальных точек?
3. Как определяется положение центра масс механической системы?
4. Какими величинами характеризуется распределение масс в механической системе?
5. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
6. Как связаны моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела?

Таблица 2

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Однородный цилиндр массой $m = 2$ кг, радиусом $R = 7$ см имеет осевой момент инерции $J_z = ...\ \text{кг} \cdot \text{см}^2$. **Ответ**: 49	
2	Масса однородного цилиндра $m = 0{,}5$ кг, радиус $R = 10$ см. Момент инерции $J_z = ...\ \text{кг} \cdot \text{см}^2$. **Ответ**: 50	
3	Момент инерции шкива $J_z = 27\ \text{кг} \cdot \text{см}^2$, масса $m = 3$ кг. Радиус инерции $\rho_z = ...$ м. **Ответ**: 3	
4	Радиус инерции конуса $\rho_z = 4$ м, масса $m = 3$ кг. Момент инерции $J_z = ...\ \text{кг} \cdot \text{см}^2$. **Ответ**: 48	
5	Момент инерции системы, состоящей из однородных стержня массой $m = 1$ кг и кольца массой $m = 2$ кг, относительно оси Oz $J_{Oz} = ...\ \text{кг} \cdot \text{см}^2$. **Ответ**: 192	

3. Принцип Даламбера (метод кинетостатики)

3.1. Принцип Даламбера для точки и механической системы

Принцип Даламбера устанавливает единый подход к исследованию движения несвободной материальной точки и несвободной материальной системы вне зависимости от вида связей, налагаемых на их движение. Этот подход заключается в придании динамическим уравнениям вида уравнений равновесия, что позволяет при решении задач динамики применять простые и наглядные приемы и методы статики.

Если к несвободной материальной точке применить аксиому освобождаемости от связей, то основное уравнение динамики примет вид

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}.$$

Здесь $m-$ масса точки; $\bar{a}-$ ускорение точки; $\bar{F}-$ равнодействующая активных сил; $\bar{R}-$ равнодействующая реакций связей.

Введем в рассмотрение вектор силы инерции материальной точки

$$\bar{F}^{и} = -m\bar{a},$$

получим

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{F}^{и} = 0.$$

Это уравнение выражает

принцип Даламбера для материальной точки:

если в любой момент времени к действующим на точку активным силам и реакциям связей присоединить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

принцип Даламбера для системы материальных точек:

если к активным силам и реакциям связей, действующим на каждую материальную точку системы, добавить силы инерции точек, то в любое мгновение времени полученная система сил будет уравновешенной.

3.2. Следствия из принципа Даламбера для механической системы

При движении механической системы геометрическая сумма главных векторов внешних активных сил, реакций внешних связей и сил инерции системы, а также геометрическая сумма главных моментов указанных сил относительно произвольного центра равны нулю в любое мгновение времени

$$\bar{F}^{e} + \bar{F}^{и} = 0; \ \bar{M}_0^{e} + \bar{M}_0^{и} = 0,$$

$\bar{F}^e, \bar{M}_0^e$ – главный вектор и главный момент внешних сил, включая реакции внешних связей, $\bar{F}^и$, $\bar{M}_0^и$ – главный вектор и главный момент сил инерции.

Двум векторным уравнениям соответствуют шесть уравнений в проекциях на оси декартовых координат:

$$F_x^e + F_x^и = 0, \quad F_y^e + F_y^и = 0, \quad F_z^e + F_z^и = 0,$$

$$M_x^e + M_x^и = 0, \quad M_y^e + M_y^и = 0, \quad M_z^e + M_z^и = 0$$

За оси координат можно выбрать любую систему декартовых осей, как неподвижных, так и перемещающихся произвольным образом в пространстве.

3.3. Главный вектор и главный момент сил инерции

Главный вектор сил инерции механической системы (в частности, твердого тела) *равен произведению массы системы* (тела) *на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.*

1. При ***поступательном движении*** тела силы инерции приводятся к равнодействующей

$$\bar{F}^и = -m\bar{a}_C,$$

проходящей через центр масс тела.

Здесь m – масса тела; $\bar{a}_C$ – ускорение центра масс.

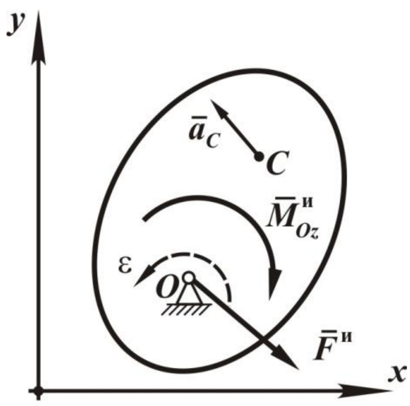


Рис. 8

2. ***Вращательное движение***. Пусть тело имеет плоскость материальной симметрии xy и вращается вокруг оси Oz, перпендикулярной этой плоскости. Силы инерции такого вращающегося тела приводятся к силе

$$\bar{F}^и = -m\bar{a}_C,$$

приложенной в точке O, и к паре с моментом

$$M_{Oz}^и = -J_{Oz} \cdot \varepsilon,$$

лежащей в плоскости симметрии тела.

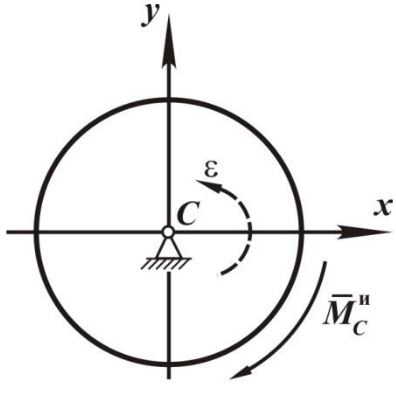


Рис. 9

При вращательном движении тела вокруг главной центральной оси инерции Cz силы инерции приводятся к одной только паре с моментом $M_{Cz}^и = -J_{Cz} \cdot \varepsilon_z$, лежащей в плоскости симметрии тела.

Здесь ε_z – проекция углового ускорения на ось z, $M^{и}_{Cz}$ –главный момент сил инерции.

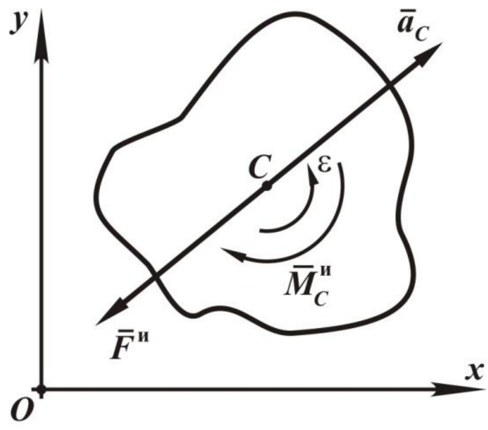


Рис. 10

Силы инерции при ***плоском движении*** тела в плоскости материальной симметрии XOY

$$M^{и}_C = J_C \cdot \varepsilon;$$

$$\bar{F}^{и} = -m \cdot \bar{a}_C;\ F^{и} = ma_C.$$

Пример. Груз 2 массой $m_2 = 4m$ подвешен на нити к барабану 1 радиусом R и массой $m_1 = 2m$. Момент трения нити о барабан $M_{тр} = 0{,}1mgR$. $\rho = 0{,}707R$. Необходимо определить величину углового ускорения ε барабана 1.

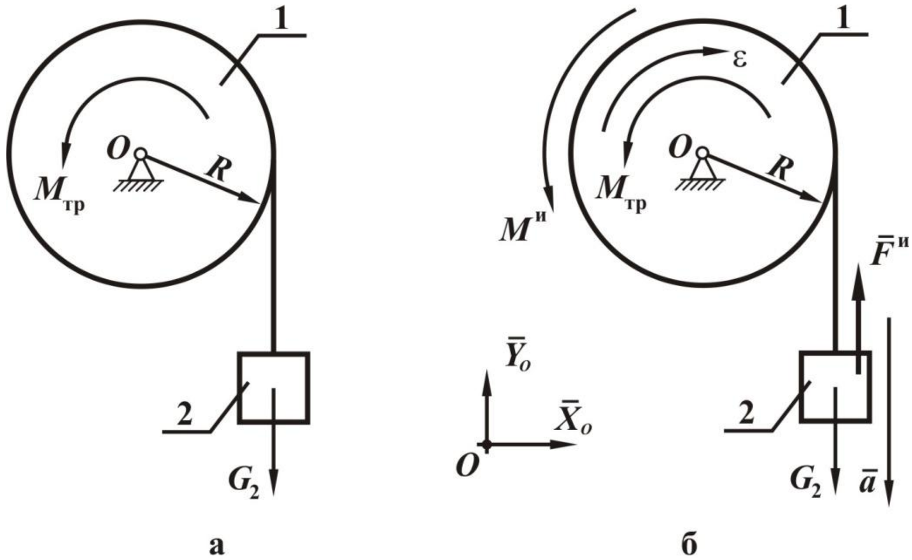


Рис. 11

Решение.

По модулю определяем $F^{и} = m_2 \cdot a$, $M^{и} = J_1 \cdot \varepsilon$. Ускорение груза 2 определим как $a = \varepsilon R$. Момент инерции барабана $J_1 = m_1 \cdot \rho^2$.

$$\sum M_O(\bar{F}_K) = 0.$$

$$M^{и} + M_{тр} + F^{и} \cdot R - G_1 \cdot R = 0;$$

$$mR^2 \cdot \varepsilon + 0.1mgR + 4mR^2 \cdot \varepsilon - 2mgR = 0.$$

Преобразуя полученное выражение, находим: $\varepsilon = 0{,}38\dfrac{g}{R}$.

3.4. Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела

Следствия из принципа Даламбера для механической системы позволяют получить дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоского движения твердого тела.

Дифференциальные уравнения поступательного движения тела:

$$m\ddot{x}_C = F_x^e;\ m\ddot{y}_C = F_y^e;\ m\ddot{z}_C = F_z^e,$$

где F_x^e, F_y^e, F_z^e – проекции главного вектора внешних сил на оси координат.

Дифференциальное уравнение вращательного движения тела

$$J_z \cdot \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e) \equiv M_z^e,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения; φ – угол поворота тела; M_z^e – главный момент внешних сил относительно оси вращения.

Дифференциальные уравнения плоского движения тела:

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e;\ m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e;\ J_{Cz} \cdot \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_{Cz}(\bar{F}_k^e),$$

где x_C, y_C – координаты центра масс; φ – угол поворота тела; J_{Cz} – момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс; F_{kx}^e, F_{ky}^e – проекции внешних сил $\bar{F}_k^e$ на оси координат.

Пример. Вал маховика массой m с радиусом инерции ρ вращается в опорах, обладающих постоянным моментом трения M.

Составить дифференциальное уравнение вращения маховика.

Решение. Расчетная схема задачи представлена на рисунке 12.

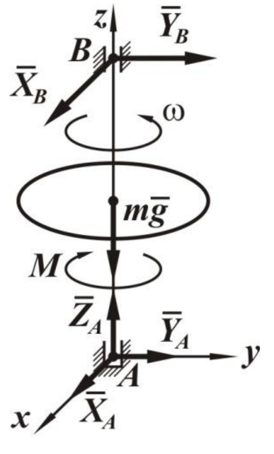


Рис. 12

Момент инерции маховика $J_z = m\rho^2$. Сумма моментов внешних сил относительно оси z $M_z^e = -M$. Подставляем эти величины в дифференциальное уравнение вращательного движения тела, получаем:

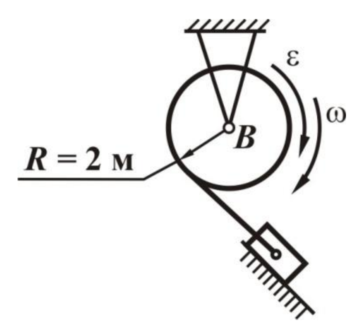
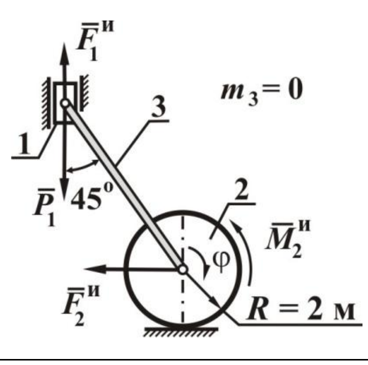
$$m\rho^2\ddot{\varphi} = -M.$$

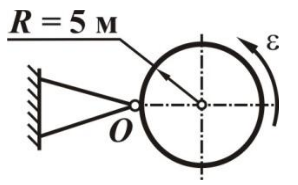
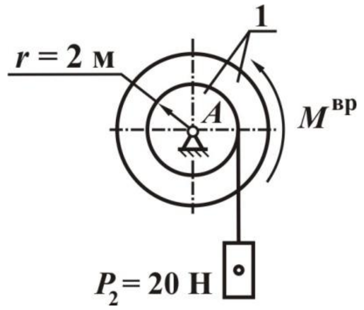
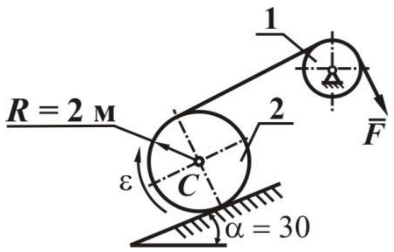
Контрольные вопросы

1. Чему равна сила инерции материальной точки?
2. Как направлена сила инерции материальной точки?
3. Чему равна и как направлена сила инерции материальной точки, равномерно движущейся по окружности?
4. Учитываются ли внутренние силы механической системы в принципе Даламбера для механической системы?
5. Как вычислить главный вектор сил инерции механической системы и твердого тела?
6. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси симметрии. Чему равен главный момент сил инерции?
7. Сформулируйте и запишите следствия из принципа Даламбера для механической системы.
8. Запишите дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.
9. Запишите дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Таблица 3

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Масса груза $m = 5$ кг, угловое ускорение $\varepsilon = 3$ рад/с^2, угловая скорость $\omega = 2$ рад/с. Модуль главного вектора сил инерции груза $F^{и} = \ldots$ Н. **Ответ**: 30	
2	Силы инерции $F_1^{и} = 4$Н, $F_2^{и} = 3$Н. Величина главного вектора сил инерции системы $F^{и} = \ldots$ Н. **Ответ**: 5	

3	Масса однородного диска $m = 2$ кг, угловое ускорение $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Модуль главного момента сил инерции диска $M_O^{и} = \ldots$ Н·м. **Ответ**: 225	
4	Момент инерции тела 1 $J_A = 2$ кг·м^2, $g = 10$ м/с^2, $M^{вр} = 10$ Н·м. Угловое ускорение $\varepsilon = \ldots$ рад/с^2. **Ответ**: 5	
5	Однородный диск катится без скольжения под действием силы $F = 46$ Н и силы тяжести; $m_1 = 0$, $g = 10$ м/с^2. Угловое ускорение $\varepsilon = 6$ рад/с^2. Масса диска $m = \ldots$ кг. **Ответ**: 2	
6	Приведено два из трёх уравнений плоского движения (в плоскости xOy) твёрдого тела: $m\ddot{x}_C = \sum F_x^e$; $J_{Cz} \cdot \ddot{\varphi} = \sum M_{Cz}\left(\bar{F}^e\right)$. Недостающее уравнение … **Ответ**: $m\ddot{y}_C = \sum F_y^e$	
7	Приведено два из трёх уравнений поступательного движения твёрдого тела в пространстве: $m\ddot{x}_C = \sum\limits_k F_{kx}^e$, $m\ddot{y}_C = \sum\limits_k F_{ky}^e$. Недостающее уравнение … **Ответ**: $m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e$	

Индивидуальное задание №1

Исследование поступательного и вращательного движений твердого тела

Механическая система состоит из колес 1 и 2 и груза 3. К колесу 1 приложена пара сил с моментом $M = M(t)$ или сила $P = P(t)$. Время t отсчитывается от момента $t_0 = 0$, когда угловая скорость колеса 1 равна ω_{10}; момент сил сопротивления ведомого колеса 2 равен M_C.

Массы колес равны m_1 и m_2; для всех вариантов масса груза $m_3 = 400$ кг. Радиусы больших и малых окружностей колес R_1, r_1, R_2, r_2. Для всех вариантов $r_1 = 0{,}6R_1$, $r_2 = 0{,}7R_2$. Схемы механических систем представлены в таблице 4, а необходимые для решения данные приведены в таблице 5.

Требуется найти уравнение движения тела, указанного в последней графе таблицы 5. Определить также натяжение нитей в заданный момент времени, а в вариантах, где имеется соприкасание колес, найти окружное усилие в точке их касания. Колеса, для которых радиусы инерции ρ_1 и ρ_2 в таблице 5 не заданы, считать сплошными однородными дисками.

Пример выполнения задания.

Дано: Механическая система, состоящая из колес 1 и 2 и груза 3 (рис. 13). $m_1 = 100$ кг; $m_2 = 150$ кг; $m_3 = 400$ кг; $M = 4200 + 200t$ Н·м; $M_C = 2000$ Н·м; $R_1 = 60$ см; $R_2 = 40$ см; $r_2 = 20$ см; $\rho_1 = 20\sqrt{2}$ см; $\rho_2 = 30$ см; $\omega_{10} = 2$ рад/с.

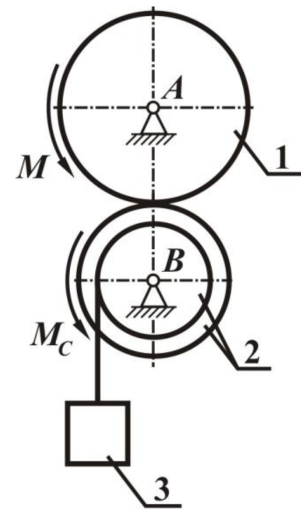


Рис. 13

Найти уравнение $\varphi_2 = f(t)$ вращательного движения колеса 2, а также окружное усилие в точке касания колес и натяжение нити в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение.

Разделим механизм на отдельные звенья (см. рис. 14).

К колесу 1 приложены сила тяжести $\bar{G}_1$, момент M, составляющие реакции опоры $\bar{Y}_A, \bar{Z}_A$, окружное усилие $\bar{S}_1$ и нормальная реакция $\bar{N}_1$ колеса 2 (см. рис. 14, а).

К звену 2 приложены сила тяжести $\bar{G}_2$, момент сил сопротивления M_C, составляющие реакции опоры $\bar{Y}_B, \bar{Z}_B$, натяжение $\bar{T}$ нити, к которой подвешен груз, окружное усилие $\bar{S}_2$ и нормальная реакция $\bar{N}_2$ колеса 1 (рис. 14, б).

К грузу 3 приложены сила тяжести $\bar{G}_3$ и натяжение нити $\bar{T}'$ (рис. 14, в).

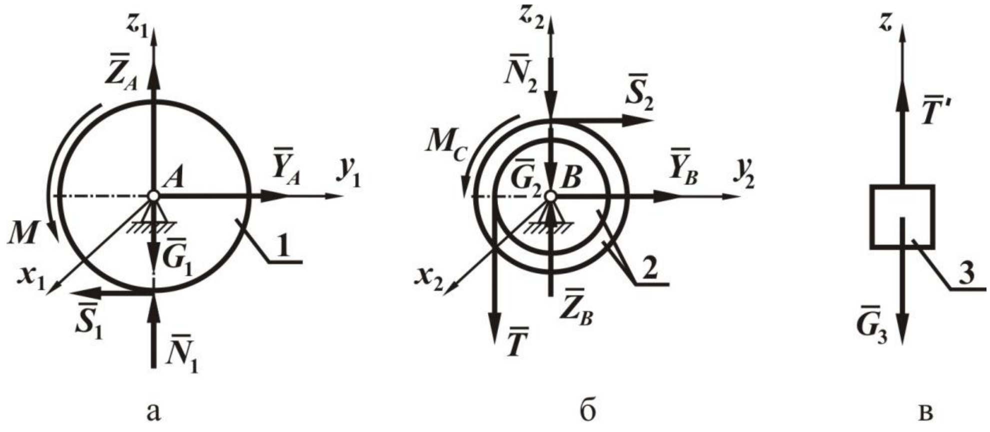


Рис. 14

Согласно закону равенства действия и противодействия:

$$S_2 = S_1,\ N_2 = N_1,\ T' = T.$$

Составим дифференциальное уравнение вращения колеса 1 вокруг оси x_1:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = \sum M^e_{kx_1},\ \sum M^e_{kx_1} = M - S_1R_1.$$

Дифференциальное уравнение вращения колеса 1 имеет вид:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = M - S_1R_1. \qquad (1)$$

Составим дифференциальное уравнение вращения звена 2 вокруг оси x_2. При этом учтем следующее. Для колеса 1 за положительное направление отсчета угла φ_1 и моментов сил принято направление против хода часовой стрелки. При вращении колеса 1 в положительном направлении звено 2 вращается по часовой стрелке. Это направление для звена 2 будем считать положительным.

$$J_2\ddot{\varphi}_2 = \sum M^e_{kx_2},\ \sum M^e_{kx_2} = S_2R_2 - Tr_2 - M_C.$$

Дифференциальное уравнение вращения колеса 2 имеет вид:

$$J_2\ddot{\varphi}_2 = S_2R_2 - Tr_2 - M_C. \qquad (2)$$

Составим дифференциальное уравнение движения груза (положительное направление движения – вверх):

$$m_3\ddot{z} = \sum F^e_{kz},\ \sum F^e_{kz} = T' - G_3.$$

Дифференциальное уравнение поступательного движения груза

$$m_3\ddot{z} = T' - G_3. \qquad (3)$$

Составлено три уравнения (1), (2), (3), которые содержат пять неизвестных: силы T и S, угловые ускорения $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2$ и линейное ускорение $\ddot{z}$. Недостающие уравнения получим, составив уравнения связей

$$\ddot{\varphi}_1 / \ddot{\varphi}_2 = R_2 / R_1, \qquad (4)$$

$$\ddot{z} = \ddot{\varphi}_2 \cdot r_2. \qquad (5)$$

Используем уравнения (3), (4), (5) для того, чтобы исключить из уравнений (1) и (2) неизвестные $\ddot{\varphi}_1, \ddot{z}, T$. Получим

$$J_1\ddot{\varphi}_2 R_2 / R_1 = M - S_2 R_1,$$

$$\left(J_2 + m_3 r_2^2\right)\ddot{\varphi}_2 = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C.$$

Исключим из этих уравнений неизвестную S_2 и из полученного уравнения найдем

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{MR_2R_1 - \left(m_3 g r_2 + M_C\right)R_1^2}{J_1R_2^2 + \left(J_2 + m_3 r_2^2\right)R_1^2}. \qquad (6)$$

Моменты инерции $J_1 = m_1\rho_1^2, J_2 = m_2\rho_2^2$. Учитывая исходные данные, находим $J_1 = 8$ кг$\cdot$м^2; $J_2 = 13{,}5$ кг$\cdot$м^2 .

Теперь по формуле (6) получаем

$$\ddot{\varphi}_2 = 4{,}034t + 0{,}4597. \qquad (7)$$

Интегрируем это уравнение дважды, используя начальные условия задачи: при $t = 0$

$$\varphi_{20} = 0, \dot{\varphi}_{20} = \omega_{10} R_1/R_2, \text{ или } \dot{\varphi}_{20} = 3 \text{ рад/с}.$$

Первый интеграл

$$\int_{\dot{\varphi}_{20}}^{\dot{\varphi}_2} d\dot{\varphi}_2 = 4{,}034\int_0^t tdt + 0{,}4597\int_0^t dt;\ \dot{\varphi}_2 = 2{,}017t^2 + 0{,}4597t + 3.$$

Второй интеграл

$$\int_{\varphi_{20}}^{\varphi_2} d\varphi_2 = 2{,}017\int_0^t t^2dt + 0{,}4597\int_0^t tdt + 3\int_0^t dt;\ \varphi_2 = 0{,}672t^3 + 0{,}230t^2 + 3t.$$

Мы получили уравнение вращательного движения звена 2.

Окружное усилие определяем из уравнения (2):

$$S_2 = \left(J_2\ddot{\varphi}_2 + Tr_2 + M_C\right) / R_2.$$

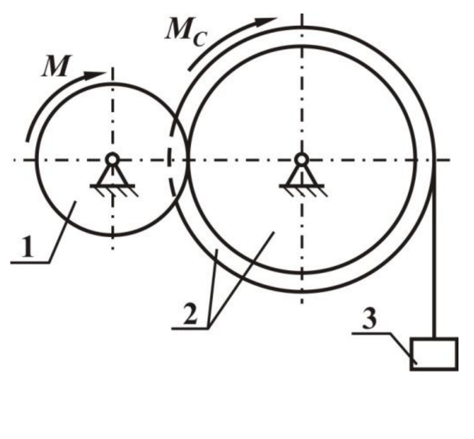
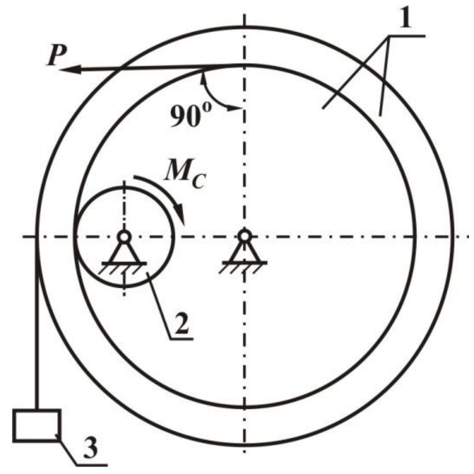
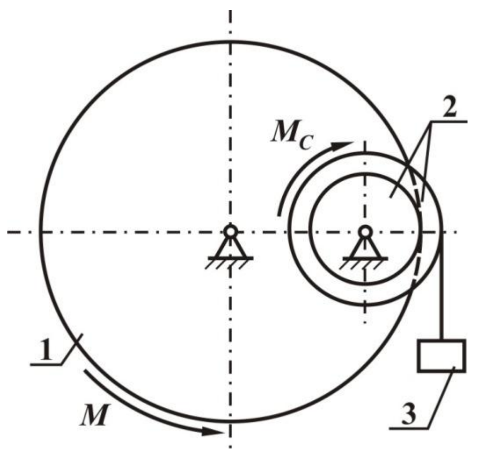
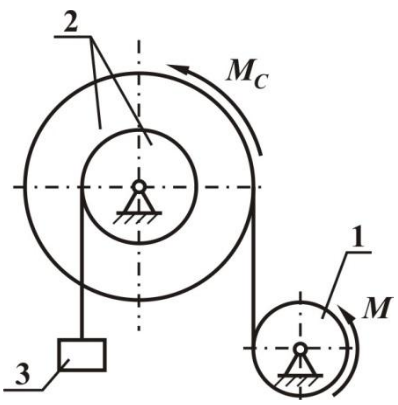
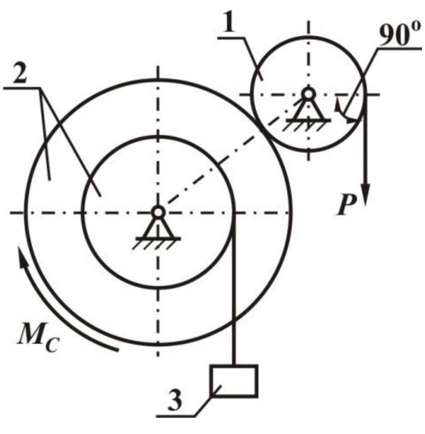
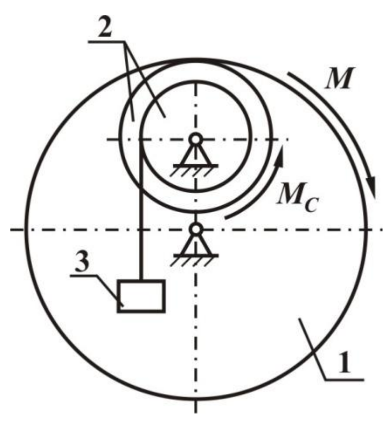
При $t = 1$ с, учитывая (7) и исходные данные, имеем $S_2 = 7295$ Н.

Натяжение нити найдем из уравнения (3):

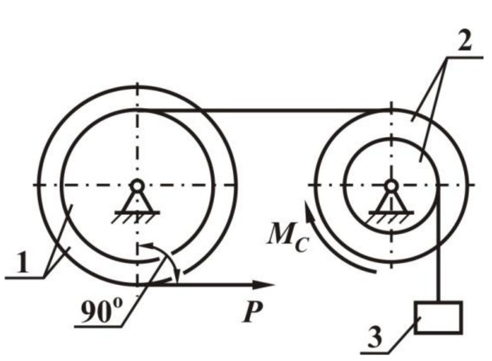
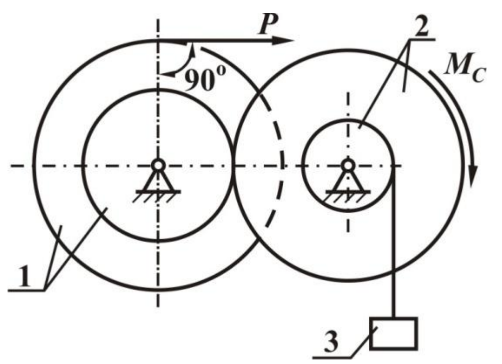
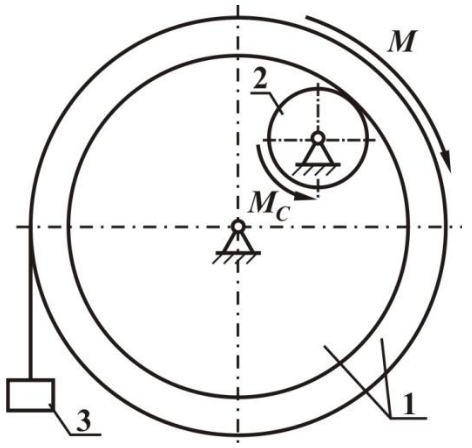
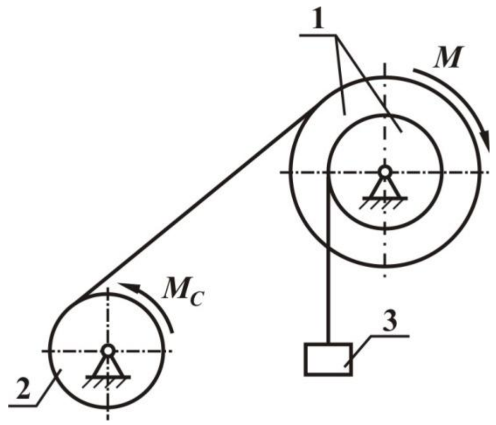
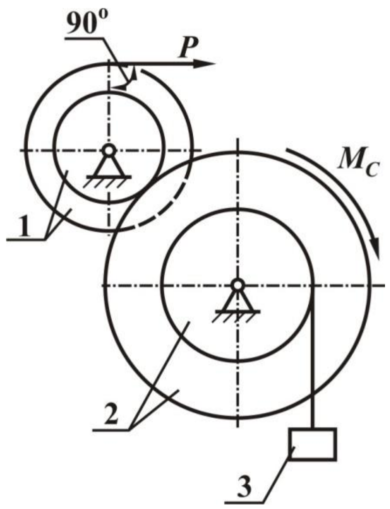
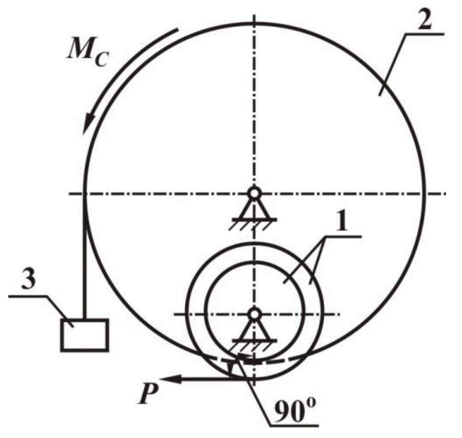
$$T = m_3\ddot{z} + G_3, \text{ или } T = m_3\ddot{\varphi}_2 + m_3 g. \text{ При } t = 1\text{ с } T = 4285 \text{ Н}.$$

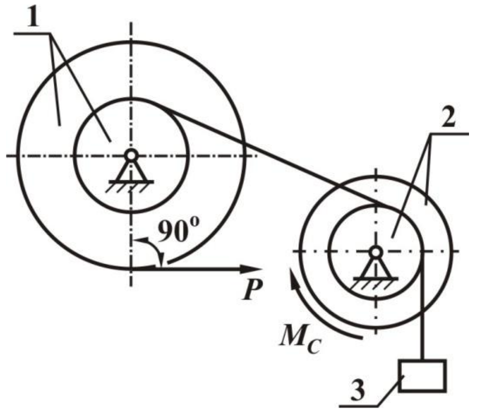
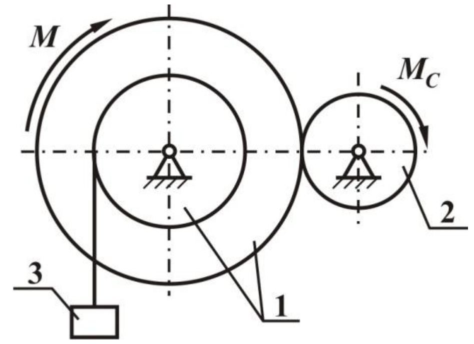
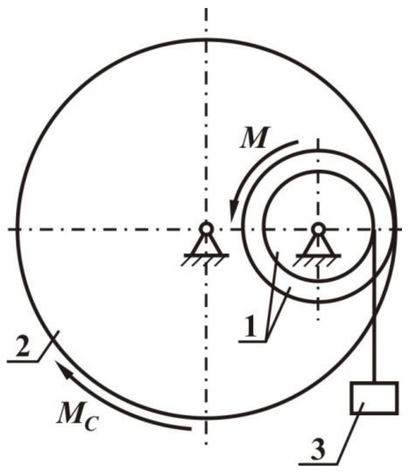
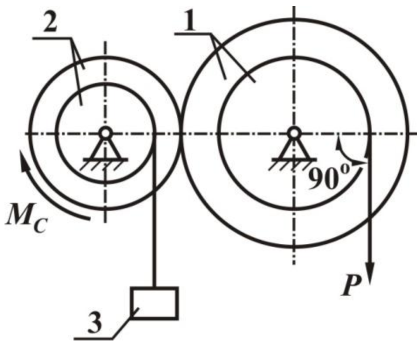
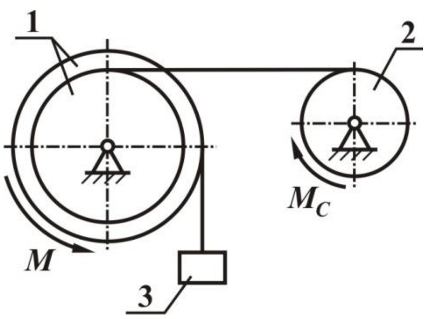
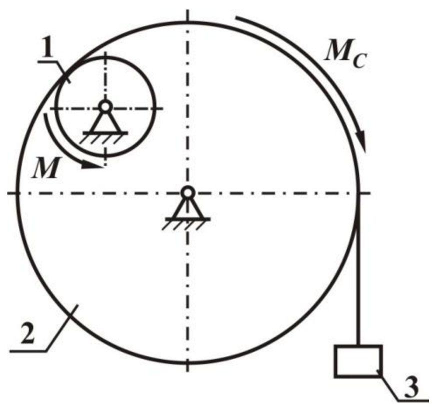
Таблица 4

Схемы механических систем к заданиям №1

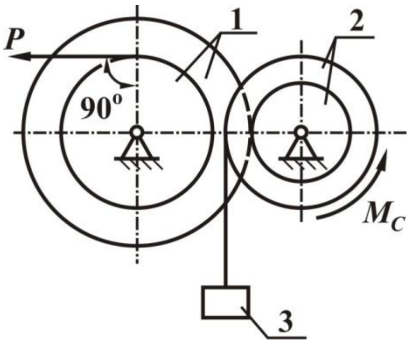
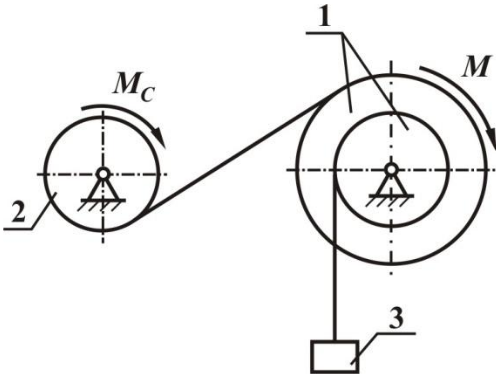
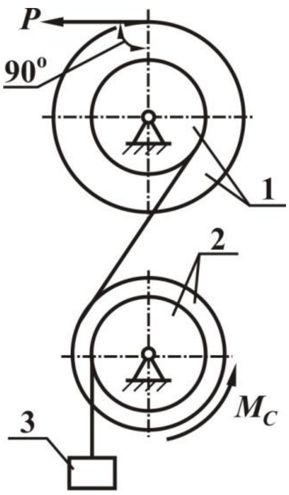
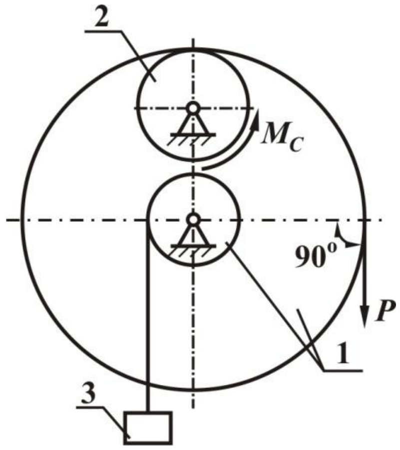
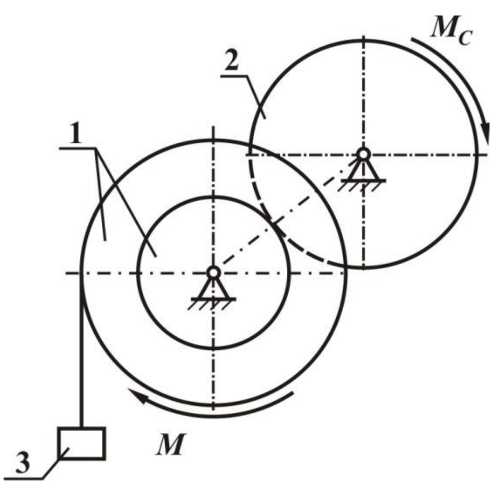
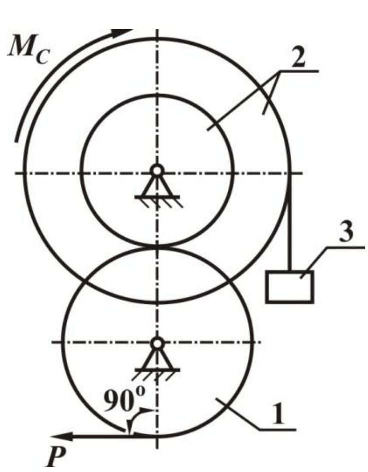
<table>
<tr><td>задание №1</td><td>задание №2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №3</td><td>задание №4</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №5</td><td>задание №6</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

продолжение табл. 4

<table>
<tr><td>задание №7</td><td>задание №8</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №9</td><td>задание №10</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №11</td><td>задание №12</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

задание №13	задание №14
	
задание №15	задание №16
	
задание №17	задание №18
	

продолжение табл. 4

задание №19	задание №20
	
задание №21	**задание №22**
	
задание №23	**задание №24**
	

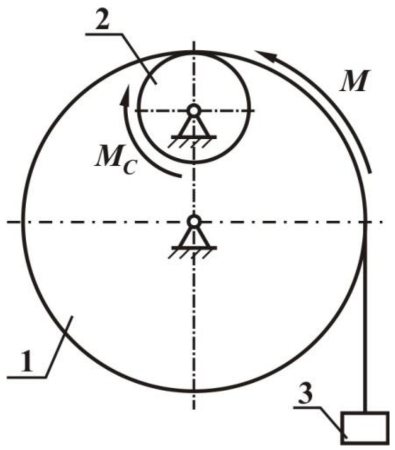
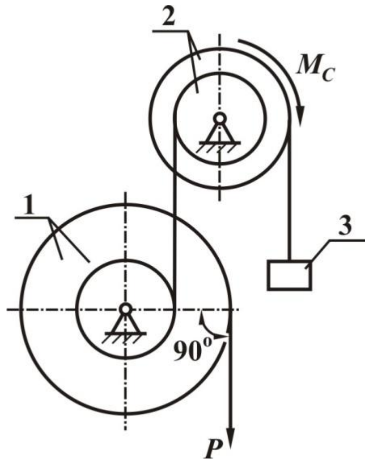
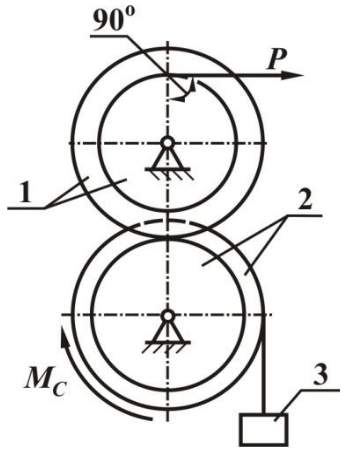
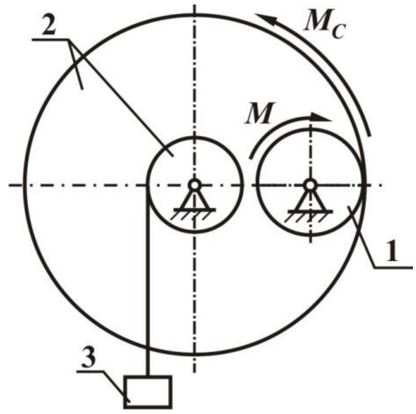
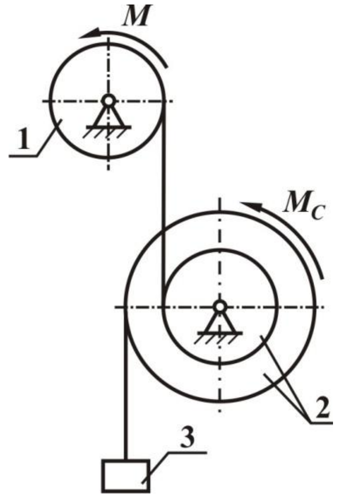
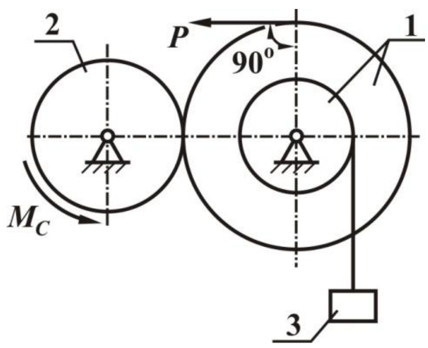
задание №25	задание №26
	
задание №27	задание №28
	
задание №29	задание №30
	

Таблица 5

Данные для индивидуального задания №1

Вариант	m_1	m_2	R_1	R_2	ρ_1	ρ_2	M, P	M_C	ω_{10}, рад/с	t_1, с	Тело
	кг	кг	см	см	см	см	Н·м, Н	Н·м			
1	100	300	20	60	–	50	2100+20t	1000	2	2	1
2	300	80	70	20	60	–	9800+100t	600	1	0,5	2
3	200	100	60	30	–	25	6100+20t	800	0,5	2,5	1
4	100	250	20	50	–	40	1000+40t	1400	1,5	2	1
5	150	300	30	50	–	30	5500+200t	1500	2	1	3
6	400	250	70	30	–	25	4800+10t	800	3	4	1
7	300	200	60	30	50	20	3000+100t	500	0	3	3
8	300	250	50	40	40	30	9700+50t	500	1	2	1
9	200	100	80	20	65	–	5900+30t	600	2	3	2
10	250	100	40	30	30	–	2500+50t	1200	0	1,5	2
11	150	300	40	60	30	40	3900+50t	1000	1	2	1
12	100	200	30	60	25	–	5700+50t	1500	2	2	1
13	180	100	50	30	40	20	2700+200t	400	0,5	1	2
14	150	80	40	30	30	–	1800+20t	700	1,5	2,5	3
15	300	180	20	50	15	–	700+40t	300	0	1,5	1
16	300	250	60	50	50	40	7300+100t	1200	1	2	1
17	250	100	50	20	40	–	5400+50t	900	2	2	1
18	200	100	20	50	–	–	1900+20t	1500	0,5	1	2
19	250	150	50	30	40	25	9900+200t	500	0,5	2	1
20	400	100	50	30	40	–	3700+50t	1200	2	1	2
21	200	150	50	30	45	20	3800+100t	800	1	1,5	2
22	250	100	60	10	50	–	9700+200t	700	2	0,5	1
23	200	80	40	30	30	–	2300+20t	900	0,5	1	2
24	100	200	30	40	–	30	9900+100t	500	1,5	1	1
25	150	80	60	20	–	–	4900+40t	800	0	1,5	2
26	250	200	50	40	40	30	3500+150t	600	2	2	1
27	250	150	50	40	45	30	9900+100t	700	1,5	1	1
28	60	200	20	60	–	30	900+10t	1500	0	2	2
29	50	200	20	40	–	35	2100+20t	1000	2	0,5	1
30	300	60	50	20	40	–	7200+50t	700	1,5	1	2

Индивидуальное задание №2
Применение принципа Даламбера к определению реакций связей

Определить реакции внешних связей механической системы:

а) в произвольный момент времени – для вариантов 4, 5, 10, 12 – 14, 16 – 18, 21 – 30 (таблица 6);

б) в момент времени $t = t_1$ – для вариантов 1, 8, 9, 11, 20;

в) в тот момент времени, когда угол поворота $\varphi = \varphi_1$ – для вариантов 2, 3, 6, 7;

г) в положении, показанном на чертеже для вариантов 15 и 19.

На схемах (таблица 6) плоскость *xOy* (*xAy*) горизонтальна, плоскость *yOz* (*yAz*) вертикальна. Необходимые для решения данные приведены в таблице 7.

Приняты обозначения: $\omega -$угловая скорость, $\rho -$радиус инерции.

В вариантах 4, 5, 9, 10 – 14, 18, 23, 24, 29, 30 оси координат вращаются вместе с конструкцией.

В вариантах 1 – 5, 10 – 15, 18, 19, 23, 24, 29, 30 стержни однородные.

В вариантах 6 – 9, 16, 20, 22, 28 диски однородные.

В варианте 10 тело 2 рассматривать как материальную точку.

В вариантах 17, 21 момент *M*, действующий на барабан 2, создается электродвигателем, установленным на балке *AB*.

Пример выполнения задания.

Дано: Схема механической системы и размеры (в см) на рис. 15.

$m_1 = 3\text{кг},\ m_2 = 2\text{кг},\ m_3 = 5\text{кг},\ l_1 = 30\text{см},$

$l_2 = 20\text{см},\ \alpha = 30^\circ,\ \omega = 120\,\text{рад/с} = \text{const}.$

Найти реакции подпятника *A*, подшипника *B* и невесомого стержня *DN*.

Решение.

Для определения реакций связей воспользуемся принципом Даламбера. Так как ω=const, действуют только центробежные силы инерции.

Главный вектор сил инерции тела определяется по формуле:

$$\bar{F}^{\text{ин}} = -m\bar{a}_C.$$

Здесь m – масса тела, $\bar{a}_C -$ ускорение центра масс тела.

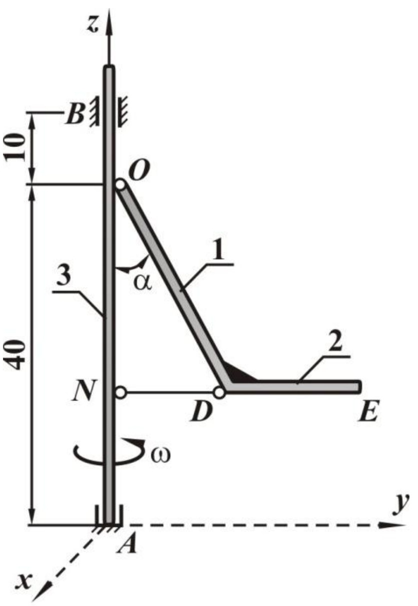


Рис. 15

Для стержней 1 и 2:

$$F_1^{\text{ин}} = m_1 \cdot a_{C_1} = m_1 \cdot \omega^2 \cdot 0{,}5 l_1 \sin\alpha;$$

$$F_2^{\text{ин}} = m_2 \cdot a_{C_2} = m_2 \cdot \omega^2 \cdot \left(l_1 \sin\alpha + 0{,}5 l_2\right).$$

Расстояние h от точки O до линии действия силы $F_1^{ин}$:

$$h = \frac{2}{3} l_1 \cdot \cos\alpha = \frac{2}{3} \cdot 30 \cdot \cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Составляющие реакций подпятника $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$ и подшипника $\overline{X}_B, \overline{Y}_B$, силы тяжести стержней $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3$ и силы инерции $\overline{F}_1^{\text{ин}}$, $\overline{F}_2^{\text{ин}}$ показаны на рис. 16 а.

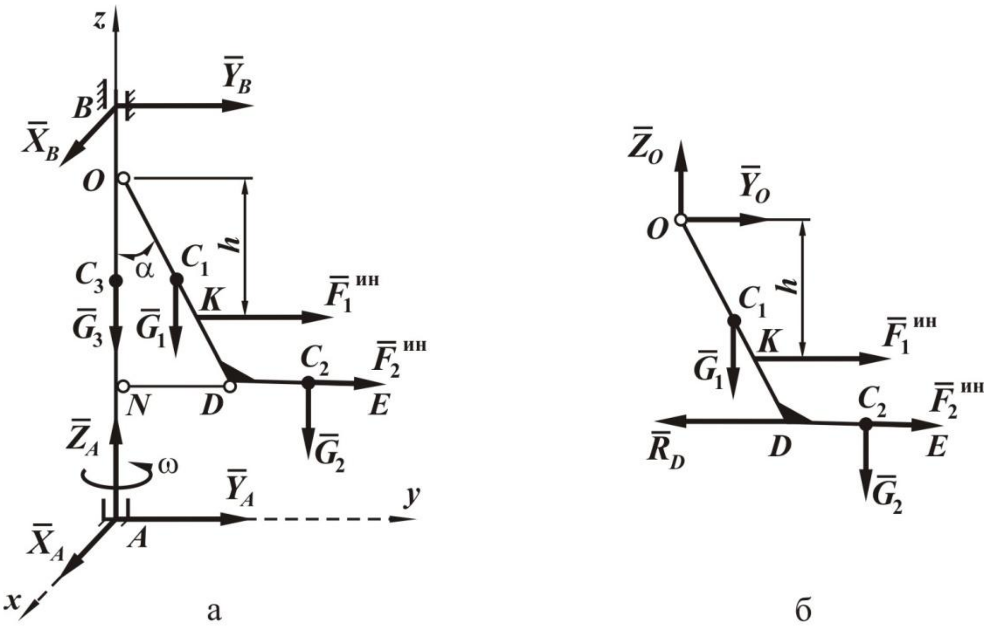


Рис. 16

Составим уравнения, вытекающие из принципа Даламбера:

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_B + F_1^{\text{ин}} + F_2^{\text{ин}} = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A - G_3 - G_1 - G_2 = 0;$$

$$\sum M_{xi} = 0; \quad -Y_B AB - G_1 \cdot 0{,}5 l_1 \cdot \sin\alpha - F_1^{\text{ин}}(AO - \frac{2}{3} l_1 \cos\alpha) -$$

$$-G_2\left(l_1 \sin\alpha + 0{,}5 l_2\right) - F_2^{\text{ин}}\left(AO - l_1 \cos\alpha\right) = 0.$$

Так как активные силы и силы инерции расположены в плоскости yAz, то $X_B = X_A = 0$.

Из уравнения моментов

$$Y_B = -\frac{1}{AB}[m_1 g \cdot 0,5 l_1 \sin 30^\circ + m_1 \omega^2 0,5 l_1 \sin 30^\circ (AO - \frac{2}{3} l_1 \cos 30^\circ) +$$
$$+ G_2 (l_1 \sin 30^\circ + 0,5 l_2) + m_2 \omega^2 (l_1 \sin 30^\circ + 0,5 l_2) \cdot \left(AO - l_1 \cos 30^o \right)].$$

Подставляя числовые данные, получим $Y_B = -9,5$ кН.

Из уравнений проекций

$$Y_A = -Y_B - F_1^{\text{ин}} - F_2^{\text{ин}} = -Y_B - m_1 \cdot \omega^2 \cdot 0,5 l_1 \cdot \sin 30^\circ -$$
$$- m_2 \cdot \omega^2 (l_1 \sin 30^\circ + 0,5 l_2) = -10,6 \text{ кН};$$
$$Z_A = G_3 + G_1 + G_2 = (m_3 + m_1 + m_2) \cdot g = 98,1 \text{ Н}.$$

Чтобы определить реакцию R_D стержня ND, рассмотрим силы, действующие на раму ODE (см. рис. 16 б). Для определения реакции достаточно составить уравнение моментов относительно точки O:

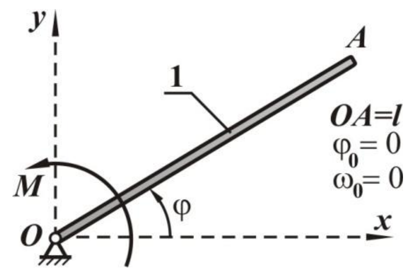
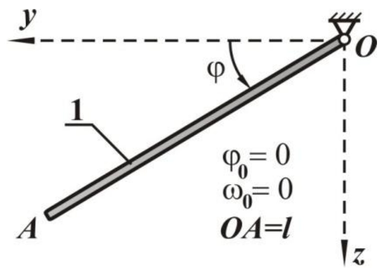
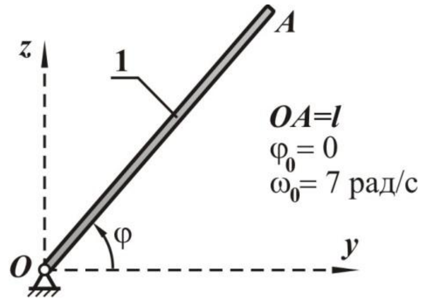
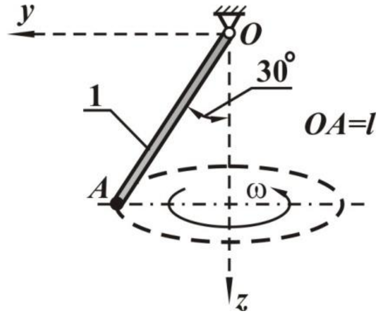
$$\sum M_{iO} = 0; \; F_1^{\text{ин}} \cdot h + F_2^{\text{ин}} \cdot l_1 \cos\alpha - R_D \cdot l_1 \cos\alpha -$$
$$- G_1 \cdot 0,5 l_1 \sin\alpha - G_2 \cdot \left(l_1 \sin\alpha + 0,5 l_2 \right) = 0$$

Подставляя все известные данные, получим

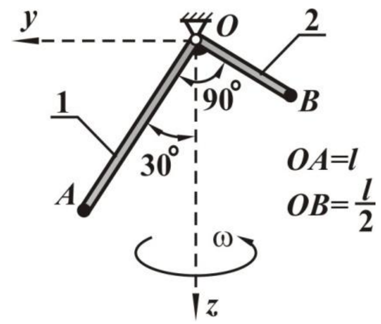
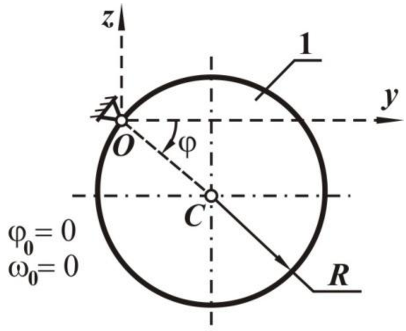
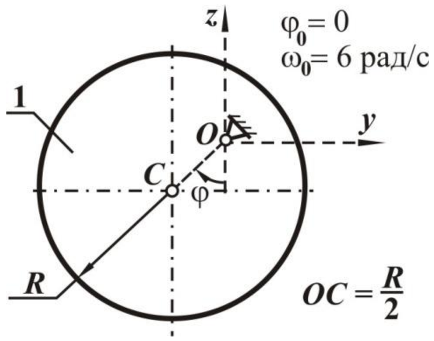
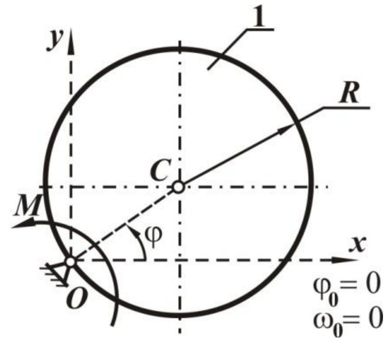
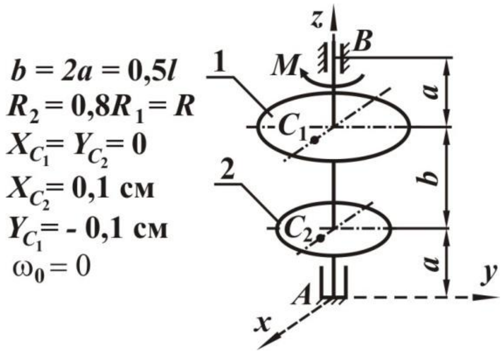
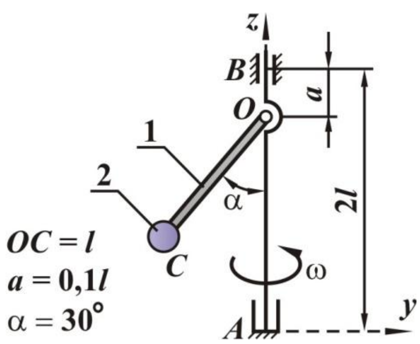
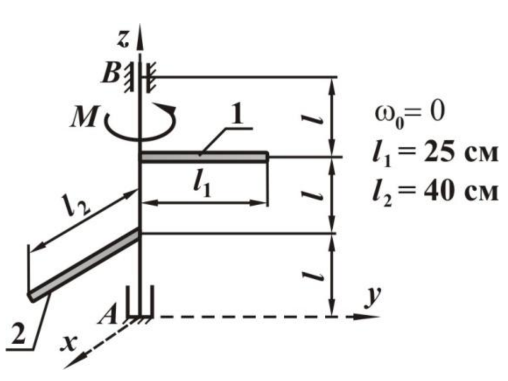
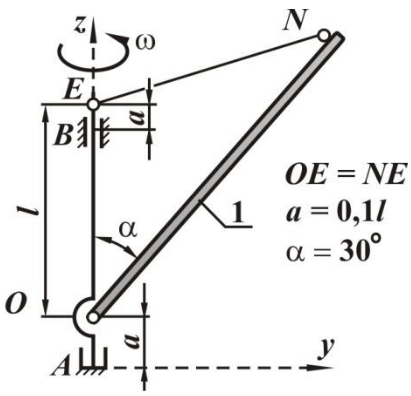
$$R_D = 15,8 \text{ кН}.$$

Таблица 6

Схемы механических систем к заданиям №2

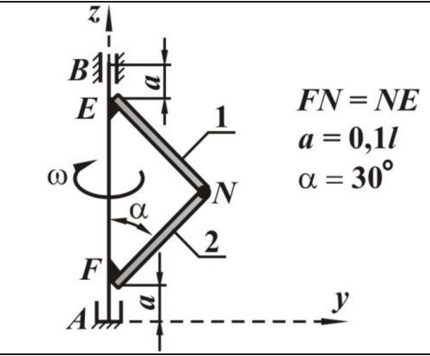
задание №1	задание №2
	
задание №3	задание №4
	

продолжение табл. 6

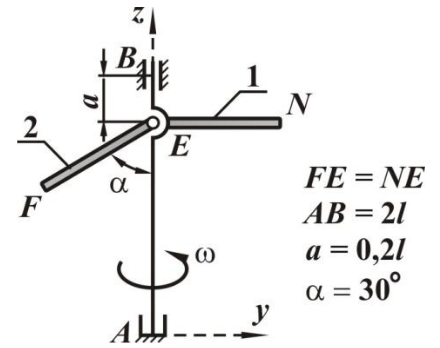
задание №5	задание №6
	
задание №7	**задание №8**
	
задание №9	**задание №10**
	
задание №11	**задание №12**
	

продолжение табл. 6

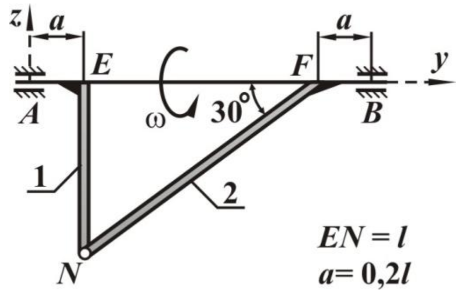
задание №13



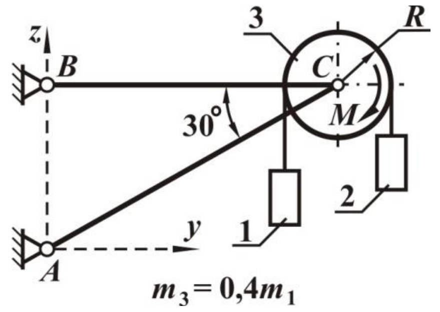
задание №14



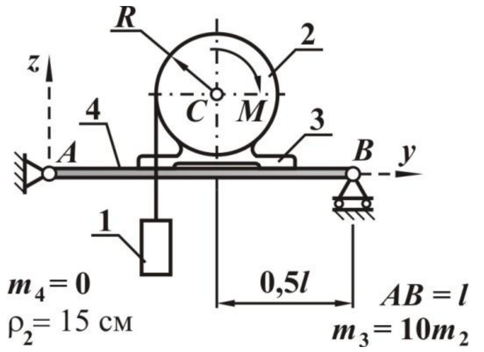
задание №15



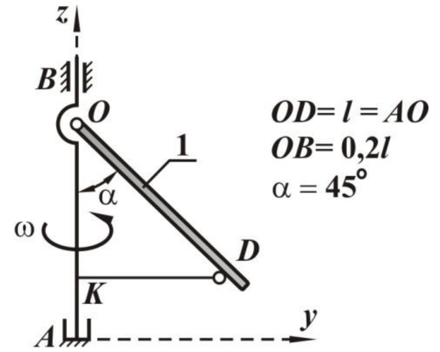
задание №16



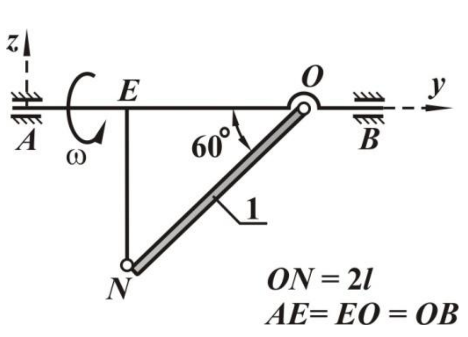
задание №17



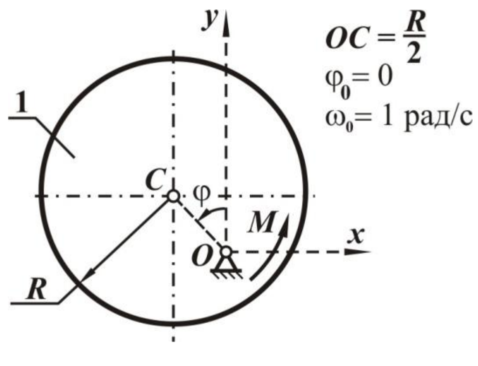
задание №18



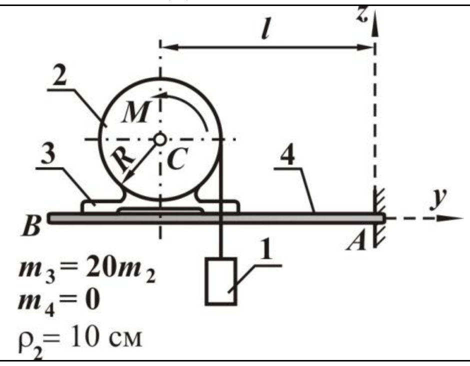
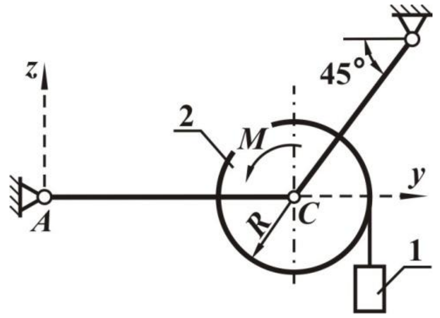
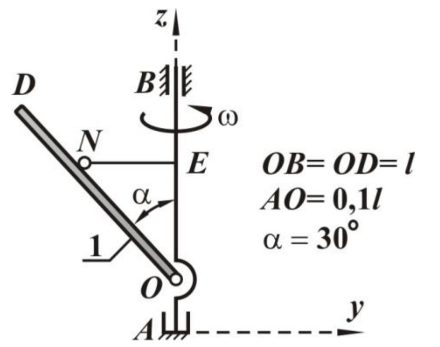
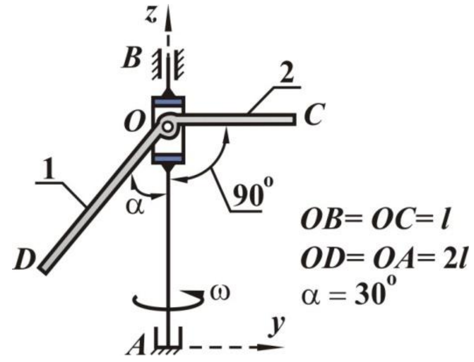
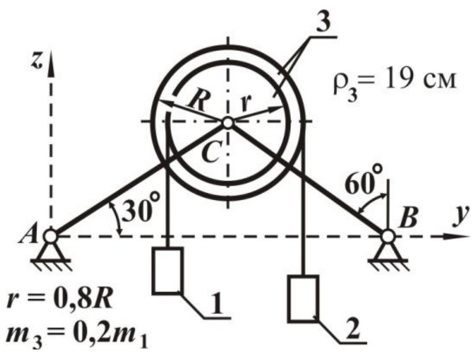
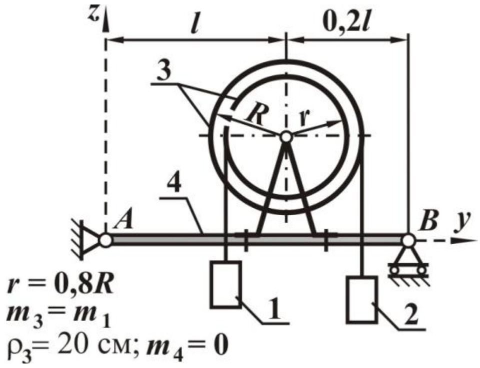
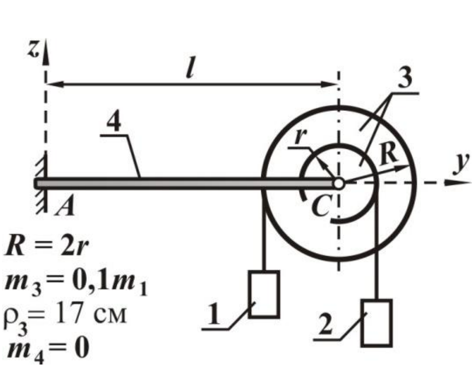
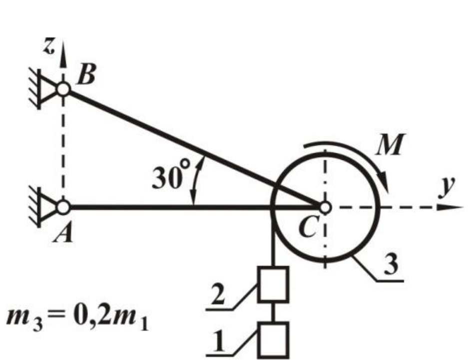
задание №19



задание №20



продолжение табл. 6

задание №21	задание №22
	
задание №23	**задание №24**
	
задание №25	**задание №26**
	
задание №27	**задание №28**
	

окончание табл. 6

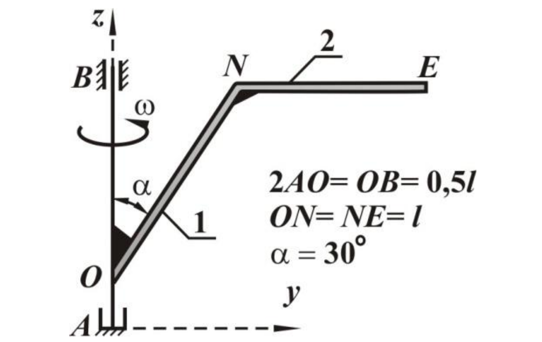
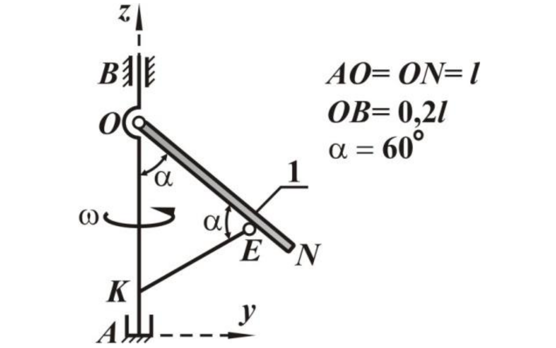
задание №29	задание №30
	

Таблица 7

Данные для индивидуального задания №2

Номер задания	m_1	m_2	l	R	M,	ω, рад/с	t_1, с	φ_1, градус
	кг		см		Н·м			
1	20	–	60	–	1,0	–	10	–
2	25	–	50	–	–	–	–	60
3	40	–	80	–	–	–	–	60
4	20	–	80	–	–	–	–	–
5	30	15	60	–	–	–	–	–
6	40	–	–	30	–	–	–	30
7	20	–	–	25	–	–	–	60
8	50		–	30	4,0	–	15	–
9	20	30	50	10	20-0,1t	–	200	–
10	8	8	25	–	–	–	–	–
11	20	40	30	–	5-0,1t	–	50	–
12	13	–	40	–	–	10	–	–
13	20	20	40	–	–	16	–	–
14	20	22	40	–	–	–	–	–
15	20	40	20	–	–	8	–	–
16	75	20	–	10	65	–	–	–
17	100	10	150	20	160	–	–	–
18	30	–	40	–	–	12	–	–
19	240	–	60	–	–	9	–	–
20	40	–	–	30	6	–	4	–
21	70	10	120	15	124	–	–	–
22	100	30	–	20	217	–	–	–
23	10	–	60	–	–	9	–	–
24	60	20	50	–	–	–	–	–
25	50	70	–	20	–	–	–	–
26	80	120	150	25	–	–	–	–
27	50	140	120	20	–	–	–	–
28	70	30	–	20	250	–	–	–
29	20	20	42	–	–	10	–	–
30	50	–	60	–	–	13	–	–

4. Теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения механической системы

4.1. Теорема о движении центра масс

Теорема: *центр масс механической системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы системы*

$$m \cdot \bar{a}_C = \sum_k \bar{F}_k^e ,$$

где m – масса всей системы; $\bar{a}_C$ – ускорение центра масс; $\sum_k \bar{F}_k^e = \bar{F}^e$ – главный вектор внешних сил.

Дифференциальные уравнения движения центра масс системы:

$$m\,\ddot{x}_c = F_x^e;\; m\ddot{y}_c = F_y^e;\; m\ddot{z}_c = F_z^e ,$$

где x_c, y_c, z_c – координаты центра масс; $F_x^e,\; F_y^e,\; F_z^e$ – проекции главного вектора внешних сил на оси координат.

Теорема имеет ***следствие***: Если главный вектор всех внешних сил системы равен нулю, то скорость центра масс остается постоянной, причем, если начальная скорость равна нулю, то центр масс остается неподвижным.

Пример. Гладкий клин 1 с углом α и массой m_1 установлен на гладкую горизонтальную плоскость. На нем лежит груз 2 массы m_2, соединенный с грузом 3 массы m_3 гибкой нерастяжимой невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок. Найти перемещение клина по плоскости при опускании груза 3 на расстояние h, если в начальный момент система находилась в покое. Нить от вертикали не отклоняется.

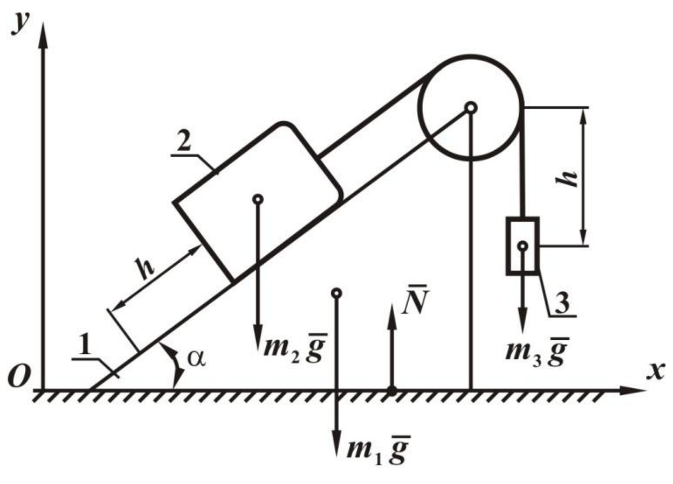


Рис. 17

Решение.

Устанавливаем, что при движении вдоль оси Ox имеет место следствие теоремы о движении центра масс: $x_C = \text{const}$.

Обозначим через Δx_1 перемещение клина по горизонтальной плоскости от начального положения. При опускании груза 3 на h груз 2 поднимется по наклонной плоскости клина на такое же расстояние, так как нить нерастяжима (на рис. 17 система изображена в конечном положении, когда груз 3 опустился на расстояние h). Груз 3 переносится платформой вдоль оси Ox на расстояние $\Delta x_3 = \Delta x_1$. Абсолютное перемещение груза 2 вдоль оси Ox равно:

$$\Delta x_2 = h\cos\alpha + \Delta x_1 .$$

Тогда, согласно условию $x_c = const$:

$$\Delta x_c = m_1\Delta x_1 + m_2(h\cos\alpha + \Delta x_1) + m_3\Delta x_1 = 0 ,$$

откуда

$$\Delta x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} h\cos\alpha$$

Знак минус показывает, что клин переместился влево вдоль оси Ox.

4.2. Количество движения материальной точки и системы. Импульс силы

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на вектор ее скорости.

Направление вектора количества движения совпадает с направлением вектора скорости. Единица измерения в СИ – 1 кг·м/с.

Количеством движения механической системы называется векторная величина, равная геометрической сумме количеств движения всех ее точек:

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{V}_i .$$

Количество движения механической системы удобно вычислять по формуле:

$$\bar{Q} = m\bar{V}_C ;$$

здесь m – масса системы, $\bar{V}_C$ – скорость ее центра масс.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\bar{S}$, равная произведению вектора силы $\bar{F}$ на элементарный промежуток времени ее действия dt:

$$d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt .$$

Импульс силы за конечный промежуток времени t_1 равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до t_1:

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} \cdot dt .$$

В частном случае, если сила постоянна по модулю и направлению ($\bar{F}$ =const), то $\bar{S} = \bar{F} \cdot t_1$.

Единица измерения импульса силы в СИ – 1 $\text{Н} \cdot \text{с} = 1\ \text{кг} \cdot \text{м/с}$.

4.3. Теорема об изменении количества движения механической системы

Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил:*

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e .$$

В проекциях на оси координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e .$$

Теорема об изменении количества движения системы в интегральной форме: *изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил,действующих на систему, за тот же промежуток времени:*

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e .$$

В проекциях на оси координат:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e .$$

Из того, что $\bar{Q} = m\bar{V}_C$, следует, что теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой две разные формы одной теоремы.

Следствием теоремы является ***закон сохранения количества движения.***

1. Пусть сумма внешних сил системы равна нулю:

$$\sum \bar{F}_k^e = 0;$$

тогда из теоремы об изменении количества движения системы в дифференциальной форме следует, что при этом $\bar{Q} = \text{const}$.

Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то вектор количества движения системы остается постоянным по модулю и направлению.

2. Пусть сумма проекций внешних сил на какую-нибудь ось (например, *Ox*) равна нулю: $\sum F_{kx}^e = 0$; тогда $Q_x = \text{const}$.

Если сумма проекций всех внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

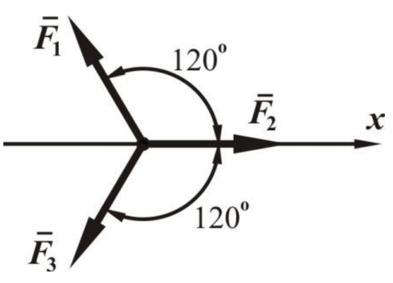
Внутренние силы не могут изменить количество движения системы.

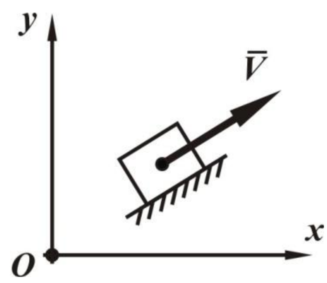
Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы.
2. Влияют ли внутренние силы системы на движение ее центра масс? На ее количество движения?
3. При каких условиях центр масс системы находится в покое? Движется равномерно и прямолинейно?
4. Как влияют на движение центра масс системы приложенные к ней пары сил?
5. Чему равны количества движения материальной точки и системы?
6. Чему равно количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс?
7. Как определяются элементарный импульс силы и импульс силы за конечный промежуток времени?
8. Сформулируйте теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и интегральной формах.
9. В каких случаях количество движения механической системы или его проекции на оси остаются постоянными?

Таблица 8

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Масса механической системы $m = 5$ кг. Проекции ускорения центра масс $a_{Cx} = 5$ м/с^2, $a_{Cy} = 2$ м/с^2, $a_{Cz} = \sqrt{7}$ м/с^2. Модуль главного вектора внешних сил $F = ...$ Н. **Ответ**: 30	
2	Материальная точка движется по закону $x = 4t^2$ м под влиянием сил $F_1 = F_3 = 4$ Н, $F_2 = 20$ Н. Масса точки равна $m = ...$ кг. **Ответ**: 2	

3	Центр масс системы массой $m = 5$ кг движется прямолинейно по закону $S_C = (20t + 5)$ м. Модуль количества движения системы $Q = \ldots$ кг · м/с. **Ответ**: 100	
4	Сила изменяется по закону $F = 4t$ Н; за время от $t_0 = 0$ до $t_1 = 3$ с импульс силы равен $\bar{S} = \ldots$ Н · с. **Ответ**: 18	
5	Масса груза $m = 8$ кг, скорость движения груза $\bar{V} = (3\,\bar{i} + 4\,\bar{j})$ (м/с). Проекция количества движения на ось *Oy* $Q_y = \ldots$ кг · м/с. **Ответ**: 32	

5. Теорема об изменении кинетического момента

5.1. Кинетический момент механической системы

Кинетическим моментом материальной точки относительно некоторого центра *O* называется векторное произведение

$$\bar{r} \times m\bar{V},$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра *O*.

Кинетическим моментом *(главным моментом количеств движения)* ***системы*** *относительно центра O называется геометрическая сумма кинетических моментов всех точек системы относительно того же центра*

$$\bar{K}_o = \sum_{k=1}^{n} \bar{M}_O\left(m_k\bar{V}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k\bar{V}_k,$$

где $\bar{r}_k$ – радиус-вектор *k*-ой точки, проведенный из точки *O*; $m_k\bar{V}_k$ – количество движения *k*-ой точки.

Кинетический момент относительно неподвижной точки при произвольном движении системы

$$\bar{K}_0 = \bar{K}_C^r + \bar{\rho}_C \times m\bar{V}_C,$$

где $\bar{K}_C^r$ – кинетический момент в относительном движении вокруг центра масс; $\bar{\rho}_C$ – радиус-вектор центра масс, проведенный из точки *O*; $m\bar{V}_C$ – количество движения системы.

Кинетический момент относительно оси вращения твердого тела

$$K_z = J_z \omega_z .$$

Здесь J_z – момент инерции тела относительно оси вращения; ω_z – проекция угловой скорости на ось вращения (алгебраическая угловая скорость).

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.

Кинетический момент тела относительно неподвижной точки *A* при движении в плоскости материальной симметрии *OXY*

$$K_A = M_A\left(m\bar{V}_C\right) + J_{zc}\omega_z = m\left(x_C\dot{y}_C - \dot{x}_C y_C\right) + J_{zc}\omega_z ,$$

где x_C, y_C – координаты центра масс; J_{zc} – момент инерции тела относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости движения; *m* – масса тела.

5.2. Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки и центра масс системы

Теорема: *производная по времени кинетического момента системы относительно неподвижного центра A равна сумме моментов внешних сил системы относительно того же центра.*

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = \sum \bar{M}_A\left(\bar{F}_k^e\right).$$

При замене неподвижного центра *A* на центр масс *C* вид уравнения сохраняется:

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \sum \bar{M}_C\left(\bar{F}_k^e\right).$$

При этом центр масс может быть движущейся точкой.

Теорема имеет следствия.

1. *Если сумма моментов относительно какого-нибудь неподвижного центра действующих на систему внешних сил равна нулю, то кинетический момент относительно этого центра постоянен по модулю и направлению,* т.е.

$$\text{если } \sum M_A(\bar{F}_k^e) = 0, \text{ то } \bar{K}_A = \overline{const} .$$

2. *Если сумма моментов внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси будет величиной постоянной,* т.е.

$$\text{если } \sum M_x(\overline{F}_k^e) = 0, \text{ то } K_x = const.$$

Эти следствия представляют собой закон сохранения кинетического момента системы.

3. Из уравнения, выражающего теорему, видно, что *внутренние силы не могут изменить кинетический момент системы.*

Пример. При пуске в ход электрической лебедки к ее барабану приложен вращающий момент $m_{\text{вр}} = bt$, где b – постоянная. Груз массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан радиуса r и массы m_2. Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным однородным цилиндром. В начальный момент лебедка находилась в покое.

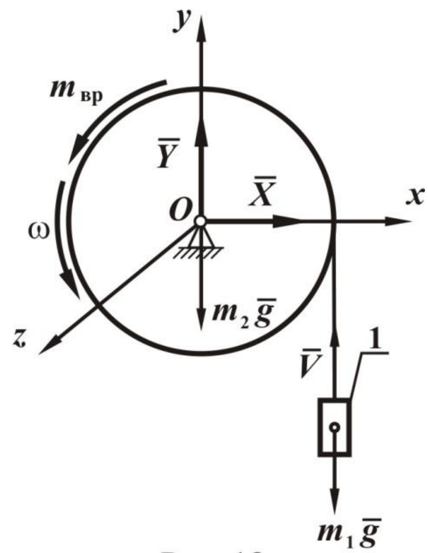


Рис. 18

Решение.

Рассматриваем барабан, канат и груз как одну материальную систему. Вводим систему координат, как показано на рис. 18, направляя ось *Oz* по оси вращения барабана. Внешними активными силами этой системы будут силы тяжести барабана и груза $m_2\overline{g}$, $m_1\overline{g}$ и вращающий момент $m_{\text{вр}}$, реакции внешних связей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. Записываем теорему об изменении кинетического момента относительно оси *Oz*:

$$dK_z / dt = M_z^e;$$

$$M_z^e = m_{\text{вр}} - m_1 gr.$$

Кинетический момент системы:

$$K_z = K_{1z} + K_{2z} = m_z(m_1\overline{V}) \pm J_{2z}\omega =$$
$$= m_1Vr + J_{2z}\omega = m_1Vr + (m_2r^2/2)\omega,$$

где K_{1z} – момент количеств движения груза, движущегося поступательно, K_{2z} – кинетический момент барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси, а J_{2z} – его момент инерции относительно той же оси, равный для сплошного однородного цилиндра $m_2r^2/2$.

Учитывая, что $V = \omega r$, имеем:

$$K_z = (m_1 + m_2 / 2) r^2 \omega .$$

Применяя теорему, получаем дифференциальное уравнение движения системы:

$$\frac{d}{dt}(m_1 + \frac{m_2}{2}) r^2 \omega = m_{\text{вр}} - m_1 g r ;$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2(bt - m_1 g r)}{(2m_1 + m_2) r^2} .$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$d\omega = \frac{2b}{(2m_1 + m_2) r^2} t dt - \frac{2m_1 g r}{(2m_1 + m_2) r^2} dt ;$$

$$\omega = \frac{bt^2}{(2m_1 + m_2) r^2} - \frac{2m_1 g r t}{(2m_1 + m_2) r^2} + C_1 .$$

Подставляя в последнее выражение начальные условия (при $t = 0$, $\omega(0) = \omega_0 = 0$), находим $C_1 = 0$.

Угловая скорость барабана:

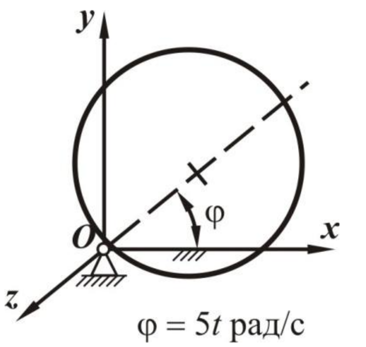
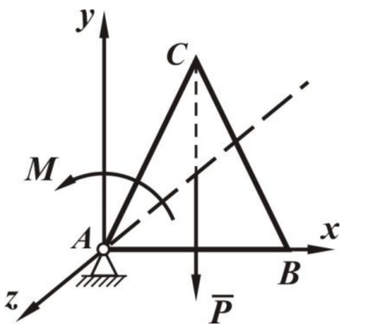
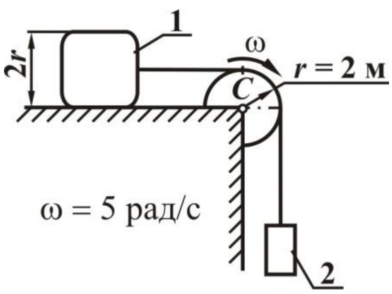
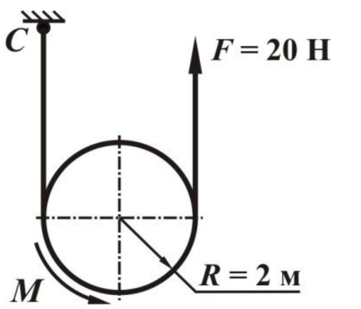
$$\omega = \frac{bt - 2m_1 g r}{(2m_1 + m_2) r^2} t .$$

Контрольные вопросы

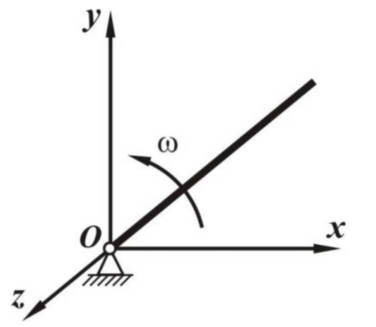
1. Чему равен кинетический момент материальной точки относительно центра?
2. Будет ли изменяться кинетический момент относительно неподвижного центра тела, движущегося поступательно, прямолинейно и равномерно?
3. Чему равен кинетический момент твердого тела относительно оси вращения?
4. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента системы.
5. Можно ли за счет внутренних сил изменить кинетический момент механической системы?
6. В каких случаях кинетический момент механической системы относительно центра или его проекция на заданную ось остаются постоянными?

Таблица 9

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Момент инерции диска относительно точки O $J_0 = 4$ кг · м². Кинетический момент диска относительно оси Oz $K_z = \ldots$ кг · м/с². **Ответ**: 20	
2	Кинетический момент пластины ABC относительно оси z $K_z = 8t$ кг · м/с². Модуль главного вектора моментов внешних сил относительно оси z $M = \ldots$ Н · м. **Ответ**: 8	
3	Массы грузов $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг соответственно. Масса блока равна нулю. Модуль кинетического момента системы относительно точки C $K_C = \ldots$ кг · м/с². **Ответ**: 120	
4	Кинетический момент системы относительно центра C $K_C = 25t^2$ кг · м/с². В момент времени $t_1 = 2$ с величина момента $M = \ldots$ Н · м. **Ответ**: 20	

окончание табл. 9

5	Масса однородного стержня $m = 3$ кг, длина $l = 0{,}4$ м. Кинетический момент относительно оси Oz $K_z = 3{,}2$ кг·м/с^2. Угловая скорость вращения $\omega_z = \ldots$ рад/с. **Ответ**: 20	

6. Теорема об изменении кинетической энергии

6.1. Работа и мощность силы

Элементарная работа силы

$$d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F_\tau \cdot dS = F \cdot dS \cdot \cos\alpha,$$

где F_τ – проекция силы на направление перемещения точки приложения силы; α – угол между направлениями силы и перемещения.

Работа переменной силы на конечном перемещении

$$A = \int_S F_\tau dS = \int_S F \cos\alpha dS .$$

Элементарная работа пары сил (момента)

$$d'A = M_Z d\varphi,$$

где M_Z – проекция момента пары сил на ось вращения; $d\varphi$ – положительное приращение угла поворота тела.

Работа пары сил на конечном повороте тела

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_Z d\varphi .$$

Работа пары сил с постоянным моментом $M_Z = \text{const}$

$$A = M_Z \cdot \varphi,$$

где φ – угол поворота тела в положительном направлении.

Мощность силы

$$N = \bar{F} \cdot \bar{V} = F \cdot V \cdot \cos\alpha,$$

где α – угол между направлениями силы и скорости точки приложения силы.

Мощность пары сил (момента)

$$N = M_Z \omega_Z,$$

где ω_z – проекция угловой скорости на ось вращения.

6.2. Кинетическая и потенциальная энергия

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная $mV^2/2$. Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий всех ее материальных точек:

$$T = \Sigma \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия при вращательном движении тела

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость тела.

Кинетическая энергия при плоском движении тела

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2,$$

где m – масса тела; V_C – скорость центра масс; J_{zC} – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ω – угловая скорость тела.

Область пространства, в которой на помещенную туда точку действует сила, не зависящая от времени, называется стационарным силовым полем.

Стационарное силовое поле называется *потенциальным*, если существует такая функция координат $\Pi(x, y, z)$, называемая потенциальной энергией, что проекции силы могут быть представлены через нее следующим образом:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Потенциальная энергия равна работе потенциальной силы при переходе из текущего положения M в начальное положение M_0, в котором она равна нулю

$$\Pi(\bar{F}) = -A(\bar{F}).$$

Потенциальная энергия тяжелого тела в поле силы тяжести в случае, когда ось Oz направлена вверх

$$\Pi = mgz,$$

где m – масса; g – ускорение свободного падения; z – координата центра тяжести.

Потенциальная энергия пружины $\Pi = c\dfrac{\lambda^2}{2}$.

Здесь c – жёсткость пружины; λ – удлинение (укорочение).

$\Pi = 0$ при недеформированном положении пружины.

Если в потенциальном силовом поле движется система материальных точек, то потенциальная энергия этой системы равна сумме потенциальных энергий всех точек системы, то есть

$$\Pi = \sum \Pi_i(x_i, y_i, z_i).$$

Следовательно, работа потенциальных сил системы

$$A = \sum A(\bar{F}_i) = \sum \Pi_0(\bar{F}_i) - \sum \Pi(\bar{F}_i) = \Pi_0 - \Pi.$$

Работа силы по любому замкнутому контуру в потенциальном силовом поле равна нулю.

6.3. Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема *об изменении кинетической энергии в* ***интегральной*** *форме: изменение кинетической энергии механической системы при ее переходе из начального положения в текущее положение равно сумме работ внешних и внутренних сил системы, совершенных при этом переходе.*

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i,$$

где $\sum A_k^e$ и $\sum A_k^i$ – суммы работ внешних и внутренних сил; T_0 – начальная кинетическая энергия системы.

Теорема *об изменении кинетической энергии механической системы в* ***дифференциальной*** *форме: производная по времени кинетической энергии системы равна сумме мощностей внутренних и внешних сил системы.*

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e + \sum N_k^i,$$

где $\sum N_k^e$ и $\sum N_k^i$ – суммы мощностей внешних и внутренних сил.

Теорема в дифференциальной форме удобна для составления дифференциальных уравнений движения.

При практическом применении теоремы нужно помнить о том, что кинетическую энергию следует вычислять в абсолютном движении.

В частном случае, когда все внешние и внутренние силы системы потенциальны, имеет место ***закон сохранения полной механической энергии:*** *если все внешние и внутренние силы механической системы являются потенциальными, то полная механическая энергия системы в* *процессе движения остается постоянной величиной, равной своему начальному значению.*

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi, \text{ или } T + \Pi = h,$$

где $h -$ постоянная, равная начальному значению $T_0 + \Pi_0$ полной механической энергии системы материальных точек.

Механические системы, в которых выполняется закон сохранения полной механической энергии, называются *консервативными.* Консервативными называются в этом случае и силы системы и потенциальное силовое поле, где происходит движение системы.

Пример. Груз A массы m_1 приводит в движение каток B массы m_2 посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок C массы m_3 (см. рис. 19 а). Считая блок и каток сплошными однородными цилиндрами, определить ускорение груза. Качение катка происходит без скольжения, а трением качения катка и трением в оси блока можно пренебречь.

Решение.

Поскольку требуется определить ускорение, применяем теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$dT/dt = \sum N_k^e + \sum N_k^i .$$

Все тела системы твердые, нить нерастяжима, поэтому $\sum N_k^i = 0$.

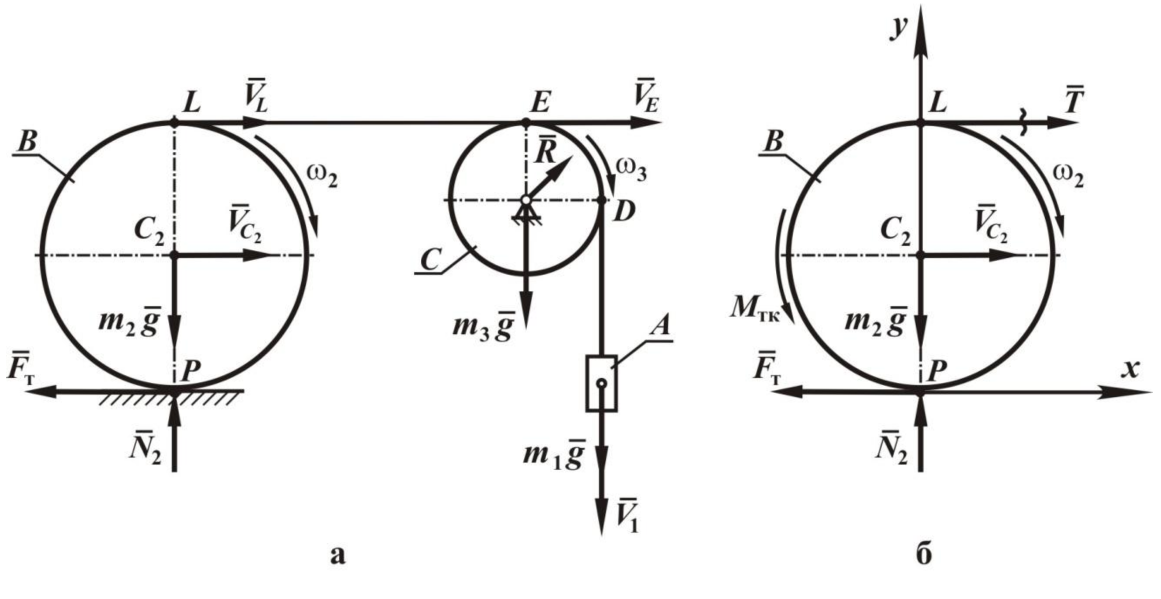


Рис. 19

Кинетическая энергия этой системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T_1, T_2 и $T_3 -$ кинетические энергии груза, катка и блока соответственно.

Груз движется поступательно:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 .$$

Движение катка плоское:

$$T_2 = \tfrac{1}{2} m_2 V_{C_2}^2 + \tfrac{1}{2} J_{C_2} \omega_2^2 ,$$

где V_{C_2} – скорость центра масс C_2 катка, J_{C_2} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости рисунка, ω_2 – угловая скорость катка.

Блок вращается вокруг неподвижной оси, его кинетическая энергия:

$$T = \tfrac{1}{2} J_3 \omega_3^2 ,$$

где J_3 – момент инерции блока относительно оси вращения, ω_3 – угловая скорость блока.

Моменты инерции катка и блока:

$$J_{C_2} = \tfrac{1}{2} m_2 r_2^2 ; \; J_3 = \tfrac{1}{2} m_3 r_3^2 ,$$

где r_2 и r_3 – радиусы катка и блока.

Таким образом:

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 V_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 V_{C_2}^2 + \tfrac{1}{4} m_2 r_2^2 \omega_2^2 + \tfrac{1}{4} m_3 r_3^2 \omega_3^2 .$$

Чтобы сократить число неизвестных, используем уравнения связей. Нить нерастяжима, поэтому скорость точки D на ободе блока равна скорости груза, а скорость точки E блока равна скорости точки L катка; находим:

$$\omega_3 = V_1 / r_3 .$$

Мгновенный центр скоростей P катка находится в точке касания катка с неподвижной плоскостью, каток вращается с угловой скоростью

$$\omega_2 = V_L / LP = V_1 / 2r_2 ,$$

а центр масс C_2 катка движется вправо со скоростью

$$V_{C_2} = 0{,}5 V_L = V_1 / 2 .$$

Учитывая последние соотношения, имеем

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{8} m_2 V_1^2 + \frac{1}{16} m_2 V_1^2 + \frac{1}{8} m_3 V_1^2 = \frac{1}{16}(8m_1 + 3m_2 + 2m_3) V_1^2 .$$

На систему действуют внешние силы:

$m_1\bar{g}, m_2\bar{g}, m_3\bar{g}$ – силы тяжести тел, $\bar{R}$ – реакция подшипников блока, $\bar{F}_т$ и $\bar{N}_2$ – составляющие реакции шероховатой поверхности, возникающие в точке касания катка с поверхностью.

Мощности сил $m_3\bar{g}$ и $\bar{R}$ равны нулю, так как точка их приложения неподвижна.

Силы $\bar{F}_т$ и $\bar{N}_2$ приложены в мгновенном центре скоростей P катка, их мощность равна нулю, так как $V_P = 0$.

Мощность силы $m_2\bar{g}$ равна нулю, так как $m_2\bar{g} \perp \bar{V}_{C_2}$.

Следовательно,

$$\sum N_k^e = m_1\bar{g}\cdot\bar{V}_1 = m_1 g V_1.$$

Подставляя полученные значения кинетической энергии и мощности в формулу $dT/dt = \sum N_k^e + \sum N_k^i$, имеем:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{8m_1+3m_2+2m_3}{16}\right)V_1^2\right] = m_1 g V_1;\; 2V_1\frac{dV_1}{dt}\left(\frac{8m_1+3m_2+2m_3}{16}\right) = m_1 g V_1.$$

Сокращая обе части последнего выражения на V_1, учитывая, что $dV_1/dt = a_1$, получаем

$$a_1(m_1+\tfrac{3}{8}m_2+\tfrac{1}{4}m_3) = m_1 g;\; a_1 = \frac{m_1}{m_1+\frac{3}{8}m_2+\frac{1}{4}m_3}\cdot g$$

Контрольные вопросы

1. Что называется кинетической энергией механической системы?

2. Запишите формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движении.

3. Что называется элементарной работой силы $\bar{F}$ на бесконечно малом перемещении $d\bar{r}$?

4.Как вычисляется работа переменной силы на конечном перемещении по траектории?

5. Как вычисляется работа силы тяжести?

6. Как вычисляется работа момента силы?

7.Какое силовое поле называется потенциальным?

8. Что называется потенциальной энергией?

9.Как связана потенциальная энергия с работой потенциальной силы?

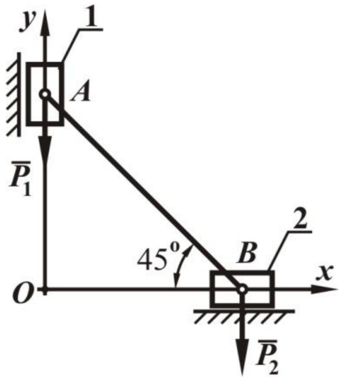
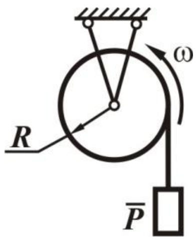
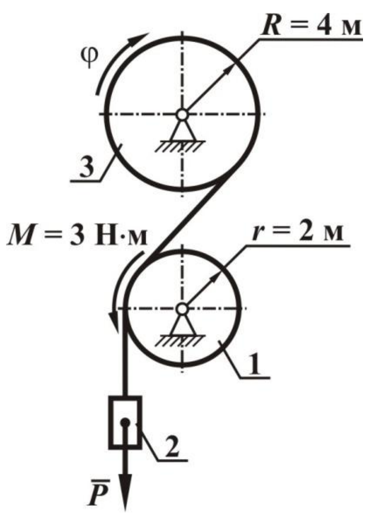
10. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

11. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии.

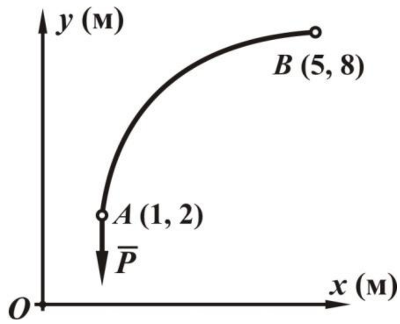
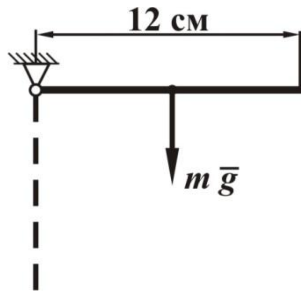
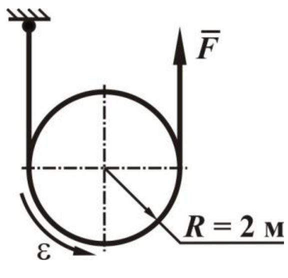
12. Как вычисляется мощность силы и момента?

Таблица 10

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Стержень AB невесом, $P_2 = 5$ Н. После опускания ползуна 1 весом $P_1 = 4$ Н на расстояние $AO = 2$ м силы совершат работу $A = \ldots$ Дж. **Ответ**: 8	
2	Момент инерции барабана $J = 2$ кг · м^2, $\omega = 4$ рад/с, $R = 1$ м, масса груза $m = P/g = 2$ кг. Кинетическая энергия системы … Дж. **Ответ**: 32	
3	Вращающий момент на валу двигателя $M = 20$ Н · м, $\omega = 300$ рад/с. Мощность момента $N = \ldots$ кВт. **Ответ**: 6	
4	При повороте колеса 3 на 6 рад момент M и сила $P = 2$ Н совершат работу $A = \ldots$ Дж. **Ответ**: 84	

окончание табл. 10

5	Материальная точка весом $P = 4$ Н поднялась по дуге окружности из точки A в точку B. Потенциальная энергия увеличилась на … Дж. **Ответ**: 24	
6	Кинетическая энергия материальной точки возросла с 10 до 70 Дж. Силы, действующие на точку, совершили работу $A = ...$ Дж. **Ответ**: 60	
7	При опускании стержня до вертикального положения из горизонтального состояния покоя он приобретёт угловую скорость $\omega = ...$ рад/с. **Ответ**: $5\sqrt{g}$.	
8	Кинетическая энергия однородного диска весом $P = 20$ Н равна $T = 6\omega^2$ Дж. Угловое ускорение $\varepsilon = 6$ рад/с^2. Сила $F = ...$ Н. **Ответ**: 28	

Индивидуальное задание №3

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы (интегральная форма)

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на схемах в таблице 11. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1–3, 5-8, 10-12, 14, 19–23, 25-28, 30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4-7, 9–11, 13, 15–18, 20, 22–24, 26, 27, 29), определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S.

В задании приняты следующие обозначения: массы тел 1, 2, 3, 4 – m_1, m_2, m_3, m_4; радиусы инерции ρ_2, ρ_3, ρ_4, тел 2, 3, 4 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; радиусы больших и малых окружностей – $R_2, r_2, R_3, r_3, R_4, r_4$; f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 12. Во всех вариантах $m_1 = 10m$. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами. В варианте 17 тележка 4 на четырёх одинаковых колёсах 3 . Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Пример выполнения задания.

Дано: m_1 – масса груза 1, $m_2 = 2m_1, m_3 = m_1, m_4 = 0{,}5m_1, m_5 = 20m_1$; $r_2 = 0{,}5R_2$, $R_2 = R_3 = 12$ см, $r_3 = 0{,}75R_3$, $R_5 = 20$ см, $AB = l = 4R_3$, $\rho_2 = 8$ см, $\rho_3 = 10$ см, $f = 0{,}1$; $\delta = 0{,}2$ см, $S = 0{,}06\pi$ м.

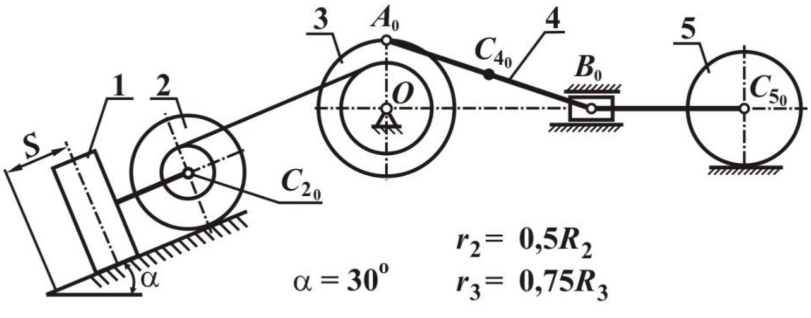


Рис. 20

Механическая система под действием сил тяжести показана в начальном положении (рис. 20).

Сопротивление качению тела 2 не учитывать. Шатун 4 считать тонким однородным стержнем; каток 5 – однородный сплошной цилиндр. Массами звена BC_5 и ползуна B пренебречь.

Требуется определить скорость груза 1 V_1 в конечном положении.

Решение.

Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \tag{1}$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum A_k^e$ – сумма работ внешних сил, приложенных к системе; $\sum A_k^i$ – сумма работ внутренних сил системы.

Для систем, состоящих из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями,

$$\sum A_k^i = 0.$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Уравнение (1) принимает вид:

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$

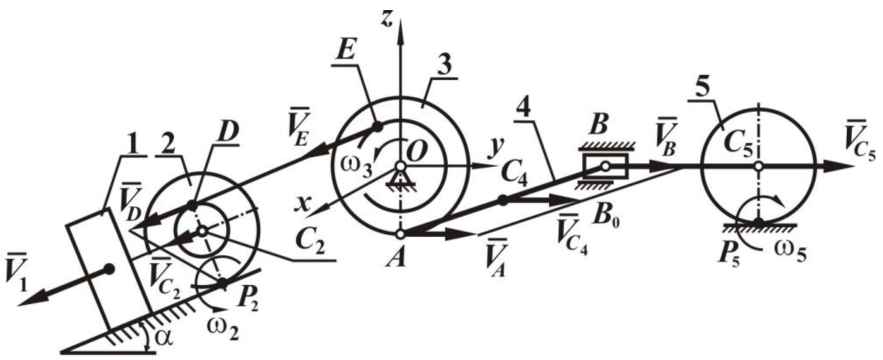


Рис. 21

Кинетическая энергия T системы в конечном её положении (рис. 21) равна сумме кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \tag{3}$$

Кинетическая энергия груза 1

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}. \tag{4}$$

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение:

$$T_2 = \frac{m_2 V_{C_2}^2}{2} + \frac{J_2 \cdot \omega_2^2}{2}, \tag{5}$$

где V_{C_2} – скорость центра тяжести C_2 катка 2,

$$V_{C_2} = V_1, \tag{6}$$

J_2 – момент инерции катка 2 относительно его центральной оси C_2:

$$J_2 = m_2 \rho_2^2, \tag{7}$$

$\omega_2 -$ угловая скорость катка 2.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей катка находится в точке P_2.

Поэтому:

$$\omega_2 = \frac{V_{C_2}}{C_2 P_2} = \frac{V_1}{R_2}. \tag{8}$$

Подставляя (6) – (8) в формулу (5), получаем

$$T_2 = \frac{m_2 V_1^2}{2} + \frac{m_2 \rho_2^2 V_1^2}{2R_2^2} = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right) V_1^2. \tag{9}$$

Кинетическая энергия звена 3, вращающегося вокруг неподвижной оси Ox:

$$T_3 = \frac{J_{3x}\,\omega_3^2}{2}, \tag{10}$$

где $J_{3x} -$ момент инерции звена 3 относительно оси Ox:

$$J_{3x} = m_3 \rho_{3x}^2, \tag{11}$$

$\omega_3 -$ угловая скорость звена 3:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{r_3}. \tag{12}$$

Скорость точки E звена 3 равна скорости точки D катка, которую можно найти из соотношения:

$$\frac{V_D}{V_{C_2}} = \frac{(r_2 + R_2)}{R_2},$$

а так как $V_{C_2} = V_1$, $R_2 = 2r_2$, то:

$$\frac{V_D}{V_1} = \frac{3}{2}, \; V_E = V_D = \frac{3}{2}\, V_1. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$\omega_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_1}{r_3}. \tag{14}$$

После подстановки (11) и (14) в (10) выражение кинетической энергии звена 3 принимает вид:

$$T_3 = \frac{m_3\,\rho_{3x}^2}{2} \left(\frac{3V_1}{2r_3}\right)^2 \text{ или } T_3 = \frac{9}{8}\; m_3\; \frac{\rho_{3x}^2\, V_1^2}{r_3^2}. \tag{15}$$

Кинетическая энергия шатуна 4, совершающего плоское движение:

$$T_4 = \frac{1}{2}\ m_4 V_{C_4}^2 + \frac{1}{2}\ J_4 \omega_4^2,$$

где V_{C_4} – скорость центра тяжести C_4 шатуна 4, J_4 – момент инерции шатуна относительно центральной оси C_4, ω_4 – угловая скорость шатуна 4.

Для определения скорости V_{C_4} и угловой скорости ω_4 найдём конечное положение шатуна 4. Когда груз 1 пройдёт путь $s = 0{,}06\pi$ (м), барабан 3 повернётся на угол φ_3. Этот угол можно определить на основании формулы (14), заменяя в ней

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt},\ \ V_1 = \frac{dS}{dt}$$

Получаем

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3}\ \cdot\ \frac{dS}{dt}, \text{ или } d\varphi_3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{dS}{r_3};$$

после интегрирования (при нулевых начальных условиях)

$$\varphi_3 = \frac{3}{2}\ \cdot\ \frac{S}{r_3}.$$

Видно, что линейные и угловые перемещения находятся в такой же зависимости, как соответствующие линейные и угловые скорости.

Вычислим угол

$$\varphi_3 = \frac{3\cdot\ 0{,}06\ \pi}{2\ \cdot\ 0{,}09} = \pi.$$

Значит, барабан 3 повернётся на 180°; при этом шатун 4 из начального положения A_0B_0 перейдёт в конечное положение AB (см. рис. 21).

Так как скорости точек A и B шатуна в этот момент параллельны, мгновенный центр скоростей шатуна находится в бесконечности. Угловая скорость шатуна $\omega_4 = 0$, а скорости всех его точек равны между собой.

Кинетическая энергия шатуна 4

$$T_4 = \frac{m_4 V_{C_4}^2}{2}, \tag{16}$$

где

$$V_{C_4} = V_A. \tag{17}$$

Скорость точки А звена 3

$$V_A = \omega_3 \cdot R_3 \tag{18}$$

или с учётом (14) $V_A = \dfrac{3}{2}\ \cdot\ \dfrac{R_3\ V_1}{r_3}$.

Поскольку $r_3 = \frac{3}{4} R_3$, получим $V_A = 2V_1$.

С учётом (17)

$$V_{C_4} = 2V_1. \tag{19}$$

После подстановки (19) в (16) выражение кинетической энергии шатуна 4 принимает вид:

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 (2V_1)^2 = 2 m_4 V_1^2. \tag{20}$$

Кинетическая энергия катка 5

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_{C_5}^2 + \frac{1}{2} J_5 \omega_5^2,$$

где V_{C_5} – скорость центра тяжести C_5 катка 5; J_5 – момент инерции катка 5 (однородного сплошного цилиндра) относительно его центральной оси C_5 ; $J_5 = \frac{1}{2} m_5 R_5^2$, ω_5– угловая скорость катка 5.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке P_5 (см. рис. 21), поэтому $\omega_5 = \frac{V_{C5}}{R_5}$,

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_{C_5}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_5 R_5^2 V_{C_5}^2}{2R_5^2} = \frac{3}{4} m_5 V_{C_5}^2.$$

Так как звено BC_5 совершает поступательное движение, то $V_{C_5} = V_B$; но $V_B = V_{C_4} = 2V_1$, т.е. $V_{C_5} = 2 V_1$.

Кинетическая энергия катка 5 принимает вид:

$$T_5 = \frac{3}{4} m_5 (2V_1)^2 = 3 m_5 V_1^2. \tag{21}$$

По формуле (3) с учётом (4), (9), (15), (20), (21):

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right) V_1^2 + \frac{9}{8} m_3 \frac{\rho_{3x}^2}{r_3^2} V_1^2 + 2 m_4 V_1^2 + 3 m_5 V_1^2.$$

Подставляя сюда заданные значения масс и радиусов, получаем

$$T = 129 \frac{m_1 V_1^2}{2}. \tag{22}$$

Найдём сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном её перемещении. Покажем внешние силы (см. рис. 22).

Работа силы тяжести $\bar{G}_1$:

$$A_{G_1} = G_1 h_1 = m_1 g S \cdot \sin\alpha. \tag{23}$$

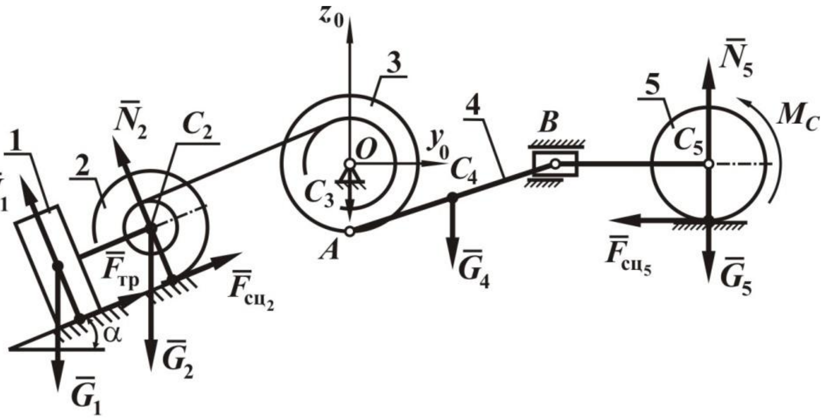


Рис. 22

Работа силы трения скольжения $F_{тр}$

$$A_{F_{тр}} = -F_{тр} \cdot S.$$

Так как $F_{тр} = fN_1 = fG_1 \cdot \cos\alpha$, то:

$$A_{F_{тр}} = -f\, m_1 g\, S \cdot \cos\alpha. \qquad (24)$$

Работа силы тяжести $\bar G_2$:

$$A_{G_2} = G_2 h_{C_2} = m_2\, g\, S \cdot \sin\alpha. \qquad (25)$$

Работа сил сцепления $\bar F_{сц_2}, \bar F_{сц_5}$ катков 2 и 5 равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенных центрах скоростей катков.

Работа силы тяжести $\bar G_4$: $A_{G_4} = G_4 h_{C_4}$,

где h_{C_4} – вертикальное перемещение центра тяжести C_4 шатуна 4 из начального положения в его конечное положение $h_{C_4} = R_3$ (рис. 23):

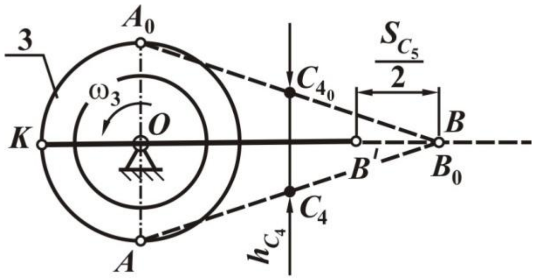


Рис. 23

$$A_{G_4} = m_4\, g\, R_3. \qquad (26)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 5:

$$A_{M_C} = -M_C \cdot \varphi_5, \qquad (27)$$

где $M_C = \delta N_5 = \delta G_5$ – момент пары сил сопротивления качению катка 5, φ_5 – угол поворота катка 5.

Так как каток 5 катится без скольжения, то угол его поворота $\varphi_5 = \dfrac{S_{C_5}}{R_5}$, где S_{C_5} – перемещение центра тяжести катка 5.

Работу пары сил сопротивления качению вычислим, как сумму работ этой пары при качении катка 5 влево при повороте тела 3 на угол

$\pi/2$ и качении вправо, когда тело 3 повернётся ещё на угол $\pi/2$. Путь, пройденный центром тяжести C_5 катка 5, равен сумме перемещений ползуна B влево и вправо:

$$S_{C_5} = 2\left|B_0 B'\right| . \tag{29}$$

Определим перемещение $B_0 B'$ при повороте тела 3 на угол $\pi/2$. За начало отсчёта координаты точки B выберем неподвижную точку K плоскости (см. рис. 23). При этом повороте тела 3 шатун из положения $A_0 B_0$ перейдёт в положение KB'. Тогда $B_0 B' = K B_0 - K B'$, где

$$K B_0 = K O + O B_0 = R_3 + \sqrt{\left(A_0 B_0\right)^2 - \left(A_0 O\right)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} ,$$

$$K B' = AB = l = 4 R_3 .$$

Следовательно,

$$B_0 B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{\left(4 R_3\right)^2 - R_3^2} - 4 R_3 = 0{,}88 R_3 . \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29), а затем в (28), находим полный угловой путь катка 5:

$$\varphi_5 = 1{,}76 \, \frac{R_3}{R_5} . \tag{31}$$

Работа пары сил сопротивления качению по (27):

$$A_{M_C} = -\delta \cdot m_5 g \cdot 1{,}76 \frac{R_3}{R_5} . \tag{32}$$

Сумма работ внешних сил определится сложением работ, вычисляемых по формулам (23) – (26) и (32):

$$\sum A_k^e = m_1 g S \cdot \sin\alpha - f m_1 g S \cdot \cos\alpha + m_2 g S \cdot \sin\alpha + m_4 g R_3 - \delta m_5 g \cdot 1{,}76 \frac{R_3}{R_5}$$

Подставляя заданные значения масс, получаем

$$\sum A_k^e = m_1 g S \left(\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha + 2\sin\alpha + \frac{R_3}{2S} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1{,}76 R_3}{R_5 S} \right),$$

или

$$\sum A_k^e = 1{,}51 m_1 g S . \tag{33}$$

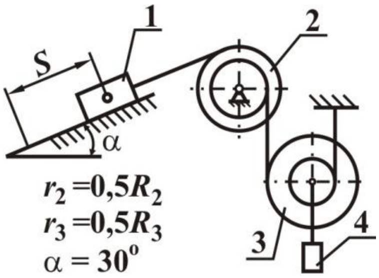
Приравняем значения T и $\sum A_k^e$, определяемые по формулам (22) и (33): $129 \cdot \dfrac{m_1 V_1^2}{2} = 1{,}51 m_1 \, g \, S$, откуда

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}51 g\, S}{129}} = \sqrt{\frac{3{,}02}{129} \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}06\pi} = 0{,}2 \ \text{м/с} .$$

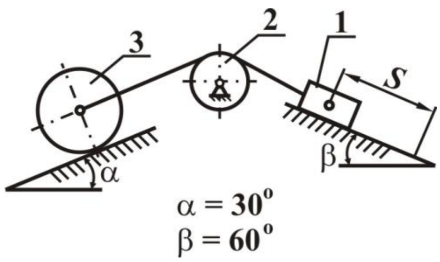
Таблица 11

Схемы механических систем к заданиям №3

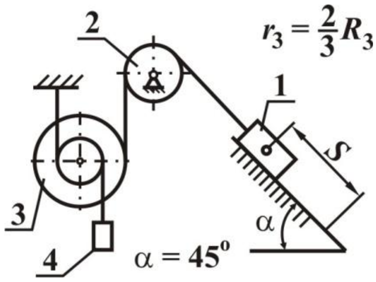
задание №1



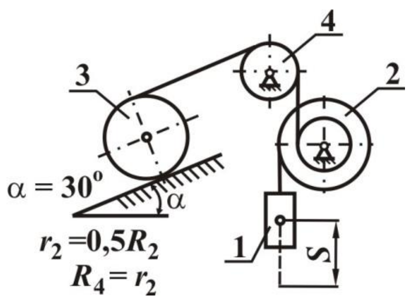
задание №2



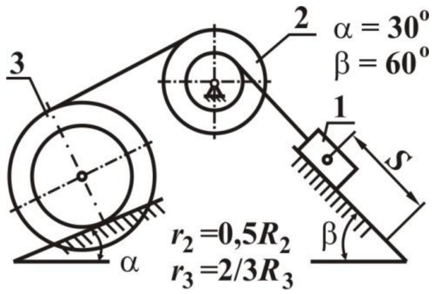
задание №3



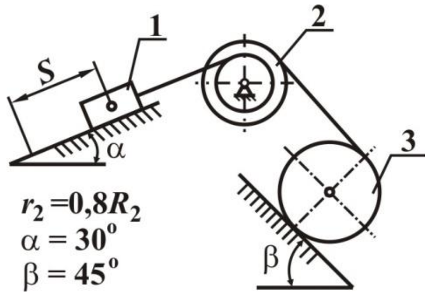
задание №4



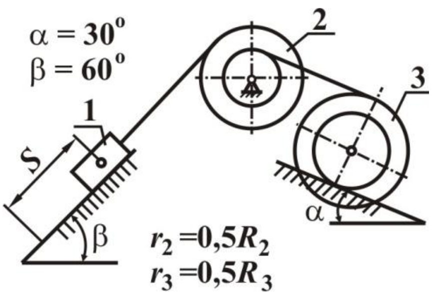
задание №5



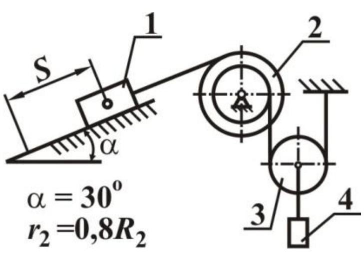
задание №6



задание №7

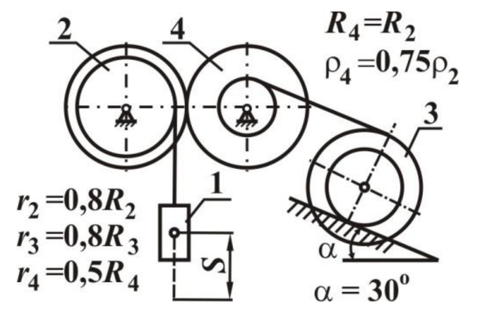


задание №8

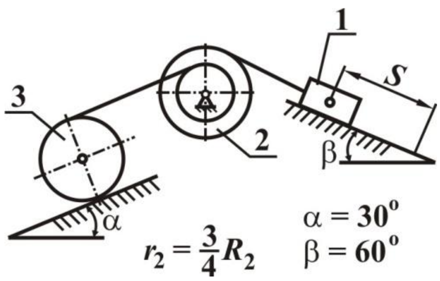


продолжение табл. 11

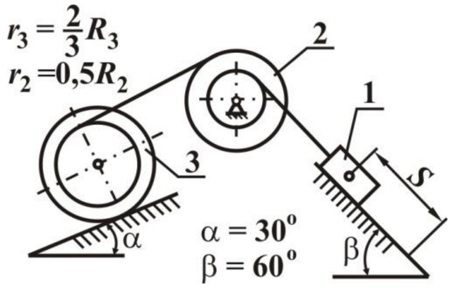
задание №9



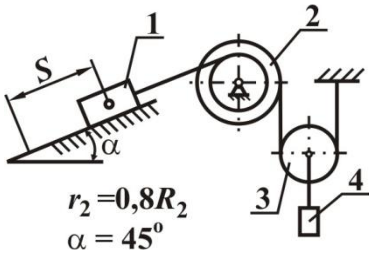
задание №10



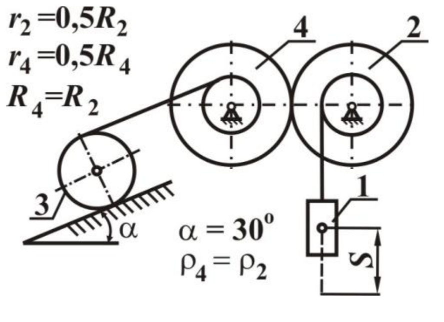
задание №11



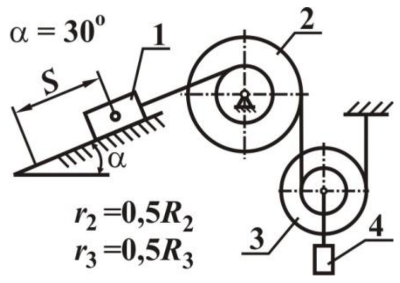
задание №12



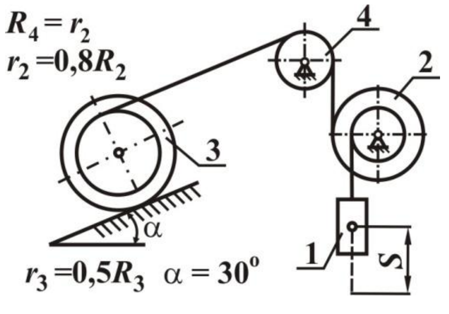
задание №13



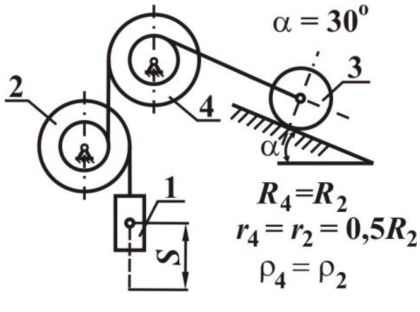
задание №14



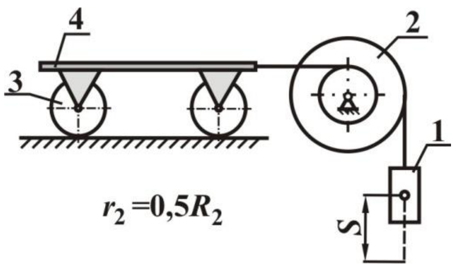
задание №15

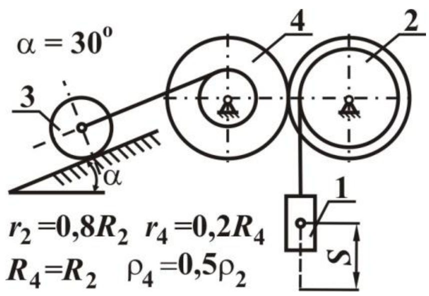


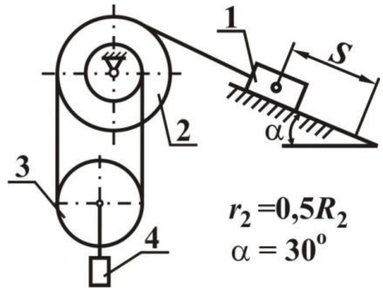
задание №16

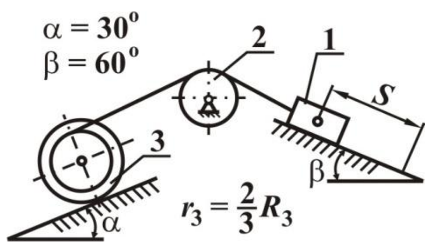


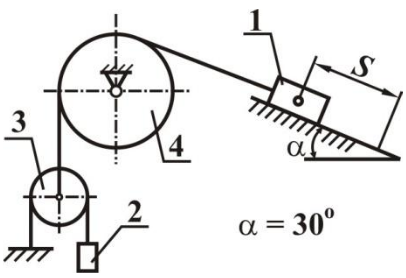
продолжение табл. 11

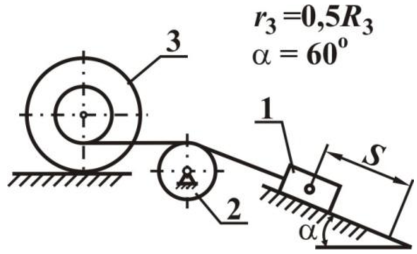
<table>
<tr><td>задание №17</td><td>задание №18</td></tr>
<tr><td>


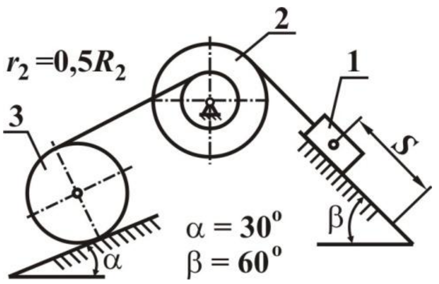
</td><td>


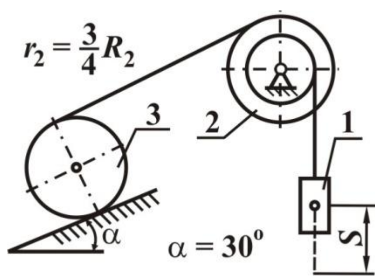
</td></tr>
<tr><td>задание №19</td><td>задание №20</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание №21</td><td>задание №22</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание №23</td><td>задание №24</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

окончание табл. 11

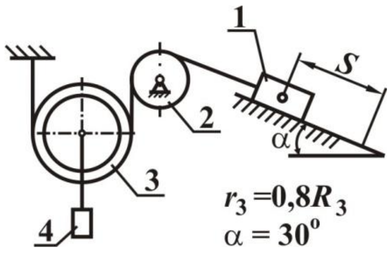
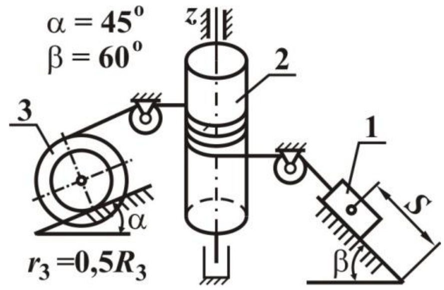
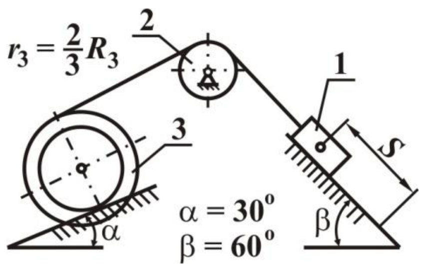
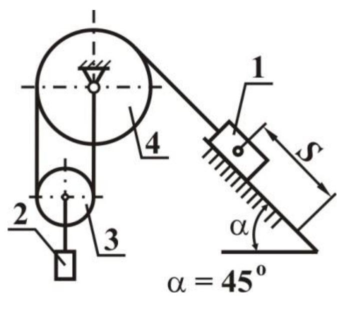
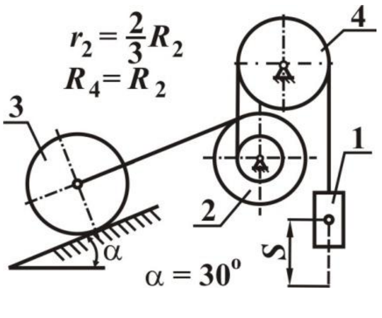
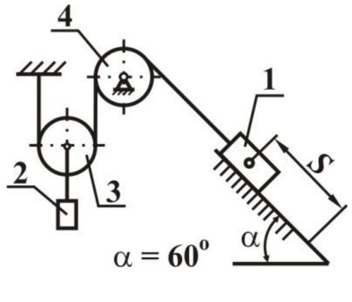
задание №25	задание №26
	
задание №27	**задание №28**
	
задание №29	**задание №30**
	

Таблица 12

Данные для индивидуального задания №3

№ варианта	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	ρ_2	ρ_3	f	δ, см	S, м
	кг			см						
1	5*m*	3*m*	15*m*	26	20	20	18	0,12	-	2
2	2,5*m*	*m*	-	-	35	-	-	0,2	0,2	2,4
3	20*m*	5*m*	2,5*m*	-	18	-	16	0,2	-	2
4	10*m*	60*m*	5*m*	20	20	16	-	-	0,2	2
5	5*m*	10*m*	-	16	30	12	25	0,1	0,2	1
6	5*m*	2*m*	-	15	20	12	-	0,15	0,2	1
7	20*m*	50*m*	-	16	20	12	16	0,15	0,2	1,2
8	10*m*	*m*	8*m*	20	-	18	-	0,1	-	1
9	14*m*	20*m*	8*m*	20	20	16	18	-	0,25	1,2
10	10*m*	20*m*	-	20	20	16	-	0,2	0,32	1,2
11	20*m*	10*m*	-	16	30	12	25	0,1	0,2	1,5
12	3*m*	*m*	10*m*	24	-	20	-	0,15	-	1,5
13	20*m*	30*m*	20*m*	20	20	15	-	-	0,2	3
14	10*m*	*m*	2*m*	20	20	15	15	0,1	-	1
15	20*m*	2,5*m*	*m*	20	20	18	15	-	0,2	1
16	5*m*	40*m*	5*m*	20	15	18	-	-	О,25	1,5
17	5*m*	50*m*	40*m*	30	25	26	-	-	0,2	2
18	20*m*	50*m*	20*m*	30	20	26	-	-	0,24	2
19	5*m*	2*m*	10*m*	30	-	20	-	0,2	-	2,5
20	5*m*	2,5*m*	-	-	30	-	25	0,17	0,2	2,5
21	2,5*m*	2,5*m*	2*m*	-	-	-	-	0,1	-	3
22	20*m*	20*m*	-	-	30	-	25	0,12	0,25	1,5
23	5*m*	3*m*	-	16	24	12	-	0,15	0,2	1,75
24	20*m*	10*m*	-	16	25	14	-	-	0,2	2
25	5*m*	2*m*	2,5*m*	-	20	-	18	0,1	-	1
26	30*m*	10*m*	-	-	28	-	20	0,1	0,28	1,5
27	5*m*	3*m*	-	-	30	-	20	0,22	0,2	2
28	40*m*	2*m*	13*m*	-	-	-	-	0,1	-	2
29	30*m*	10*m*	20*m*	15	20	12	-	-	0,2	2
30	10*m*	*m*	10*m*	-	-	-	-	0,1	-	2

Индивидуальное задание №4

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы (дифференциальная форма)

Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения нитей, к которым прикреплены грузы. Система движется из состояния покоя.

Варианты механических систем представлены в таблице 13, а необходимые для решения данные приведены в таблице 14. Во всех вариантах $m_1 = 2m,\ m = 10$ кг. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Примечания:

Радиусы инерции вычислены относительно центральных осей.

Коэффициент трения принимать одинаковым, как при скольжении тела по плоскости, так и при торможении колодкой (варианты 9; 11).

Пример выполнения задания.

Дано: Схема механической системы (рис. 24) $m_1 = m_2 = 2m,\ m_3 = m_4 = m$, $R = 2r,\ \rho_2 = r\sqrt{2},\ f = 0{,}2$. Блок 3 – однородный цилиндр. Определить ускорения грузов и натяжения ветвей нити 1–2 и 3–4.

Решение.

Применим к решению задачи теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$\frac{dT}{dt} = \sum N .$$

Целесообразно определить истинное направление движения системы, чтобы правильно показать направление сил трения. В рассматриваемом примере груз 1 опускается.

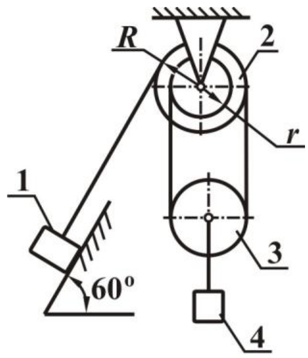


Рис. 24

Покажем активные силы: силы тяжести $\bar{G}_1, \vec{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4$, а также составляющие реакции плоскости $\bar{R}_n$ и $\bar{F}_{тр}$ (см. рис. 25).

Сила трения:

$$F_{тр} = f R_n = f G_1 \cdot \cos 60^{\circ} = f G .$$

Покажем линейные и угловые скорости и составим уравнения связей. Мгновенный центр скоростей блока 3 находится на одной вертикали с центром блока 2. Расстояние между МЦС и центром блока 3 (см. рис. 25, б):

$$b = \frac{3}{2}r - r = \frac{r}{2}.$$

Находим:

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_1}{R} = \frac{V_1}{2r},$$

$$V_3 = V_4 = \omega_3 b = \frac{V_1}{4}.$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий звеньев механизма:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

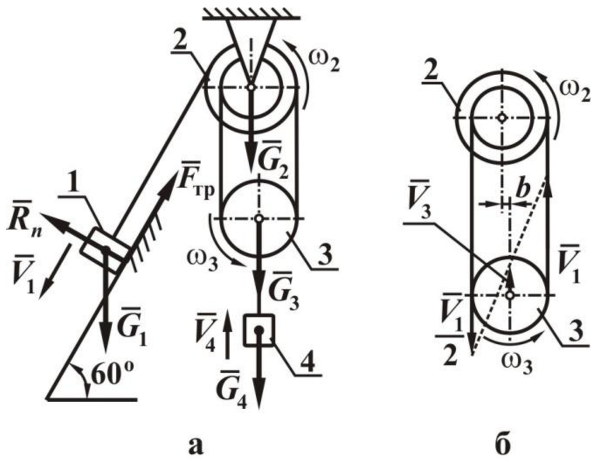


Рис. 25

Грузы 1 и 4 движутся поступательно:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 = mV_1^2;\; T_4 = \frac{1}{2}m_4V_4^2 = \frac{1}{32}mV_1^2.$$

Блок 2 вращается вокруг неподвижной оси:

$$T_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2,$$

момент инерции блока 2 $J_2 = m_2\rho_2^2$, следовательно: $T_2 = \dfrac{1}{2}mV_1^2$.

Блок 3 совершает плоское движение:

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3V_3^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2,$$

момент инерции блока 3 $J_3 = \dfrac{1}{2}m_3R_3^2 = \dfrac{9}{8}mr^2$, следовательно: $T_3 = \dfrac{11}{64}mV_1^2$.

Кинетическая энергия системы:

$$T = mV_1^2 + \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{3}{64}mV_1^2 + \frac{1}{32}mV_1^2,$$

$$T = \frac{109}{64}mV_1^2.$$

Определим мощность сил, действующих на систему. Мощность силы $\bar{G}_2$, приложенной в неподвижной точке, и мощность реакций идеальных связей равна нулю. Мощность остальных сил

$$\sum N = G_1 \cdot \sin 60^{\circ} \cdot V_1 - F_{\text{тр}} \cdot V_1 - G_3 \cdot V_3 - G_4 \cdot V_4.$$

Учитывая значение силы $F_{\text{тр}}$, уравнения связей и исходные данные, находим

$$\sum N = 1{,}03 mgV_1 .$$

Вычисляем производную $\frac{dT}{dt} = \frac{109}{32} mV_1 a_1$, значения $\frac{dT}{dt}$ и $\sum N$ подставляем в уравнение теоремы $\frac{109}{32} mV_1 a_1 = 1{,}03 mgV_1$, находим:

$$a_1 = 2{,}97 \text{ м/с}^2 .$$

Дифференцируя по времени уравнение связи $V_4 = V_1/4$, находим:

$$a_4 = a_1/4; \; a_4 = 0{,}74 \text{ м/с}^2 .$$

Для определения натяжения нити на участке 1 – 2 мысленно рассечем нить и заменим ее действие на груз 1 реакцией $\bar{S}_{1-2}$ (рис.26, а). Применим теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: $\frac{dT_1}{dt} = \sum N_1$.

Кинетическая энергия найдена ранее: $T_1 = mV_1^2$.

Мощность сил

$$\sum N_1 = G_1 \sin 60^\circ \cdot V_1 - F_{\text{тр}} \cdot V_1 - S_{1-2} \cdot V_1 .$$

Получим:

$$2mV_1 a_1 = \left(G_1 \sin 60^\circ - F_{\text{тр}} - S_{1-2}\right) \cdot V_1 ,$$

откуда:

$$S_{1-2} = G_1 \sin 60^\circ - F_{\text{тр}} - 2ma_1 ;$$

$$S_{1-2} = 0{,}93G .$$

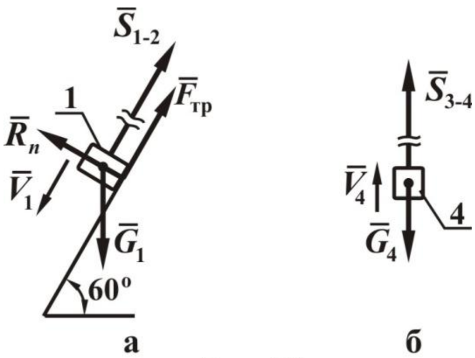


Рис. 26

Для определения усилия на участке 3 – 4 мысленно выполняем рассечение и вводим реакцию $\bar{S}_{3-4}$ (рис. 26, б).

Кинетическая энергия $T_4 = \frac{1}{32} mV_1^2$.

Мощность сил

$$\sum N = S_{3-4} \cdot V_4 - G_4 \cdot V_4 .$$

Применяем теорему:

$$\frac{1}{16} mV_1 a_1 = \left(S_{3-4} - G_4\right) \frac{V_1}{4} .$$

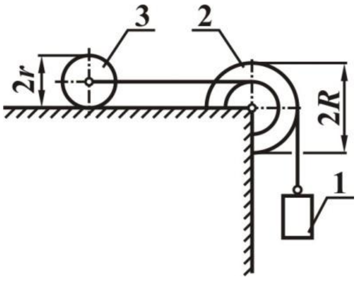
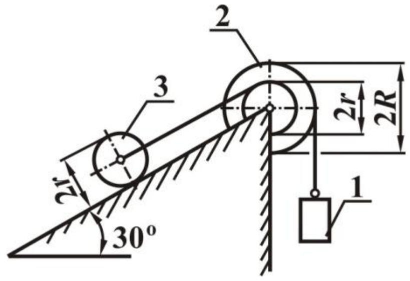
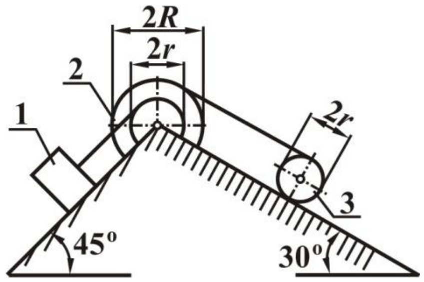
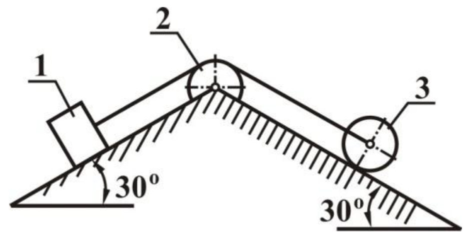
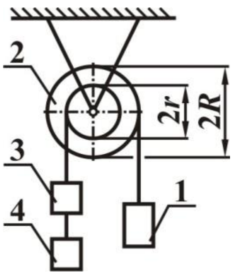
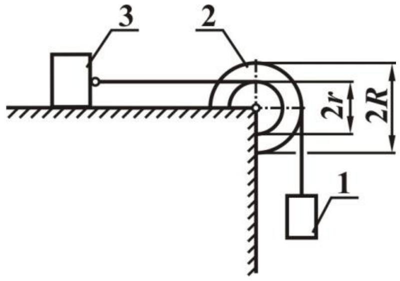
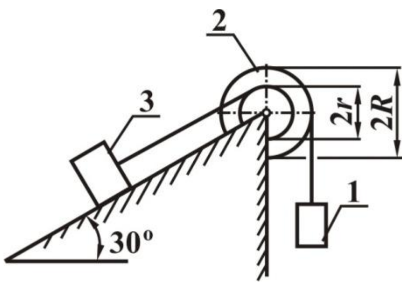
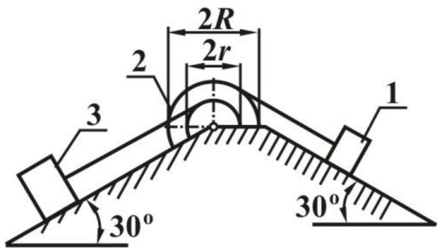
Находим

$$S_{3-4} = \frac{1}{4} ma_1 + G ;$$

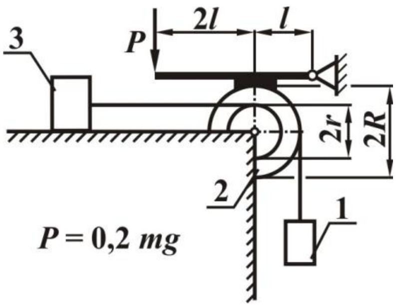
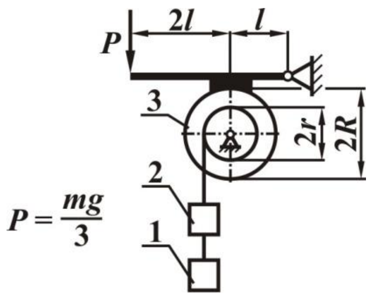
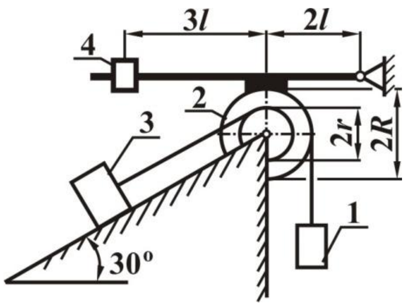
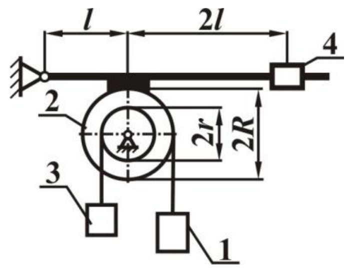
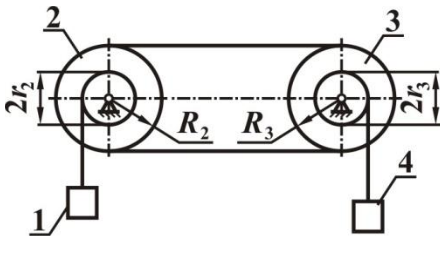
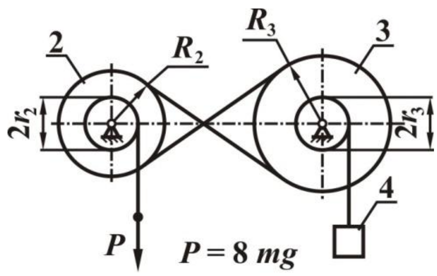
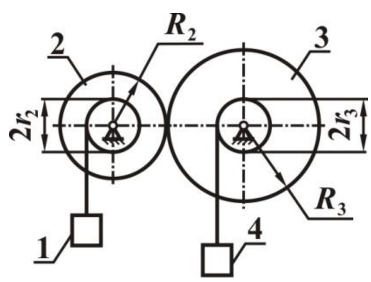
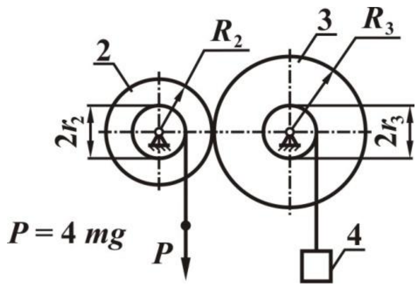
$$S_{3-4} = 1{,}08G .$$

Таблица 13

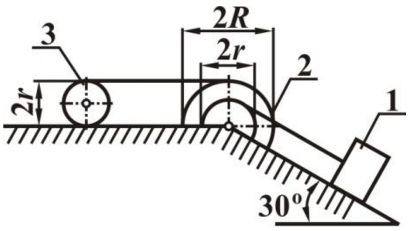
Схемы механических систем к заданиям №4

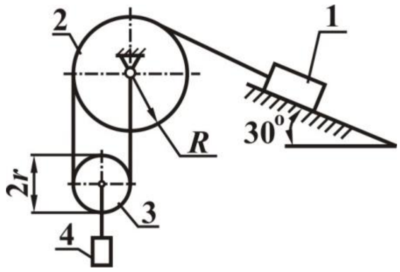
<table>
<tr><td>задание №1</td><td>задание №2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №3</td><td>задание №4</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №5</td><td>задание №6</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №7</td><td>задание №8</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

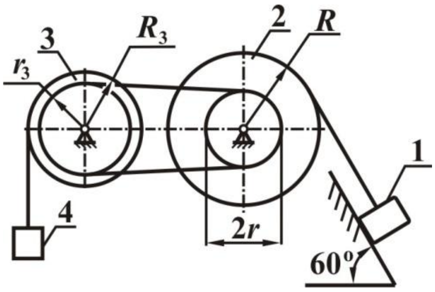
продолжение табл. 13

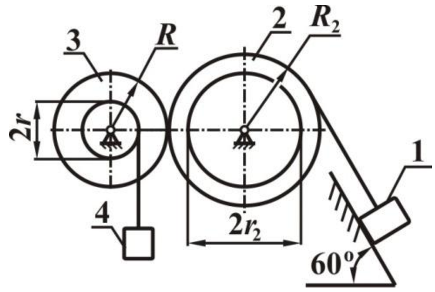
<table>
<tr><td>задание №9</td><td>задание №10</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №11</td><td>задание №12</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №13</td><td>задание №14</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №15</td><td>задание №16</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

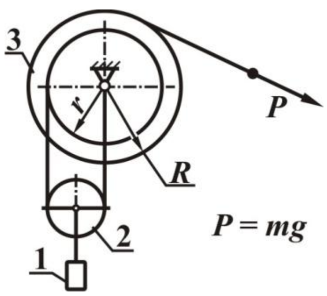
продолжение табл. 13

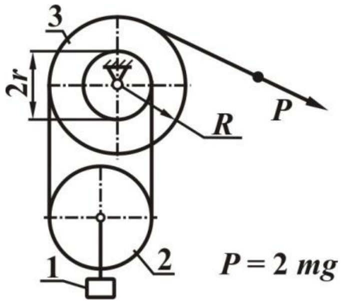
<table>
<tr><td>задание №17</td><td>задание №18</td></tr>
<tr><td>


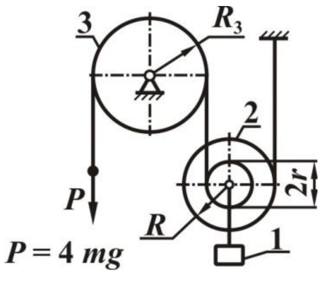
</td><td>


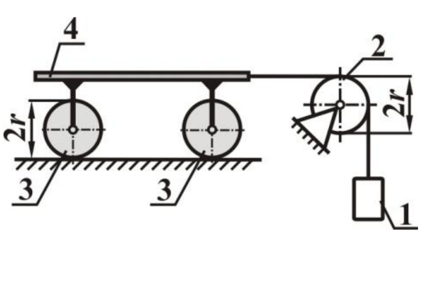
</td></tr>
<tr><td>задание №19</td><td>задание №20</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание №21</td><td>задание №22</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание №23</td><td>задание №24</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

окончание табл. 13

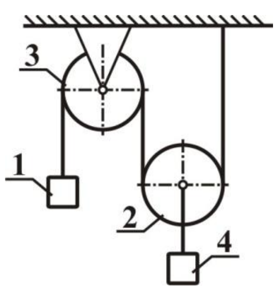
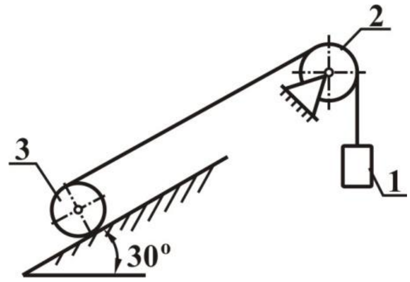
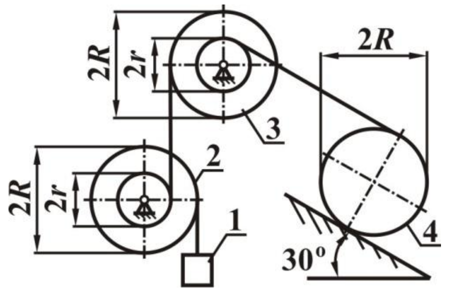
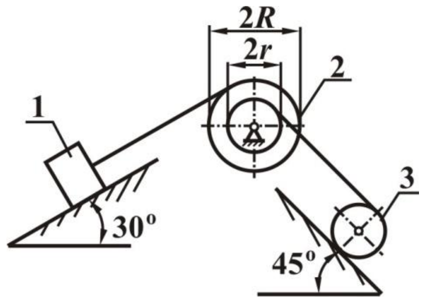
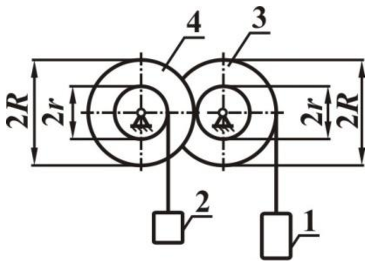
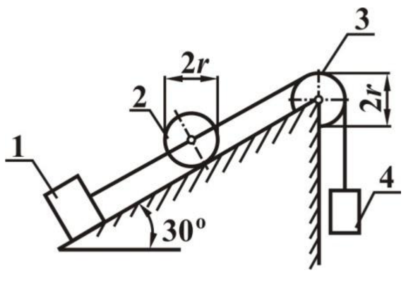
задание №25	задание №26
	
задание №27	**задание №28**
	
задание №29	**задание №30**
	

Таблица 14

Данные для индивидуального задания №4

№	массы звеньев			$\frac{R}{r}$	Радиусы инерции		f	Дополнительные данные
	m_2	m_3	m_4		ρ_2	ρ_3		
1	m	$3m$	–	2	$r\sqrt{2}$	–	–	
2	m	m	–	2	$r\sqrt{2}$	–	–	
3	m	m	–	2	$r\sqrt{2}$	–	0,1	
4	m	$4m$	–	–	–	–	0,2	$R_2 = R_3$
5	m	m	m	3	$2r$	–	–	
6	m	$2m$	–	3	$2r$	–	0,2	
7	m	$2m$	–	3	$2r$	–	0,2	
8	m	$2m$	–	3	$2r$	–	0,2	
9	m	$2m$	–	3	$2r$	–	0,2	
10	$2m$	m	–	4	–	–	0,4	
11	m	$2m$	$0{,}2m$	3	$2r$	–	0,2	
12	m	$2m$	$0{,}2m$	3	$2r$	–	0,2	
13	$2m$	m	$2m$	–	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	–	$r_2 = 2r_3; R_2 = R_3$
14	$2m$	m	$4m$	–	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	–	$r_2 = 2r_3; R_3 = 1{,}5R_2$
15	m	$2m$	$2m$	–	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	–	$r_2 = 2r_3; R_3 = 1{,}5R_2$
16	m	$2m$	$4m$	–	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	–	$r_2 = 2r_3; R_3 = 1{,}5R_2$
17	m	m	–	2	$r\sqrt{2}$	–	0,1	
18	$0{,}2m$	$0{,}1m$	$0{,}3m$	2	–	–	0,4	
19	$0{,}3m$	$0{,}2m$	$6m$	3	$2r$	$1{,}2r$	0,1	$r_3 = 1{,}2r; R_3 = 1{,}2r_3$
20	$0{,}2m$	$0{,}1m$	$6m$	2	$1{,}6r$	$r\sqrt{2}$	0,2	$r_2 = 1{,}5r; R_2 = 1{,}2r_2$
21	$4m$	$0{,}2m$	–	3	–	$r\sqrt{2}$	–	
22	$0{,}4m$	$0{,}6m$	–	2	–	$r\sqrt{2}$	–	
23	$0{,}4m$	$0{,}2m$	–	1,5	$1{,}2r$	–	–	$R_3 = 1{,}2r$
24	m	m	$8m$	–	–	–	–	Массы четырех колес одинаковы
25	m	$2m$	m	–	–	–	–	$R_3 = R_2$
26	$2m$	$2m$	–	–	–	–	–	$R_2 = R_3$
27	$2m$	$2m$	$8m$	2	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$	–	
28	m	m	–	2	$r\sqrt{2}$	–	0,1	
29	m	m	m	2	–	$r\sqrt{2}$	–	$\rho_4 = \rho_3$
30	m	m	$6m$	–	–	–	0,1	

7. Аналитическая статика

7.1. Связи

Связями в аналитической механике называются ограничения, накладываемые на координаты и скорости точек несвободной механической системы.

Связи, налагающие ограничения, которые сохраняются при любом положении механической системы, называются *удерживающими*.

Связи, от которых система может освободиться, называются *неудерживающими*. Удерживающие связи математически выражаются уравнениями, неудерживающие – неравенствами.

Связи, не изменяющиеся с течением времени, называются *стационарными*, изменяющиеся – *нестационарными*. В уравнения нестационарных связей явно входит время t.

Связи, налагающие ограничения только на координаты точек системы, называются *геометрическими*, а налагающие ограничения еще и на скорости – *кинематическими* или *дифференциальными*.

Кинематическую связь, которую интегрированием можно свести к геометрической, называют *интегрируемой*.

К *голономным* относятся все геометрические связи, а также те дифференциальные связи, которые путем интегрирования могут быть сведены к геометрическим. Дифференциальная связь, уравнение которой не может быть проинтегрировано, называется *неголономной*.

Механическая система называется голономной, если все ее связи голономные, и неголономной, если хотя бы одна из ее связей является неголономной.

В дальнейшем мы будем рассматривать системы с удерживающими голономными связями.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. На две материальные точки наложена связь в виде жесткого, невесомого и нерастяжимого стержня длины l. Уравнение связи

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2,$$

где $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ – координаты точек. Связь удерживающая, стационарная, геометрическая, голономная.

Пример 2. Две материальные точки соединены невесомой, нерастяжимой, абсолютно гибкой нитью длины l. Математическое описание связи:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \le l^2.$$

Знак «меньше» соответствует состоянию, когда нить не натянута. Связь неудерживающая.

Пример 3. Колесо катится без скольжения по неподвижной поверхности. Уравнение связи:

$$V_O = \omega R \text{ или } \dot{x}_O = R\dot{\varphi}.$$

Это дифференциальная связь, но уравнение интегрируется и приводится к виду:

$$x_O = R\varphi.$$

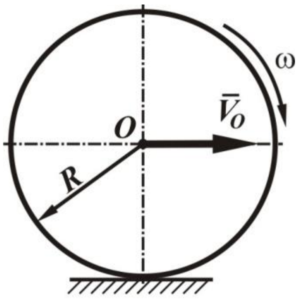


Рис. 27

Следовательно, эта связь голономная.

7.2. Виртуальные перемещения

Виртуальным (возможным) перемещением механической системы называется такое мысленное малое перемещение $(\delta\bar{r}_1,\ldots,\delta\bar{r}_n)$ *ее точек из данного положения при неизменном времени, которое допускается связями.*

При стационарных связях виртуальные перемещения точек системы пропорциональны виртуальным скоростям этих точек:

$$\frac{\delta\, r_A}{\delta\, r_B} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP},$$

где точка P – мгновенный центр скоростей; $\delta\bar{r}_A$ и $\delta\bar{r}_B$ – виртуальные перемещения точек A и B; $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ – виртуальные скорости этих точек.

Числом степеней свободы механической системы называется число независимых виртуальных перемещений, которые можно сообщить системе.

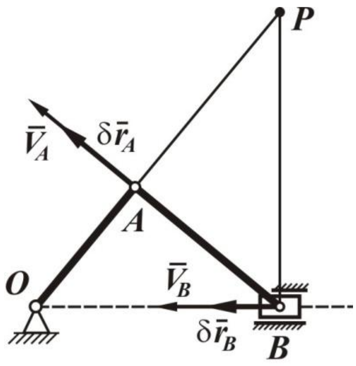


Рис. 28

У механической системы с геометрическими связями число степеней свободы совпадает с числом независимых координат, определяющих положение системы.

7.3. Идеальные связи

Работа силы на виртуальном перемещении точки ее приложения называется виртуальной работой силы:

$$\delta A = \bar{F}\cdot\delta\bar{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z\,.$$

Связь называется *идеальной*, если сумма работ реакций связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю, то есть

$$\delta\, A(\bar{R}) = \sum_{i=1}^{n}\bar{R}_i\cdot\delta\,\bar{r}_i = 0\,.$$

К идеальным связям относятся:

1) гладкие поверхности;

2) идеальные шарниры;

3) нерастяжимые стержни с шарнирами на концах, абсолютно гибкие нерастяжимые нити;

4) связь, обеспечивающая качение без скольжения;

5) внутренние связи в абсолютно твердом теле, в абсолютно гибкой нерастяжимой нити.

7.4. Принцип виртуальных перемещений

Для равновесия механической системы с идеальными, стационарными, удерживающими, голономными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ активных сил на любом виртуальном перемещении системы была равна нулю и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, V_k(0) = 0 \left(k = 1, \ldots, n\right).$$

Выразим виртуальные перемещения через виртуальные скорости: $\delta\, \bar{r}_i = k\bar{V}_i^*$; получим *принцип виртуальных скоростей*:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \cdot \bar{V}_i^* = 0.$$

Для равновесия системы с идеальными стационарными, удерживающими, голономными связями необходимо и достаточно, чтобы мощность активных сил на любом виртуальном движении системы была равна нулю.

Пример. На кривошип OA кривошипно-ползунного механизма действует пара сил с моментом M. Кривошип и шатун AB – невесомые стержни длины l. Найти силу $\bar{P}$, удерживающую механизм в равновесии, если на шарнир A действует сила $\bar{Q}$ (рис. 29, а).

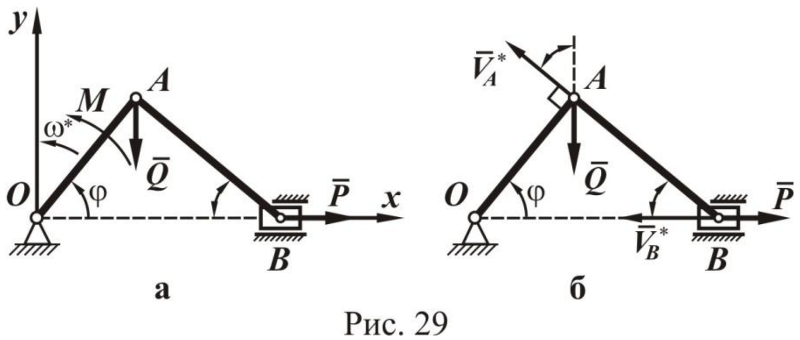


Рис. 29

Решение.

К механизму приложены активные силы $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ и пара сил с моментом M. Все связи механизма идеальны. Реакции идеальных связей на рисунке не показываем.

Положение механизма определяется одним углом φ, следовательно, система имеет одну степень свободы.

Решим задачу, используя принцип виртуальных скоростей. Сообщим системе виртуальное движение $\left(\omega^*, \bar{V}_A^*, \bar{V}_B^*\right)$.

Составляем уравнения связей. $V_A^* = \omega^* \cdot OA = \omega^* l$.

Связь между скоростями точек A и B шатуна найдем при помощи теоремы о проекциях скоростей:

$$V_A^* \cdot \cos\left(90^\circ - 2\varphi\right) = V_B^* \cdot \cos\varphi;$$

$$\cos\left(90^\circ - 2\varphi\right) = \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi;$$

$$V_B^* = 2\omega^* l \cdot \sin\varphi.$$

Составляем уравнение мощности, выражающее принцип виртуальных скоростей:

$$N^* = M\omega^* + QV_A^* \cos(\bar{Q} \wedge \bar{V}_A^*) + PV_B^* \cos(\bar{P} \wedge \bar{V}_B^*) =$$
$$M\omega^* + QV_A^* \cos(180^\circ - \varphi) + PV_B^* \cos 180^\circ = M\omega^* - QV_A^* \cos\varphi - PV_B^* = 0.$$

Здесь N^* – виртуальная мощность сил системы.

Подставляем в уравнение значения V_A^* и V_B^*:

$$M\omega^* - Q\omega^* l \cos\varphi - 2P\omega^* l \sin\varphi = 0;$$

$$M - Ql\cos\varphi - 2Pl\sin\varphi = 0.$$

Находим

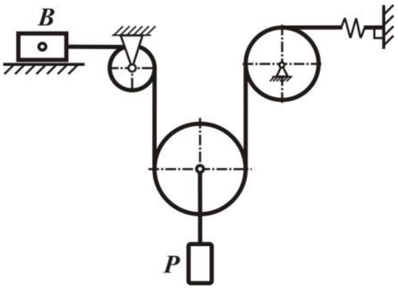
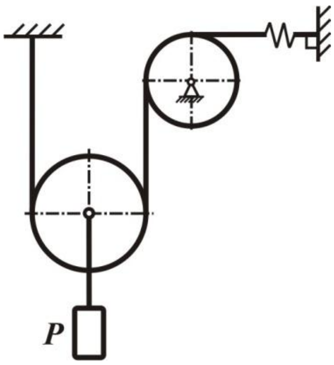
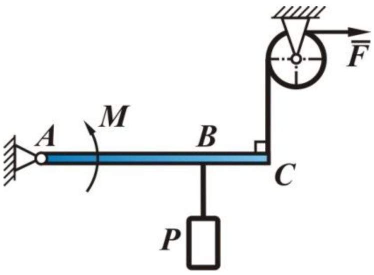
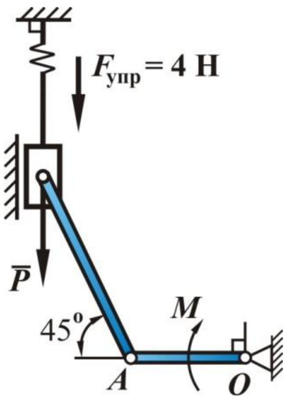
$$P = \frac{M}{2l\sin\varphi} - \frac{Q}{2}\operatorname{ctg}\varphi.$$

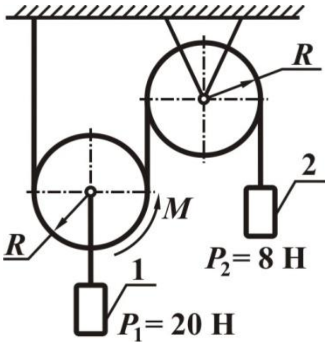
Контрольные вопросы

1. Какими должны быть связи в системах, условия равновесия которых устанавливает принцип возможных перемещений (возможных скоростей)?
2. Какие связи называются идеальными?
3. Какие связи называются стационарными?
4. Какие связи называются удерживающими?
5. Как формулируется принцип виртуальных перемещений?
6. Как записывается формула, выражающая принцип возможных скоростей?

Таблица 15

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Число степеней свободы механизма … **Ответ**: 2	
2	Вес груза $P = 8\,\text{Н}$, подвижный блок невесом. При равновесии механизма сила упругости пружины $F_{упр} = ...\,\text{Н}$. **Ответ**: 4	
3	Вес груза $P = 6\,\text{Н}$, $F = 2\,\text{Н}$, $AB = 4\,\text{м} = 2/3\,AC$. При равновесии механизма момент $M = ...\,\text{Н} \cdot \text{м}$ **Ответ**: 12	
4	$AO = 2\,\text{м}$, $M = 20\,\text{Н} \cdot \text{м}$. При равновесии механизма в показанном положении сила тяжести ползуна $P = ...\,\text{Н}$. **Ответ**: 6	
5	Положение механической системы определяется тремя независимыми координатами. Число степеней свободы системы … **Ответ**: 3	

6	Радиус невесомого подвижного блока $R = 2$ м; при равновесии механизма момент $M = ...$ Н·м. **Ответ**: 8	

Индивидуальное задание № 5

Принцип виртуальных перемещений (скоростей) в применении к механизмам

Схемы механизмов, находящихся под действием взаимно уравновешивающихся сил, представлены в таблице 16, а необходимые для решения данные приведены в таблице 17. Применяя принцип виртуальных перемещений (скоростей), определить величину, указанную в последней графе таблицы 17.

Примечания. На схемах плоскость $xOy\,(xO_1y)$ – горизонтальна; плоскость $yOz\,(yO_1z)$ – вертикальна. В таблице 17 в столбце «Удлинение пружины» знаком «–» отмечено сжатие пружины.

Пример выполнения задания.

Дано: Схема механизма (см. рис. 30). $Q = 100$ Н; коэффициент жесткости пружины $c = 5$ Н/см; $R_2 = 40$ см; $r_2 = 20$ см; $R_3 = 10$ см; $\alpha = 30^\circ$; $O_3A = l = 50$ см; $\beta = 90^\circ$. Определить удлинение h пружины, пренебрегая весом звеньев O_3A и AB.

Решение.

Рассматриваемый механизм (см. рис. 30) находится под действием уравновешенной системы сил: силы упругости $\bar{F}$, сил тяжести а также реакций опор. Направление силы $\bar{F}$ выбрано в предположении, что пружина сжата.

Решим задачу, используя принцип возможных скоростей:

$$\sum \bar{P}_i \bar{V}_i = 0 \text{ или } \sum P_i V_i \cdot \cos(\bar{P}_i \wedge \bar{V}_i) = 0$$

Сообщим звену 2 виртуальную угловую скорость ω_2 (см. рис.30). Груз 1 получит вертикальную скорость $\bar{V}_Q$. Шестерня 3 вместе с жёстко соединённым с нею кривошипом O_3A приобретёт угловую скорость ω_3.

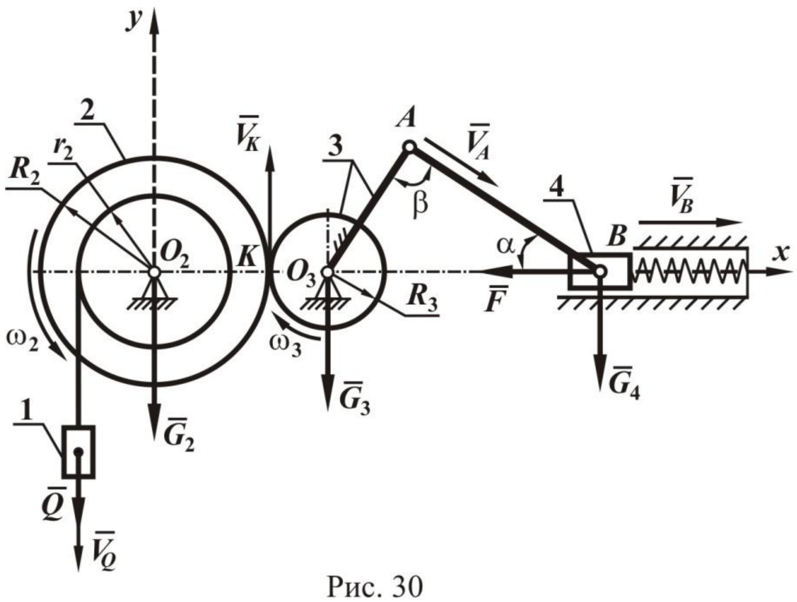


Рис. 30

Скорость точки K

$$V_K = \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3, \; \omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3}.$$

Скорость груза

$$V_Q = \omega_2 r_2.$$

Скорость точки A

$$V_A = \omega_3 \cdot O_3 A.$$

Для определения скорости точки B используем теорему о проекциях скоростей:

$$V_A = V_B \cdot \cos\alpha.$$

Тогда

$$V_B = \frac{R_2}{R_3} \frac{O_3 A}{\cos\alpha} \cdot \omega_2.$$

Составим уравнение мощностей:

$$Q \cdot V_Q - F \cdot V_B = 0.$$

Здесь сила упругости пружины:

$$F = c \cdot h.$$

Подставив в уравнение мощностей значения V_Q, V_B, F, найдем:

$$h = \frac{r_2 R_3 Q}{R_2 l c} \cos\alpha.$$

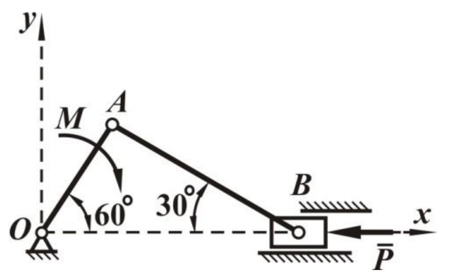
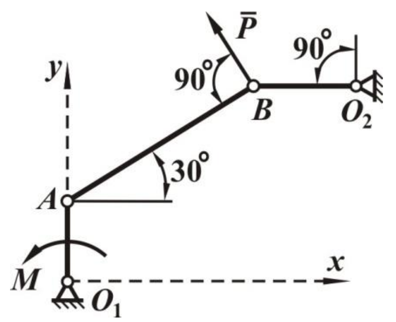
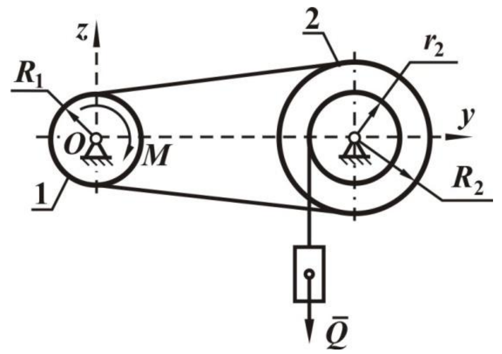
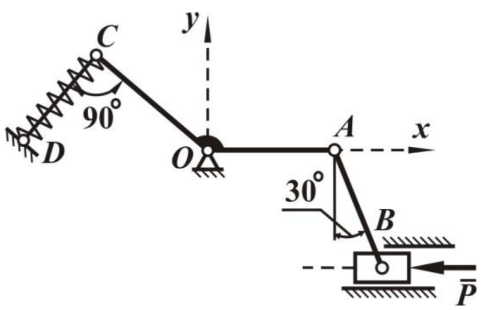
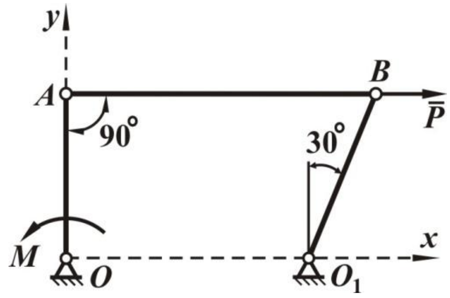
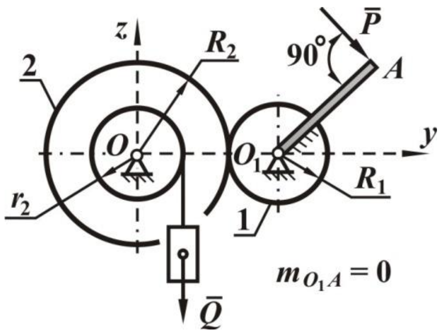
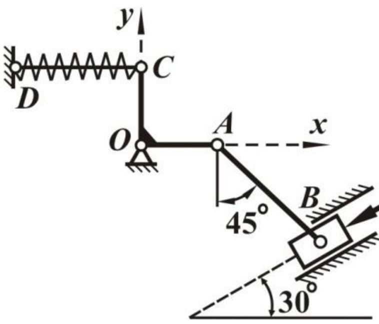
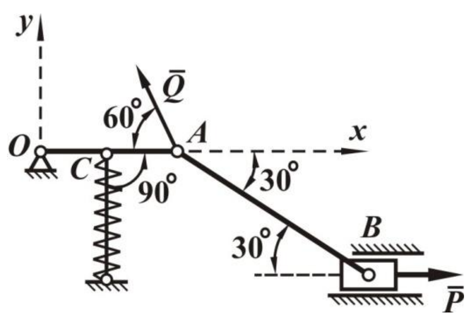
Подставляя числовые значения величин, получим

$$h = +1{,}74 \text{ см}.$$

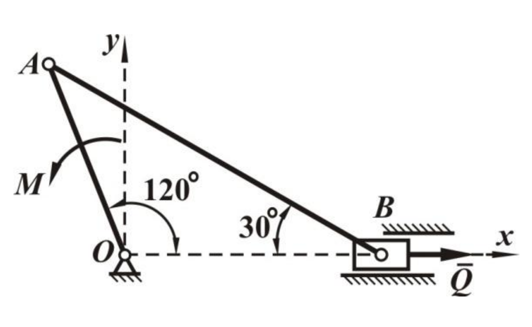
Знак «+» в числовом результате означает, что пружина сжата.

Таблица 16

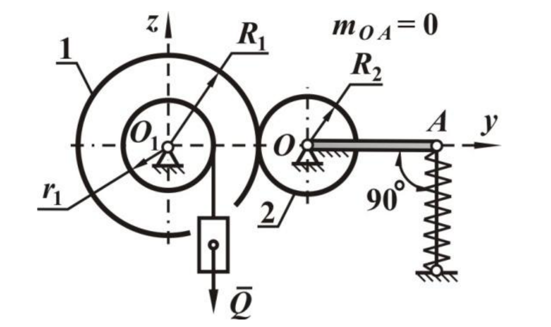
Схемы механизмов к заданиям №5

задание №1	задание №2
	
задание №3	**задание №4**
	
задание №5	**задание №6**
	
задание №7	**задание №8**
	

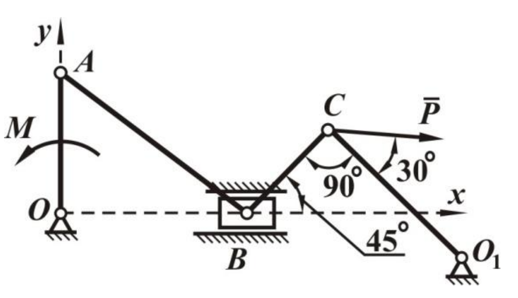
задание №9



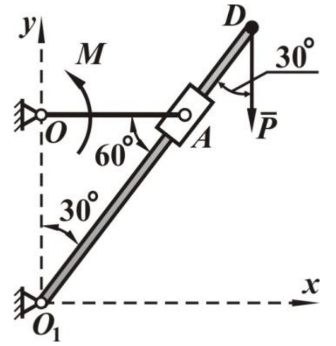
задание №10



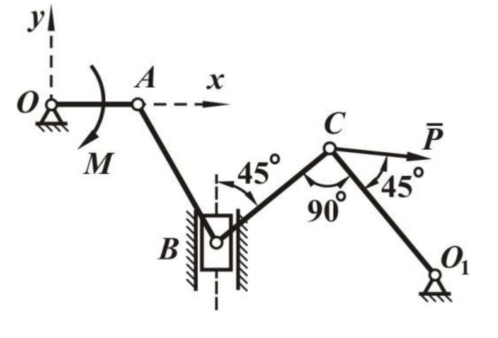
задание №11



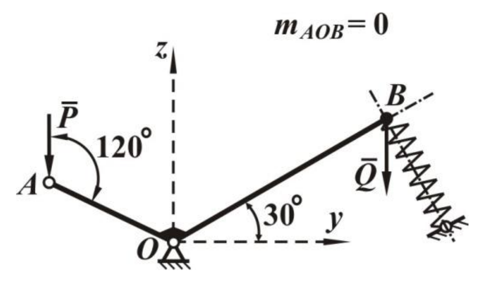
задание №12



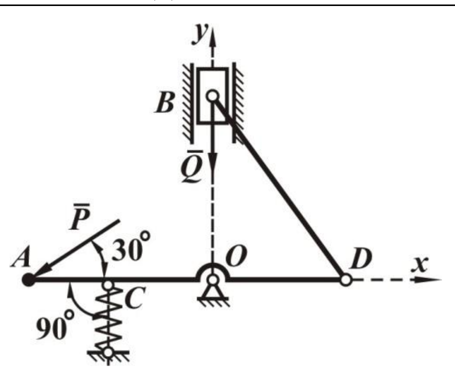
задание №13



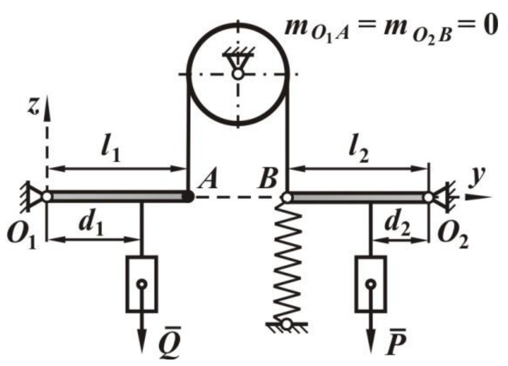
задание №14



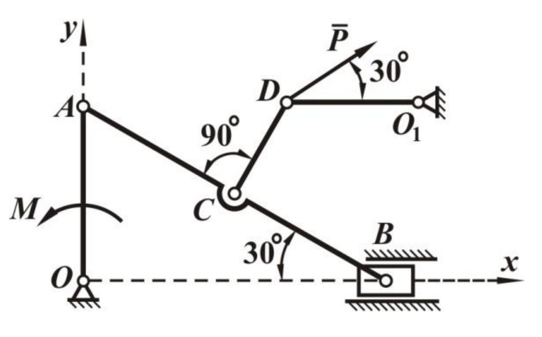
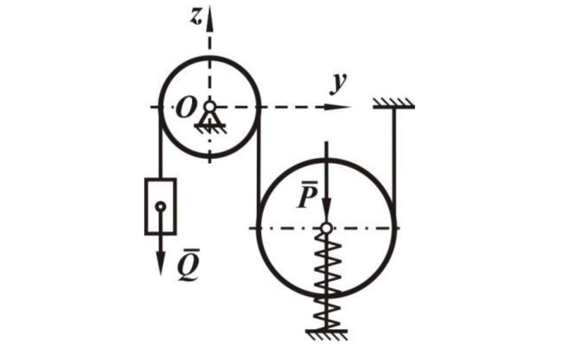
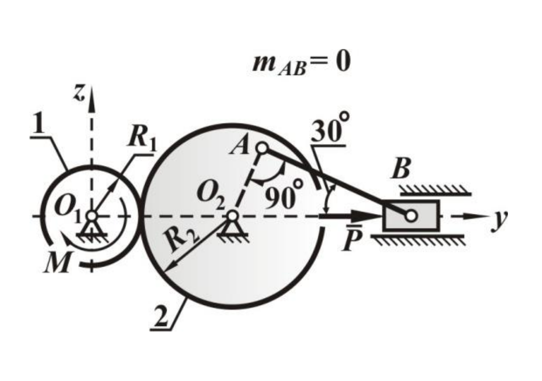
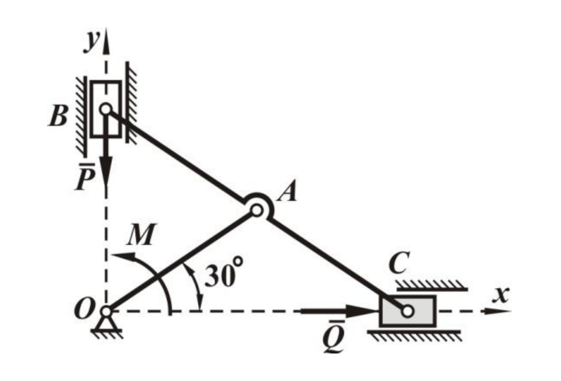
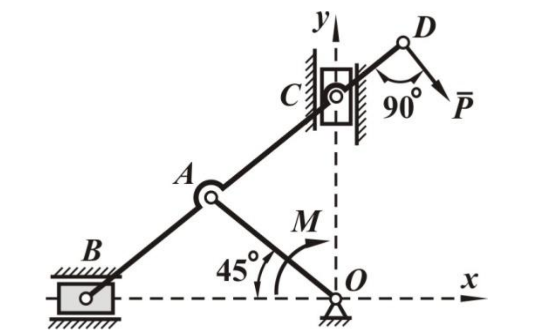
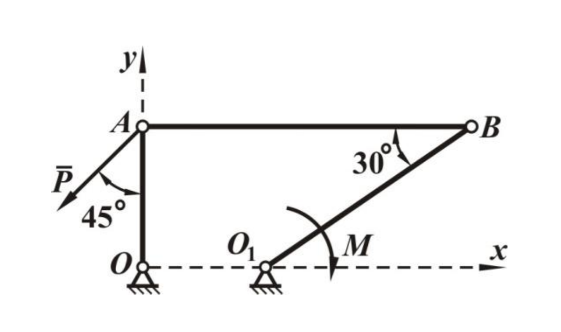
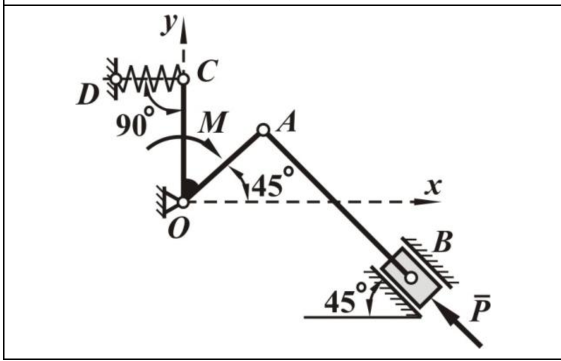
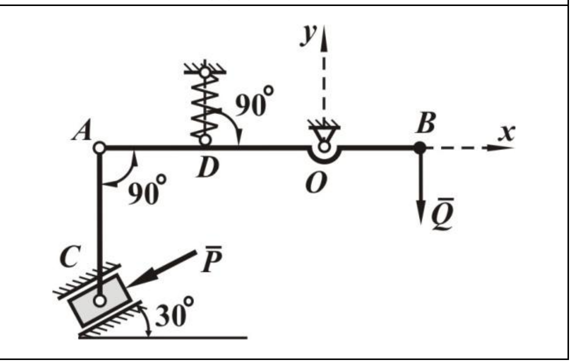
задание №15



задание №16



продолжение табл. 16

<table>
<tr><td>задание №17</td><td>задание №18</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №19</td><td>задание №20</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №21</td><td>задание №22</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №23</td><td>задание №24</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

окончание табл. 16

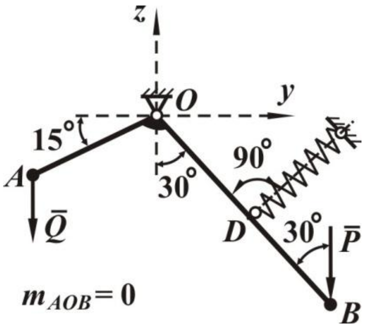
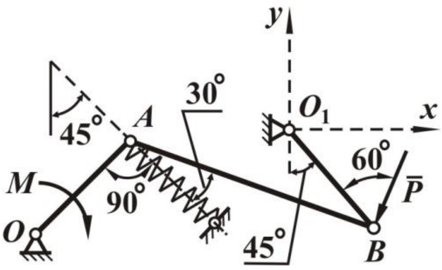
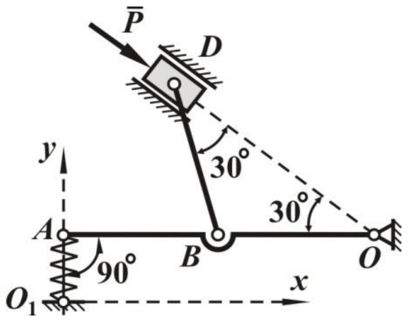
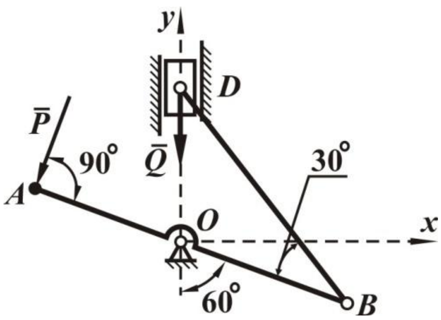
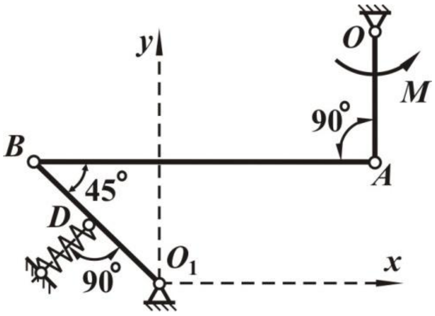
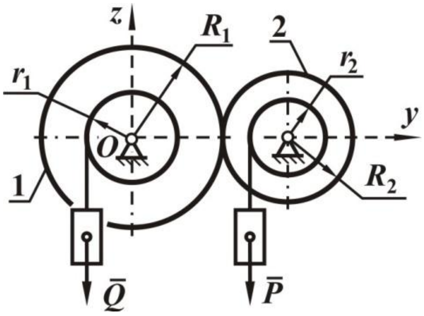
задание №25	задание №26
	
задание №27	задание №28
	
задание №29	задание №30
	

Таблица 17

Данные для индивидуального задания №5

№	Линейные размеры	Силы, Н		Момент, Н·м	c, Н/см	h, см	найти
		Q	P	M			
1	$OA = 10$ см	–	–	20	–	–	P
2	$O_1A = 20$ см	–	100	–	–	–	M
3	$R_1 = 20$ см, $r_2 = 30$ см, $R_2 = 40$ см	–	–	100	–	–	Q
4	$OC : OA = 4 : 5$	–	200	–	–	- 4	C
5	$OA = 100$ см	–	–	10	–	–	P
6	$R_1 = 15$ см, $R_2 = 50$ см, $r_2 = 20$ см, $O_1A = 80$ см	200	–	–	–	–	P
7	$OC = OA$	–	–	–	10	-3	P
8	$OC = AC$	–	200	–	10	-2	Q
9	$OA = 20$ см	200	–	–	–	–	M
10	$R_1 = 40$ см, $r_1 = 15$ см, $R_2 = 20$ см, $OA = 100$ см	2000	–	–	–	4	C
11	$OA = 20$ см	–	–	300	–	–	P
12	$O_1D = 60$ см, $AO = 20$ см	–	–	100	–	–	P
13	$OA = 40$ см	–	–	200	–	–	P
14	$OB = 2 \cdot OA$	20	–	–	25	3	P
15	$AC = OC = OD$	3000	–	–	250	-3	P
16	$d_1 = 80$ см, $l_1 = 100$ см, $d_2 = 25$ см, $l_2 = 75$ см	5000	–	–	100	4	P
17	$OA = 20$ см	–	–	200	–	–	P
18		200	200	–	100	–	h
19	$R_1 = 20$ см, $R_2 = 30$ см, $OA = 25$ см	–	–	100	–	–	P
20	$OA = AB = AC = 50$ см	50	100	–	–	–	M
21	$OA = AB = AC = CD = 25$ см	–	200	–	–	–	M
22	$OA = 40$ см	–	–	400	–	–	P
23	$OC = 2 \cdot OA = 100$ см	–	200	50	50	–	h
24	$AD = OD = OB$	–	250	–	150	$-2{,}5$	Q
25	$OD = BD = 0{,}8 \cdot AO$	400	–	–	120	3	P
26	$OA = 25$ см	–	500	120	–	2	C
27	$OB = AB$	–	–	–	180	-2	P
28	$OA = 0{,}8 \cdot OB$	–	450	–	–	–	Q
29	$BD = O_1D$; $AO = 30$ см	–	–	120	100	–	h
30	$R_1 = 36$ см; $r_1 = 15$ см; $R_2 = 20$ см; $r_2 = 10$ см	–	600	–	–	–	Q

8. Аналитическая динамика

8.1. Обобщенные координаты

Число координат, определяющих положение механической системы, зависит от количества точек (или тел) входящих в систему, и от связей, наложенных на систему. Здесь рассматриваются системы с голономными связями, для которых число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом степеней свободы системы.

Обобщенными координатами называют независимые между собой параметры любой размерности, которые однозначно определяют положение материальной системы.

Пример. Для определения положения плоского маятника (рис. 31) можно использовать координату x (м), угол φ (рад), дугу $M_O M = S\,(\text{м})$ или площадь сектора $OM_O M\,(\text{м}^2)$.

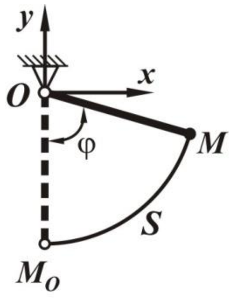


Рис. 31

Радиусы-векторы точек системы могут быть выражены через обобщенные координаты

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k\left(q_1, q_2, \ldots, q_s\right).$$

Обобщенными скоростями $\dot{q}_j$ называют производные обобщенных координат по времени:

$$\dot{q}_j = dq_j / dt \quad (j = \overline{1, S}).$$

Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Если q – линейная величина, то $\dot{q}$ – линейная скорость; если q – угол, то $\dot{q}$ – угловая скорость; если q – площадь, то $\dot{q}$ – секторная скорость и т. д.

8.2. Обобщенные силы

Дадим системе виртуальное перемещение $\left(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s\right)$. Активные силы системы на этом перемещении совершат работу

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_S \delta q_S = \sum_{j=1}^{S} Q_j \delta q_j .$$

Коэффициенты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_S$ при приращениях обобщенных координат в выражении работы называются обобщенными силами.

Способы вычисления обобщенных сил

1) Обобщённые силы можно вычислить по формулам

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i}, i = 1, 2, 3, ..., S;$$

здесь $\overline{r}_k(q_1, ..., q_s; t) -$ радиус-вектор k–той точки.

2) Дадим системе виртуальное перемещение так, чтобы положительное приращение δq_1 получила первая обобщенная координата, при неизменных остальных обобщенных координатах. Работа δA_1 активных сил системы

$$\delta A_1 = Q_1 \cdot \delta q_1, \quad \text{и} \quad Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta q_1}.$$

Остальные обобщенные силы определяются аналогичным способом.

3) Вместо виртуального перемещения можно рассматривать движение с виртуальными скоростями $\dot{q}_j^*$ и виртуальную мощность активных сил.

Обобщенными силами будут коэффициенты при обобщенных скоростях в выражении виртуальной мощности сил системы.

4) Если силы системы потенциальны, то обобщенные силы

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

где $\Pi -$ потенциальная энергия системы.

Размерность обобщенной силы Q_j зависит от размерности обобщенной координаты q_j и определяется равенством $[Q_j] = [A]/[q_j]$, где $[A] -$ размерность работы. Так, если обобщенная координата - линейная величина, то обобщенная сила имеет размерность силы; если обобщенная координата - угловая величина, то обобщенная сила имеет размерность момента; и т. д.

Пример. Вычислить обобщенные силы двойного математического маятника, движущегося в вертикальной плоскости. Маятник состоит из шарнирно соединенных невесомых стержней OM_1 и M_1M_2 длиной l_1 и l_2, на концах которых укреплены грузы массой m_1 и m_2.

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты принимаем углы φ_1 и φ_2 (рис. 32).

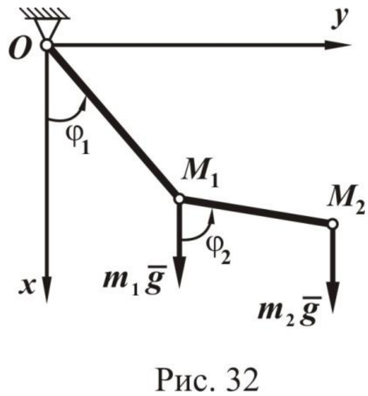


Рис. 32

Учитывая, что силы системы являются потенциальными, применим четвертый способ вычисления обобщенных сил. Потенциальную энергию системы вычислим как работу сил $m_1\bar{g}$ и $m_2\bar{g}$ при переходе системы из текущего положения в начальное, которое совпадает с вертикалью. При этом точка приложения силы $m_1\bar{g}$ опустится на $h_1 = l_1 - l_1\cos\varphi_1$, а точка приложения силы $m_2\bar{g}$ – на $h_2 = h_1 + l_2(1-\cos\varphi_2)$:

$$\Pi = m_1gh_1 + m_2gh_2 = m_1gl_1(1-\cos\varphi_1) + m_2g[l_1(1-\cos\varphi_1) + l_2(1-\cos\varphi_2)]$$

Тогда

$$Q_1 = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1} = -(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1;$$

$$Q_2 = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_2} = -m_2gl_2\sin\varphi_2.$$

8.3. Уравнения Лагранжа

Процесс составления дифференциальных уравнений движения значительно упрощается при использовании уравнений Лагранжа. Преимущества этих уравнений определяются тем, что их вид и их число не зависит ни от количества точек или тел, входящих в механическую систему, ни от характера движения, а определяется лишь числом степеней свободы системы.

Уравнения Лагранжа для механических систем с идеальными, удерживающими, голономными связями имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, S).$$

Здесь $q_1, \ldots, q_S$; $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщённые координаты и обобщённые скорости; S – число степеней свободы системы; $T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$ – кинетическая энергия; Q_i – обобщённые силы.

Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Если все силы системы потенциальны, то обобщенные силы выражаются через потенциальную энергию системы как $Q_j = -\partial\Pi/\partial q_j$, а уравнения Лагранжа запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \ (j = \overline{1,S}).$$

Так как потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей, то $\partial(T-\Pi)/\partial\dot{q}_j = \partial T/\partial\dot{q}_j$. Введем в рассмотрение функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi,$$

тогда уравнения Лагранжа запишутся так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,\ (j=\overline{1,S}).$$

Последовательность действий при составлении уравнений движения с помощью уравнений Лагранжа:

1) изобразить систему в текущем положении;

2) определить число степеней свободы;

3) выбрать обобщенные координаты,

4) записать в общем виде уравнения Лагранжа для каждой обобщенной координаты;

5) вычислить кинетическую энергию системы в абсолютном движении, выражая ее через обобщенные скорости и обобщенные координаты;

6) согласно уравнениям Лагранжа вычислить частные производные кинетической энергии;

7) изобразить активные силы системы и реакции неидеальных связей;

8) вычислить обобщенные силы по всем обобщенным координатам;

9) подставить частные производные кинетической энергии и обобщенные силы в уравнения Лагранжа, выполнить дифференцирование по времени.

В результате получаем дифференциальные уравнения движения данной механической системы.

Пример. Платформа 1 массы $m_1 = 8m$ скользит без трения по горизонтальной поверхности. По платформе катится без скольжения однородный цилиндр 2 массы $m_2 = 2m$, ось которого соединена с платформой пружиной жесткости c (рис. 33).

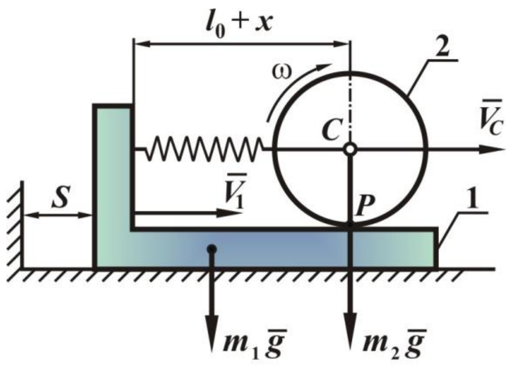


Рис. 33

Составить дифференциальные уравнения движения системы.

Изображаем систему в текущем положении (рис. 33). Система имеет две степени свободы. Выбираем в качестве обобщенных координат горизонтальное перемещение платформы S и удлинение пружины x.

Когда пружина не деформирована, она имеет длину l_0.

Таким образом, $q_1 = S$, $q_2 = x$. Активными силами являются силы тяжести $m_1\bar{g}$ и $m_2\bar{g}$ платформы и цилиндра и сила упругости пружины. Активные силы потенциальны, поэтому используем уравнения Лагранжа в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}=0,\ (j=\overline{1,S}). \qquad (а)$$

Кинетическая энергия системы $T=T_1+T_2$, где T_1- кинетическая энергия платформы, T_2- кинетическая энергия цилиндра.

Так как платформа движется поступательно, а движение цилиндра плоское, то

$$T=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2, \qquad (б)$$

где V_1 и V_C- абсолютные скорости платформы и центра масс цилиндра, $\omega-$ абсолютная угловая скорость цилиндра, $J_C=m_2R^2/2-$ момент инерции цилиндра относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Считаем, что платформа и цилиндр движутся в сторону увеличения обобщенных координат:

$$V_1=\dot{s},\ V_C=\dot{s}+\dot{x}.$$

$P-$ мгновенный центр скоростей цилиндра в его движении относительно платформы, $R-$ радиус цилиндра; $\omega=\dot{x}/R$.

Подставляя в (б) значения скоростей и значения J_C, m_1,m_2, получаем

$$T=4m\dot{s}^2+m\left(\dot{s}+\dot{x}\right)^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Находим частные производные кинетической энергии по обобщенным скоростям и обобщенным координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}=10m\dot{s}+2m\dot{x};\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=3m\dot{x}+2m\dot{s};\quad \frac{\partial T}{\partial S}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0.$$

Потенциальная энергия сил тяжести равна нулю. Потенциальная энергия пружины $\Pi=\frac{1}{2}cx^2$.

Частные производные: $\frac{\partial \Pi}{\partial s}=0;\quad \frac{\partial \Pi}{\partial x}=cx$.

Подставляем частные производные кинетической и потенциальной энергии в уравнения Лагранжа (а)

$$\frac{d}{dt}(10m\dot{s}+2m\dot{x})=0;\quad \frac{d}{dt}\left(3m\dot{x}+2m\dot{s}\right)+cx=0.$$

Получаем дифференциальные уравнения движения системы:

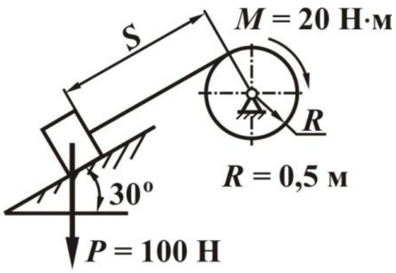
$$\left.\begin{aligned}5\ddot{s}+\ddot{x}=0;\\ 3m\ddot{x}+cx+2m\ddot{s}=0.\end{aligned}\right\}$$

Контрольные вопросы

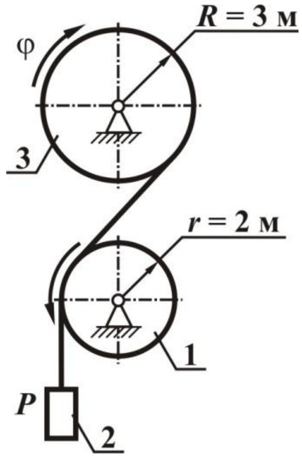
1. Что называется числом степеней свободы системы?
2. Что представляют собой обобщённые координаты?
3. В каком соотношении находятся число степеней свободы голономной системы и число независимых обобщённых координат?
4. Что называется обобщённой силой?
5. От чего зависит размерность обобщённой силы?
6. От чего зависит число уравнений Лагранжа для данной механической системы?
7. Какой вид имеют уравнения Лагранжа?

Таблица 18

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	Сумма элементарных работ активных сил имеет вид: $\sum \delta A_k = 5\delta q_1 + 8\delta q_2 + 20\delta q_3$. Обобщённая сила, соответствующая обобщённой координате q_3, равна … **Ответ**: 20	
2	В потенциальном силовом поле для механической системы с потенциальной энергией $\Pi = -7x$ Дж, обобщенная сила $Q_x = \ldots$ Н. **Ответ**: 7	
3	Обобщенной координате S (м) соответствует обобщенная сила $Q_x = \ldots$ Н. **Ответ**: 10	
4	Для механической системы с кинетической энергией $T = 3\dot{\varphi}^2$ Дж, обобщенной силой $Q = -27\varphi$ Н·м дифференциальное уравнение движения … **Ответ**: $2\ddot{\varphi} + 9\varphi = 0$	
5	Для механической системы с кинетической энергией $T = 8\dot{\varphi}^2$ Дж, потенциальной энергией $\Pi = 4\varphi^2$ Дж, дифференциальное уравнение движения … Ответ: $2\ddot{\varphi} + \varphi = 0$	

окончание табл. 18

6	Механическая система с кинетической энергией $T = 0{,}5\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}$ Дж, обобщенными силами $Q_x = -3$ Н и $Q_y = 2$ Н движется с ускорением $\ddot{y} = \ldots$ м/с^2. **Ответ**: 5	
7	При движении системы с обобщенными силами $Q_y = 10$ Н, $Q_z = 20$ Н и кинетической энергией $T = \dot{y}^2 + 2\dot{z}^2$ Дж, отношение ускорений $\dfrac{\ddot{y}}{\ddot{z}} = \ldots$ **Ответ**: 1	
8	Кинетическая энергия системы $T = 5\dot{\varphi}^2$ Дж. Обобщённая сила $Q_\varphi = 20$ Н·м. Ускорение груза $a = \ldots$ м/с^2. **Ответ**: 6	

Индивидуальное задание №6

Применение уравнений Лагранжа к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система (таблица 19) движется под воздействием постоянных сил и пар сил.

Составить дифференциальные уравнения движения системы в обобщённых координатах. Необходимые данные приведены в таблице 20. Там же указаны обобщенные координаты, которые следует использовать при выполнении задания. Считать, что качение колёс происходит без проскальзывания. Колёса, для которых в таблице радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками. Кривошипы рассматривать как тонкие однородные стержни. Принять, что в вариантах 6, 9, 11, 20, 22 и 30 механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Примечания: Радиусы инерции тел 2 и 3 определены относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа. При выполнении варианта 5 следует иметь в виду, что блоки 5 и 6 насажены на общую ось свободно, их массы одинаковы.

Пример выполнения задания.

Дано: Массы тел механической системы (рис. 34): $m_1 = 3m$; $m_2 = 8m$; $m_4 = m_6 = 2m$; $m_3 = 4m$; $M = 3mgr -$ постоянный момент; $b = m\eta -$ коэффициент пропорциональности в выражении силы $\bar{R} = -b\bar{V}_3$ сопротивления движению тела 3 ($\bar{V}_3 -$ скорость тела 3); r – радиус однородных дисков 4, 6 и 2.

Составить дифференциальные уравнения движения системы в обобщённых координатах $q_1 = x_1, q_2 = x_2$.

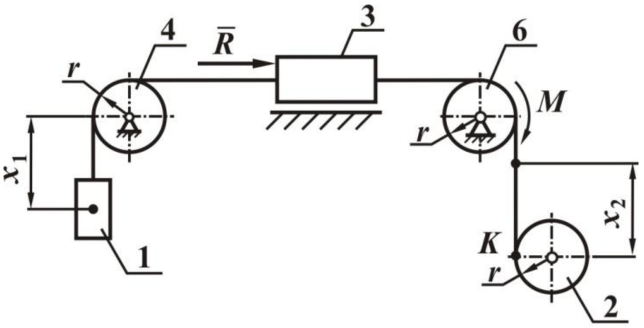


Рис. 34

На рис. 34 система изображена в движении.

Решение.

Для решения задачи применим уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1; \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2. \tag{2}$$

Здесь $T -$ кинетическая энергия системы; Q_1 и $Q_2 -$ обобщённые силы.

Для данной системы

$$T = \sum T_i$$

Выразим абсолютные скорости центров масс твёрдых тел системы через обобщённые скорости:

$$V_1 = V_3 = \dot{x}_1,\ V_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2.$$

Здесь учтено, что для тела 2 $\dot{x}_1 -$ переносная скорость при движении вместе с нитью, $\dot{x}_2 -$ относительная скорость.

Угловые скорости тел (рис. 34)

$$\left.\begin{aligned}\omega_4 = \omega_6 = \frac{\dot{x}_1}{r};\\ \omega_2 = \frac{\dot{x}_2}{r}.\end{aligned}\right\}$$

Моменты инерции блоков относительно центральных осей:

$$J_4 = J_6 = \frac{2mr^2}{2} = mr^2.$$

Момент инерции цилиндра 2 относительно центральной оси:

$$J_2 = \frac{8mr^2}{2} = 4mr^2.$$

Кинетическая энергия тел:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{3}{2} m \dot{x}_1^2.$$

$$T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = 4m\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2 + 2m\dot{x}_2^2;\ T_4 = \frac{J_4 \omega_4^2}{2} = \frac{m\dot{x}_1^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = 2m\dot{x}_1^2;\ T_6 = \frac{J_6 \omega_6^2}{2} = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2.$$

Получим:

$$T = \frac{9}{2} m\dot{x}_1^2 + 2m\dot{x}_2^2 + 4m\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2. \tag{3}$$

Для вычисления обобщённой силы Q_1 зададим системе виртуальное движение $\left(\dot{x}_1 > 0;\, \dot{x}_2 = 0\right)$ и подсчитаем мощность сил

$$N_1 = m_1 g \cdot \dot{x}_1 - R \cdot \dot{x}_1 - M \cdot \omega_6 - m_2 g \cdot \dot{x}_1,$$

или

$$N_1 = \left(3mg - b\dot{x}_1 - \frac{M}{r} - 8mg\right) \cdot \dot{x}_1 = -\left(5mg + b\dot{x}_1 + \frac{M}{r}\right) \cdot \dot{x}_1.$$

Обобщённая сила Q_1 равна коэффициенту при $\dot{x}_1$ в выражении мощности N_1:

$$Q_1 = -\left(5mg + b\dot{x}_1 + \frac{M}{r}\right). \tag{4}$$

Для вычисления обобщённой силы Q_2 зададим системе виртуальное движение $\left(\dot{x}_1 = 0;\, \dot{x}_2 > 0\right)$ и подсчитаем мощность сил

$$N_2 = m_2 g \cdot \dot{x}_2 = 8mg \cdot \dot{x}_2.$$

Обобщённая сила Q_2 равна коэффициенту при $\dot{x}_2$ в выражении мощности N_2:

$$Q_2 = 8mg\,. \tag{5}$$

Найдем значения слагаемых уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 9m\dot{x}_1 + 8m\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) = 17m\dot{x}_1 - 8m\dot{x}_2\,; \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = 4m\dot{x}_2 - 8m\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) = 12m\dot{x}_2 - 8m\dot{x}_1\,; \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0; \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 17m\ddot{x}_1 - 8m\ddot{x}_2 \tag{9}$$

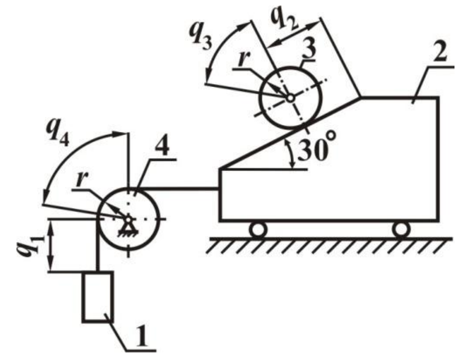
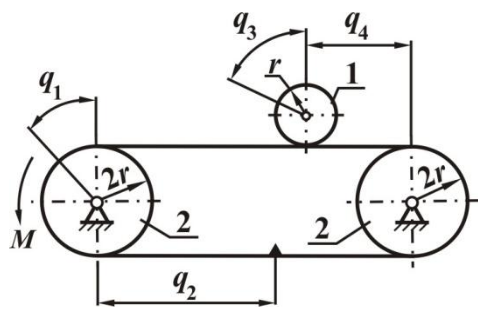
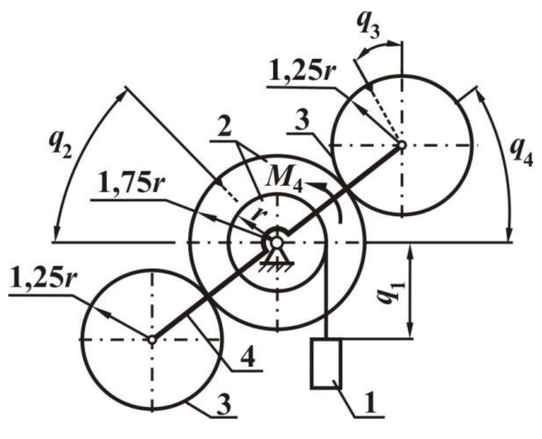
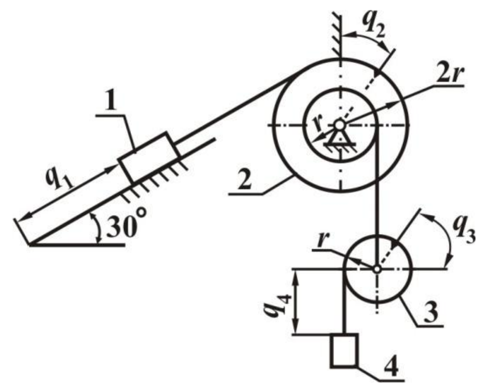
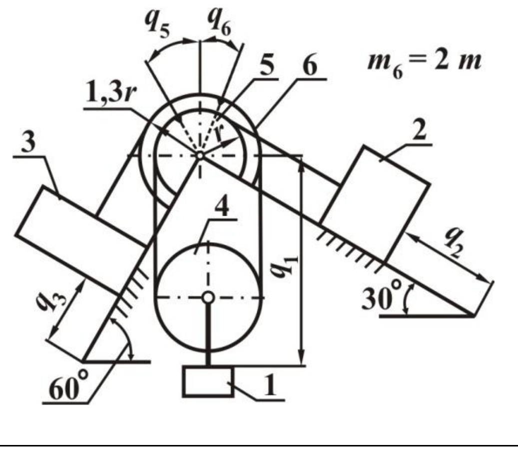
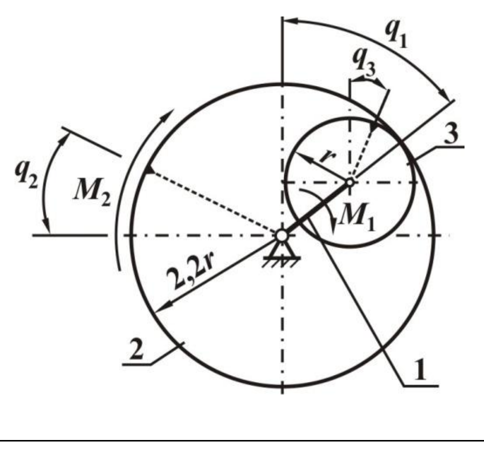
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = 12m\ddot{x}_2 - 8m\ddot{x}_1 \tag{10}$$

Подставляя в (1) и (2) выражения (4), (5), (8 – 10) и значения M и b, получим дифференциальные уравнения движения системы:

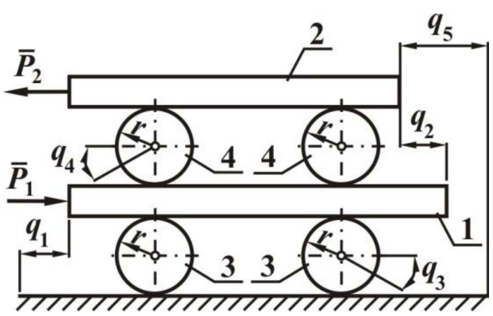
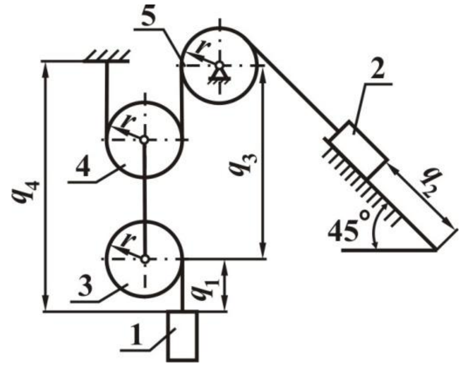
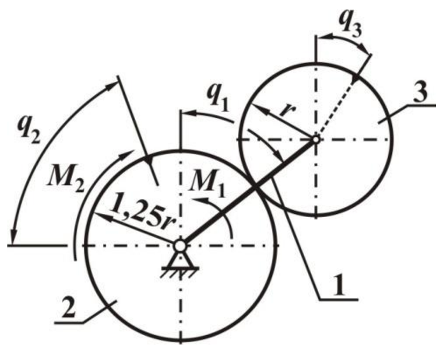
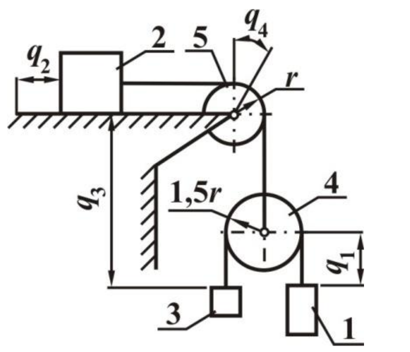
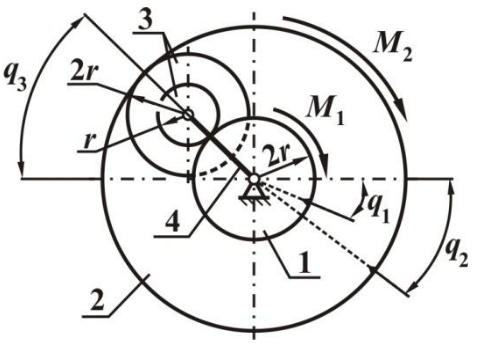
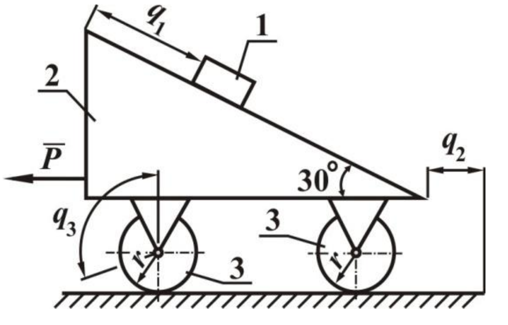
$$\left.\begin{aligned} 17\ddot{x}_1 - 8\ddot{x}_2 + \eta\dot{x}_1 &= -8g, \\ 2\ddot{x}_1 - 3\ddot{x}_2 &= -2g. \end{aligned}\right\}.$$

Таблица 19

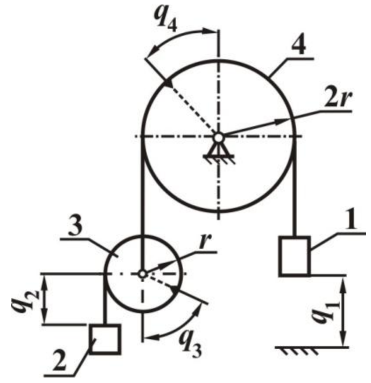
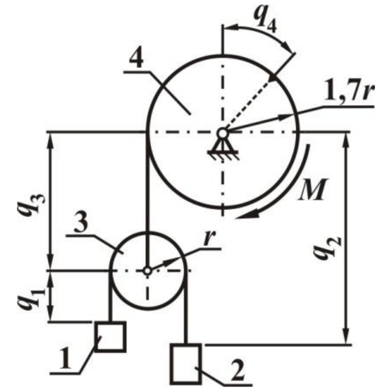
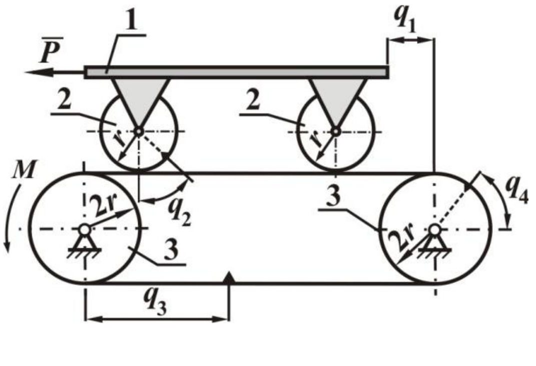
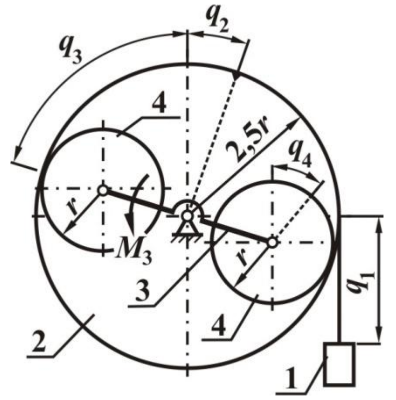
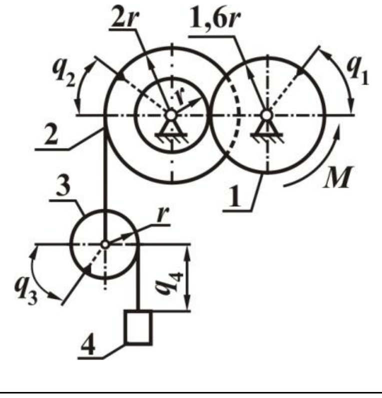
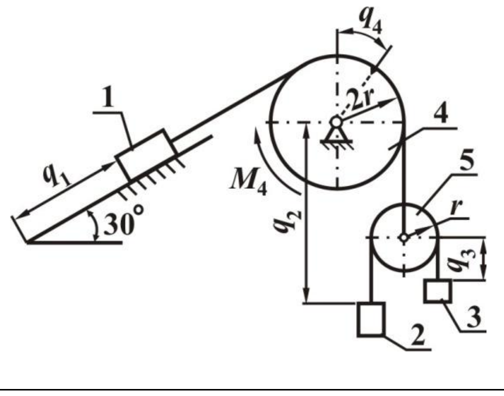
Схемы механизмов к заданиям №6

задание №1	задание №2
	
задание №3	**задание №4**
	
задание №5	**задание №6**
	

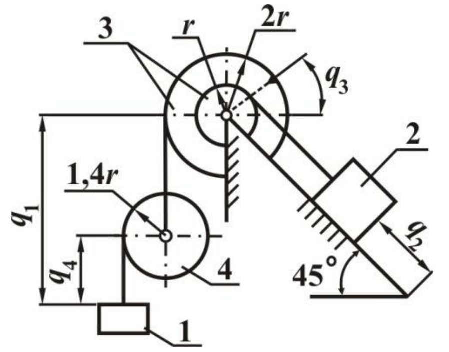
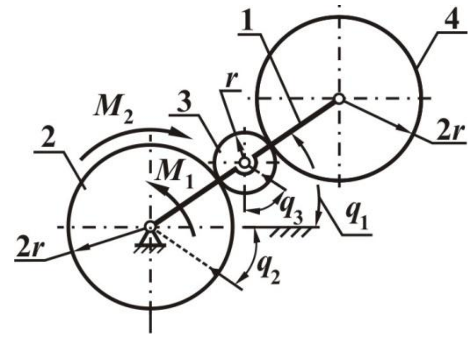
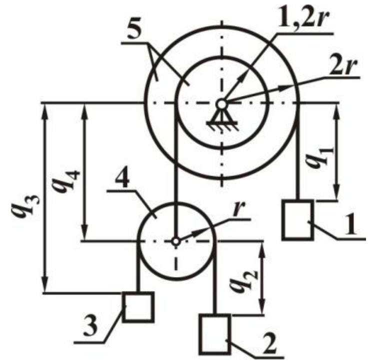
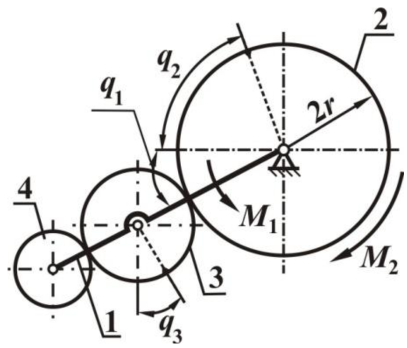
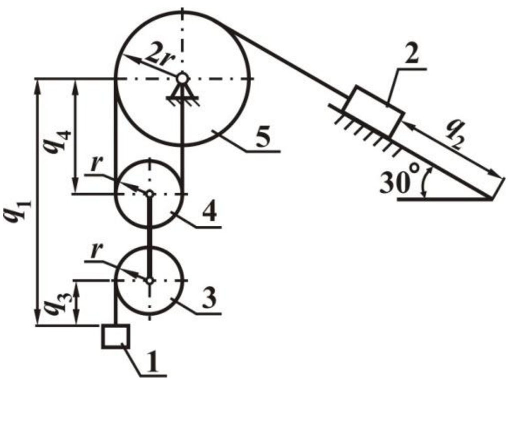
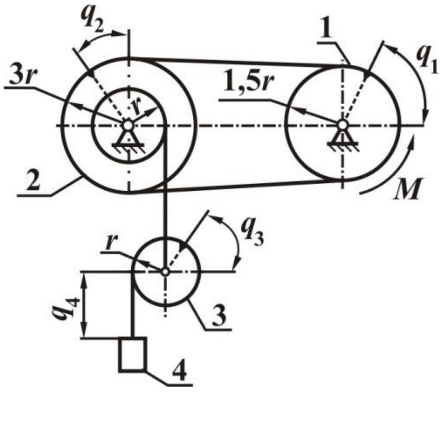
продолжение табл. 19

задание №7	задание №8
	
задание №9	**задание №10**
	
задание №11	**задание №12**
	

продолжение табл. 19

задание №13	задание №14
	
задание №15	**задание №16**
	
задание №17	**задание №18**
	

продолжение табл. 19

<table>
<tr><td>задание №19</td><td>задание №20</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №21</td><td>задание №22</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №23</td><td>задание №24</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

окончание табл. 19

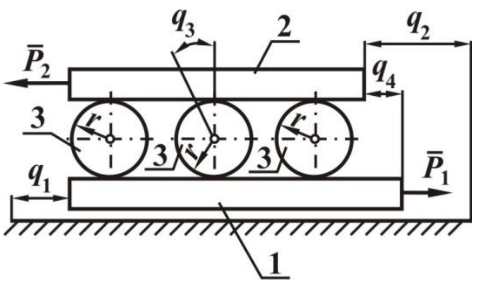
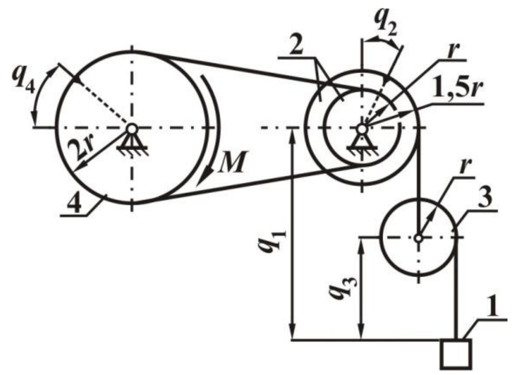
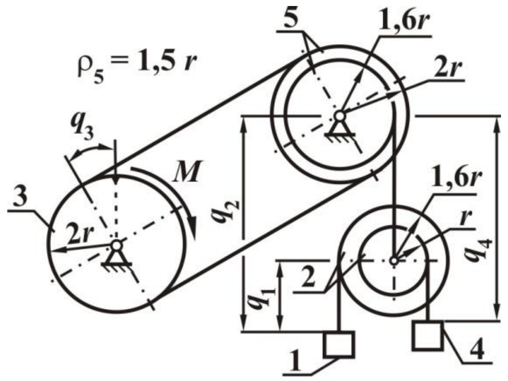
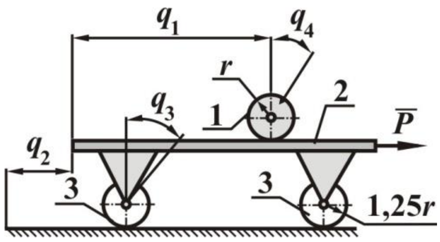
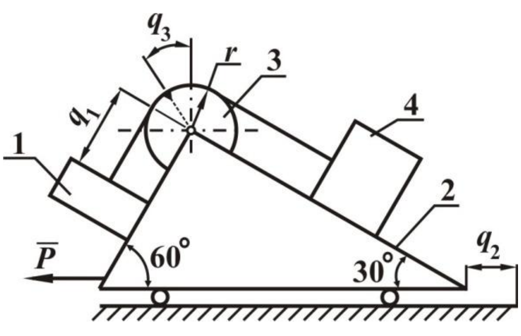
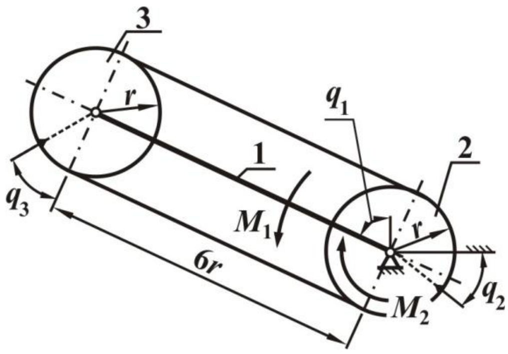
задание №25	задание №26
	
задание №27	задание №28
	
задание №29	задание №30
	

Таблица 20

Данные для индивидуального задания №6

№ варианта	№ задания	массы тел					радиус инерции		нагрузка	f	q_i
		m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	ρ_2	ρ_3	P, M		
1	1	$2m$	$6m$	m	m	-	-	-	-	-	q_1; q_3
2	2	m	$3m$	-	-	-	-	-	M	-	q_1; q_3
3	3	m	$3m$	$2m$	-	-	$r\sqrt{2}$	-	M_4	-	q_1; q_4
4	4	m	$2m$	$2m$	$2m$	-	$r\sqrt{2}$	-	-	f	q_1; q_3
5	5	m	$2m$	$4m$	$2m$	$2m$	-	-	-	f	q_1; q_2
6	6	m	$2m$	$3m$	-	-	$2r$	-	M_1, M_2	-	q_1; q_2
7	7	$3m$	$3m$	m	m	-	-	-	P_1; P_2	-	q_1; q_2
8	8	m	$2m$	$2m$	$2m$	$2m$	-	-	-	f	q_1; q_2
9	9	m	$2m$	$3m$	-	-	-	-	M_1, M_2	-	q_1; q_2
10	10	$2m$	$2m$	m	-	m	-	-	-	f	q_1; q_2
11	11	m	$3m$	$2m$	m	-	$4r$	$r\sqrt{2}$	M_1, M_2	-	q_1; q_3
12	12	$2m$	$5m$	m	-	-	-	-	P	f	q_1; q_2
13	13	m	$3m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	-	q_1; q_2
14	14	$2m$	m	m	$2m$	-	-	-	M	-	q_1; q_3
15	15	$3m$	m	$2m$	-	-	-	-	P; M	-	q_1; q_3
16	16	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$2r$	-	M	-	q_2; q_3
17	17	m	$3m$	$2m$	$2m$	-	$r\sqrt{2}$	-	-	-	q_1; q_3
18	18	$2m$	$2m$	m	m	$3m$	-	-	M_4	f	q_1; q_2
19	19	$2m$	$2m$	$3m$	m	-	-	$r\sqrt{2}$	-	f	q_1; q_2
20	20	$2m$	$3m$	m	$3m$	-	-	-	M_1, M_2	-	q_1; q_2
21	21	$2m$	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$\rho_5 = 1{,}5r$	-	-	q_1; q_2
22	22	m	$3m$	$2m$	m	-	-	-	M_1, M_2	-	q_1; q_2
23	23	$2m$	m	m	m	$3m$	-	-	-	f	q_1; q_2
24	24	m	$3m$	m	$2m$	-	$2r$	-	M	-	q_2; q_4
25	25	$2m$	$2m$	m	-	-	-	-	P_1; P_2	f	q_1; q_2
26	26	m	$3m$	$2m$	$3m$	-	-	r	M	-	q_1; q_2
27	27	$2m$	$2m$	$3m$	m	$2m$	$r\sqrt{2}$	-	M	-	q_1; q_2
28	28	m	$3m$	m	-	-	-	-	P	-	q_1; q_2
29	29	$2m$	$4m$	m	m	-	-	-	P	f	q_1; q_2
30	30	$3m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	M_1, M_2	-	q_1; q_2

продолжение табл. 20

№ варианта	№ задания	массы тел					радиус инерции		нагрузка	f	q_i
		m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	ρ_2	ρ_3	P, M		
31	1	$2m$	$6m$	m	m	-	-	-	-	-	q_2; q_4
32	2	m	$3m$	-	-	-	-	-	M	-	q_2; q_4
33	3	m	$3m$	$2m$	-	-	$r\sqrt{2}$	-	M_4	-	q_2;q_3
34	4	m	$2m$	$2m$	$2m$	-	$r\sqrt{2}$	-	-	f	q_2; q_4
35	5	m	$2m$	$4m$	$2m$	$2m$	-	-	-	f	q_2;q_3
36	6	m	$2m$	$3m$	-	-	$2r$	-	M_1, M_2	-	q_1; q_3
37	7	$3m$	$3m$	m	m	-	-	-	P_1; P_2	-	q_1; q_5
38	8	m	$2m$	$2m$	$2m$	$2m$	-	-	-	f	q_3; q_4
39	9	m	$2m$	$3m$	-	-	-	-	M_1, M_2	-	q_2;q_3
40	10	$2m$	$2m$	m	-	m	-	-	-	f	q_3; q_4
41	11	m	$3m$	$2m$	m	-	$4r$	$r\sqrt{2}$	M_1, M_2	-	q_1; q_2
42	12	$2m$	$5m$	m	-	-	-	-	P	f	q_1; q_3
43	13	m	$3m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	-	q_3; q_4
44	14	$2m$	m	m	$2m$	-	-	-	M	-	q_2;q_3
45	15	$3m$	m	$2m$	-	-	-	-	P; M	-	q_2; q_4
46	16	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$2r$	-	M	-	q_1; q_3
47	17	m	$3m$	$2m$	$2m$	-	$r\sqrt{2}$	-	-	-	q_2; q_4
48	18	$2m$	$2m$	m	m	$3m$	-	-	M_4	f	q_3; q_4
49	19	$2m$	$2m$	$3m$	m	-	-	$r\sqrt{2}$	-	f	q_3; q_4
50	20	$2m$	$3m$	m	$3m$	-	-	-	M_1, M_2	-	q_2;q_3
51	21	$2m$	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$\rho_5 = 1{,}5r$	-	-	q_3; q_4
52	22	m	$3m$	$2m$	m	-	-	-	M_1, M_2	-	q_2;q_3
53	23	$2m$	m	m	m	$3m$	-	-	-	f	q_2;q_3
54	24	m	$3m$	m	$2m$	-	$2r$	-	M	-	q_1; q_3
55	25	$2m$	$2m$	m	-	-	-	-	P_1; P_2	f	q_1; q_4
56	26	m	$3m$	$2m$	$3m$	-	-	r	M	-	q_3; q_4
57	27	$2m$	$2m$	$3m$	m	$2m$	$r\sqrt{2}$	-	M	-	q_3; q_4
58	28	m	$3m$	m	-	-	-	-	P	-	q_3; q_4
59	29	$2m$	$4m$	m	m	-	-	-	P	f	q_2;q_3
60	30	$3m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	M_1, M_2	-	q_1; q_3

окончание табл. 20

№ варианта	№ задания	массы тел					радиус инерции		нагрузка	f	q_i
		m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	ρ_2	ρ_3	P, M		
61	1	$2m$	$6m$	m	m	-	-	-	-	-	$q_3; q_4$
62	2	m	$3m$	-	-	-	-	-	M	-	$q_2; q_3$
63	3	m	$3m$	$2m$	-	-	$r\sqrt{2}$	-	M_4	-	$q_2; q_4$
64	4	m	$2m$	$2m$	$2m$	-	$r\sqrt{2}$	-	-	f	$q_1; q_4$
65	5	m	$2m$	$4m$	$2m$	$2m$	-	-	-	f	$q_5; q_6$
66	6	m	$2m$	$3m$	-	-	$2r$	-	M_1, M_2	-	$q_2; q_3$
67	7	$3m$	$3m$	m	m	-	-	-	$P_1; P_2$	-	$q_3; q_4$
68	8	m	$2m$	$2m$	$2m$	$2m$	-	-	-	f	$q_1; q_3$
69	9	m	$2m$	$3m$	-	-	-	-	M_1, M_2	-	$q_1; q_3$
70	10	$2m$	$2m$	m	-	m	-	-	-	f	$q_2; q_3$
71	11	m	$3m$	$2m$	m	-	$4r$	$r\sqrt{2}$	M_1, M_2	-	$q_2; q_3$
72	12	$2m$	$4m$	m	m	-	-	-	P	f	$q_1; q_3$
73	13	m	$3m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	-	$q_1; q_3$
74	14	$2m$	m	m	$2m$	-	-	-	M	-	$q_1; q_4$
75	15	$3m$	m	$2m$	-	-	-	-	$P; M$	-	$q_2; q_3$
76	16	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$2r$	-	M	-	$q_2; q_4$
77	17	m	$3m$	$2m$	$2m$	-	$r\sqrt{2}$	-	-	-	$q_1; q_4$
78	18	$2m$	$2m$	m	m	$3m$	-	-	M_4	f	$q_1; q_3$
79	19	$2m$	$2m$	$3m$	m	-	-	$r\sqrt{2}$	-	f	$q_2; q_4$
80	20	$2m$	$3m$	m	$3m$	-	-	-	M_1, M_2	-	$q_1; q_3$
81	21	$2m$	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$r\sqrt{2}$	-	-	$q_2; q_4$
82	22	m	$3m$	$2m$	m	-	-	-	M_1, M_2	-	$q_1; q_3$
83	23	$2m$	m	m	m	$3m$	-	-	-	f	$q_3; q_4$
84	24	m	$3m$	m	$2m$	-	$2r$	-	M	-	$q_1; q_4$
85	25	$2m$	$2m$	m	-	-	-	-	$P_1; P_2$	f	$q_2; q_3$
86	26	m	$3m$	$2m$	$3m$	-	-	r	M	-	$q_2; q_3$
87	27	$2m$	$2m$	$3m$	m	$2m$	$r\sqrt{2}$	-	M	-	$q_1; q_3$
88	28	m	$3m$	m	-	-	-	-	P	-	$q_2; q_4$

9. Удар

9.1. Основные положения теории удара

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый промежуток времени изменяются на конечную величину, называется ударом.

Силы, возникающие при ударе, будем называть *ударными силами*.

Время удара обозначим через τ. Действие ударной силы оценивают *ударным импульсом*

$$\bar{S}_{\text{уд}} = \int_0^\tau \bar{F}_{\text{уд}} \cdot dt$$

Ударный импульс – конечная величина.

Обозначения:

$\bar{V}_- -$ скорость точки до удара, $\bar{V}_+ -$ скорость точки после удара.

Применим к явлению удара теорему об изменении количества движения:

$$m\left(\bar{V}_+ - \bar{V}_-\right) = \bar{S}$$

Изменение количества движения материальной точки за время удара равно действующему на точку ударному импульсу.

Это – основное уравнение теории удара.

***Основные положения теории удара*:**

1.Удар происходит мгновенно.

2.Тело при ударе не изменяет своего положения.

3.Действие неударных сил (таких, как сила тяжести) можно не учитывать.

4.Изменения скоростей точек тела за время удара определяются основным уравнением теории удара.

9.2. Коэффициент восстановления (гипотеза Ньютона)

Коэффициент восстановления равен отношению модуля нормальной составляющей относительной скорости точек контакта тел после удара к его значению до удара

$$k = \frac{\left|\bar{V}_{A+}^n - \bar{V}_{B+}^n\right|}{\left|\bar{V}_{A-}^n - \bar{V}_{B-}^n\right|},$$

где $A, B -$ точки контакта (см. рис. 35).

Относительные скорости точек контакта:

$\left|\bar{V}_{A-} - \bar{V}_{B-}\right| -$ скорость сближения перед ударом;

$\left|\overline{V}_{A+} - \overline{V}_{B+}\right|$ – скорость разлета после удара.

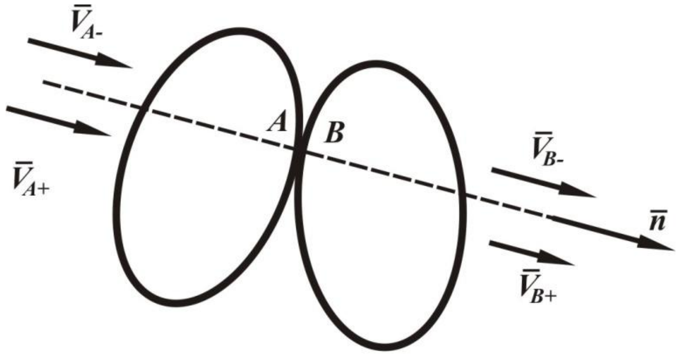


Рис. 35

Коэффициент восстановления учитывает физические свойства тел. Определяется экспериментально.

При прямом ударе тела о неподвижную преграду коэффициент восстановления равен отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара:

$$k = V_{+}/V_{-} .$$

Предельные случаи:

– абсолютно упругий удар ($k = 1$);

– абсолютно неупругий удар ($k = 0$).

В первом случае ($k = 1$) кинетическая энергия после удара полностью восстанавливается, во втором ($k = 0$) вся кинетическая энергия теряется на нагревание, деформацию и прочее.

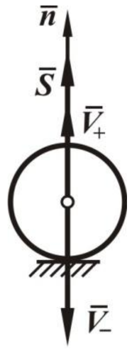


Рис. 36

9.3. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе

Изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему

$$\overline{Q}_{+} - \overline{Q}_{-} = \sum \overline{S}_{k}^{e} .$$

В проекциях на любую координатную ось x

$$Q_{x+} - Q_{x-} = \sum S_{kx}^{e} .$$

Импульсы обычных сил при ударе не учитывают.

Следствия:

1.Если геометрическая сумма всех внешних ударных импульсов равна нулю, то количество движения системы за время удара не изменяется.

2.Внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения системы.

9.4. Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе (теорема моментов)

Изменение за время удара кинетического момента системы относительно какого-нибудь центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов.

$$\bar{K}_{O+} - \bar{K}_{O-} = \sum \bar{M}_O\left(\bar{S}_k^e\right).$$

В проекциях на любую ось x

$$K_{x+} - K_{x-} = \sum M_x\left(\bar{S}_k^e\right).$$

Следствия:

1.Если сумма моментов внешних ударных импульсов относительно какого-нибудь центра (или оси) равна нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра (или оси) за время удара не изменяется.

2.Внутренние ударные импульсы не могут изменить кинетический момент системы.

Пример. Однородный куб A с ребром $b = 1$ м скользит без начальной скорости по гладкой опорной плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис. 37), и проходит расстояние b до соударения с упором B. Считая удар куба об упор абсолютно неупругим, определить угловую скорость ω_+ вращения куба сразу после удара.

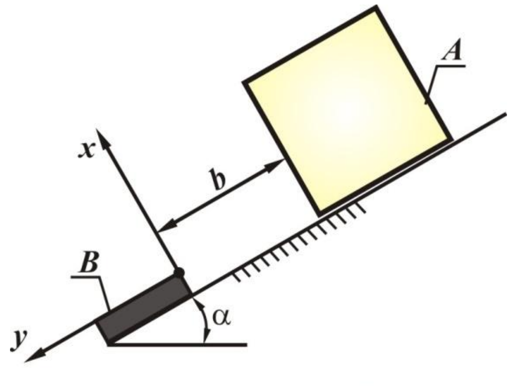


Рис. 37

Решение.

Определим линейную скорость V_- куба перед ударом об упор. Используем для этого теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k\,. \qquad \text{(a)}$$

Движение началось из состояния покоя, поэтому $T_0 = 0$. Кинетическая энергия перед ударом об упор $T = \frac{1}{2} m V_-^2$.

Работу совершает только сила тяжести:

$$\sum A_k = mgb \cdot \sin\alpha\,.$$

Подставляя все эти значения в уравнение (а), найдем:

$$\frac{1}{2}mV_-^2 = mgb\cdot\sin\alpha,$$

откуда

$$V_- = \sqrt{2gb\cdot\sin\alpha}.$$

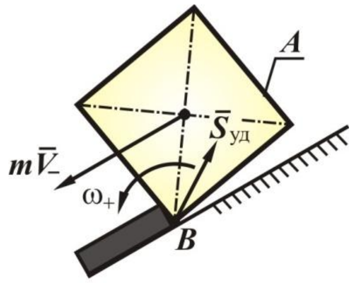


Рис. 38

В момент удара (рис. 38) на куб в точке B действует ударный импульс $\bar{S}_{уд}$. После удара куб приобретает угловую скорость ω_+ вращения вокруг оси Bz, перпендикулярной плоскости чертежа.

Момент ударного импульса $M_{Bz}\left(\bar{S}_{уд}\right)=0$, следовательно, кинетический момент относительно оси Bz за время удара не изменяется:

$$K_{Bz+} = K_{Bz-}. \qquad (б)$$

Кинетический момент куба относительно оси Bz перед ударом:

$$K_{Bz-} = \left(mV_-\right)\cdot\frac{b}{2}.$$

Кинетический момент куба относительно оси Bz после удара:

$$K_{Bz+} = J_{Bz}\cdot\omega,\text{ где } J_{Bz} = \frac{2}{3}mb^2.$$

Подставляя эти значения и значение V_- в уравнение (б), найдем

$$\omega_+ = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2g}{b}\sin\alpha}.$$

Окончательно $\omega_+ = 2{,}35\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Контрольные вопросы

1. Какое явление называется ударом?
2. Что служит мерой взаимодействия тел при ударе?
3. Что называется ударным импульсом?
4. Как следует поступать с неударными силами при рассмотрении удара?
5. Запишите основное уравнение теории удара для материальной точки.
6. Сформулируйте теорему об изменении количества движения системы при ударе.
7. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента системы при ударе.
8. Могут ли внутренние ударные импульсы изменить кинетический момент системы?

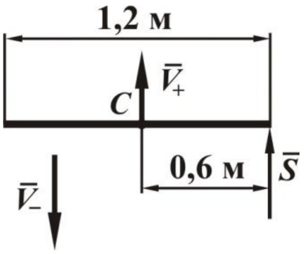
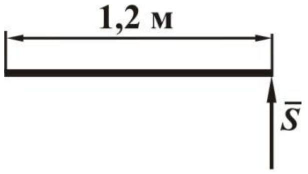
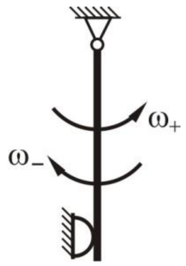
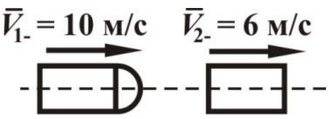
9. Верно ли, что за время удара тело не меняет своего положения?

10. Что называется коэффициентом восстановления при ударе?

11. В каких пределах может изменяться коэффициент восстановления?

Таблица 21

Тестовые задания

№	Задание/ответ	Схема
1	На материальную точку массой 0,6 кг, движущуюся со скоростью $\overline{V}_{-}=-3\overline{i}+2\overline{j}$ м/с, подействовал ударный импульс $\overline{S}=(1{,}8\overline{i}+2{,}4\overline{j})$ Н·с. После удара модуль скорости $V_{+}=\ldots$ м/с. **Ответ**: 6	
2	Однородный стержень массой 4 кг двигался поступательно со скоростью $V_{-}=2$ м/с. После приложения ударного импульса $S=16$ Н·с скорость $V_{C+}=\ldots$м/с. **Ответ**: 2	
3	Однородный стержень массой 4 кг двигался поступательно. После приложения ударного импульса $S=1{,}6$ Н·с угловая скорость $\omega_{+}=\ldots$рад/с. **Ответ**: 2	
4	После удара об упор угловая скорость $\omega_{+}=3{,}5$рад/с; коэффициент восстановления $k=0{,}7$. Угловая скорость перед ударом $\omega_{-}=\ldots$рад/с. **Ответ**: 5	
5	После абсолютно неупругого удара тел с массами $m_1=3$кг, $m_2=1$кг их общая скорость $V_{+}=\ldots$м/с. **Ответ**: 9	

10. Колебания

10.1. Устойчивость положения равновесия

Равновесие системы в данном положении называется устойчивым, если, выведенная из этого положения малым возмущением, во все последующее время она движется в малой окрестности положения равновесия или возвращается к нему.

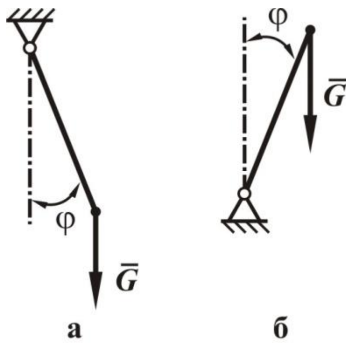


Рис. 39

Пример. На рисунке в варианте «а» равновесие маятника в нижнем вертикальном положении устойчиво; в варианте «б» равновесие маятника в верхнем вертикальном положении неустойчиво (рис. 39).

Теорема Лагранжа – Дирихле*: *если потенциальная энергия консервативной системы с идеальными стационарными связями имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым.

Это условие – достаточное.

Для консервативной системы с одной степенью свободы достаточные условия устойчивости положения равновесия имеют вид:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 > 0.$$

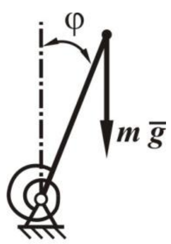


Рис. 40

Пример. Механическая система состоит из обращенного математического маятника массой m и длиной l и спиральной пружины с коэффициентом жесткости C (рис 40). При каких значениях параметров верхнее положение равновесия маятника будет устойчивым?

Решение.

Для рассматриваемой системы потенциальная энергия:

$$\Pi = \frac{1}{2}C\varphi^2 - mgl\left(1-\cos\varphi\right);$$

считая φ малым, найдем значение $\Pi(\varphi)$ с точностью до φ^2:

$$1-\cos\varphi \cong \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots$$

$$\Pi(\varphi) \cong \left(C - mgl\right)\frac{\varphi^2}{2}.$$

Находим $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (C - mgl)\varphi$. При $\varphi = 0$ $\left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right)_0 = 0$.

Первое условие устойчивости положения равновесия выполняется.

Находим $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = C - mgl$. Условие $\left(\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_0 > 0$ выполняется, если $C > mgl$.

Вывод: верхнее положение равновесия маятника устойчиво при условии, что его параметры удовлетворяют неравенству

$$C > mgl.$$

10.2. Свободные линейные колебания материальной точки

Точка M движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $\bar{F}$, пропорциональной расстоянию до неподвижного центра O и направленной к этому центру (рис. 41). Проекция силы $\bar{F}$ на ось Ox:

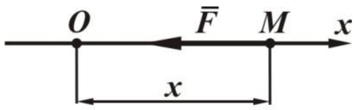


Рис. 41

$$F_x = -C \cdot x.$$

Применим основной закон динамики и составим дифференциальное уравнение движения материальной точки вдоль оси Ox:

$$m\ddot{x} = -Cx.$$

Делим обе части уравнения на m, вводим обозначение $\dfrac{C}{m} = k^2$.

Уравнение примет вид:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \qquad (1)$$

Это дифференциальное уравнение свободных линейных колебаний при отсутствии сопротивления. Линейными колебания (и совершающая их механическая система) называются потому, что определяющее их дифференциальное уравнение (1) является линейным. Общее решение уравнения (1)

$$x = A\sin(kt + \alpha). \qquad (2)$$

Скорость точки

$$V_x = \dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha). \qquad (3)$$

Колебания, совершаемые точкой по закону синуса, называются *гармоническими колебаниями*. Наибольшее отклонение A точки M от центра колебаний O называется *амплитудой колебаний*. Величина $\varphi = (kt + \alpha)$ называется *фазой колебаний*. Величина α называется *начальной фазой колебаний*. Величина k называется *круговой частотой* *колебаний.* Промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний*. Период

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Величина ν, *обратная периоду и определяющая число колебаний за одну секунду, называется частотой колебаний*:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Определение амплитуды и начальной фазы колебаний по начальным условиям. Положим, что при $t = 0 \quad x = x_0$ и $V_x = V_0$; из (2) и (3) получим

$$x_0 = A\sin\alpha, \quad \frac{V_0}{k} = A\cos\alpha.$$

Сложив почленно квадраты этих равенств, найдем

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}.$$

Разделив почленно одно уравнение на другое, получим

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{kx_0}{V_0}.$$

Рассмотренные здесь колебания называют линейными, так как они описываются линейным дифференциальным уравнением. Свободные линейные колебания обладают следующими свойствами:

– амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий;

– частота k и период T колебаний не зависят от начальных условий и являются неизменными характеристиками данной системы.

10.3. Влияние постоянной силы на свободные линейные колебания

Пусть на материальную точку действует восстанавливающая сила $\bar{F}$ $\left(F = C \cdot OM\right)$ и постоянная по модулю и направлению сила $\bar{P}$ (рис. 42).

Введем в рассмотрение статическое отклонение $\lambda_{\text{ст}} = \dfrac{P}{C}$.

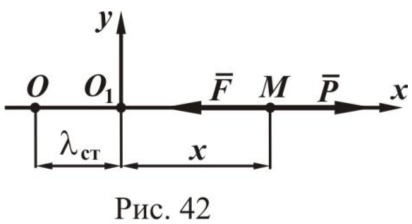


Рис. 42

В рассматриваемом случае положением равновесия точки M будет точка O_1, отстоящая от O на $\lambda_{\text{ст}}$. Примем положение равновесия O_1 за начало координат. Тогда $F_x = -C(x + \lambda_{\text{ст}}), P_x = P$.

Дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} = -C\left(x - \lambda_{\text{ст}}\right) + P$ или, поскольку $P = C\lambda_{\text{ст}}$, $\dfrac{C}{m} = k^2$:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Это уравнение совпадает с полученным ранее дифференциальным уравнением свободных колебаний материальной точки под действием только восстанавливающей силы $\bar{F}$. Следовательно, постоянная сила $\bar{P}$ не изменяет характер колебаний, а лишь смещает центр колебаний в сторону действия силы на величину статического отклонения $\lambda_{\text{ст}}$.

Пример. Определить период малых свободных колебаний однородного диска массой 2 кг (рис. 43); коэффициенты жесткости пружин $C_1 = 900$ Н/м, $C_2 = 700$ Н/м.

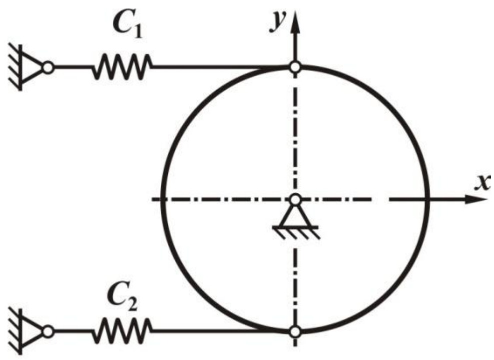


Рис. 43

Решение.

Для составления дифференциального уравнения движения используем теорему об изменении кинетического момента механической системы:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z^e.$$

Обозначим через φ угол поворота диска. Кинетический момент $K_z = J\omega = J\dot{\varphi}$, где $J = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент инерции диска. Удлинение нижней пружины равно сжатию (укорочению) верхней и равно $R\varphi$. Сумма моментов внешних сил относительно оси вращения диска

$$\sum M_z^e = -\left(C_1 \cdot R\varphi\right) \cdot R - \left(C_2 \cdot R\varphi\right) \cdot R = -\left(C_1 + C_2\right) R^2 \varphi.$$

Подстановка значений K_z и $\sum M_z^e$ в уравнение теоремы приводит к дифференциальному уравнению

$$\ddot{\varphi} + k^2 \dot{\varphi} = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{2}{m}\left(C_1 + C_2\right)}$ – круговая частота свободных колебаний.

Тогда период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{20}\ \text{с}.$$

10.4. Свободные колебания при вязком сопротивлении (затухающие свободные колебания)

Добавим к восстанавливающей силе $\bar{F}$ силу вязкого трения, то есть силу, пропорциональную первой степени скорости: $\bar{R} = -\mu\bar{V}$ (рис. 44).

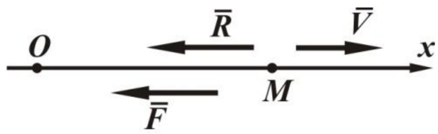


Рис. 44

Имеем: $F_x = -Cx,\ R_x = -\mu V_x = -\mu\dot{x}$. Дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} = -Cx - \mu\dot{x}$. Разделим уравнение на m и введем обозначения: $\dfrac{C}{m} = k^2,\ \dfrac{\mu}{m} = 2b$. Назовем b коэффициентом затухания. Получим дифференциальное уравнение свободных колебаний при вязком сопротивлении

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0. \qquad (1)$$

Коэффициенты b и k имеют одинаковую размерность, следовательно, их можно сравнивать по величине. Решение дифференциального уравнения ищут в виде $x = e^{pt}$. Подстановка решения в дифференциальное уравнение приводит к характеристическому уравнению $p^2 + 2bp + k^2 = 0$; его корни $p_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}$. В зависимости от соотношения величин b и k корни могут быть вещественными или комплексными.

Рассмотрим случай, когда $b < k$, то есть когда сила вязкого трения мала. Введем обозначение $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$, тогда $p_{1,2} = -b \pm ik_1$, то есть корни в этом случае комплексные. Общее решение уравнения (1)

$$x = Ae^{-bt}\sin\left(k_1t + \alpha\right). \qquad (2)$$

Величины A и α являются постоянными интегрирования и определяются по начальным условиям. График колебаний представлен на рисунке 45.

Колебания по закону (2) называются затухающими. Это движение не является периодическим; тем не менее промежуток времени T_1, равный периоду функции $\sin\left(k_1t + \alpha\right)$, принято называть периодом затухающих колебаний. Период

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}.$$

При затухающих колебаниях размахи колебаний (максимальные отклонения в одну сторону) убывают по закону геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии Ae^{-bt} называется *декрементом колебаний*. Модуль его логарифма bT_1 называется логарифмическим декрементом.

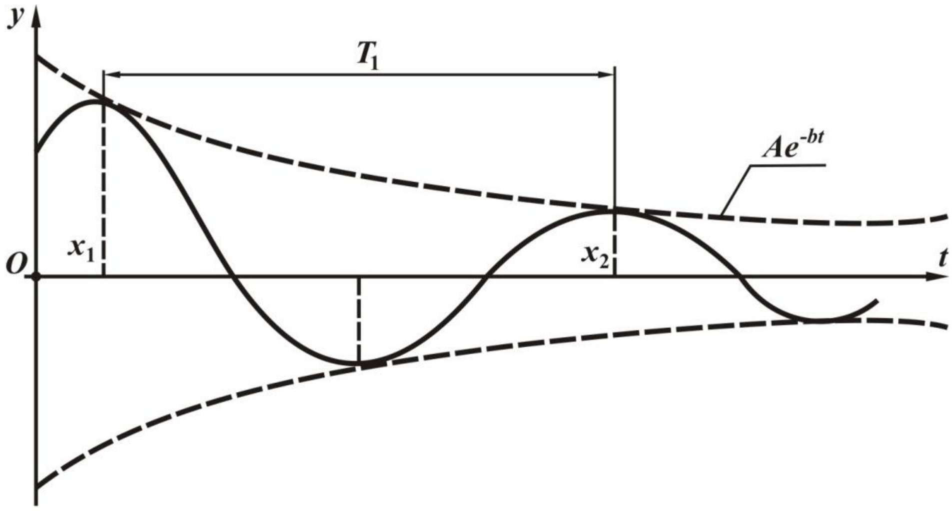


Рис. 45

Случай, когда $b > k$ (большое сопротивление). В этом случае оба корня характеристического уравнения – числа действительные и отрицательные. Общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}.$$

Функция вида e^{-at}, где $a > 0$, монотонно убывает. Движение в этом случае не будет колебательным.

Пример. Тело массой $m = 20,4$ кг установлено на двух пружинах жесткостью $C_1 = 4$ Н/м, $C_2 = 6$ Н/м . Тело отведено из положения равновесия вверх на 4 см и отпущено без начальной скорости (рис. 46). Найти закон движения, учитывая силу сопротивления среды $\bar{R} = -\mu\bar{V}$, $\mu = 2\ \text{Н} \cdot \dfrac{\text{с}}{\text{см}}$.

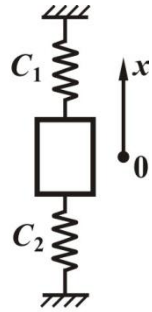


Рис. 46

Решение.

Поместим начало отсчета координаты x в положение статического равновесия тела. Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = -C_1 x - C_2 x - \mu\dot{x} \text{ или } \ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где $2b = \dfrac{\mu}{m}, k^2 = \dfrac{C_1 + C_2}{m}; b = 4,9\ \text{с}^{-1}, k = 7\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = Ae^{-bt}\sin\left(k_1 t + \alpha\right), k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}, k_1 = 5 \text{ рад/с};$$

$$\dot{x} = Ae^{-bt}\cos\left(k_1 t + \alpha\right) - Abe^{-bt}\sin\left(k_1 t + \alpha\right).$$

Полагая в общем решении $t = 0$ и используя начальные условия, получим:

$$\begin{cases} 0,04 = A\sin\alpha, \\ 0 = 5A\cos\alpha - 4,9A\sin\alpha. \end{cases}$$

Найдем из второго уравнения $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{5}{4,9} = 1,02 \cong 1,\ \alpha = 45^\circ$.

Из первого уравнения $A = \dfrac{0,04}{\sin 45^\circ} = 0,057$ м.

Закон движения тела $x = 0,057e^{-4,9t}\sin\left(5t + \pi/4\right)$.

10.5 Вынужденные колебания в линейной системе без сопротивления при гармонической возмущающей силе

Рассмотрим случай, когда на материальную точку действуют две силы: восстанавливающая сила $\bar{F}$ и возмущающая сила $\bar{Q}$.

Рис. 47

Пусть возмущающая сила является гармонической, то есть ее проекция на ось Ox:

$$Q_x = Q_0\sin\Omega t.$$

Колебания, возникающие под действием этой силы, называются вынужденными. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + k\dot{x} = \frac{Q_0}{m}\sin\Omega t \qquad (1)$$

Исключив случай равенства частот $\Omega = k$, частное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x = B\sin\Omega t. \qquad (2)$$

Подстановка частного решения (2) в уравнение (1) приводит к уравнению

$$-B\Omega^2 + Bk^2 = \frac{Q_0}{m}$$

откуда находим

$$B = \frac{Q_0/m}{k^2 - \Omega^2}.$$

Введем в рассмотрение статическое отклонение $x_{\text{ст}} = Q_0/C$.

Тогда $B=\dfrac{\dfrac{Q_0}{C}\cdot\dfrac{C}{m}}{k^2-\Omega^2}=\dfrac{x_{\text{ст}}\cdot k^2}{k^2-\Omega^2}$ или $B=\dfrac{x_{\text{ст}}}{1-\dfrac{\Omega^2}{k^2}}$.

Общее решение дифференциального уравнения (1) будет суммой общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения и частного решения (2)

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{Q_0/m}{k^2-\Omega^2}\sin\Omega t. \tag{3}$$

Скорость

$$\dot{x}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt+\Omega\frac{Q_0/m}{k^2-\Omega^2}\cos\Omega t. \tag{4}$$

Зададим начальные условия: при $t=0,\ x=x_0,\ \dot{x}=\dot{x}_0$. В (3),(4) положим $t=0$, получим:

$$x_0=C_1;\ \dot{x}_0=C_2k+\Omega\frac{Q_0/m}{k^2-\Omega^2},$$

откуда

$$C_2=\frac{\dot{x}_0}{k}-\frac{\Omega}{k}\cdot\frac{Q_0/m}{k^2-\Omega^2}.$$

Заданным начальным условиям соответствует решение

$$x=x_0\cos kt+\frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt-\frac{\Omega}{k}\cdot\frac{Q_0/m}{k^2-\Omega^2}\sin kt+\frac{Q_0/m}{k^2-\Omega^2}\sin\Omega t \tag{5}$$

Практически реализовать механическую колебательную систему без сопротивления невозможно. В реальных системах всегда присутствуют силы сопротивления, вследствие чего колебания с собственной частотой k затухают. Поэтому в рассматриваемом движении основное значение имеют вынужденные колебания с частотой возмущающей силы по закону

$$x=\frac{x_{\text{ст}}}{1-\Omega^2/k^2}\sin\Omega t.$$

Безразмерный коэффициент $\eta=\dfrac{1}{\left|1-\Omega^2/k^2\right|}$ называется коэффициентом динамичности. Он показывает, во сколько раз амплитуда установившихся вынужденных колебаний больше статического отклонения.

Резонанс. В решении (5) положим $x_0=0, \dot{x}_0=0$. Пусть частота возмущающей силы приближается к собственной частоте системы: $\Omega\to k$.

В формуле (5) $\Omega / k \to 1$, $k^2 - \Omega^2 = (k+\Omega)(k-\Omega) \to 2\Omega(k-\Omega)$ и
$$x = \frac{Q_0 / m}{2\Omega(k-\Omega)}(\sin\Omega t - \sin kt)$$

На основании известной формулы
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
найдем:
$$\sin\Omega t - \sin kt = 2\cos\Omega t\cdot\sin\frac{\Omega-k}{2}t.$$

С учетом этого формулу для x можно представить в виде
$$x = \frac{Q_0}{2m\Omega}\left[\frac{\sin\frac{\Omega-k}{2}t}{\frac{\Omega-k}{2}t}\right](-t)\cos\Omega t.$$

Из курса высшей математики известно, что функция, заключенная в квадратные скобки, при $\Omega \to k$ стремится к единице. Тогда
$$x = \frac{Q_0}{2m\Omega}\cdot t\cos\Omega t.$$

На рисунке 48 показан график этой функции. Видно, что при $\Omega \to k$ амплитуда колебаний неограниченно возрастает, причем амплитуда растет пропорционально времени. Это явление называется резонансом.

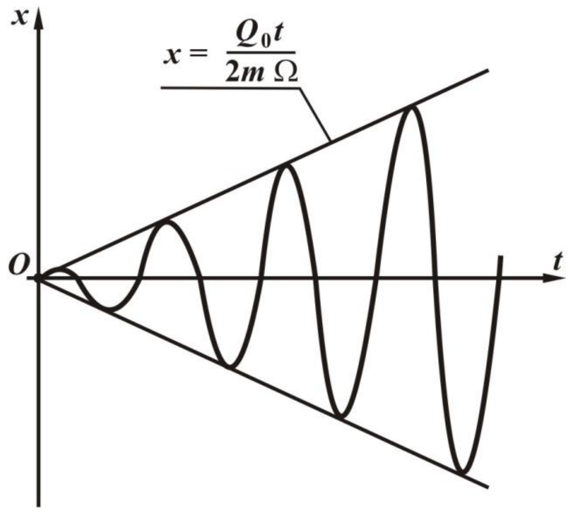


Рис. 48

10.6. Вынужденные колебания при вязком сопротивлении

Рассмотрим движение материальной точки вдоль оси x под действием линейной восстанавливающей силы $\bar{F}$, силы вязкого трения $\bar{R}$ и возмущающей силы $\bar{Q}$.

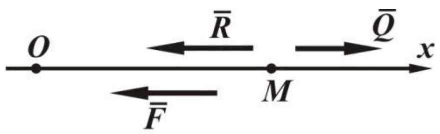


Рис. 49

Имеем: $F_x = -Cx, R_x = -\mu\dot{x}, Q_x = Q_0\sin\Omega t$. Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = -Cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin\Omega t.$$

Разделим уравнение на m и введем обозначения: $\dfrac{C}{m} = k^2, \dfrac{\mu}{m} = 2b$.

Получим

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = \frac{Q_0}{m}\sin\Omega t. \qquad (1)$$

Рассмотрим только установившиеся вынужденные колебания

$$x = B\sin(\Omega t - \beta).$$

Введем обозначение $\varphi = \Omega t - \beta$. Тогда

$$\sin\Omega t = \sin(\varphi + \beta) = \sin\varphi \cdot \cos\beta + \cos\varphi \cdot \sin\beta.$$

Подставим этот результат, а также значения x и его первой и второй производных в уравнение (1):

$$-B\Omega^2 \sin\varphi + 2bB\Omega\cos\varphi + k^2 B\sin\varphi = \frac{Q_0}{m}(\sin\varphi \cdot \cos\beta + \cos\varphi \cdot \sin\beta).$$

Чтобы это уравнение выполнялось при любом φ (т.е. при любом t), должны быть равны друг другу коэффициенты при $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в левой и правой частях уравнения:

$$B(k^2 - \Omega^2) = \frac{Q_0}{m}\cos\beta, 2bB\Omega = \frac{Q_0}{m}\sin\beta.$$

Из полученных уравнений находим

$$B = \frac{Q_0 / m}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}};$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{2b\Omega}{k^2 - \Omega^2}.$$

Учтем, что $\dfrac{Q_0}{m} = \dfrac{Q_0}{C} \cdot \dfrac{C}{m}, \dfrac{C}{m} = k^2, \dfrac{Q_0}{C} = x_{\text{ст}}$ – смещение, вызываемое статически приложенной постоянной силой Q_0.

Тогда

$$B = \frac{x_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{k^2}\right)^2 + 4\frac{\Omega^2 b^2}{k^4}}}.$$

Определяемая этой формулой зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты возмущающей силы называется амплитудно-частотной характеристикой колебательной системы.

Отношение $B / x_{\text{ст}}$ называют коэффициентом динамичности

$$K_\partial = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{k^2}\right)^2 + 4\frac{\Omega^2 b^2}{k^4}}}.$$

Видно, что ни при каких значениях частоты возмущающей силы коэффициент динамичности не обращается в бесконечность. Если частота возмущающей силы Ω близка к собственной частоте k, то амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума. Это явление называется резонансом.

Свойства вынужденных колебаний:

– амплитуда вынужденных колебаний не зависит от начальных условий;

– вынужденные колебания при наличии сопротивления не затухают;

– частота вынужденных колебаний равна частоте возмущающей силы и не зависит от характеристик системы;

–при малой возмущающей силе (Q_0 мало) можно получить интенсивные вынужденные колебания, если сопротивление мало, а частота Ω близка к k (резонанс);

– при большой возмущающей силе вынужденные колебания можно сделать малыми, если частота Ω будет много больше k.

Пример 1. Движение механической системы определяется дифференциальным уравнением $\ddot{q} + 4\dot{q} + 9q = 10\sin 3t$.

Во сколько раз уменьшится амплитуда установившихся вынужденных колебаний при увеличении коэффициента сопротивления в 2 раза?

Решение.

Стандартный вид уравнения установившихся вынужденных колебаний

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = \frac{Q_0}{m}\sin\Omega t.$$

Сравнивая уравнения, находим: $b = 2, k^2 = 9, Q_0 / m = 10, \Omega = 3$. Амплитуда

$$B = \frac{Q_0 / m}{\sqrt{\left(k^2 - \Omega^2\right)^2 + 4b^2\Omega^2}}.$$

Подставим в формулу численные значения $k, \Omega, Q_0 / m$, найдем $B = \frac{1}{0,6b}$. Видим, что величины B и b обратно пропорциональны. Следовательно, при увеличении коэффициента сопротивления в 2 раза амплитуда вынужденных колебаний уменьшится также в 2 раза.

Пример 2. Дифференциальное уравнение колебаний механической системы $64\ddot{q}+170\dot{q}+3000q=150\sin 8t$.

Определить амплитуду установившихся вынужденных колебаний.

Решение.

Делим уравнение на 64 и сравниваем со стандартным:

$$\ddot{q}+2,66\dot{q}+46,9q=2,34\sin 3t.$$

Сравнивая уравнения, находим: $b=1,33;\ k^2=46,9;\ Q_0/m=2,34;$ $\Omega=8$.

По формуле $B=\dfrac{Q_0/m}{\sqrt{\left(k^2-\Omega^2\right)^2+4b^2\Omega^2}}$ находим $B=0,086$ м.

10.7. Малые свободные колебания системы с двумя степенями свободы

Пусть положение системы определяется обобщенными координатами q_1, q_2 и при $q_1=q_2=0$ система находится в устойчивом равновесии. Тогда для консервативной системы с голономными стационарными связями с точностью до квадратов малых величин

$$T=\frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}\dot{q}_2^2\right);$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2+2c_{12}q_1q_2+c_{22}q_2^2\right).$$

Подставим T и Π в уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=0,\ i=1,2.$$

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=c_{11}q_1+c_{12}q_2,\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=a_{11}\dot{q}_1+a_{12}\dot{q}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)=a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2}=0;\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}=0;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}=a_{12}\dot{q}_1+a_{22}\dot{q}_2;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)=a_{12}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2.$$

Получим дифференциальные уравнения малых колебаний системы с двумя степенями свободы

$$\left.\begin{aligned}a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=0,\\ a_{12}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+c_{12}q_1+c_{22}q_2=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Таким образом, малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия описываются системой двух линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение уравнений (1) будем искать в форме

$$q_1 = A\sin(kt+\alpha),\ q_2 = B\sin(kt+\alpha). \tag{2}$$

Здесь $A, B, k, \alpha -$ неизвестные постоянные.

Продифференцируем выражения для q_1, q_2 дважды по времени t:

$$\ddot{q}_1 = -Ak^2\sin(kt+\alpha),\ \ddot{q}_2 = -Bk^2\sin(kt+\alpha).$$

Подставим значения $q_1, q_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2$ в дифференциальные уравнения (1) и сократим на общий множитель $\sin(kt+\alpha)$. Получим

$$\left.\begin{aligned}&(c_{11}-a_{11}k^2)A+(c_{12}-a_{12}k^2)B=0,\\&(c_{12}-a_{12}k^2)A+(c_{22}-a_{22}k^2)B=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Чтобы уравнения (3) давали для A и B решения, отличные от нуля, определитель системы должен быть равен нулю или, иначе, коэффициенты при A и B должны быть пропорциональны.

Условие пропорциональности коэффициентов:

$$-\frac{c_{11}-a_{11}k^2}{c_{12}-a_{12}k^2}=\frac{c_{12}-a_{12}k^2}{c_{22}-a_{22}k^2}=\frac{B}{A}=n. \tag{4}$$

Определитель системы должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix}c_{11}-a_{11}k^2 & c_{12}-a_{12}k^2\\ c_{12}-a_{12}k^2 & c_{22}-a_{22}k^2\end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель, получим *уравнение частот*, или *вековое уравнение*:

$$(c_{11}-a_{11}k^2)(c_{22}-a_{22}k^2)-(c_{12}-a_{12}k^2)^2=0. \tag{5}$$

Корни этого уравнения k_1^2 и k_2^2 вещественны и положительны. Каждому положительному корню k_1 и k_2 соответствует одно частное решение (2), причем каждой частоте присущи свои значения A, B, α. Полагая в уравнении (4) сначала $k=k_1$, затем $k=k_2$, получим два значения n_1, n_2. Соответственно найдем $B_1=n_1A_1,\ B_2=n_2A_2$.

Итак, имеем два линейно независимых частных решения:

$$q_1^{(1)}=A_1\sin(k_1t+\alpha_1),\ q_2^{(1)}=B_1\sin(k_1t+\alpha_1) \tag{6}$$

и

$$q_1^{(2)}=A_2\sin(k_2t+\alpha_2),\ q_2^{(2)}=B_2\sin(k_2t+\alpha_2) \tag{7}$$

Колебания, определяемые уравнениями (6) и (7), называются *главными колебаниями, а их частоты* k_1 и k_2 *– собственными частотами системы*. В качестве частоты k_1 всегда выбирается меньшая из двух собственных частот. Колебание с частотой k_1 называют первым главным колебанием, а с частотой k_2 – вторым главным колебанием. *Числа* n_1, n_2, *определяющие отношения амплитуд в каждом из этих колебаний, называют коэффициентами формы.*

Общее решение системы дифференциальных уравнений (1) будет линейной комбинацией частных решений (6) и (7):

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= n_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + n_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Произвольные постоянные $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ определяются по начальным условиям. Собственные частоты k_1, k_2 и коэффициенты формы n_1, n_2 не зависят от начальных условий и являются основными характеристиками колебательной системы. Обе координаты в каждом главном колебании изменяются по гармоническому закону, имея одинаковые частоты и фазы. Обе координаты одновременно обращаются в нуль, одновременно достигают максимальных значений.

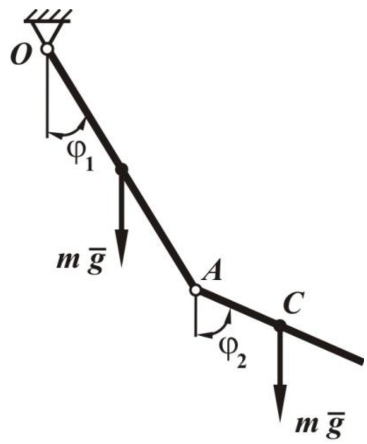


Рис. 50

Пример. Определить собственные частоты и коэффициенты формы малых колебаний двойного физического маятника, образованного однородными стержнями 1 и 2 одинаковой массы m и длины l (рис. 50).

Решение.

Примем за обобщенные координаты углы φ_1, φ_2. Поскольку рассматриваются малые колебания, малыми будут $\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} J_{1O} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{2C} \dot{\varphi}_2^2,$$

где $J_{1O} = \dfrac{ml^2}{3}, J_{2C} = \dfrac{ml^2}{12}$.

$$\overline{V}_C = \overline{V}_A + \overline{V}_{CA}, V_A = l\dot{\varphi}_1, V_{CA} = 0{,}5 l \dot{\varphi}_2.$$

$$V_C^2 = V_A^2 + V_{CA}^2 + 2 V_A V_{CA} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

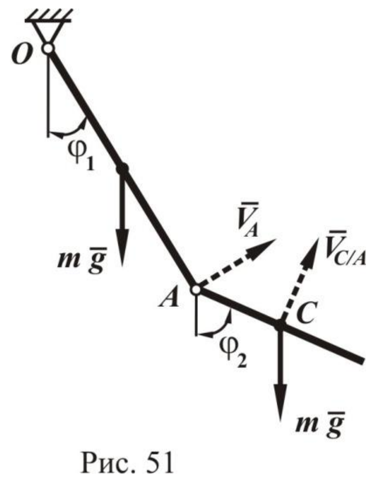


Рис. 51

Разложим функцию $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ в степенной ряд

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 - (\varphi_2 - \varphi_1)^2 / 2! + \ldots \ .$$

Чтобы в выражении кинетической энергии сохранить малые не выше второго порядка, следует в разложении косинуса оставить только первое слагаемое, то есть принять $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$. Получим $V_C^2 = (V_A + V_{CA})^2$ или $V_C^2 = l(\dot{\varphi}_1 + 0{,}5\dot{\varphi}_2)^2$. Окончательно

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{4}{3}\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}_2^2 \right).$$

Сравнивая с $T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right)$, найдем

$$a_{11} = \frac{4}{3} m l^2,\ a_{12} = \frac{1}{2} m l^2,\ a_{22} = \frac{1}{3} m l^2.$$

Потенциальную энергию определим как работу сил тяжести при переходе системы из текущего положения в начальное

$$\Pi = mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi_1) + mgl(1 - \cos\varphi_1) + mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi_2).$$

Приближенно $1 - \cos\varphi \cong \frac{\varphi^2}{2}$; тогда $\Pi = \frac{1}{4} mgl\left(3\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)$.

Сравнивая с $\Pi = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2\right)$, найдем

$$c_{11} = \frac{2}{3} mgl,\ c_{12} = 0,\ c_{22} = \frac{1}{2} mgl.$$

Значения a_{ik}, c_{ik} подставим в уравнение частот

$$\left(c_{11} - a_{11}k^2\right)\left(c_{22} - a_{22}k^2\right) - \left(c_{12} - a_{12}k^2\right)^2 = 0.$$

Уравнение частот примет вид $k^4 - 6\frac{g}{l}k^2 + \frac{27}{7}\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0$.

Собственные частоты системы $k_1 = 0{,}86\sqrt{\frac{g}{l}},\ k_2 = 2{,}3\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Подставляя в одно из уравнений (4) сначала k_1, затем k_2, найдем коэффициенты формы:

$$n_1 = 1{,}43;\ n_2 = -2{,}10.$$

Таким образом, при первом главном колебании оба стержня в каждый момент времени отклонены от вертикали в одну сторону и

$\varphi_1 / \varphi_2 = 1{,}43$, а при втором главном колебании – в разные стороны и $|\varphi_1 / \varphi_2| = 2{,}10$ (см. рис. 52).

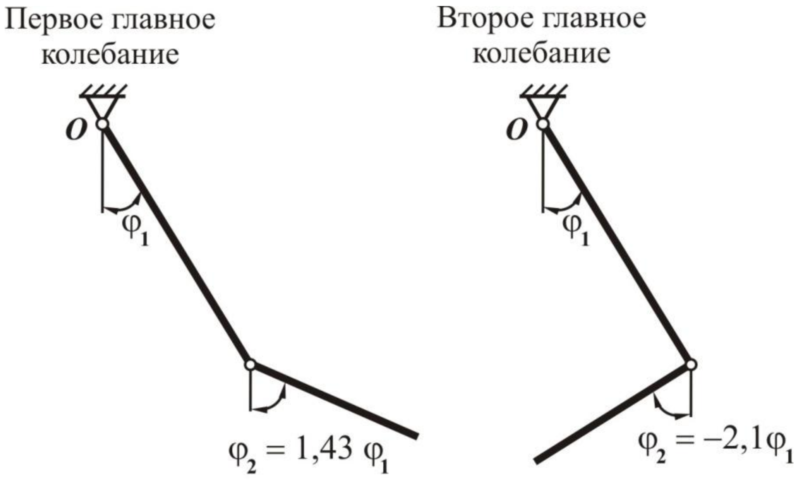


Рис. 52

10.8. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы

Пусть на механическую систему, рассмотренную в (10.7), действуют обобщенные непотенциальные силы:

$$Q_1 = H_1 \sin \Omega t, Q_2 = H_2 \sin \Omega t .$$

Дифференциальные уравнения колебаний будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = H_1 \sin \Omega t, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = H_2 \sin \Omega t. \end{aligned}\right\}$$

Общее решение этой системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений складывается из общего решения соответствующей однородной системы (найдено в 10.7) и частного решения данной неоднородной системы. Частное решение, соответствующее установившимся вынужденным колебаниям, будем искать в виде

$$q_1 = A_1 \sin \Omega t, q_2 = A_2 \sin \Omega t .$$

Подставляя это решение в дифференциальные уравнения, приходим к системе алгебраических уравнений для определения амплитуд колебаний A_1, A_2:

$$\left.\begin{aligned} \left(c_{11} - a_{11}\Omega^2\right)A_1 + \left(c_{12} - a_{12}\Omega^2\right)A_2 = H_1, \\ \left(c_{12} - a_{12}\Omega^2\right)A_1 + \left(c_{22} - a_{22}\Omega^2\right)A_2 = H_2. \end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} .$$

Здесь $\Delta -$ определитель, составленный из коэффициентов системы алгебраических уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\Omega^2 & c_{12} - a_{12}\Omega^2 \\ c_{12} - a_{12}\Omega^2 & c_{22} - a_{22}\Omega^2 \end{vmatrix} = \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)\left(k_1^2 - \Omega^2\right)\left(k_2^2 - \Omega^2\right),$$

и $\Delta_i -$ определитель, который получается из Δ заменой i-го столбца правыми частями системы уравнений:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} H_1 & c_{12} - a_{12}\Omega^2 \\ H_2 & c_{22} - a_{22}\Omega^2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\Omega^2 & H_1 \\ c_{12} - a_{12}\Omega^2 & H_2 \end{vmatrix};$$

в выражении Δ величины k_1, k_2 представляют собой собственные частоты системы.

При $\Omega = k_1$ и при $\Omega = k_2$ определитель Δ обращается в нуль, и амплитуды неограниченно возрастают. Таким образом*, при совпадении частоты возмущающей силы с любой из собственных частот наступает резонанс.*

Контрольные вопросы

1. Под действием какой силы возникают свободные гармонические колебания материальной точки?
2. Что такое период свободных гармонических колебаний? Как он определяется?
3. От чего зависят амплитуда и начальная фаза свободных гармонических колебаний?
4. Какая сила вызывает затухание свободных колебаний материальной точки?
5. При каком соотношении между круговой частотой k и коэффициентом затухания b материальная точка совершает затухающие свободные колебания?
6. Какие свободные колебания имеют больший период: незатухающие или затухающие?
7. Что определяет декремент колебаний?
8. Какая сила вызывает вынужденные колебания материальной точки?
9. Зависят ли установившиеся вынужденные колебания от начальных условий?
10. Затухают ли установившиеся вынужденные колебания?
11. От каких факторов зависит амплитуда установившихся вынужденных колебаний?
12. Какой случай вынужденных колебаний называется резонансом?

13. Как меняется с течением времени амплитуда вынужденных колебаний в случае резонанса при отсутствии сопротивления среды?

14. Какое положение равновесия называется устойчивым? неустойчивым? Приведите примеры.

15. Сформулируйте теорему Лагранжа – Дирихле, дающую достаточное условие устойчивости положения равновесия механической системы. При каких связях справедлива теорема?

16. Зависят ли собственные частоты k_1, k_2 и коэффициенты формы n_1, n_2 линейной системы с двумя степенями свободы от начальных условий?

17.При каких условиях наступает резонанс в линейной системе с двумя степенями свободы?

Таблица 22

Тестовые задания

№	Задание/ответ
1	Дифференциальное уравнение свободных колебаний линейной системы с одной степенью свободы имеет вид 1) $\ddot{x}+k^2\dot{x}=0$; 2) $\ddot{x}-k^2\dot{x}=0$; 3) $\ddot{x}+k^2\dot{x}=H\sin\Omega t$; 4) $\ddot{x}+k^2x=He^t$; 5) $\ddot{x}+k^2\sin x=0$. **Ответ**: 1)
2	Следующие характеристики свободных линейных колебаний не зависят от начальных условий: 1) период колебаний; 2) частота колебаний; 3) круговая частота; 4) амплитуда; 5) начальная фаза колебаний **Ответ**: 1), 2), 3)
3	Постоянная сила, приложенная к системе, совершающей свободные колебания, изменяет **…** . 1) положение центра колебаний; 2) период колебаний; 3) амплитуду колебаний; 4) Частоту колебаний; 5) Начальную фазу колебаний **Ответ**: 1)
4	Консервативная система с одной степенью свободы в положении равновесия $q=0$ удовлетворяет условиям: $$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0=0, \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0>0$$ Равновесие системы **…** . **Ответ**: устойчиво

окончание табл. 22

5	Дифференциальное уравнение движения системы $100\ddot{q}+4\pi^2 q=0$, период свободных колебаний $T=...$ с. **Ответ**: 10
6	Промежуток времени T, в течение которого система совершает одно полное колебание, называется **…** колебаний. **Ответ**: периодом
7	Числа n_1, n_2, показывающие, во сколько раз амплитуда соответствующего главного колебания в одной из координат больше (или меньше) амплитуды другой координаты, называются коэффициентами **…** . **Ответ**: формы
8	Положение равновесия при $z_0 = mg/c$ консервативной системы с потенциальной энергией $\Pi = -mgz + \frac{1}{2}cz^2$, где $mg = 10$ Н, устойчиво при условии $c > ...$ Н/м. **Ответ**: 0
9	Движение механической системы определяется уравнением $\ddot{x}+100\pi^2 x = 0{,}1\sin\Omega t$ резонанс наступит при частоте возмущающей силы **…** герц. **Ответ**: 10

11. Принцип Гамильтона - Остроградского

11.1. Общие понятия

Под термином «принцип» следует понимать такое аксиоматическое положение, которое, обладая достаточной общностью, является для данной области науки основным, так что все остальные положения вытекают из него как логическое следствие.

Принципы механики, устанавливающие какое-либо общее свойство движения для каждого момента времени, называются *дифференциальными*, а те принципы, которые справедливы только для конечного промежутка времени, называются *интегральными.*

Вариационными называются принципы, которые устанавливают какое-либо свойство истинного движения , отличающее его от всех других воображаемых движений, допускаемых связями и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Гамильтон изложил свой принцип в работах 1834 – 1835 годов для свободной системы материальных точек и для системы со стационарными связями. Остроградский, не зная работ Гамильтона, опубликованных в мало известных тогда трудах Ирландской Академии наук, в 1848 г. сформулировал принцип в более общей форме, распространив его и на нестационарные связи. По этой причине рассматриваемый принцип называют принципом Гамильтона - Остроградского.

Синхронное варьирование. Пусть механическая система имеет одну степень свободы и ее положение определяется обобщенной координатой $q = f(t)$. Дадим функции $q = f(t)$ при заданном фиксированном t произвольное приращение $\delta q = \varepsilon \cdot \varphi(t)$, где $\varepsilon -$ произвольно малое постоянное число, $\varphi(t) -$ произвольная дифференцируемая функция времени. Получим семейство новых функций времени:

$$\tilde{q} = f(t) + \varepsilon \cdot \varphi(t).$$

Произвольное изменение функции $\delta(t)$, являющееся следствием не изменения времени, а изменения вида самой функции, называется синхронной вариацией функции:

$$\delta q = \tilde{q} - q = \varepsilon \cdot \varphi(t).$$

Рассмотрим голономную консервативную механическую систему. Для такой системы функция Лагранжа $L = T - \Pi$.

Определенный интеграл от функции Лагранжа по времени носит название ***действие по Гамильтону***:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \cdot dt.$$

S есть функционал, то есть число, величина которого зависит от вида функции $L(q, \dot{q}, t)$.

11.2. Вариационный интегральный принцип Гамильтона-Остроградского

Принцип Гамильтона-Остроградского:

При перемещении консервативной системы, подчиненной идеальным голономным связям,из одного заданного положения в другое, истинное движение отличается от всех других кинематически допустимых движений тем, что для этого движения действие по Гамильтону имеет стационарное значение:

$$\delta S = 0, \text{ или } \delta \int_{t_1}^{t_2} L \cdot dt = 0, \text{или } \int_{t_1}^{t_2} \delta L \cdot dt = 0.$$

Пример. Механическая система состоит из обращенного математического маятника массой m и длиной l и спиральной пружины с коэффициентом жесткости C. Найти приближенную зависимость между амплитудой и частотой свободных колебаний (рис. 53).

Решение.

Для рассматриваемой системы

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2,\ \Pi=\frac{1}{2}C\varphi^2-mgl\left(1-\cos\varphi\right).$$

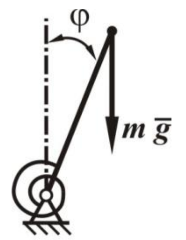


Рис. 53

Функцию $1-\cos\varphi$ разложим в степенной ряд и сохраним в разложении первое и второе слагаемые:

$$1-\cos\varphi\cong\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{\varphi^4}{4!}.$$

Тогда

$$-\Pi\cong\left(mgl-C\right)\frac{\varphi^2}{2}-\frac{mgl}{6}\cdot\frac{\varphi^4}{4}.$$

Зададимся формой решения:

$$\varphi=\alpha\cdot\sin kt.$$

Будем считать α варьируемым параметром: $\delta\varphi=\delta\alpha\cdot\sin kt$. Вариация $\delta\varphi$ равна нулю при $t_1=0$ и $t_2=T=\dfrac{2\pi}{k}$, где $T-$ период колебаний.

Функция Лагранжа

$$L=T-\Pi=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2+\left(mgl-C\right)\frac{\varphi^2}{2}-\frac{mgl}{6}\cdot\frac{\varphi^4}{4}.$$

Действие по Гамильтону

$$S=\int_0^{2\pi/k}L\cdot dt=$$

$$=\int_0^{2\pi/k}\alpha^2\left(\frac{ml^2}{2}k^2\cos^2 kt+\frac{mgl-C}{2}\sin^2 kt\right)\cdot dt-\int_0^{2\pi/k}\frac{mgl}{24}\alpha^4\sin^4 kt\cdot dt=$$

$$=\pi\left(kml^2\cdot\frac{\alpha^2}{2}+\frac{mgl-C}{k}\cdot\frac{\alpha^2}{2}-\frac{mgl}{8k}\cdot\frac{\alpha^4}{4}\right)$$

Варьируем S по α:

$$\delta S=\pi\left(kml^2\alpha+\frac{mgl-C}{k}\alpha-\frac{mgl}{8k}\alpha^3\right)\cdot\delta\alpha=0.$$

Находим $k^2=\dfrac{C-mgl}{ml^2}+\dfrac{g}{8l}\cdot\alpha^2$, или $k^2=k_0^2+\dfrac{g}{8l}\cdot\alpha^2$.

Из выполненного решения видно, что с увеличением амплитуды колебаний частота колебаний возрастает. Из изложенной ранее теории колебаний линейных систем мы знаем, что частота свободных колебаний линейной системы не зависит от амплитуды. Почему же в рассматриваемом примере частота зависит от амплитуды? Чтобы получить ответ на этот вопрос, составим дифференциальное уравнение колебаний рассматриваемой системы. Для этого найдем полную механическую энергию системы и продифференцируем ее по времени:

$$U = T + \Pi = \text{const}.$$

$$\frac{dU}{dt} = 0; \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \left(C - mgl\right)\frac{\varphi^2}{2} + \frac{mgl}{6}\cdot\frac{\varphi^4}{4}\right) = 0;$$

$$ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \left(C - mgl\right)\varphi\dot{\varphi} + \frac{mgl}{6}\cdot\varphi^3\dot{\varphi} = 0.$$

После сокращения на $\dot{\varphi}$ получим дифференциальное уравнение колебаний

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{C}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)\varphi + \frac{g}{6l}\cdot\varphi^3 = 0.$$

Это – нелинейное дифференциальное уравнение. Значит, в данном случае мы имеем дело с нелинейной колебательной системой, чем и объясняются ее особые свойства.

Контрольные вопросы

1. Какие принципы механики называются дифференциальными?
2. Какие принципы механики называются интегральными?
3. Какие принципы механики называются вариационными?
4. Что понимается под синхронной вариацией функции?
5. Какое выражение называется действием по Гамильтону?
6. Сформулируйте принцип Гамильтона – Остроградского.

Таблица 23

Тестовые задания

№	Задание/ответ
1	Интеграл $\int_{t_1}^{t_2}\delta L\cdot dt = 0$, где $L-$ функция Лагранжа, носит название … по Гамильтону **Ответ**: действие
2	Для истинного движения системы с голономными связями вариация действия по Гамильтону $\delta\int_{t_1}^{t_2} L\cdot dt = ...$ **Ответ**: 0

окончание табл. 23

3	Кинетическая энергия системы $T=10\dot{q}^2$, потенциальная – $\Pi=8q^2$, функция Лагранжа … . 1) $10\dot{q}^2-8q^2$; 2) $10\dot{q}^2+8q^2$; 2) $20\dot{q}+16q$; 2) $20\dot{q}-16q$ **Ответ**: 1)
4	Принцип Гамильтона-Остроградского является интеграль-ным … принципом механики. 1) вариационным 2) дифференциальным 3) изохронным. **Ответ**: 1)
5	Кинетическая энергия системы $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, потенциальная энергия $\Pi=\frac{1}{2}Cx^2$, действие по Гамильтону … . 1) $\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(m\dot{x}^2-Cx^2\right)dt$ 2) $\frac{1}{2}\left(ml^2\dot{\varphi}^2-Cx^2\right)$ 3) $\frac{1}{2}\left(ml^2\dot{\varphi}^2+Cx^2\right)$ **Ответ**: 1)

Список рекомендуемой литературы

Учебники:

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 2. – СПб.: Лань, 2002. – 496 с.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2005. – 416 с.
3. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. 2. Динамика. – 6-е изд. – М.: Высш. шк., 1984. – 423 с.

Сборники задач и руководства к решению задач:

4. Кепе О. Э., Виба Я. А., Грапис О. П. и др. Сборник коротких задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.
5. Яблонский А. А., Норейко С. С., Вольфсон С. А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механики – 16-е изд. –М.: Интеграл-Пресс, 2008. – 384 с.

Оглавление