1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. Силы, сходящиеся в одной точке

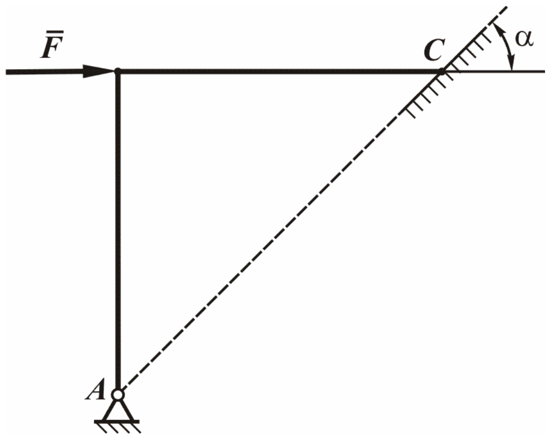
● Уравнения равновесия пространственной сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum F_{kz} = 0.$$

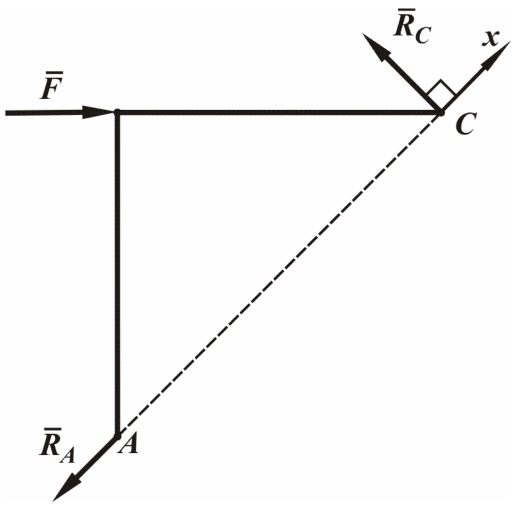
● Уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0.$$

При решении некоторых задач можно использовать теорему о трех силах: *Если тело находится в равновесии под действием трех сил и линии действия двух сил пересекаются, то линия действия третьей силы проходит через эту точку пересечения и все три силы лежат в одной плоскости*.



Пример. Рама закреплена в точке A шарнирно, в точке C опирается на гладкую поверхность; сила $F = 20$ Н; $\alpha = 45^\circ$. Необходимо определить реакцию шарнира R_A.



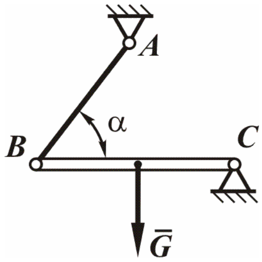
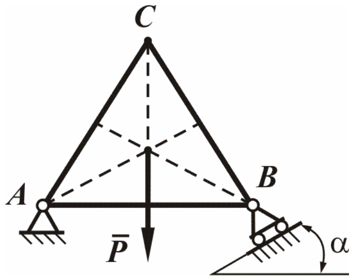
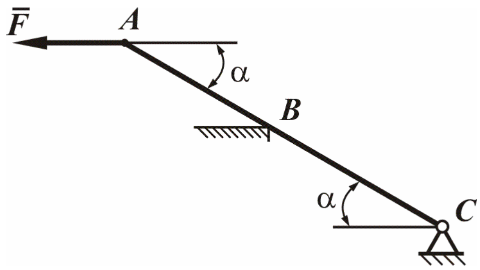
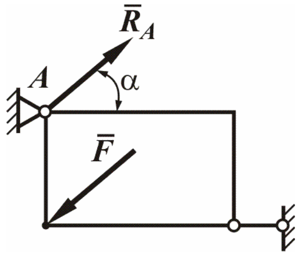
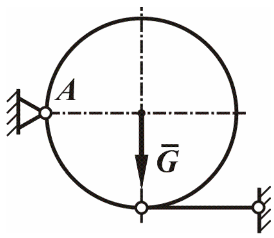
Решение. Линии действия сил $\bar{F}$ и $\bar{R}_C$ пересекаются в точке C. Это определяет направление реакции $\bar{R}_A$. Составляем уравнение равновесия (проецируем все силы, действующие на раму, на ось x):

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F\cos 45^\circ - R_A = 0; \quad R_A = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14{,}1\,\text{Н}.$$

Применение теоремы о трех силах позволило обойтись при решении задачи составлением одного уравнения равновесия.

Таблица 1

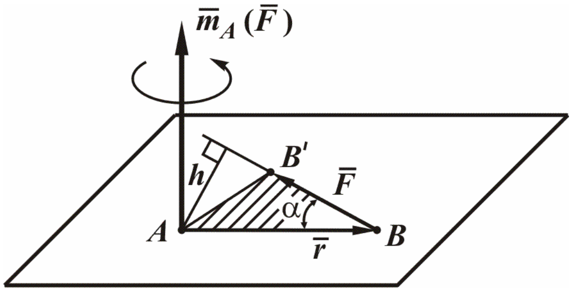
Тестовые задания

№	задание/ответ	схема
1	Вес однородной балки BC $G = 600\sqrt{3}$ Н, $\alpha = 60^{o}$. Реакция шарнира C равна **…** Н. **Ответ**: 600 Н.	
2	Вес однородной равносторонней пластины $P = 4\sqrt{3}$ Н; $\alpha = 30^{o}$. Реакция $R_B = \ldots$ Н. **Ответ**: 4 Н.	
3	$AB = BC$, $F = 6$ Н. Балка AC невесома; $\alpha = 30^{o}$. Реакция $R_C = \ldots$ Н. **Ответ**: 6 Н.	
4	Пластина невесомая, сила $F \neq 0$. Угол $\alpha = \ldots$ градусов. **Ответ**: 90^{o}	
5	Вес диска $G = 30\sqrt{2}$ Н. Реакция шарнира $R_A = \ldots$ Н. **Ответ**: 60 Н.	

1.2. Момент силы относительно точки

● Линия действия силы $\overline{F}$ – прямая, вдоль которой направлен вектор силы.

● Плечо силы $\overline{F}$ относительно точки A – есть длина перпендикуляра, опущенного из точки A на линию действия силы $\overline{F}$.



● Момент силы $\overline{F}$ относительно точки A равен векторному произведению вектора $\overline{r}$ на силу $\overline{F}$.

$$\overline{m}_A\left(\overline{F}\right) = \overline{r} \times \overline{F};$$

$$\left|\overline{m}_A\left(\overline{F}\right)\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h.$$

1.3. Пара сил

● Парой сил называется система двух равных по модулю, противоположных по направлению параллельных сил.

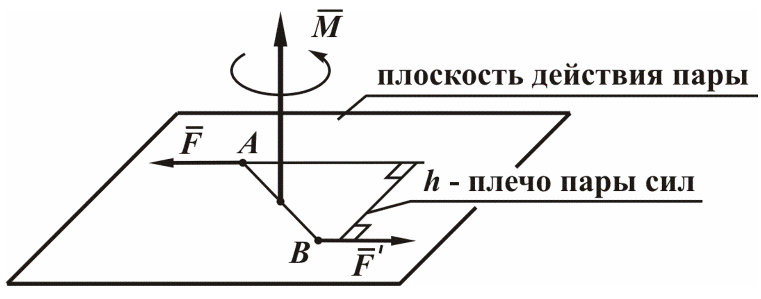
● Плоскость, в которой расположена пара сил, называется плоскостью действия пары.

● Плечом пары h называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару.

● Моментом пары называется вектор, направленный перпендикулярно к плоскости её действия по правилу правого винта и равный по величине произведению модуля одной из сил пары на её плечо.

$$\overline{M} = \overline{BA} \times \overline{F};$$

$$\left|\overline{M}\right| = F \cdot h.$$



● Момент пары – свободный вектор.

● Теорема о сумме моментов сил, составляющих пару:

$$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right) + \overline{M}_O\left(\overline{F}'\right) = \overline{BA} \times \overline{F} = \overline{M},$$

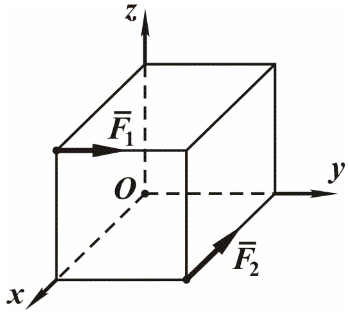
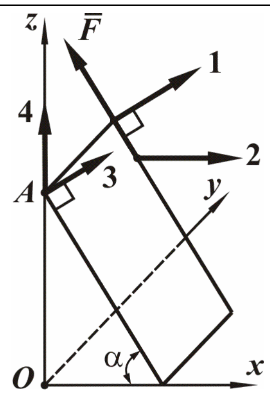
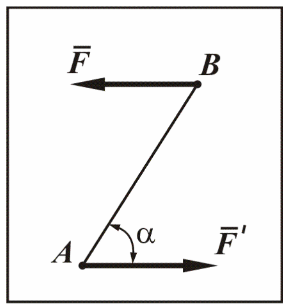
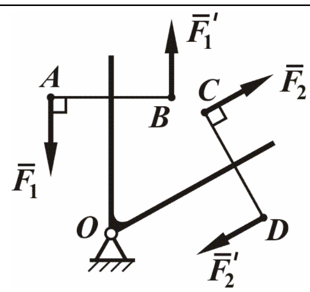
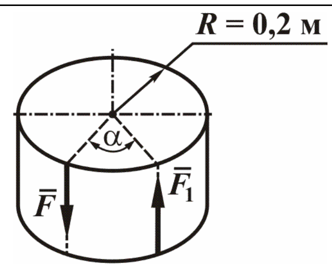
где O – произвольная точка.

● Две пары сил эквивалентны, если равны их моменты $\overline{M}_1 = \overline{M}_2$.

● Система пар сил с моментами $\overline{M}_k$ ($k = 1, \dots, n$) эквивалентна одной паре с моментом $\overline{M} = \sum \overline{M}_k$.

Таблица 2

Тестовые задания

№	задание/ответ	схема
1	Вектор момента силы … относительно вершины O куба составляет с осью Oz угол 45°. **Ответ**: $\overline{F}_1$.	
2	$\alpha = 60^{\circ}$; вектор момента силы $\overline{F}$ относительно точки A совпадает по направлению с вектором № … **Ответ**: 3.	
3	В паре сил $F = F' = 30\,\text{Н}$, $AB = 0{,}2\sqrt{3}$ м; $\alpha = 60^{\circ}$. Момент пары равен … $\text{Н} \cdot \text{м}$. **Ответ**: 9.	
4	$F_1 = F_1' = 12\,\text{Н}$, $F_2 = F_2' = 6\,\text{Н}$, $AB = 4$ м, $CD = 5$ м. Момент пары, эквивалентной данным парам, … $\text{Н} \cdot \text{м}$. **Ответ**: 18.	
5	$F = F_1 = 5\,\text{Н}$; $\alpha = 60^{\circ}$; момент пары сил $(\overline{F}, \overline{F}_1)$ равен … $\text{Н} \cdot \text{м}$. **Ответ**: 1.	

1.4. Приведение системы сил к центру

● Лемма о параллельном переносе силы. Силу, не нарушая ее действия на абсолютно твёрдое тело, можно перенести параллельно в любую точку тела, присоединяя пару сил с моментом, равным моменту силы относительно этой точки.

● Главный вектор системы сил:

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_k ;$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} ,$$

где $F_x = \sum F_{kx}$; $F_y = \sum F_{ky}$; $F_z = \sum F_{kz}$.

● Главный момент системы сил относительно точки O:

$$\bar{M}_O = \sum \bar{m}_O\left(\bar{F}_k\right);$$

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} ,$$

где $M_{Ox} = \sum m_x\left(\bar{F}_k\right)$; $M_{Oy} = \sum m_y\left(\bar{F}_k\right)$; $M_{Oz} = \sum m_z\left(\bar{F}_k\right)$.

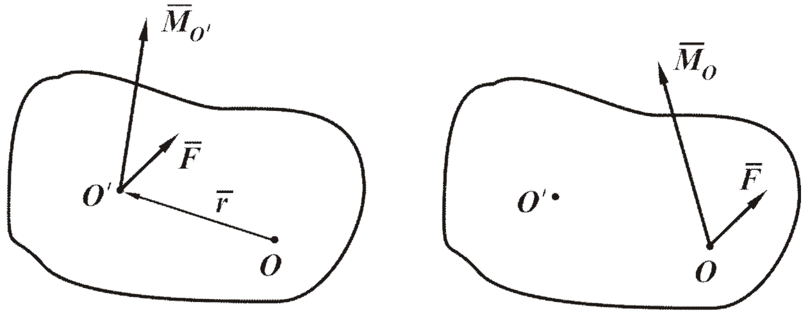
Вектор $\bar{M}_O = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k$, где $\bar{r}_k$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы.

●Теорема Пуансо (основная теорема статики). Произвольная система сил, действующих на твердое тело, эквивалентна главному вектору $\bar{F}$, приложенному в любой точке O тела (центре приведения), и паре сил с моментом, равным главному моменту $\bar{M}_O$ относительно этой точки:

$$\left\{\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n\right\} \sim \left\{\bar{F}; \bar{M}_O\right\}.$$

● Две системы сил эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их главные векторы и главные моменты относительно одной и той же точки.

● Зависимость главного момента системы сил от центра приведения

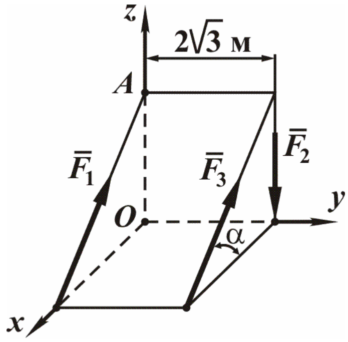
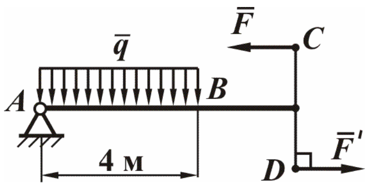
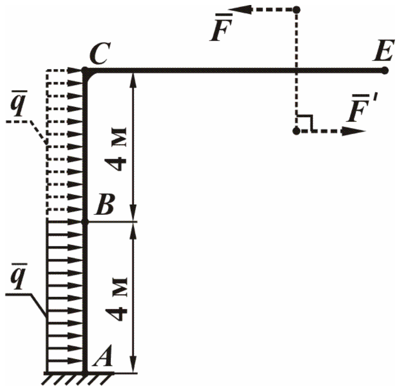
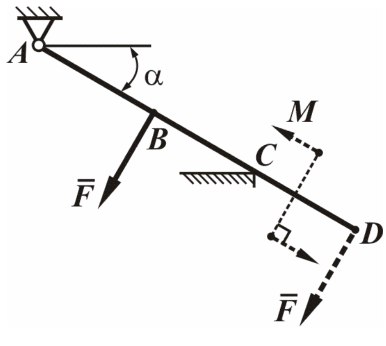


$$\bar{M}_O = \bar{M}_{O'} + \bar{m}_O(\bar{F}),$$

где $\bar{m}_O(\bar{F})$ – момент главного вектора, приложенного в центре O', относительно центра O.

Таблица 3

Тестовые задания

№	задание/ответ	схема
1	К призме приложены силы $F_1 = F_3 = 60$ Н; $F_2 = 30$ Н. Модуль главного момента системы сил относительно центра A равен … Н · м. **Ответ**: 180.	
2	$F = F' = 16$ H, $CD = 5$ м, $q = 10$ Н/м. Главный момент пары сил $(\overline{F}, \overline{F}')$ и распределённой нагрузки относительно точки A … Н · м. **Ответ**: 0.	
3	Чтобы состояние рамы не изменилось при переносе распределённой нагрузки $q = 3$ кН/м с AB на BC, необходимо приложить к раме пару сил с моментом … кН · м. **Ответ**: 48.	
4	$AB{=}BC{=}CD{=}2$ м; $\alpha = 30^{\circ}$. Чтобы состояние балки не изменилось при переносе точки приложения силы $F = 4$ Н из точки B в точку D, необходимо к балке приложить пару сил с моментом … Н · м. **Ответ**: 16.	
5	Модуль главного вектора системы сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3)$, где $\overline{F}_1 = 3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$, $\overline{F}_2 = -2\overline{j} + 6\overline{k}$, $\overline{F}_3 = 2\overline{k}$ равен … Н. **Ответ**: 5.	

1.5. Связи и их реакции

● Связь есть ограничение, накладываемое на перемещение тела или на скорости его точек.

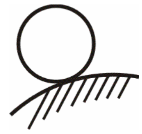
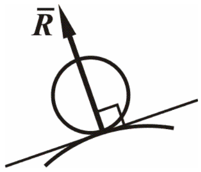
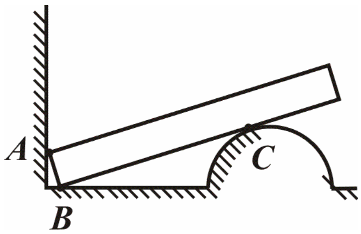
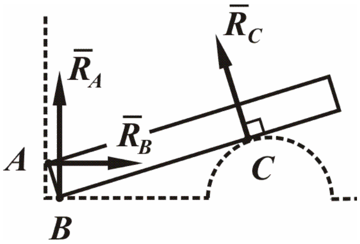
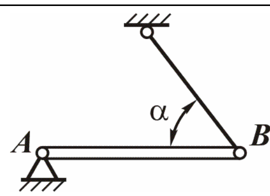
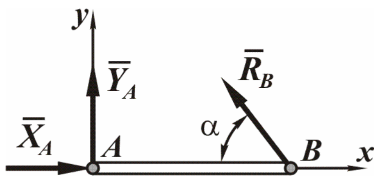
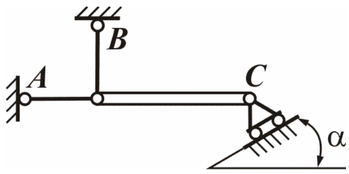
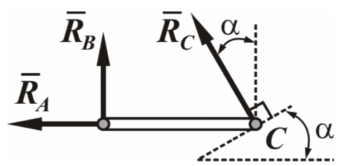
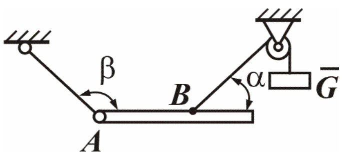
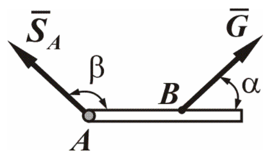
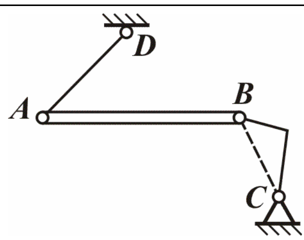
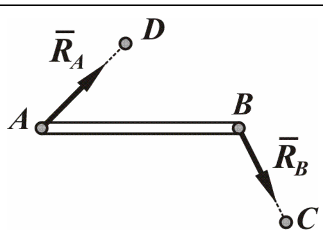
● Сила, действующая на тело со стороны связи, называется реакцией связи.

● Аксиома связей. Несвободное твёрдое тело можно считать свободным, если действие связей заменить их реакциями.

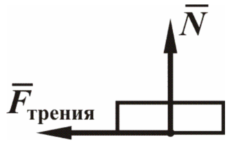
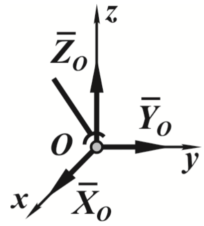
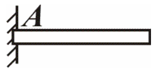
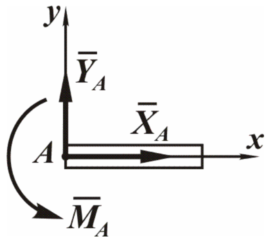
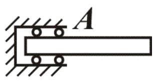
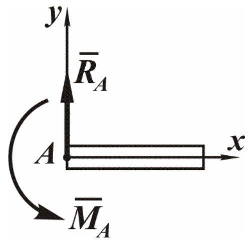
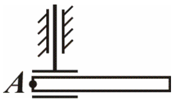
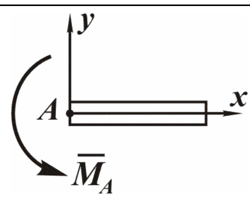
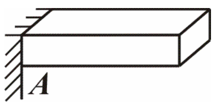
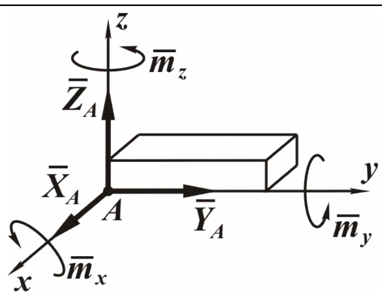
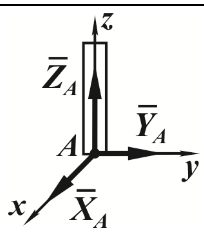
● Виды связей и их реакции (табл. 4).

Таблица 4

Виды связей и их реакции

Тип связи	Схема связи	Направление реакции
1. Гладкая опорная поверхность		
2. Точечная гладкая опора		
3. Неподвижный шарнир (A)		
4. Подвижный шарнир (C)		
5. Гибкая связь (нить, трос, цепь, ремень)		
6. Жёсткий стержень BC		

Продолжение табл. 4

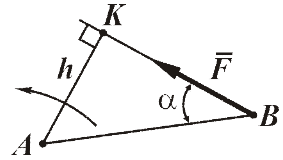
Тип связи	Схема связи	Направление реакции
7. Шероховатая поверхность		
8. Сферический шарнир (O)		
9. Жёсткая заделка в плоскости		
10. Скользящая заделка		
11. Свободная заделка		
12. Жёсткая заделка в пространстве		
13. Радиально-упорный подшипник (A) (подпятник)	 или 	

1.6. Плоская система сил

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, называется плоской.

● Алгебраический момент силы относительно точки A – скалярная величина $m_A\left(\overline{F}\right)$, равная произведению модуля силы на плечо, взятому со знаком плюс или минус. Знак плюс берут, когда сила $\overline{F}$ вращает плечо $h = AK$ вокруг точки A против хода часовой стрелки и знак минус – по ходу часовой стрелки.

$$m_A\left(\overline{F}\right) = \pm F \cdot h.$$

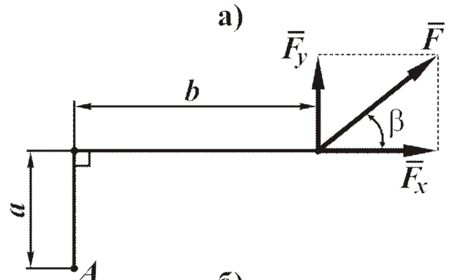


а)

Примеры.

а) $m_A\left(\overline{F}\right) = +F \cdot h = +F \cdot AB \cdot \sin\alpha$;

б) $m_A\left(\overline{F}\right) = m_A\left(\overline{F}_y\right) + m_A\left(\overline{F}_x\right) =$
$F \cdot b \cdot \sin\beta - F \cdot a \cdot \cos\beta.$



б)

Уравнения равновесия плоской системы сил можно получить в трех разных формах.

● Основная форма уравнений равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,$$

где $m_A(\overline{F}_k)$ – алгебраический момент k - ой силы относительно произвольной точки A.

● Вторая форма уравнений равновесия:

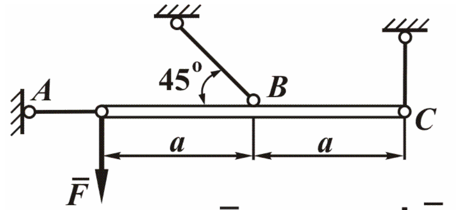
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0;$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0;$$
$$\sum m_C(\overline{F}_k) = 0,$$

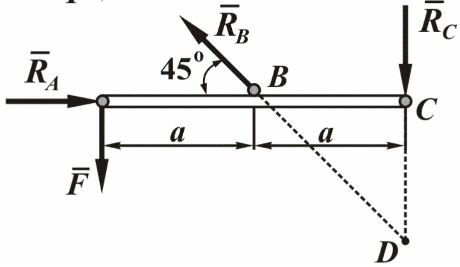
где $A, B, C -$ точки, не лежащие на одной прямой.

● Третья форма уравнений равновесия:

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0;$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0;$$
$$\sum F_{kx} = 0,$$

где ось x не перпендикулярна AB.





Пример. Балка нагружена силой $\overline{F}$. Определить реакции связей.

Решение. Для определения реакций связи составляем уравнения равновесия:

$\sum M_B(\overline{F}_k)=0; \quad +F\cdot a - R_C\cdot a = 0; \quad R_C = F.$

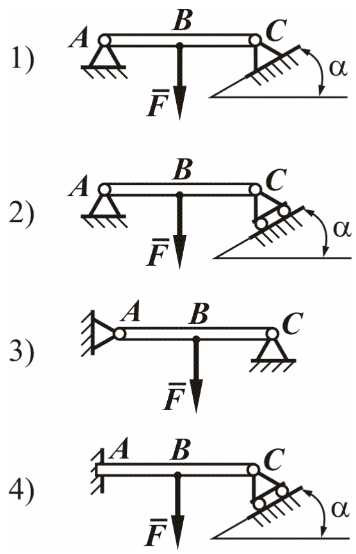
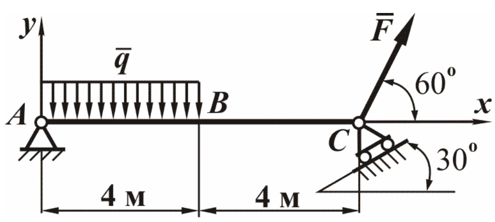
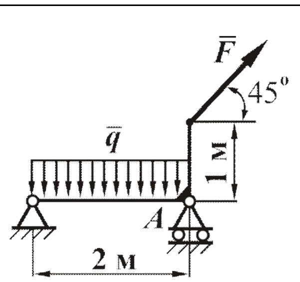
$\sum M_D(\overline{F}_k)=0; \quad +F\cdot 2a - R_A\cdot a = 0; \quad R_A = 2F.$

$\sum M_C(\overline{F}_k)=0; \quad -R_B\cdot a\cdot \sin 45^{\circ} + F\cdot 2a = 0; \quad R_B = 2F\big/\sin 45^{\circ} = 2\sqrt{2}F.$

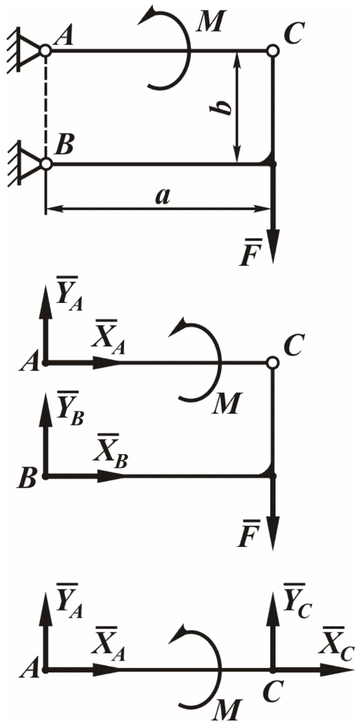
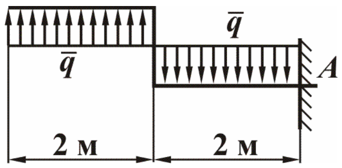
Теорема о моменте равнодействующей: *для системы сил, имеющей равнодействующую, справедлива теорема Вариньона: «момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра».*

Таблица 5

Тестовые задания

№	задание/ответ	схема
1	Указать статически определимую конструкцию. **Ответ**: № 2.	
2	$F = 4$ Н; $q = 2\sqrt{3}$ кН/м. Реакция $R_C = \ldots$ Н. **Ответ**: 0.	
3	Сила $F = 4\sqrt{2}$ кН, интенсивность распределённой нагрузки $q = 3$ кН/м, реакция $R_A = \ldots$ кН. **Ответ**: 1.	

окончание табл. 5

№	задание/ответ	схема
4	Составлено шесть уравнений равновесия системы. Указать уравнения, содержащие ошибки. а) $X_A + X_B + X_C = 0$; б) $Y_A + Y_C = 0$; в) $M - Y_A \cdot a = 0$; г) $X_B + X_C = 0$; д) $Y_B - F - Y_C = 0$; е) $-Y_B \cdot a = 0$. **Ответ**: а), г), е).	
5	Интенсивность распределённой нагрузки $q = 100$ Н/м, момент в заделке $M_A = \ldots$ Н · м. **Ответ**: 400.	

Индивидуальное задание №1

Определение реакций связей, наложенных на раму

Найти реакции связей, наложенных на раму. Схемы конструкций представлены в табл. 7. Числовые данные для решения задачи указаны в табл. 6.

Пример выполнения задания.

Дано: схема конструкции (рис. 1); $G = 3$ кН; $P_1 = 2$ кН; $P_2 = 0$; $P_3 = 5$ кН; $q = 8$ кН/м; $M = 4$ кН · м; $\alpha_1 = 30^o$; $\alpha_2 = 60^o$; $a = 1$ м.

Определить реакции связей, наложенных на раму.

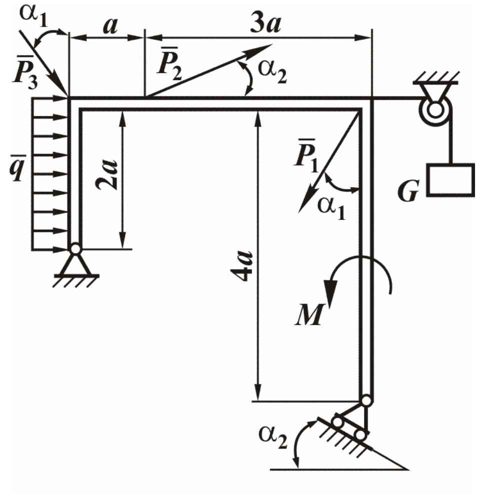


Рис. 1

Решение.

Заменим связи, наложенные на раму, их реакциями (рис. 2). Направление реакции шарнира A неизвестно, определяем её составляющие по осям координат $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$. Реакция $\overline{R}_B$ подвижной опоры направлена перпендикулярно плоскости опоры и разложена на составляющие $R_B \cdot \cos\alpha_2$ и $R_B \cdot \sin\alpha_2$. Сила натяжения нити $\overline{S}_D$ направлена по нити от рамы и равна по величине весу груза, т.е. $S_D = G = 3\,\text{кН}$.

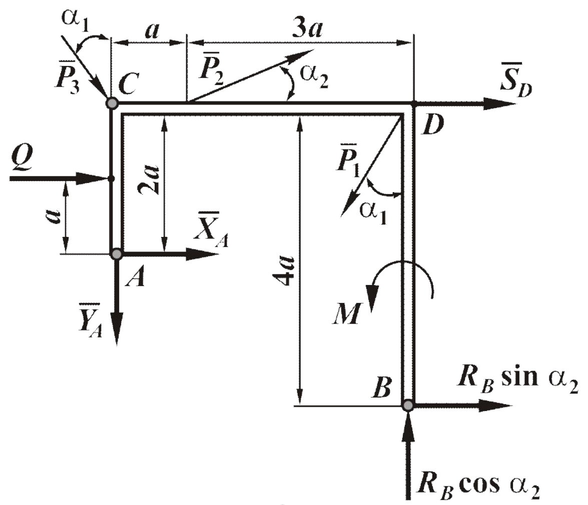


Рис. 2

Равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q заменим её равнодействующей $Q = 2a \cdot q = 2 \cdot 1 \cdot 8 = 16\,\text{кН}$, приложенной в середине участка AC.

Для плоской системы сил, приложенных к раме, составим три уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0;\ \sum X_i = 0;\ \sum Y_i = 0.$$

$$\sum M_A = -Q \cdot a - P_3 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a - P_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot 2a +$$
$$+P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot a - S_D \cdot 2a + P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a - P_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot 4a + \qquad (1)$$
$$M + R_B \cdot \sin\alpha_2 \cdot 2a + R_B \cdot \cos\alpha_2 \cdot 4a = 0;$$

$$\sum X_i = X_A + Q + P_3 \cdot \sin\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2$$
$$+S_D - P_1 \cdot \sin\alpha_1 + R_B \cdot \sin\alpha_2 = 0; \qquad (2)$$

$$\sum Y_i = -Y_A - P_3 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \sin\alpha_2 - P_1 \cdot \cos\alpha_1 + R_B \cdot \cos\alpha_2 = 0. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) определяем реакцию опоры B, принимая $P_2 = 0$:

$$R_B = \frac{+Q \cdot a + P_3 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a + S_D \cdot 2a - P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a + P_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot 4a - M}{\sin\alpha_2 \cdot 2a + \cos\alpha_2 \cdot 4a};$$

$$R_B = \frac{+16 \cdot 1 + 5 \cdot 1/2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1/2 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 4 - 4}{\sqrt{3}/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 4} = +7{,}483\,\text{кН}.$$

Из уравнения (2) определяем X_A:

$$X_A = -Q - P_3 \cdot \sin\alpha_1 - S_D + P_1 \cdot \sin\alpha_1 - R_B \cdot \sin\alpha_2;$$

$$X_A = -16 - 5 \cdot 1/2 - 3 + 2 \cdot 1/2 - 7{,}4833 \cdot \sqrt{3}/2 = -26{,}98\,\text{кН}.$$

Из уравнения (3) определяем Y_A:

$$Y_A = -P_3 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \sin\alpha_2 - P_1 \cdot \cos\alpha_1 + R_B \cdot \cos\alpha_2;$$

$$Y_A = -5 \cdot \sqrt{3}/2 - 2 \cdot \sqrt{3}/2 + 7{,}4833 \cdot \sqrt{3}/2 = +0{,}4185\,\text{кН}.$$

Знаки плюс, полученные при вычислении, означают, что выбранные направления векторов $\overline{R}_B$ и $\overline{Y}_A$ совпадают с их действительными направлениями; знак минус при вычислении величины вектора $\overline{X}_A$ указывает на то, что вектор направлен в противоположную сторону от показанного на рисунке.

Для проверки правильности выполненных расчетов составляем уравнение равновесия относительно произвольно выбранной точки (точки C):

$$\sum M_C = +Q \cdot a + X_A \cdot 2a + P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot a - P_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot 4a +$$
$$+M + R_B \cdot \sin\alpha_2 \cdot 4a + R_B \cdot \cos\alpha_2 \cdot 4a = 0;$$
$$\sum M_C = +16 \cdot 1 + (-26{,}9807 \cdot 2) - 2 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 4 + 4 -$$
$$+7{,}4833 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 4 + 7{,}4833 \cdot 1/2 \cdot 4 = 0.$$

Таблица 6

Данные для индивидуального задания №1

вариант	M	P_1	P_2	P_3	G	q	α_1	α_2	a
	кН·м	кН	кН	кН	кН	кН/м	градус	градус	м
1	4	0	5	9	10	0,5	45	60	0,5
2	2	6	0	10	12	1,2	30	45	1,0
3	3	4	12	0	14	2,0	60	30	1,2
4	6	0	8	15	6	2,2	45	60	0,8
5	10	16	0	20	8	3,0	30	45	1,0
6	12	8	20	0	13	1,6	60	30	0,5
7	16	0	6	20	5	1,8	45	60	0,6
8	8	12	0	6	9	1,5	30	45	0,4
9	4	20	18	0	30	2,4	60	30	1,0
10	6	0	12	25	22	0,8	30	60	1,2

При защите выполненной работы студент должен быть готов ответить на контрольные вопросы.

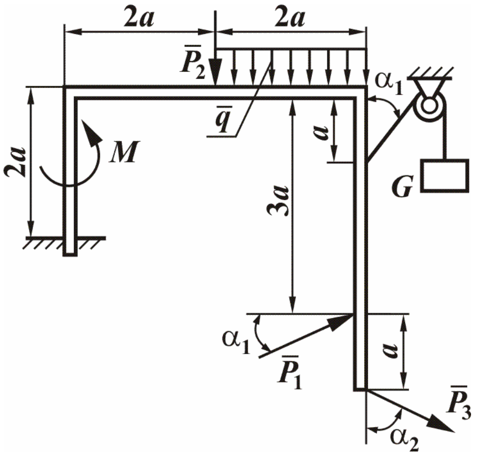
Контрольные вопросы

1) Порядок решения задач статики. 2) Виды связей, реакции связей. 3) Аксиома связей (принцип освобождаемости от связей). 4) Алгебраический момент силы относительно центра на плоскости. Правило знаков для момента силы. 5) Уравнения равновесия плоской системы сил. 6) Задачи статически определённые и статически неопределённые. 7) Особенности расчёта составных конструкций. 8) В каком соотношении находятся векторы и модули сил взаимодействия двух тел?

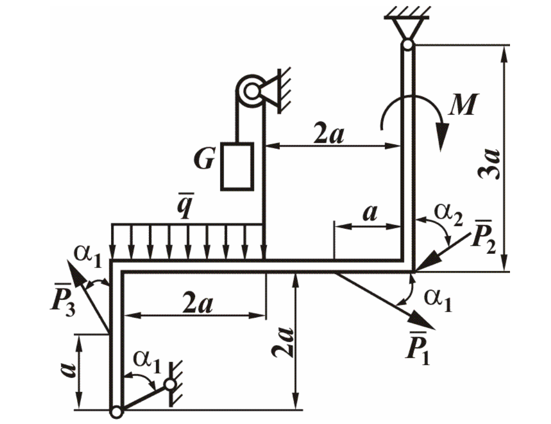
Таблица 7

Схемы конструкций к заданиям №1

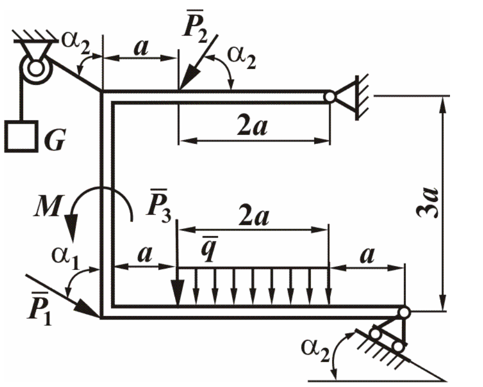
задание №1



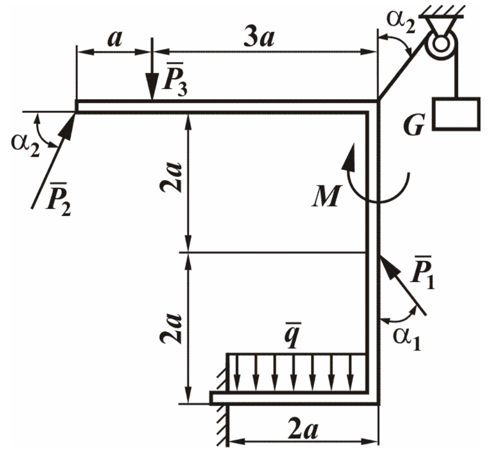
задание №2



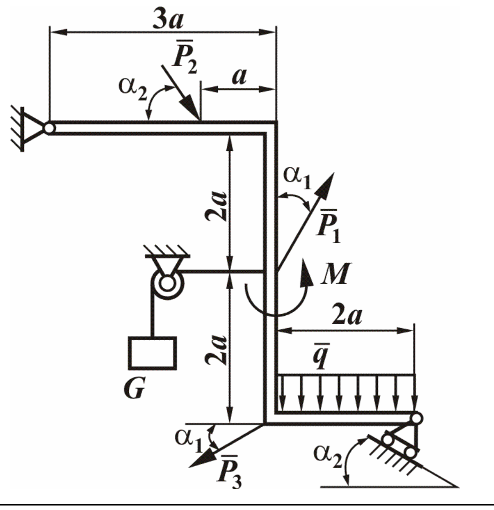
задание №3



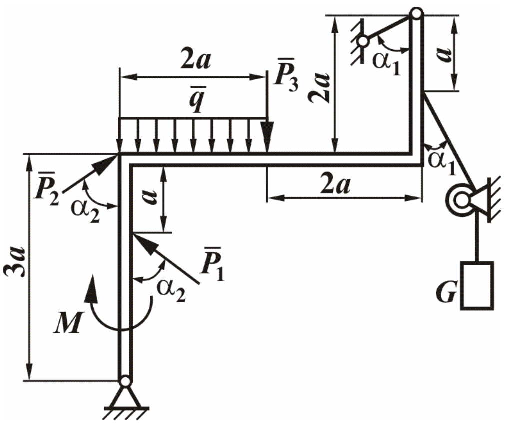
задание №4



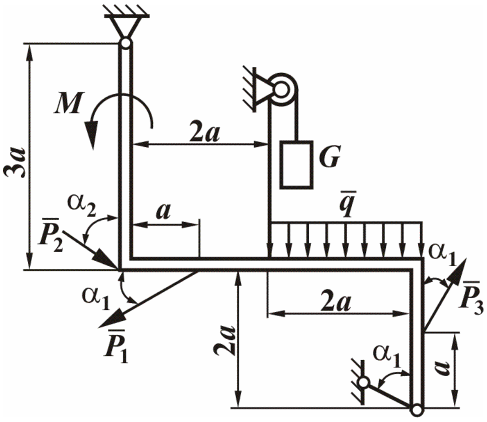
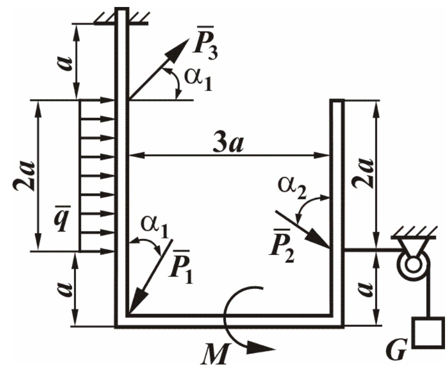
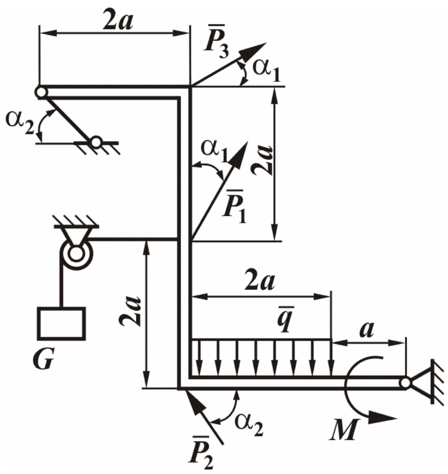
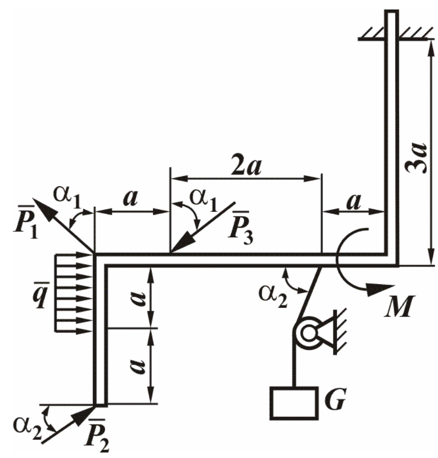
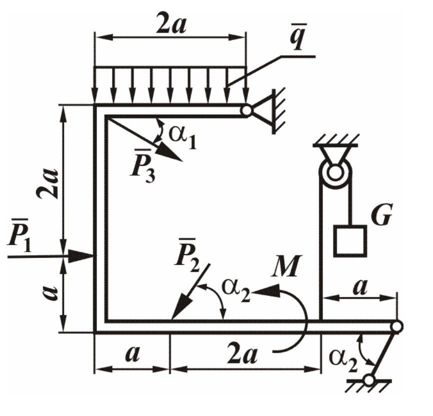
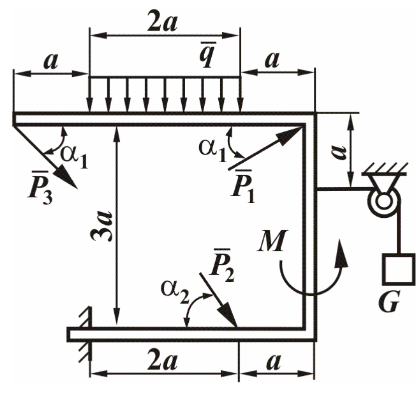
задание №5



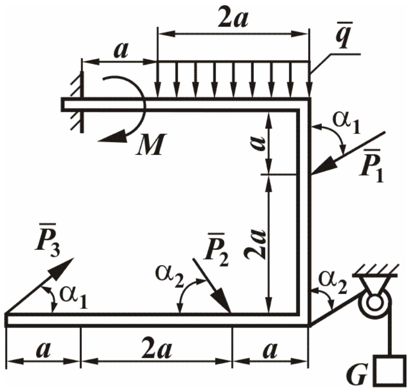
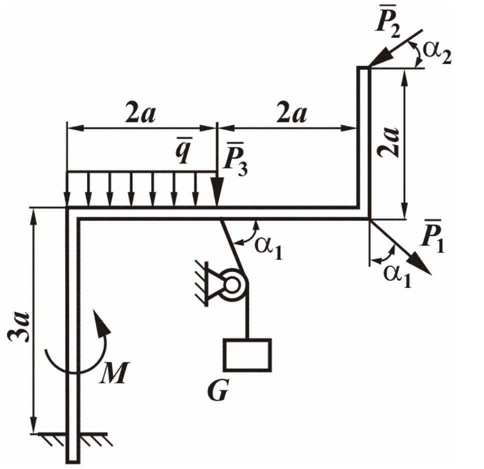
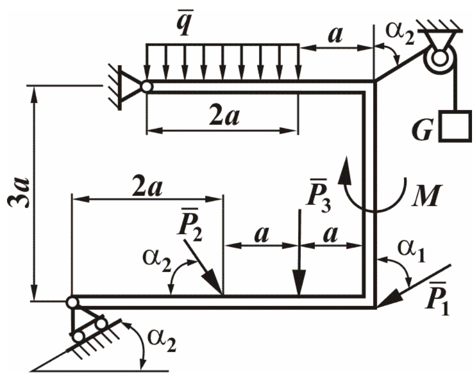
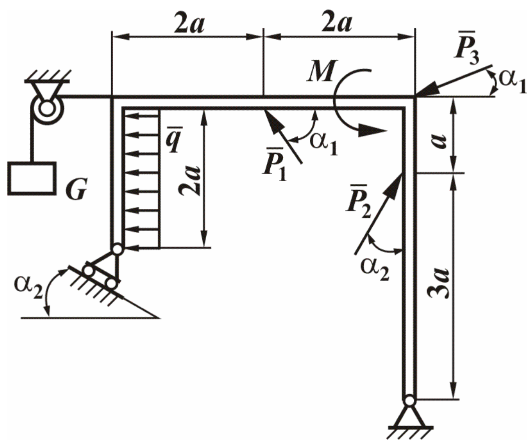
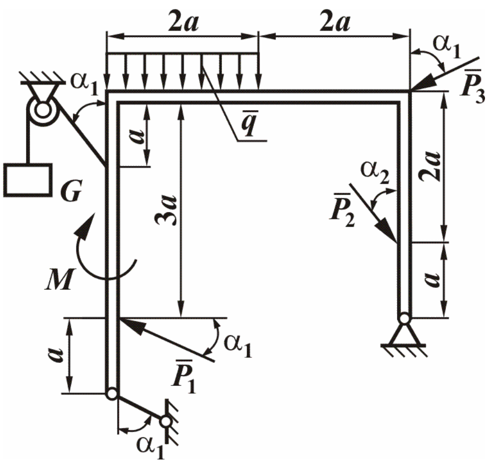
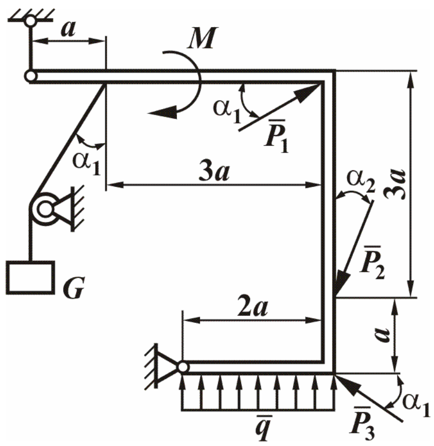
задание №6



продолжение табл. 7

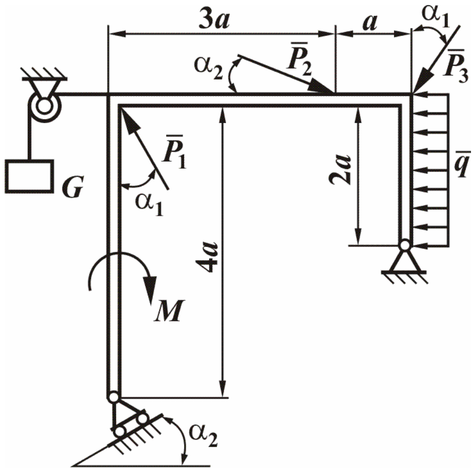
задание №7	задание №8
	
задание №9	задание №10
	
задание №11	задание №12
	

продолжение табл. 7

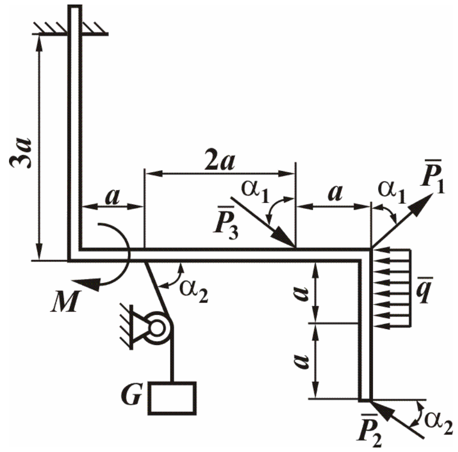
задание №13	задание №14
	
задание №15	задание №16
	
задание №17	задание №18
	

продолжение табл. 7

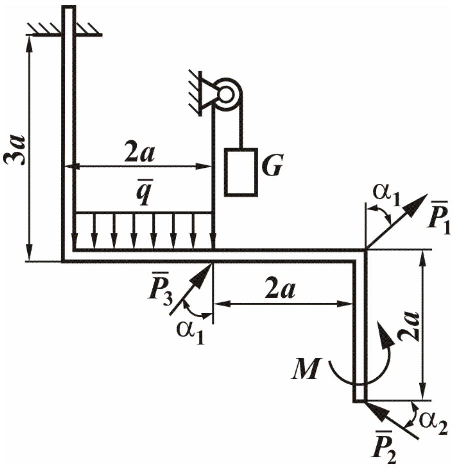
задание №19



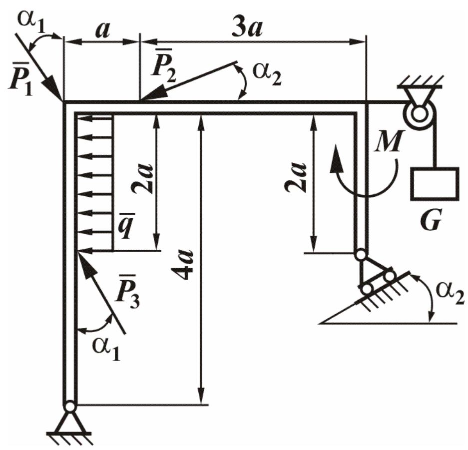
задание №20



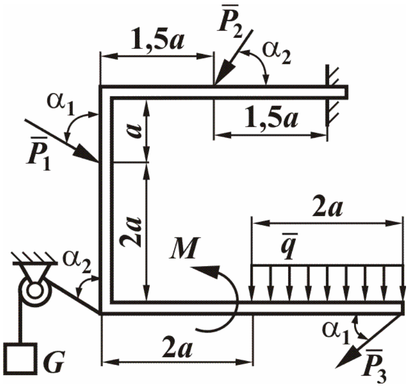
задание №21



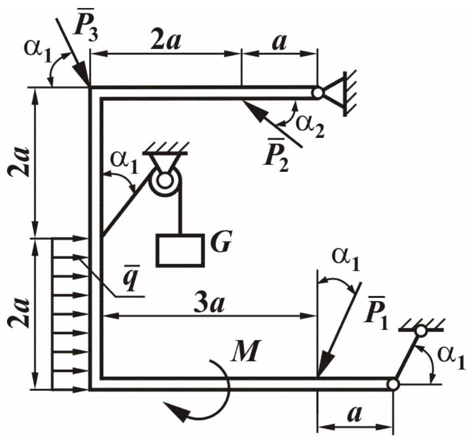
задание №22



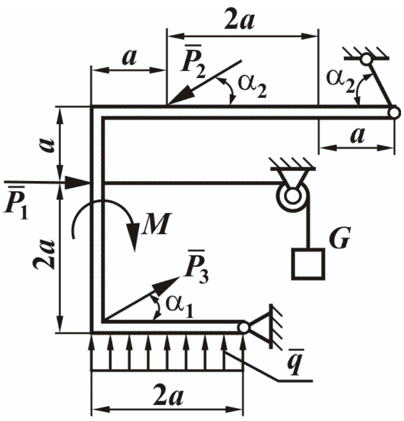
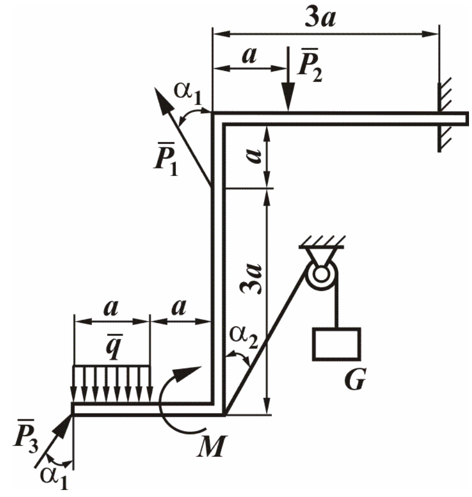
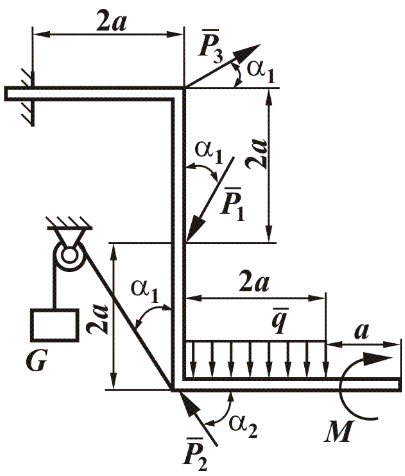
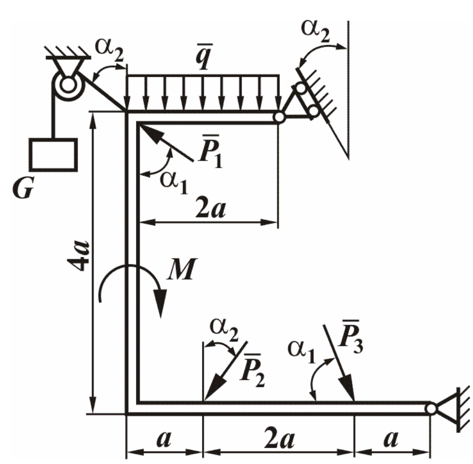
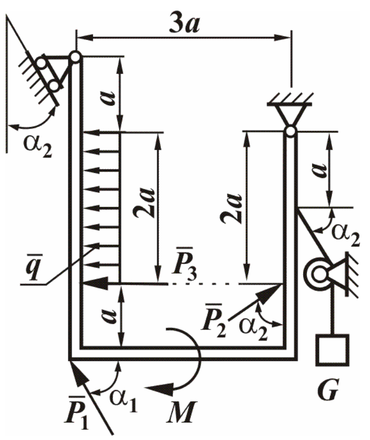
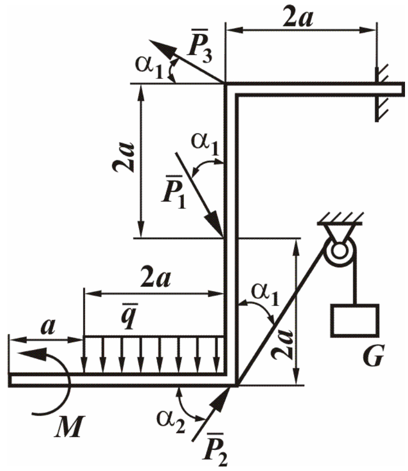
задание №23



задание №24



окончание табл. 7

задание №25	задание №26
	
задание №27	задание №28
	
задание №29	задание №30
	

Индивидуальное задание №2

Определение реакций связей, наложенных на составную конструкцию

Найти реакции связей, наложенных на составную конструкцию. Схемы конструкций представлены в табл. 9. Числовые данные для решения задачи указаны в табл. 8.

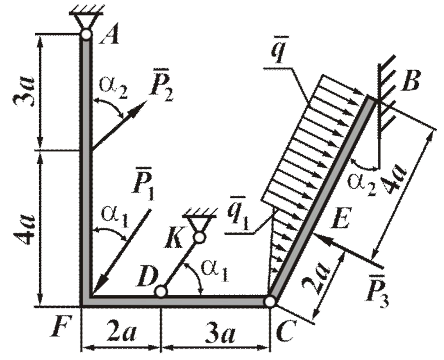


Рис. 3

Пример выполнения задания.

Дано: составная конструкция (рис. 3); $P_1 = 4\,\text{кН}$; $P_2 = 5\,\text{кН}$; $P_3 = 0$; $q = 4\,\text{кН/м}$; $q_1 = 2\,\text{кН/м}$; $M = 1\,\text{кН}\cdot\text{м}$; $\alpha_1 = 60^\circ$; $\alpha_2 = 30^\circ$; $a = 2\,\text{м}$.

Определить реакции связей.

Решение.

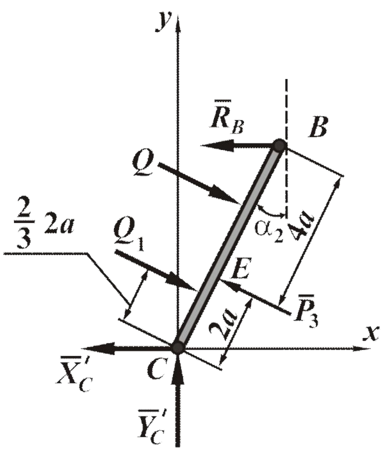


Рис. 4

Сначала рассмотрим равновесие балки BC. Связи в точках B и C заменим их реакциями (рис. 4). Равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q заменим её равнодействующей $Q = 4a \cdot q = 4 \cdot 2 \cdot 4 = 32\,\text{кН}$, приложенной в середине участка BE. Неравномерно распределённую нагрузку интенсивностью q_1 заменим её равнодействующей $Q_1 = \dfrac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot 2a = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4\,\text{кН}$, приложенной в участке EC на расстоянии $\dfrac{2}{3} \cdot 2a$ от точки C.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;$$
$$\sum M_C(\overline{F}_k) = 0.$$

$$\sum X_i = -X'_C + Q_1 \cdot \cos\alpha_2 + Q \cdot \cos\alpha_2 - P_3 \cdot \cos\alpha_2 - R_B = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = Y'_C - Q_1 \cdot \sin\alpha_2 - Q \cdot \sin\alpha_2 + P_3 \cdot \sin\alpha_2 = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_C(\overline{F}_k) = P_3 \cdot 2a - Q_1 \cdot \frac{4}{3}a - Q \cdot 4a + R_B \cdot \cos\alpha_2 \cdot 6a = 0. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) определяем реакцию связи R_B:

$$R_B = \frac{-Q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a - Q \cdot 4a + P_3 \cdot 2a}{\cos\alpha_2 \cdot 6a} = \frac{4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 32 \cdot 8}{12 \cdot \sqrt{3}/2} = 25{,}66\,\text{кН}.$$

Из уравнений (1) и (2) определяем реакции в шарнире C:

$$X'_C = Q_1 \cdot \cos\alpha_2 + Q \cdot \cos\alpha_2 - R_B = 4 \cdot \sqrt{3}/2 + 32 \cdot \sqrt{3}/2 - 25{,}66 = 5{,}5169\,\text{кН}$$

$$Y'_C = Q_1 \cdot \sin\alpha_2 + Q \cdot \sin\alpha_2 = 4 \cdot 1/2 + 32 \cdot 1/2 = 18\,\text{кН}.$$

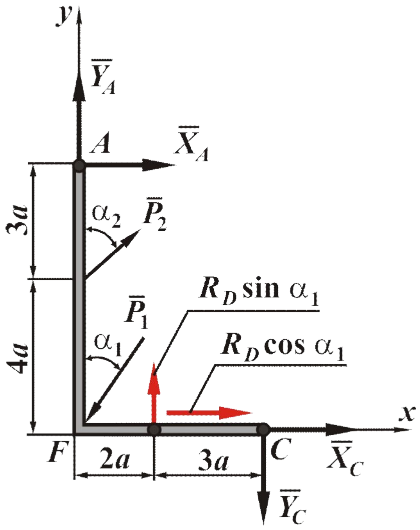


Рис. 5

Вторую расчетную схему составим на основе рамы AFC (рис. 5). Связь в точке A заменяем составляющими реакции по осям координат $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$. Реакцию $\bar{R}_D$ стержня DK, направленную в точку K, разлагаем на составляющие $R_D \cdot \cos\alpha_1$ и $R_D \cdot \sin\alpha_1$. Реакции $\bar{X}_C$ и $\bar{Y}_C$ в точке C направляем противоположно соответствующим реакциям $\bar{X}'_C$ и $\bar{Y}'_C$ на рис. 4, причем $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$.

Составляем уравнения равновесия рамы:

$$\sum X_i = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0.$$

$$\sum X_i = X_A + P_2 \cdot \sin\alpha_2 - P_1 \cdot \sin\alpha_1 + R_D \cdot \cos\alpha_1 + X_C = 0; \quad (4)$$

$$\sum Y_i = Y_A + P_2 \cdot \cos\alpha_2 - P_1 \cdot \cos\alpha_1 + R_D \cdot \sin\alpha_1 - Y_C = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 3a - P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 7a + R_D \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2a + {} + R_D \cdot \cos\alpha_1 \cdot 7a + X_C \cdot 7a - Y_C \cdot 5a = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) определяем реакцию стержня R_D:

$$R_D = \frac{-P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 3a + P_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 7a - X_C \cdot 7a + Y_C \cdot 5a}{\sin\alpha_1 \cdot 2a + \cos\alpha_1 \cdot 7a};$$

$$R_D = \frac{-5 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 6 + 4 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 14 - 5{,}5169 \cdot 14 + 18 \cdot 10}{\sin\alpha_1 \cdot 4 + \cos\alpha_1 \cdot 14} = 13{,}022\,\text{кН}.$$

Из уравнения (4) и (5) определяем реакции шарнира A.

$$X_A = -P_2 \cdot \sin\alpha_2 + P_1 \cdot \sin\alpha_1 - R_D \cdot \cos\alpha_1 - X_C;$$

$$X_A = -5 \cdot \sin\alpha_2 + 4 \cdot \sin\alpha_1 - 13{,}0217 \cdot \cos\alpha_1 - 5{,}5169 = -11{,}063\,\text{кН}.$$

$$Y_A = -P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_1 \cdot \cos\alpha_1 - R_D \cdot \sin\alpha_1 + Y_C;$$

$$Y_A = -5 \cdot \cos\alpha_2 + 4 \cdot \cos\alpha_1 - 13{,}0217 \cdot \sin\alpha_1 + 18 = 4{,}393\,\text{кН}.$$

Знак минус при вычислении величины вектора X_A указывает на то, что вектор направлен в противоположную сторону от показанного на рисунке.

Для проверки правильности выполненных расчетов составляем уравнение равновесия относительно произвольно выбранной точки (точки C):

$$\sum M_C = -R_D \cdot \sin\alpha_1 \cdot 3a + P_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot 5a -$$
$$- P_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot 5a - P_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 4a - X_A \cdot 7a -$$
$$- Y_A \cdot 5a - Q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + P_3 \cdot 2a - Q \cdot 2a + R_B \cdot \cos\alpha_2 \cdot 6a = 0.$$

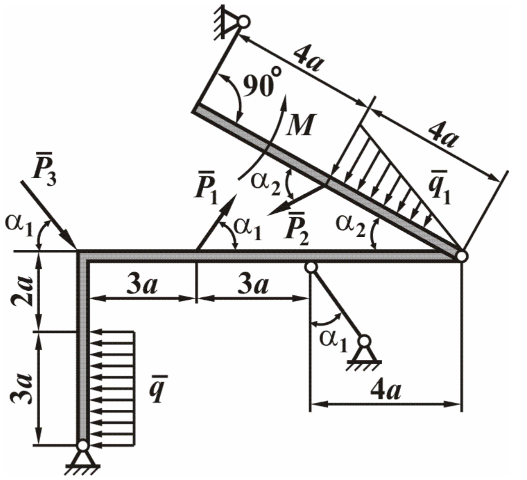
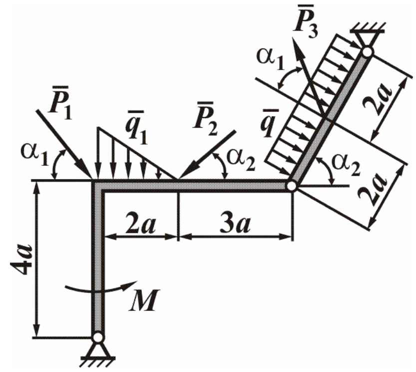
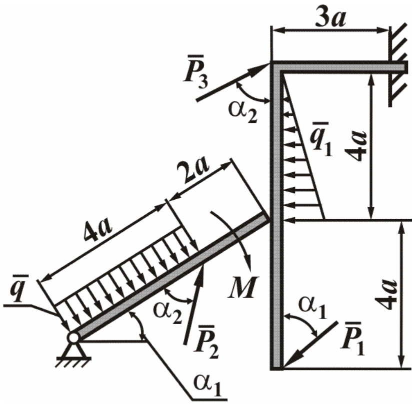
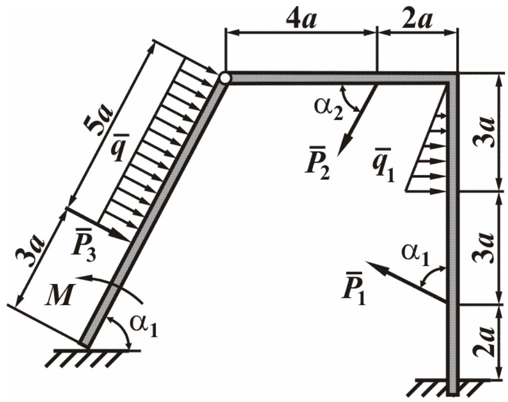
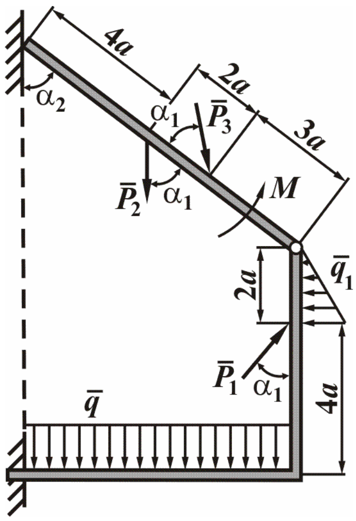
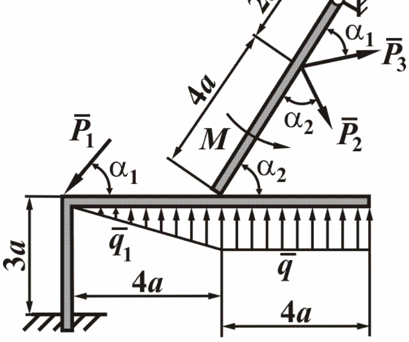
Таблица 8

Данные для индивидуального задания №2

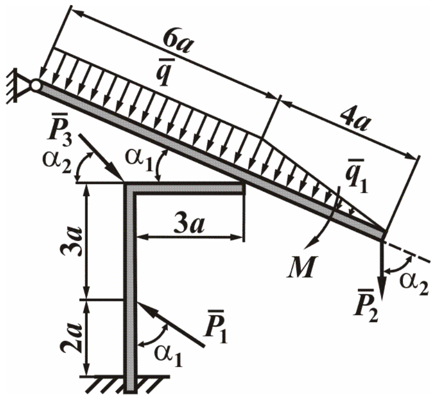
вариант	M	P_1	P_2	P_3	$q = q_1$	α_1	α_2	a
	кН·м	кН	кН	кН	кН/м	градус	градус	м
1	4	0	9	5	1,0	45	60	0,5
2	2	10	0	6	2,0	30	45	1,0
3	3	12	4	0	3,0	60	30	1,2
4	5	0	15	8	4,0	45	60	0,8
5	12	14	0	10	3,0	30	45	1,0
6	10	5	10	0	2,0	60	30	0,5
7	14	0	20	6	5,0	45	60	0,6
8	8	9	0	3	1,0	30	45	0,4
9	4	10	9	0	4,0	60	30	1,0
10	6	0	8	2	6,0	30	60	1,2

Таблица 9

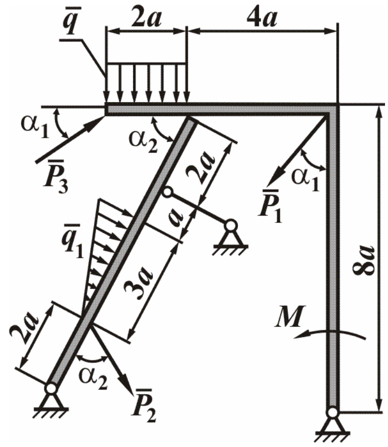
Схемы расчетных конструкций к ИДЗ №2

задание №1	задание №2
	
задание №3	задание №4
	
задание №5	задание №6
	

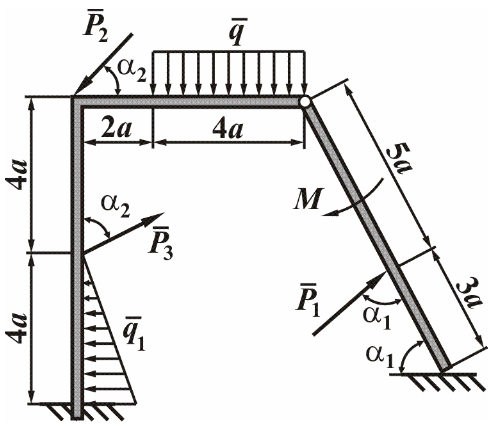
задание №7



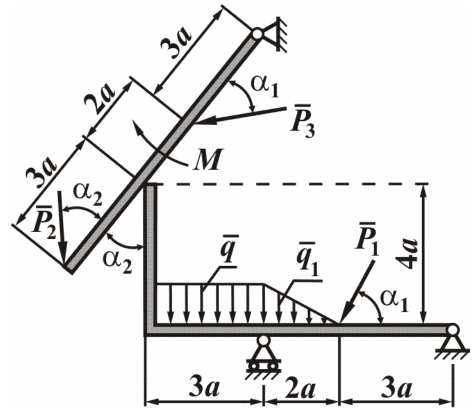
задание №8



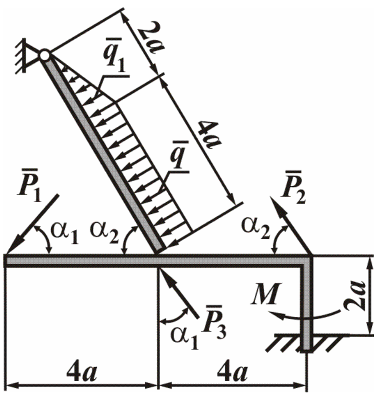
задание №9



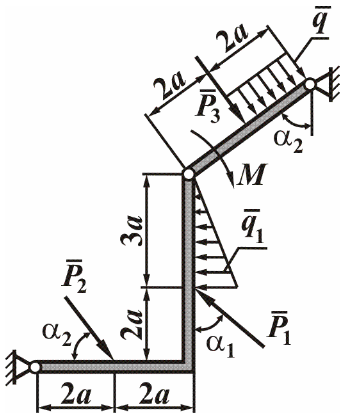
задание №10



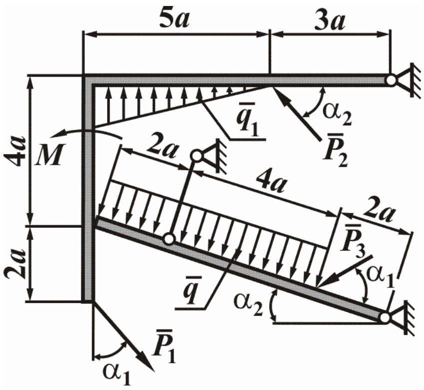
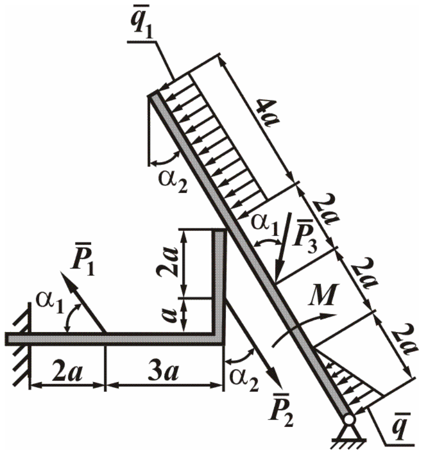
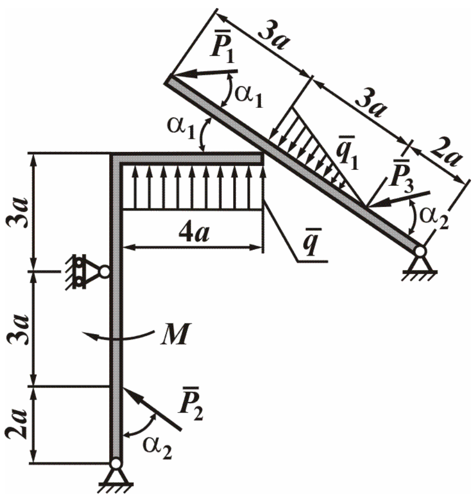
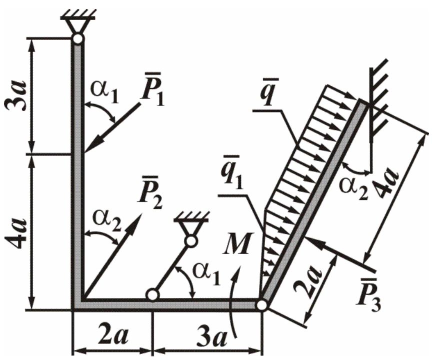
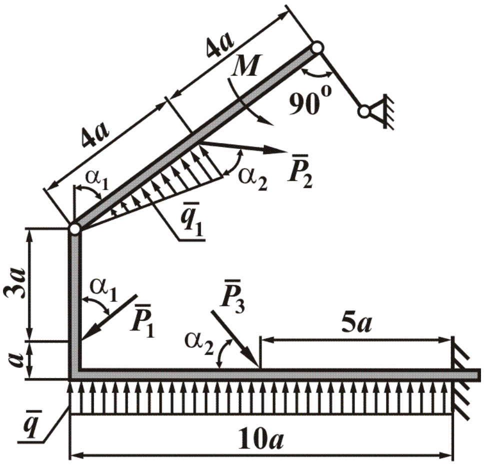
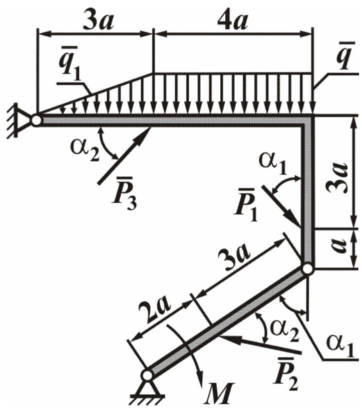
задание №11



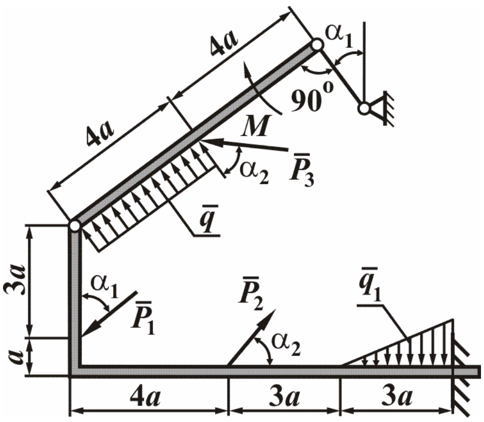
задание №12

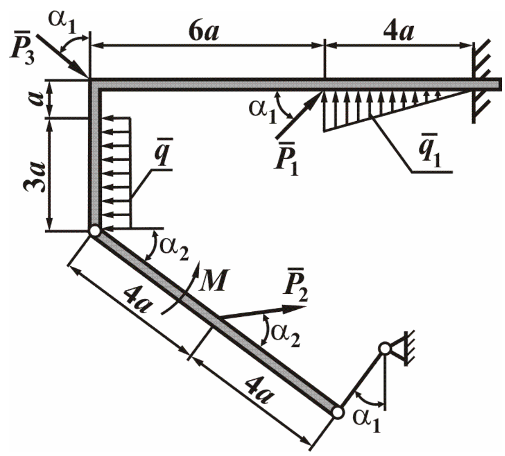


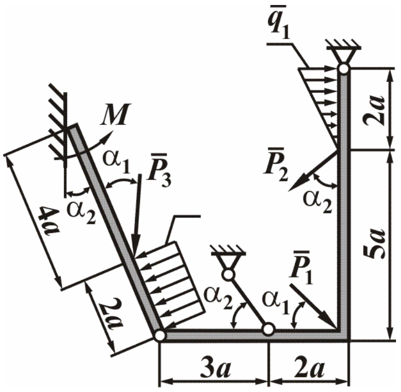
продолжение табл. 9

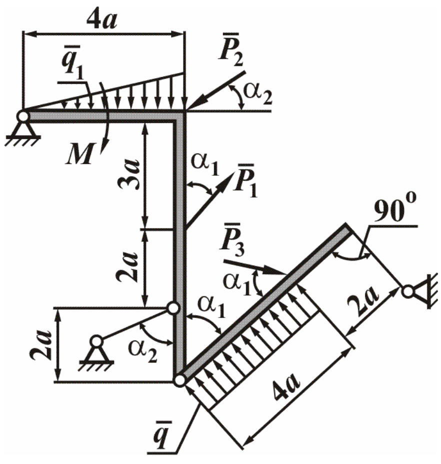
задание №13	задание №14
	
задание №15	задание №16
	
задание №17	задание №18
	

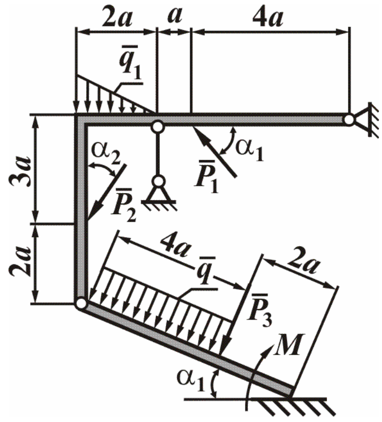
продолжение табл. 9

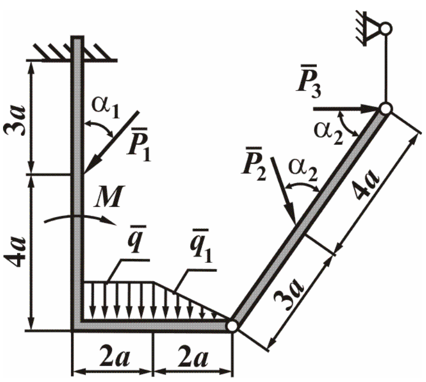
<table>
<tr><td>задание №19</td><td>задание №20</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание №21</td><td>задание №22</td></tr>
<tr><td>


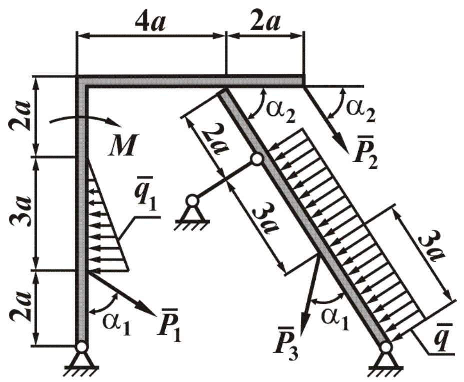
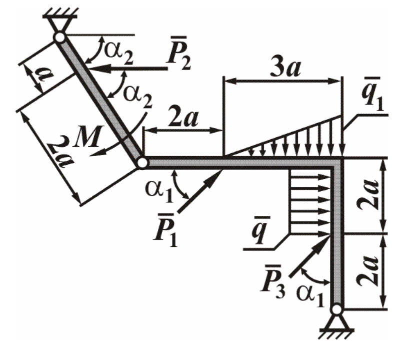
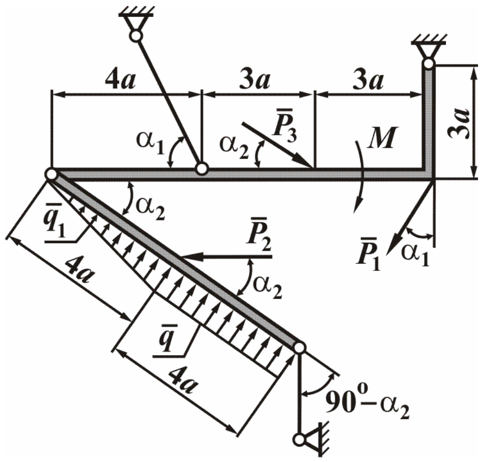
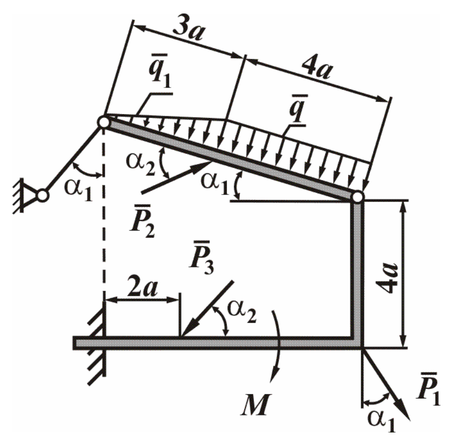
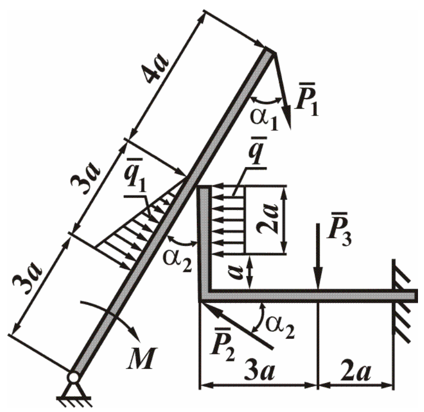
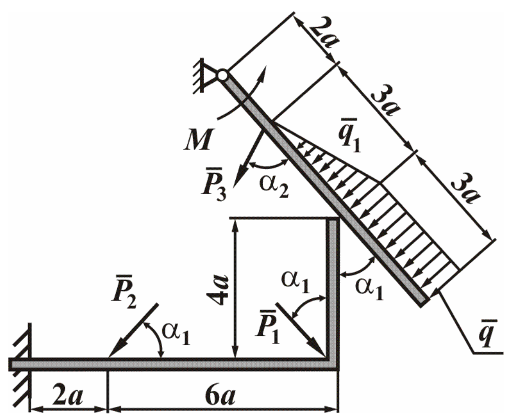
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>задание №23</td><td>задание №24</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

окончание табл. 9

<table>
<tr><td>задание №25</td><td>задание №26</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №27</td><td>задание №28</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>задание №29</td><td>задание №30</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

1.7. Пространственная система сил

● Момент силы относительно оси z равен проекции на ось z вектора момента силы относительно любой точки O, принадлежащей данной оси:

$$m_z\left(\bar{F}\right) = \text{пр}_z\,\bar{m}_O(\bar{F}).$$

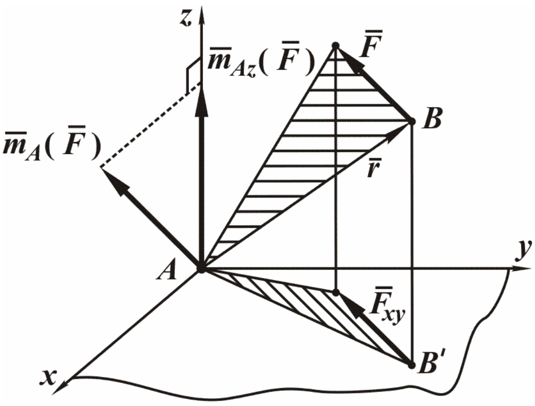
● Моменты силы относительно координатных осей:

$$m_x\left(\bar{F}\right) = y \cdot F_z - z \cdot F_y;$$

$$m_y\left(\bar{F}\right) = z \cdot F_x - x \cdot F_z;$$

$$m_z\left(\bar{F}\right) = x \cdot F_y - y \cdot F_x,$$

где x, y, z – координаты точки приложения силы; F_x, F_y, F_z – проекции силы на оси координат.



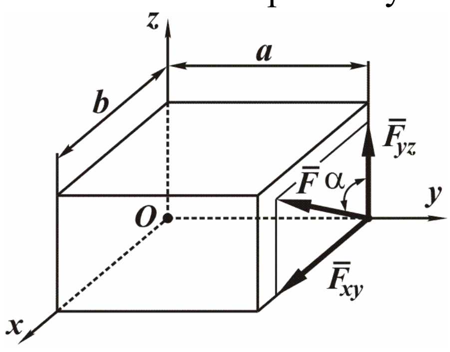
● Момент силы $\bar{F}$ относительно оси Az численно равен алгебраическому моменту (смотрим навстречу оси) проекции этой силы $\bar{F}_{xy}$ на плоскость, перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения (точки A) оси и плоскости:

$$m_{Az}\left(\bar{F}\right) = m_A\left(\bar{F}_{xy}\right).$$

При вычислении моментов полезно иметь в виду следующие частные случаи:

а) если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю;

б) если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси равен нулю.



Пример. Определим моменты силы $\bar{F}$ относительно координатных осей:

$$m_x(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{yz}) = F \cdot \cos\alpha \cdot a;$$

$$m_y(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{xz}) = 0;$$

$$m_z(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{xy}) = -F \cdot \sin\alpha \cdot a.$$

● Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил:

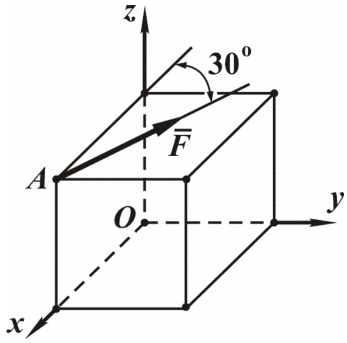
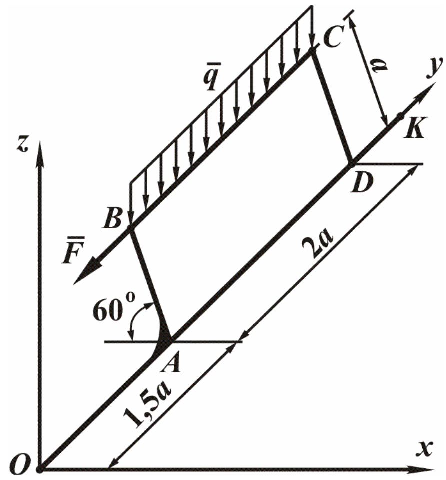
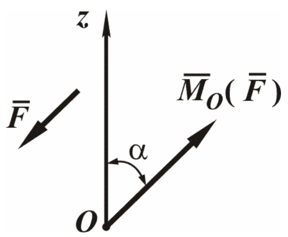
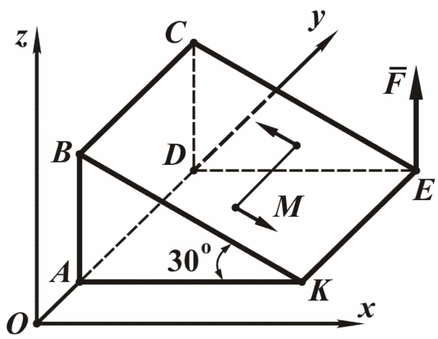
1. $\sum F_{kx} = 0$; 4. $\sum m_x\left(\bar{F}_k\right) = 0$;
2. $\sum F_{ky} = 0$; 5. $\sum m_y\left(\bar{F}_k\right) = 0$;
3. $\sum F_{kz} = 0$; 6. $\sum m_z\left(\bar{F}_k\right) = 0$.

Здесь F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции k - ой силы на оси координат;

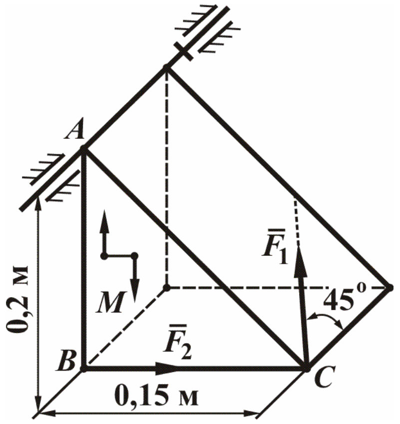
$m_x(\overline{F}_k)$, $m_y(\overline{F}_k)$, $m_z(\overline{F}_k)$ – моменты k - ой силы относительно осей координат.

Таблица 10

Тестовые задания

№	задание/ответ	схема
1	Ребро куба $0{,}4$ м, сила $F = 200$ Н. Момент $M_x(F) = \ldots$ Н·м. **Ответ**: -40 Н·м.	
2	$F = 30\sqrt{3}$ Н, $a = 2$ м, $q = 4$ Н/м. Сумма моментов $\overline{q}$ и $\overline{F}$ относительно оси $Ox \ldots$ Н·м. **Ответ**: 10 Н·м.	
3	$\alpha = 45^{\circ}$; модуль момента $M_O(\overline{F}) = 100\sqrt{2}$ Н·м. Момент $M_z(\overline{F}) = \ldots$ Н·м. **Ответ**: 100 Н·м.	
4	$M = 4$ Н·м, $F = 6$ Н, $OD = 4$ м. Сумма моментов относительно оси $Ox \ldots$ Н·м. **Ответ**: 26 Н·м.	

окончание табл. 10

№	задание/ответ	схема
5	На призму действуют силы $F_1 = 13\,\text{Н}$, $F_2 = 25\,\text{Н}$ и в плоскости грани ABC пара сил с моментом M. При равновесии $M = \ldots\,\text{Н}\cdot\text{м}$. **Ответ**: $5\,\text{Н}\cdot\text{м}$.	

Индивидуальное задание №3

Определение реакций опор пространственной конструкции

Найти реакции опор пространственной конструкции. Кроме того, в вариантах 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 20, 25, 26 определить силу $\overline{S}$, уравновешивающую вал. Схемы конструкций представлены в табл. 12. Необходимые для расчёта данные приведены в табл. 11. В точке A в вариантах 3, 4, 6, 11, 12, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 28 расположен шаровой шарнир, в остальных вариантах – подпятник. В точке B во всех вариантах – цилиндрический шарнир (радиальный подшипник). При решении задач учесть, что $r = \dfrac{R}{4}$.

Пример выполнения задания. Дано: вал (рис. 6) установлен в подпятнике (точка A) и в радиальном подшипнике (точка B). $P_1 = 2\,\text{Н}$; $P_2 = 3\,\text{Н}$; $P_3 = 6\,\text{Н}$; $\alpha_1 = 60^\circ$; $\alpha_2 = 30^\circ$; $\alpha_3 = 45^\circ$; $a = 2\,\text{м}$; $R = 1\,\text{м}$; $\overline{P}_1 \perp Az$; $\overline{P}_2 \perp Ay$; $\overline{P}_3 \perp Ax$; $CD \parallel Ay$; $\overline{P}_1 \parallel \overline{S}$.

Определить реакции связей, а также величину силы $\overline{S}$, уравновешивающей вал (для положения, указанного на рисунке).

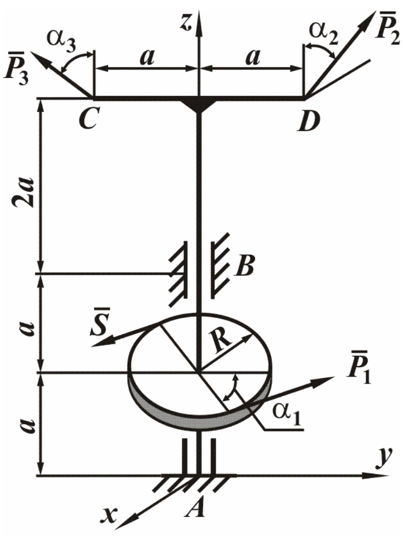


Рис. 6

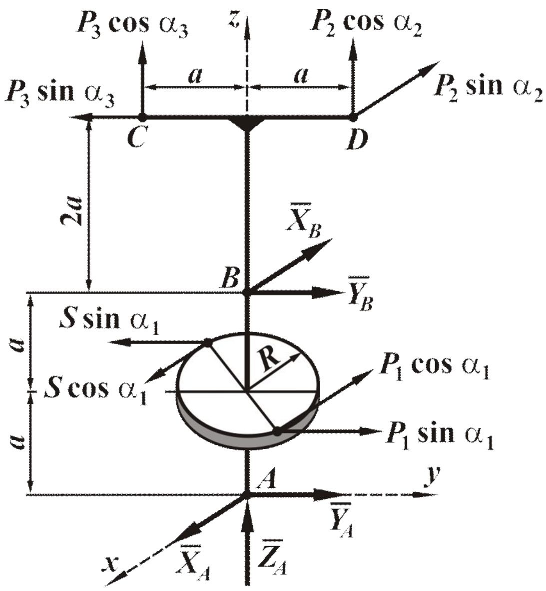


Рис. 7

Решение.

Заменим связи их реакциями (рис. 7). В подпятнике A три неизвестные реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и $\overline{Z}_A$. В радиальном подшипнике B – $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$.

Рассматриваемая конструкция статически определима. Система сил пространственная, для нее имеют место шесть уравнений равновесия (рис. 7):

$$\sum X_i = 0 : X_A - P_1 \cos\alpha_1 + S\cos\alpha_1 - X_B - P_2 \sin\alpha_2 = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 : Y_A + P_1 \sin\alpha_1 - S\sin\alpha_1 + Y_B - P_3 \sin\alpha_3 = 0; \qquad (2)$$

$$\sum Z_i = 0 : Z_A + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 = 0; \qquad (3)$$

$$\sum M_x(\overline{F}_k) = 0 : -P_1 \sin\alpha_1 \cdot a + S\sin\alpha_1 \cdot a - Y_B \cdot 2a + \\ + P_2 \cos\alpha_2 \cdot a - P_3 \cos\alpha_3 \cdot a + P_3 \cos\alpha_3 \cdot 4a = 0; \qquad (4)$$

$$\sum M_y(\overline{F}_k) = 0 : -P_1 \cos\alpha_1 \cdot a + S\cos\alpha_1 \cdot a - X_B \cdot 2a - \\ - P_2 \sin\alpha_2 \cdot 4a = 0; \qquad (5)$$

$$\sum M_z(\overline{F}_k) = 0 : P_1 \cdot R + S \cdot R + P_2 \sin\alpha_2 \cdot a = 0. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) определяем уравновешивающую силу S:

$$S = \frac{-P_1 \cdot R - P_2 \sin\alpha_2 \cdot a}{R} = \frac{-2 \cdot 1 - 3 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2}{1} = -5\ \text{Н}.$$

Из уравнения (5) определяем реакцию X_B:

$$X_B = \frac{-P_1 \cos\alpha_1 \cdot a + S\cos\alpha_1 \cdot a - P_2 \sin\alpha_2 \cdot 4a}{2a};$$

$$X_B = \frac{-2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 + (-5) \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 - 3 \cdot \sin 30^\circ \cdot 8}{4} = -4{,}75\ \text{Н}.$$

Из уравнения (4) определяем реакцию Y_B:

$$Y_B = \frac{-P_1 \sin\alpha_1 \cdot a + S\sin\alpha_1 \cdot a + P_2 \cos\alpha_2 \cdot a - P_3 \cos\alpha_3 \cdot a + P_3 \cos\alpha_3 \cdot 4a}{2a};$$

$$Y_B = \frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2+\left(-5\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2-6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2+6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 8}{4} = 4{,}6319\,\text{Н}.$$

Из уравнения (3) определяем реакцию Z_A:

$$Z_A = -P_2\cos\alpha_2 - P_3\cos\alpha_3 = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 5{,}9746\,\text{Н}.$$

Из уравнения (2) определяем реакцию Y_A:

$$Y_A = -P_1\sin\alpha_1 + S\sin\alpha_1 - Y_B + P_3\sin\alpha_3;$$

$$Y_A = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-5\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4{,}6319 + 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -6{,}4514\,\text{Н}.$$

Из уравнения (1) определяем реакцию X_A:

$$X_A = +P_1\cos\alpha_1 - S\cos\alpha_1 + X_B + P_2\sin\alpha_2;$$

$$X_A = 2\cdot 0{,}5 - (-5)\cdot 0{,}5 + (-4{,}75) + 3\cdot 0{,}5 = -0{,}25\,\text{Н}.$$

Знаки минус при вычислении величин реакций указывают на то, что их векторы направлены в противоположную сторону от показанных на рисунке.

Таблица 11

Данные для индивидуального задания №3

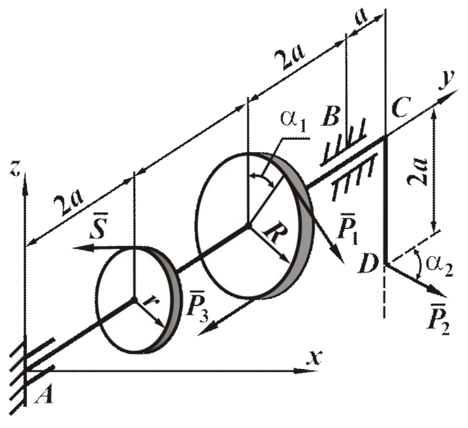
вариант	P_1	P_2	P_3	α_1	α_2	α_3	a	R
	кН	кН	кН	градус	градус	градус	м	м
1	0	10	12	30	45	60	0,5	1,0
2	8	0	6	45	30	45	1,0	2,0
3	12	6	0	60	60	30	1,2	1,5
4	0	8	15	60	45	60	0,8	1,4
5	10	0	14	45	30	45	1,0	1,2
6	5	10	0	30	60	30	0,5	1,8
7	0	12	6	60	45	60	0,6	0,8
8	9	0	3	45	30	45	0,4	0,6
9	10	9	0	30	60	30	1,0	1,6
10	0	8	4	60	30	60	1,2	1,0

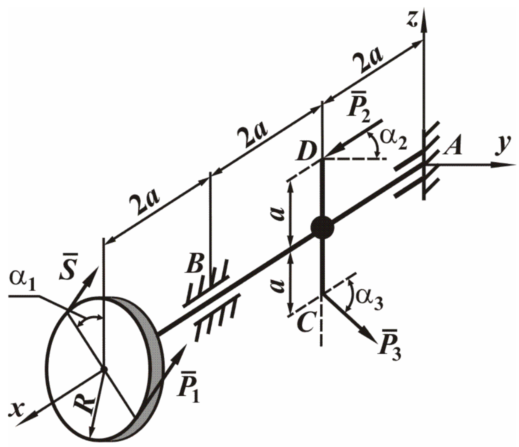
Контрольные вопросы

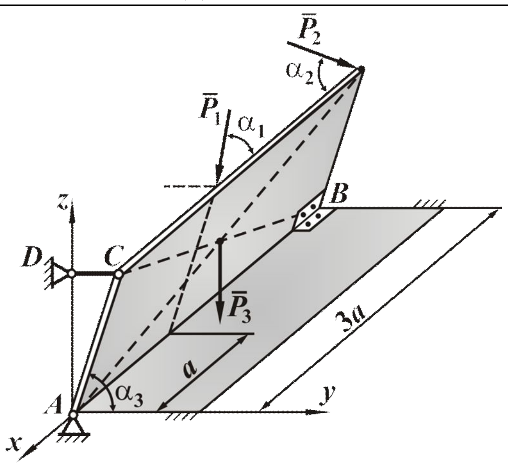
1) Уравнения равновесия пространственной системы сил. 2) Порядок определения момента силы относительно оси. 3) Условия, при которых момент силы относительно оси равен нулю.

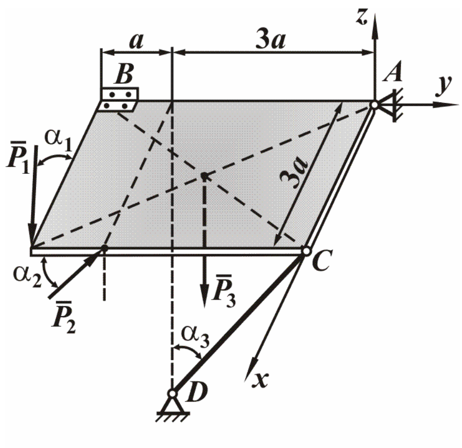
Таблица 12

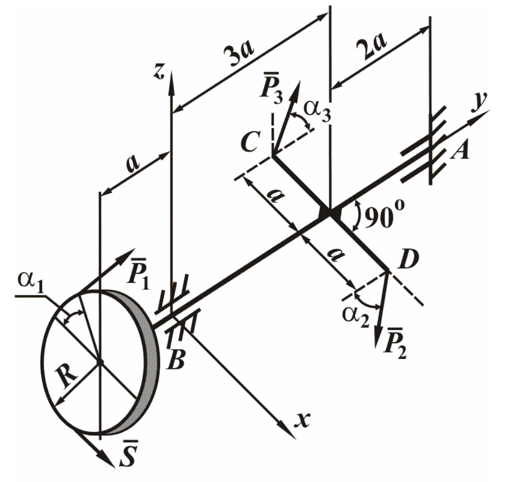
Схемы конструкций к заданиям №3

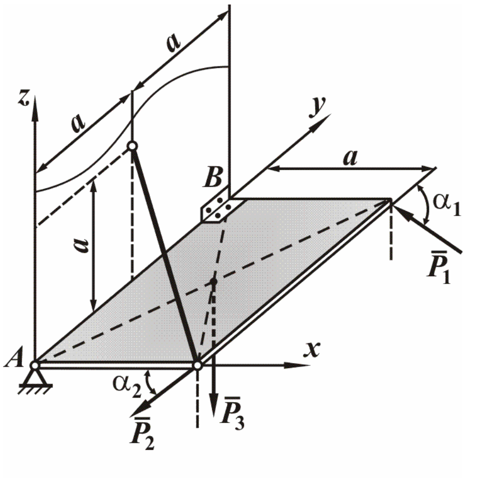
<table>
<tr><td>задание №1</td><td>задание №2</td></tr>
<tr><td>


$CD /\!/ Az$; $\bar{P}_1 \perp Ay$; $\bar{P}_2 \perp Az$; $\bar{P}_3 /\!/ Ay$; $\bar{S} /\!/ Ax$
</td><td>


$CD /\!/ Az$; $\bar{P}_1 \perp Ax$; $\bar{P}_2 \perp Ax$; $\bar{P}_3 \perp Az$; $\bar{S} /\!/ \bar{P}_1$
</td></tr>
<tr><td>задание №3</td><td>задание №4</td></tr>
<tr><td>


$CD /\!/ Ay$; $\bar{P}_1 \perp Az$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 /\!/ Az$; $AC = 2a$
</td><td>


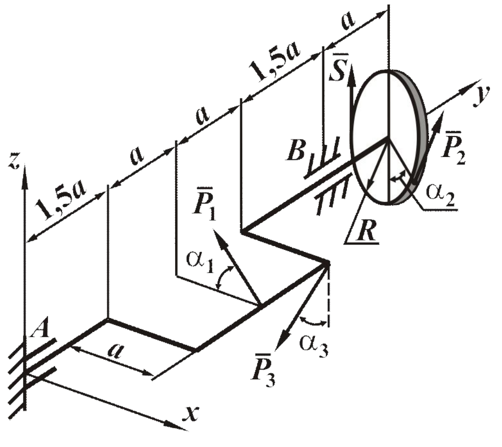
$\bar{P}_1 \perp Ay$; $\bar{P}_2 \perp Ax$; $\bar{P}_3 /\!/ Az$
</td></tr>
<tr><td>задание №5</td><td>задание №6</td></tr>
<tr><td>


$CD /\!/ \bar{S} /\!/ Bx$; $\bar{P}_1 \perp By$; $\bar{P}_2 \perp Bz$; $\bar{P}_3 \perp Bx$
</td><td>


$\bar{P}_1 \perp Ax$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 /\!/ Az$;
</td></tr>
</table>

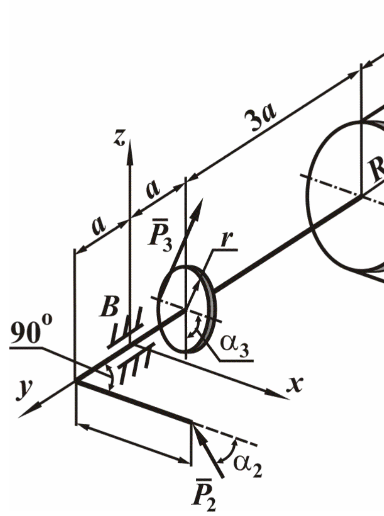
продолжение табл. 12

задание №7



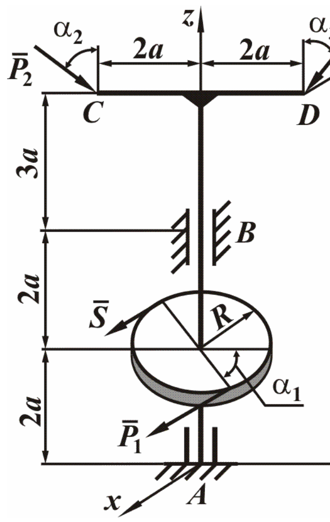
$\bar{P}_1 \perp Ay$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 \perp Ax$; $\bar{S} \parallel Az$

задание №8



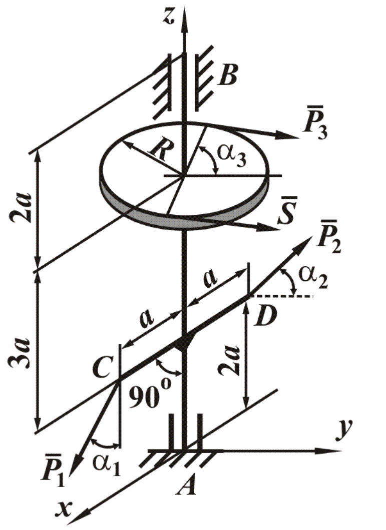
$\bar{P}_1 \parallel By$
$\bar{P}_2 \perp By$
$\bar{P}_3 \perp By$
$\bar{S} \parallel Bx$

задание №9



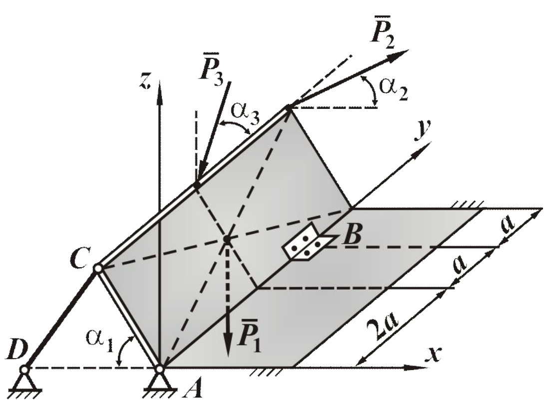
$\bar{P}_1 \perp Az$
$\bar{P}_2 \perp Ax$
$\bar{P}_3 \perp Ay$
$\bar{S} \parallel \bar{P}_1$
$CD \parallel Ay$

задание №10



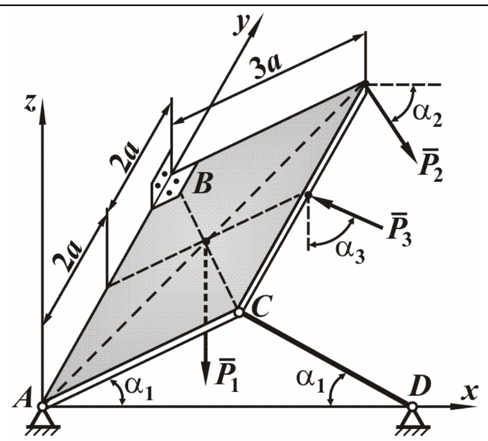
$CD \parallel Ax$
$\bar{P}_1 \perp Ay$
$\bar{P}_2 \perp Ax$
$\bar{P}_3 \perp Az$
$\bar{S} \parallel \bar{P}_3$

задание №11



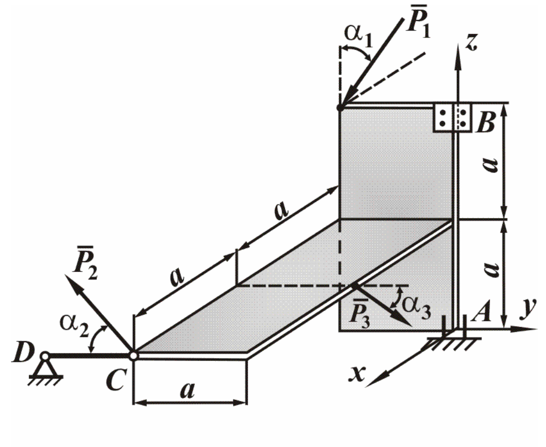
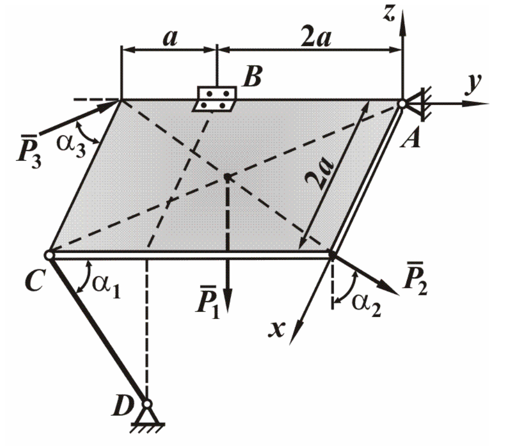
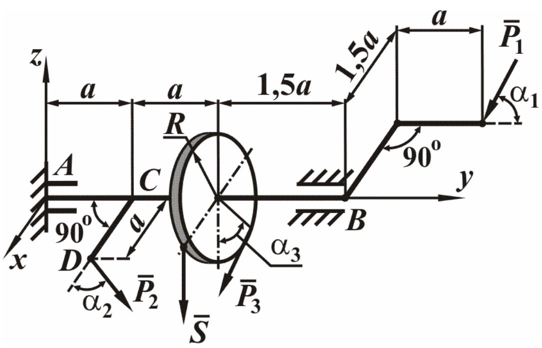
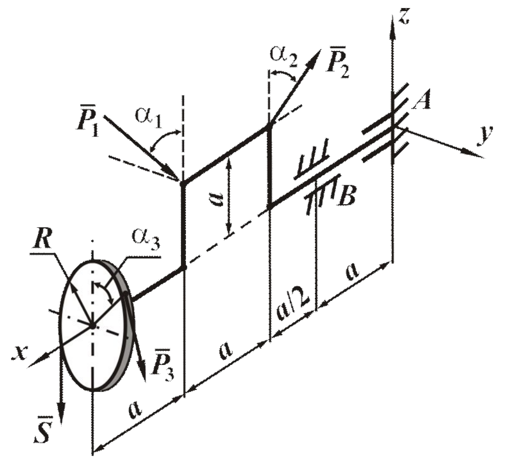
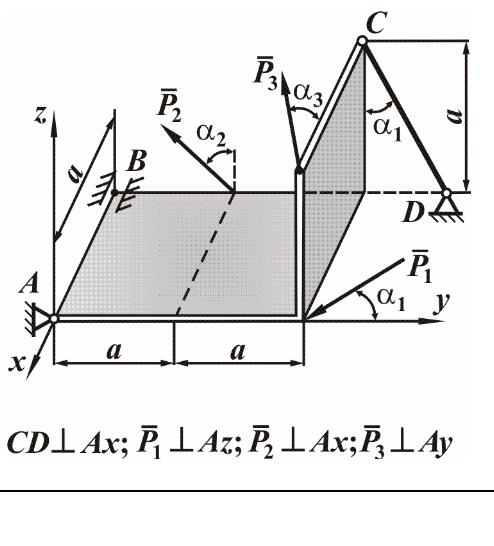
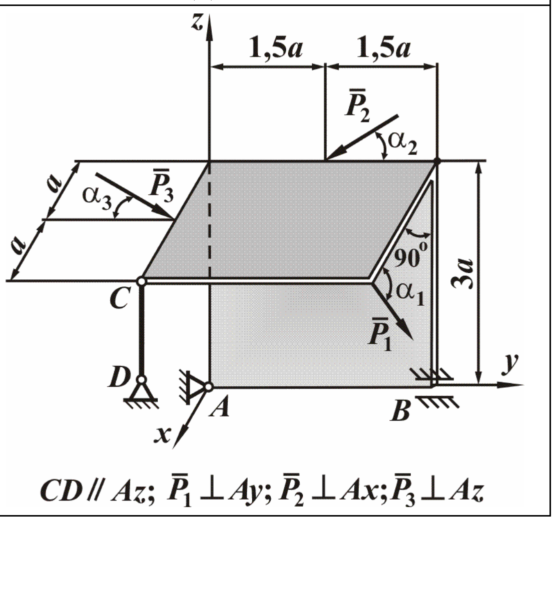
$AC = CD = a$; $\bar{P}_1 \parallel Az$; $\bar{P}_2 \perp Az$; $\bar{P}_3 \perp Ax$

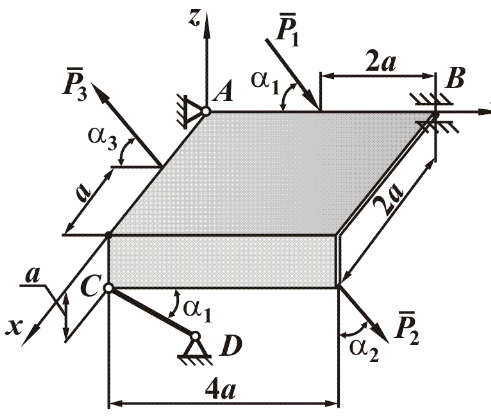
задание №12



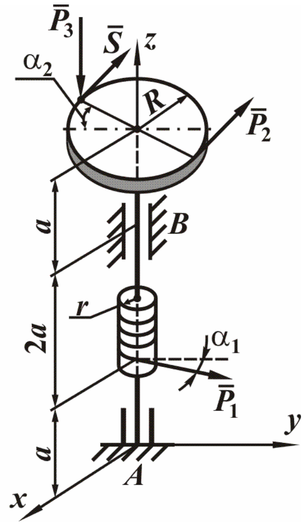
$\bar{P}_1 \parallel Az$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 \perp Ax$

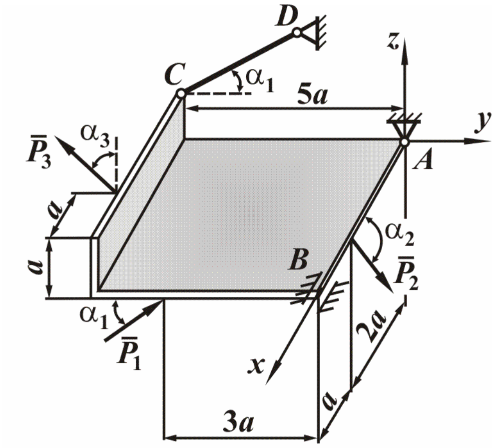
продолжение табл. 12

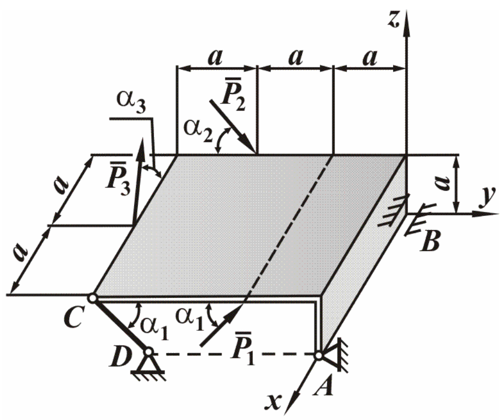
задание №13	задание №14
 $CD \parallel Ay;\ \bar{P}_1 \perp Ay;\ \bar{P}_2 \perp Az;\ \bar{P}_3 \perp Ax$	 $CD \perp Ax;\ \bar{P}_1 \parallel Az;\ \bar{P}_2 \perp Ay;\ \bar{P}_3 \perp Az$
задание №15	задание №16
 $\bar{P}_1 \perp Ax; \bar{P}_2 \perp Az; \bar{P}_3 \perp Ay; \bar{S} \parallel Az; CD \parallel Ax$	 $\bar{P}_1 \perp Ax; \bar{P}_2 \perp Ay; \bar{P}_3 \perp Ax; \bar{S} \parallel Az$
задание №17	задание №18
 $CD \perp Ax; \bar{P}_1 \perp Az; \bar{P}_2 \perp Ax; \bar{P}_3 \perp Ay$	 $CD \parallel Az;\ \bar{P}_1 \perp Ay; \bar{P}_2 \perp Ax; \bar{P}_3 \perp Az$

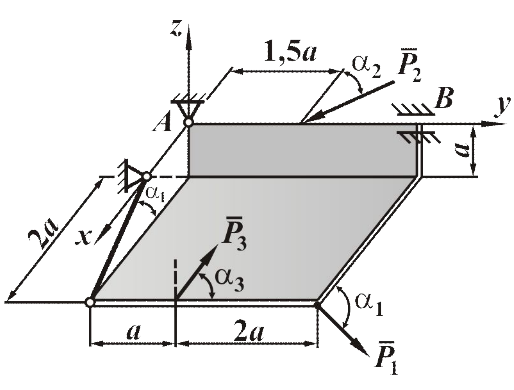
<table>
<tr><td>задание №19</td><td>задание №20</td></tr>
<tr><td>


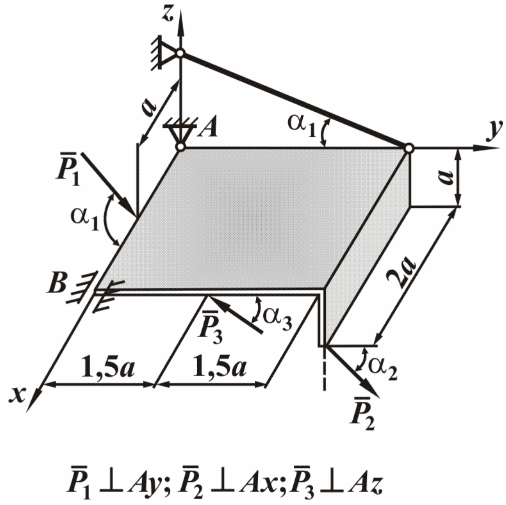
$CD \perp Ax$; $\bar{P}_1 \perp Ax$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 \perp Az$
</td><td>
$\bar{P}_1 \perp Az$
$\bar{P}_2 \perp Az$
$\bar{P}_3 \parallel Az$
$\bar{S} \parallel \bar{P}_2$



</td></tr>
<tr><td>задание №21</td><td>задание №22</td></tr>
<tr><td>


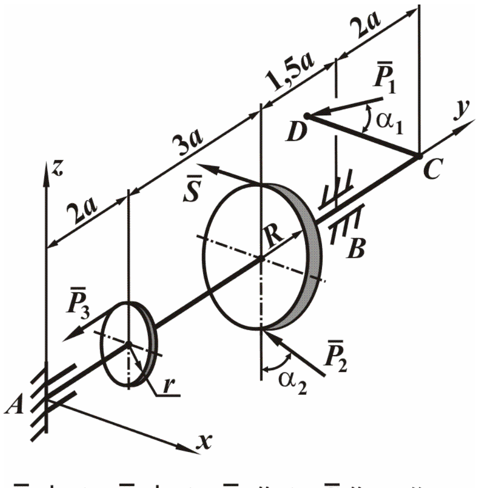
$CD \parallel zAy$; $\bar{P}_1 \perp Az$; $\bar{P}_2 \perp Ay$; $\bar{P}_3 \perp Ax$
</td><td>


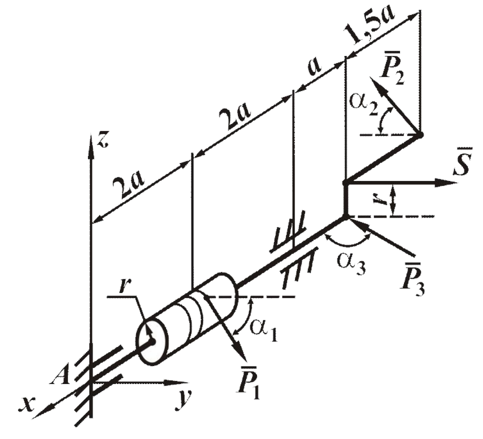
$CD \perp Bx$; $\bar{P}_1 \perp Bz$; $\bar{P}_2 \perp Bx$; $\bar{P}_3 \perp By$
</td></tr>
<tr><td>задание №23</td><td>задание №24</td></tr>
<tr><td>


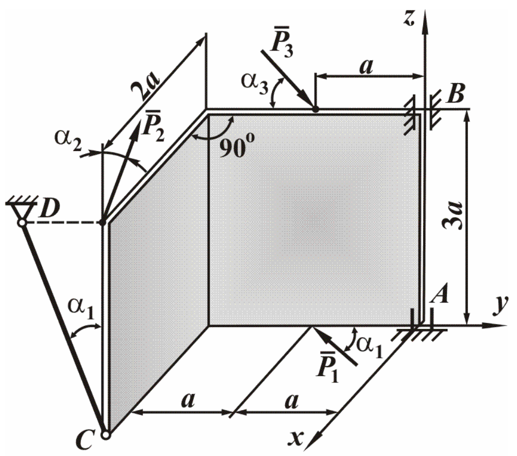
$\bar{P}_1 \perp Ay$; $\bar{P}_2 \perp Az$; $\bar{P}_3 \perp Ax$
</td><td>


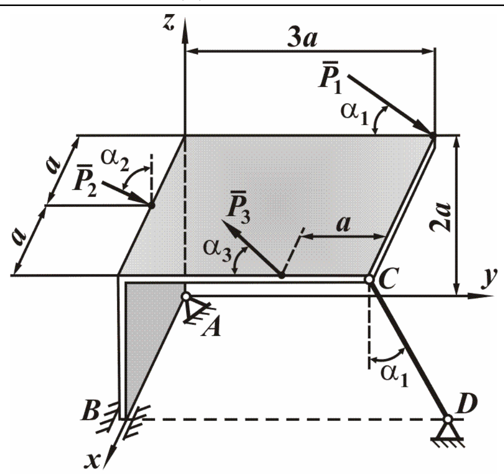
$\bar{P}_1 \perp Ay$; $\bar{P}_2 \perp Ax$; $\bar{P}_3 \perp Az$
</td></tr>
</table>

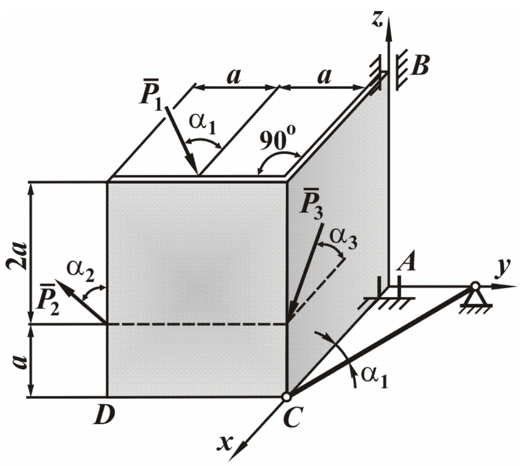
окончание табл. 12

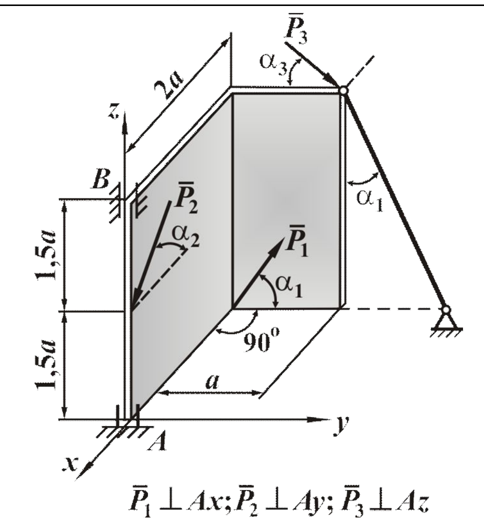
<table>
<tr><td>задание №25</td><td>задание №26</td></tr>
<tr><td>

$\bar P_1 \perp Ay; \bar P_2 \perp Ay; \bar P_3 \parallel Ay; \bar S \parallel CD \parallel Ax$</td>
<td>

$\bar P_1 \perp Ax; \bar P_2 \perp Ax; \bar P_3 \perp Az; \bar S \parallel Ay$</td></tr>
<tr><td>задание №27</td><td>задание №28</td></tr>
<tr><td>

$CD \perp Ax; \bar P_1 \perp Az; \bar P_2 \perp Ay; \bar P_3 \perp Ax$</td>
<td>

$\bar P_1 \perp Ax; \bar P_2 \perp Ay; \bar P_3 \perp Az$</td></tr>
<tr><td>задание №29</td><td>задание №30</td></tr>
<tr><td>

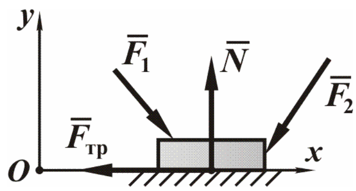
$CD = AC; \bar P_1 \perp Az; \bar P_2 \perp Ax; \bar P_3 \perp Ay$</td>
<td>

$\bar P_1 \perp Ax; \bar P_2 \perp Ay; \bar P_3 \perp Az$</td></tr>
</table>

1.8. Равновесие тела при наличии сил трения

● Условия равновесия тела на шероховатой поверхности в случае плоской системы сил:

$$\sum F_{kx}=0;$$
$$\sum F_{ky}=0;$$
$$\sum m_A\left(\bar{F}_k\right)=0;$$
$$0\le\left|\bar{F}_{\text{тр}}\right|\le f\cdot N,$$

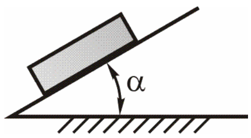


где f – коэффициент трения скольжения; $\bar{F}_{\text{тр}}$, $\bar{N}$ – реакции шероховатой поверхности; точка A – произвольная точка.

В задачах о равновесии силы трения определяются из уравнений равновесия; полученный результат должен удовлетворять неравенству:

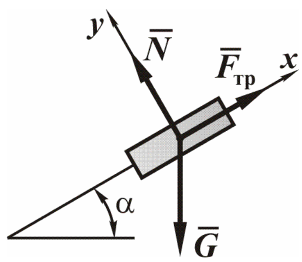
$$F_{\text{тр}}\le f\cdot N.$$

Пример. Груз лежит на наклонной плоскости $\alpha=30^\circ$. Определить силу трения при коэффициентах трения скольжения $f=0{,}5$ и $f=0{,}7$.



Решение. Определяем силу трения из уравнений равновесия:

$$\sum F_{kx}=F_{\text{тр}}-G\sin\alpha=0;$$
$$F_{\text{тр}}=G\sin\alpha;$$
$$\sum F_{ky}=N-G\cos\alpha=0;$$
$$N=G\cos\alpha.$$



Найденное значение $F_{\text{тр}}$ должно удовлетворять неравенству:

$$F_{\text{тр}}\le f\cdot N.$$

При $f=0{,}5$:

$$G\sin\alpha\le 0{,}5\cdot G\cos\alpha;$$
$$1\le 0{,}866.$$

Неравенство не выполняется, следовательно, равновесие не осуществляется.

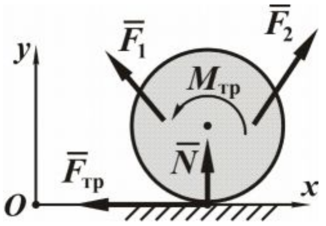
При $f=0{,}7$:

$$G\sin\alpha\le 0{,}7\cdot G\cos\alpha;$$
$$0{,}5\le 0{,}7\cdot 0{,}866.$$

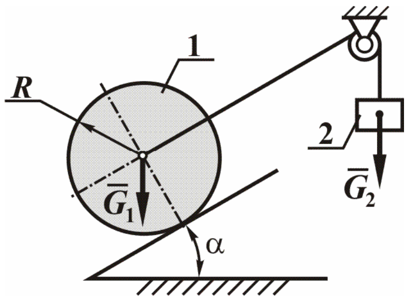
Неравенство выполняется, следовательно, $F_{\text{тр}}=0{,}5G$.

● Условия равновесия при наличии трения качения в случае плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum m_A\left(\bar{F}_k\right) = 0;$$
$$0 \le \left|M_{\text{тр}}\right| \le \delta N;$$
$$0 \le \left|\bar{F}_{\text{тр}}\right| \le fN,$$



где $\bar{F}_{\text{тр}}$, $\bar{N}$, $M_{\text{тр}}$ – реакции поверхности (сила трения, нормальная реакция, момент трения качения); f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения; точка A – произвольная точка.



Пример. Дано G_1, α, R, δ. Определить минимальный вес груза G_2, обеспечивающий равновесие системы.

Решение. Составляем уравнения равновесия катка:

$$\sum F_{kx} = -F_{\text{тр}} - G_1 \sin\alpha + S = 0;$$
$$F_{\text{тр}} = S - G_1 \sin\alpha;$$
$$\sum F_{ky} = N - G_1 \cos\alpha = 0;$$
$$N = G_1 \cos\alpha;$$
$$\sum M_O = G_1 \sin\alpha \cdot R - S \cdot R - M_{\text{тр}} = 0,$$

где $M_{\text{тр}} = \delta \cdot N = \delta \cdot G_1 \cos\alpha$.

Следовательно:

$$S = \frac{G_1 \sin\alpha \cdot R - \delta \cdot G_1 \cos\alpha}{R};$$
$$G_{2_{\min}} = G_1\left(\sin\alpha - \frac{\delta}{R} \cdot \cos\alpha\right).$$

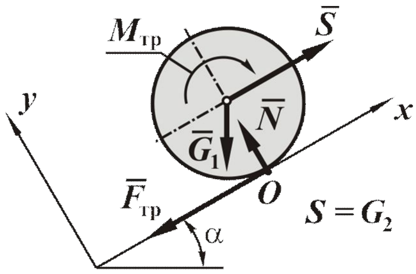
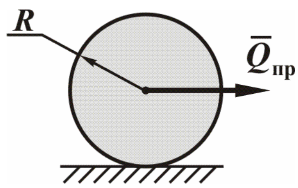
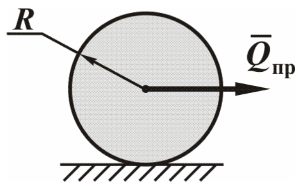
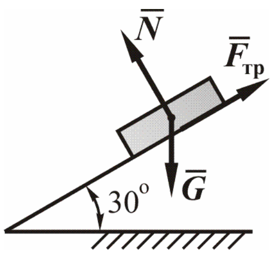
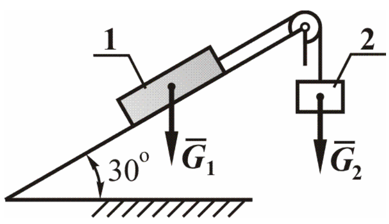
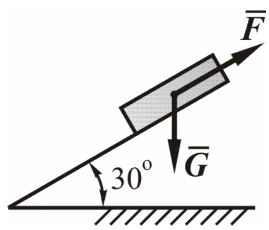


Таблица 13

Тестовые задания

№	задание/ответ	схема
1	Вес катка $G = 4\,кН$; $R = 2\,м$; коэффициент трения качения $\delta = 0{,}0005\,м$; Качение начнется при $Q_{пр} = \ldots\,кН$. **Ответ**: $1\,кН$.	
2	Вес катка $G = 8\,кН$, $R = 2\,м$, минимальная сила для качения катка $Q_{пр} = 1{,}6\,Н$. Коэффициент трения качения $\delta = \ldots\,м$. **Ответ**: 0,0004 м.	
3	Брусок весом $G = 1\,кН$ находится в равновесии на наклонной плоскости, коэффициент трения $f = 0{,}7$. Сила трения $F_{тр} = \ldots\,Н$. **Ответ**: 500 Н.	
4	Вес тел $G_1 = 800\,Н$, $G_2 = 400\,Н$, коэффициент трения $f = 0{,}15$; сила трения $F_{тр} = \ldots\,Н$. **Ответ**: 0 Н.	
5	Сила $F = 92\,Н$, коэффициент трения $f = 0{,}3$; скольжение тела вправо начнётся при весе тела $G = \ldots\,Н$. **Ответ**: 121 Н.	

1.9. Уравнения равновесия некоторых частных систем сил

● Уравнения равновесия пространственной сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum F_{kz} = 0.$$

● Уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0.$$

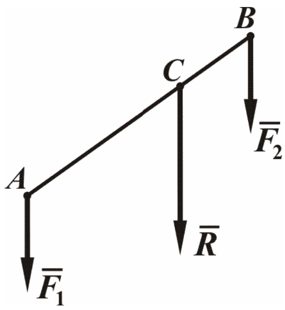
● Уравнения равновесия пространственной системы сил, параллельных оси Oz:

$$\sum F_{kz} = 0;$$
$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0;$$
$$\sum m_y(\overline{F}_k) = 0.$$

● Уравнения равновесия плоской системы сил, параллельных оси Oy:

$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0.$$

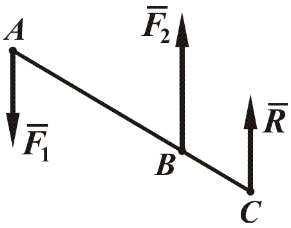
1.10. Сложение параллельных сил и центр тяжести тела



● Две параллельные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, направленные в одну сторону, имеют равнодействующую, модуль которой $R = F_1 + F_2$, а линия действия проходит через точку C, определяемую равенством:

$$AC \cdot F_1 = CB \cdot F_2.$$

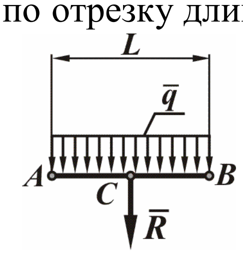
● Две параллельные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ $(F_2 \rangle F_1)$, направленные в противоположные стороны, имеют равнодействующую, модуль которой $R = F_2 - F_1$, а линия действия проходит через точку C, расположенную вне отрезка AB со стороны большей силы, определяемую равенством:



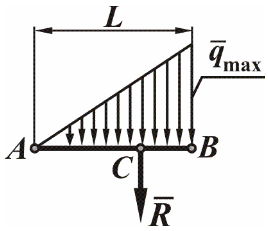
$$AC \cdot F_1 = CB \cdot F_2.$$

● Равнодействующая равномерно распределённых по отрезку длиной L параллельных сил интенсивности q (Н/м):

$$R = q \cdot L;$$
$$AC = L/2.$$



● Равнодействующая линейно распределённых по отрезку длиной L параллельных сил:



$$R = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot L;$$

$$AC = \frac{2}{3} L.$$

● Центр параллельных сил.

Точка, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

$$\bar{r}_C = \frac{\sum F_k \cdot \bar{r}_k}{\sum F_k},$$

где $\bar{r}_C$ – радиус-вектор центра параллельных сил; $\bar{r}_k$ – радиус-вектор точки приложения k-ой силы.

Центром тяжести называется центр параллельных сил тяжести $\bar{p}_k$ отдельных частиц тела. Координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P};$$

$$y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P}; \qquad (10.1)$$

$$z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}.$$

Для однородных тел вес p_k отдельных частиц тела пропорционален объемам этих частиц: $p_k = \gamma v_k$, а вес тела пропорционален объему тела $P = \gamma V$ (γ – вес единицы объема). Подставляя данные выражения в (10.1), получаем формулы для определения координат центра тяжести однородных тел:

$$x_C = \frac{\sum v_k x_k}{V};$$

$$y_C = \frac{\sum v_k y_k}{V}; \qquad (10.2)$$

$$z_C = \frac{\sum v_k z_k}{V}.$$

Для однородных плоских пластин и изделий из однородных линейных элементов (например, из однородной проволоки постоянного сечения), вводя вес единицы площади и вес единицы длины, получаем формулы для определения «центра тяжести» площади и «центра тяжести» линии:

$$x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S};$$

$$y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S}; \qquad (10.3)$$

$$z_C = \frac{\sum s_k z_k}{S},$$

где $S -$ площадь сечения всей пластины, $s_k -$ площадь ее части;

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L};$$

$$y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}; \qquad (10.4)$$

$$z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L},$$

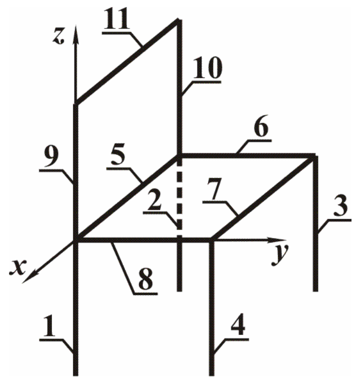
где $L -$ длина всей линии, $l_k -$ длина ее частей.

● Способы определения положения центров тяжести.

а) Учет симметрии. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, ось симметрии или центр симметрии, то его центр тяжести находится соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

б) Способ разбиения. Если тело можно разбить на конечное число частей, для которых положения центров тяжести известны, то координаты центра тяжести всего тела можно вычислить по формулам (10.1).

Пример. Найти координаты центра тяжести тела, имеющего вид стула, состоящего из стержней одинаковой длины и веса. Длина стержня $l = 44\,\text{см}$.



Решение. Так как тело имеет плоскость симметрии и центр тяжести лежит в этой плоскости, то $x_C = -22\,\text{см}$. Остальные координаты определяем по формулам (10.1):

$$y_C = \frac{(l_3 + l_4 + l_7)\cdot 44 + (l_6 + l_8)\cdot 22}{11\cdot 44} = 16\,\text{см};$$

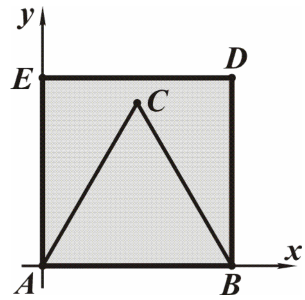
$$z_C = \frac{-22\cdot(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + l_{11}\cdot 44 + (l_9 + l_{10})\cdot 22}{11\cdot 44} = 0\,\text{см}.$$

в) Интегрирование. Если однородное тело не удается разбить на несколько частей, положение центров тяжести которых известно, то тело разбивают на произвольные малые объемы Δv_k и переходят к пределу при $\Delta v_k \to 0$; формулы (10.2) принимают вид:

$$x_C = \frac{1}{V}\int\limits_V x dv; \quad y_C = \frac{1}{V}\int\limits_V y dv; \quad z_C = \frac{1}{V}\int\limits_V z dv.$$

г) Способ дополнения (способ отрицательных масс). Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы. При этом центры тяжести тел без вырезов и центры тяжести самих вырезов должны быть известны. Масса выреза считается отрицательной.

Пример. Дана однородная квадратная пластина $ABDE$ со стороной a. Найти внутри квадрата такую точку C, чтобы она была центром тяжести пластины, которая получится, если из квадрата вырезать равнобедренный треугольник ACB.



Решение: В силу симметрии $x_C = a/2$. Для определения y_C используем способ дополнения.

Пусть $S-$ площадь квадрата с вырезом; $S_1, y_1 -$ площадь квадрата без выреза и координата его центра тяжести; $S_2, y_2 -$ площадь и координата центра тяжести треугольника ACB. Согласно формулам (10.3):

$$y_C = \sum\frac{S_k y_k}{S} = \frac{(S_1 y_1 - S_2 y_2)}{S} = \frac{\left(a^2\dfrac{a}{2} - 0{,}5ay_C\dfrac{y_C}{3}\right)}{a^2 - 0{,}5ay_C}$$

$$\text{или } 2y_C^{\,2} - 6ay_C + 3a^2 = 0.$$

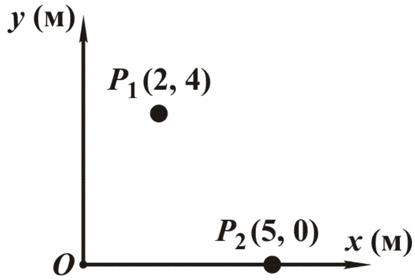
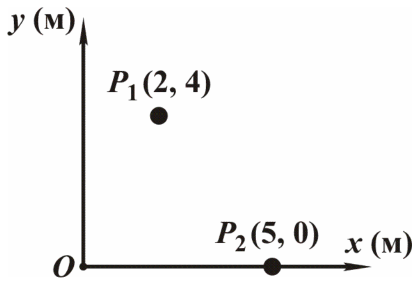
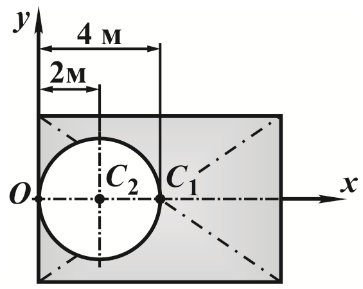
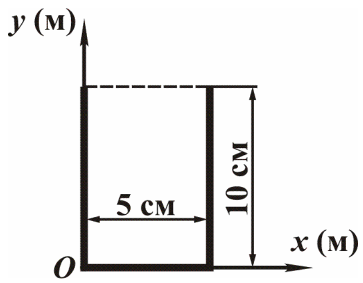
Следовательно, $y_C = 0{,}61a$ (второй корень $y_C = 2{,}4a$ не подходит по смыслу).

Контрольные вопросы

1) Что называется центром параллельных сил? 2) Что называется центром тяжести тела? 3) Запишите формулы для определения координат центра тяжести однородного тела. 4) Как учитывается симметрия тела при определении положения его центра тяжести? 5) Как определяется положение центра тяжести способом разбиения? 6) В чем суть способа отрицательных масс?

Таблица 14

Тестовые задания

№	задание/ответ	схема
1	Абсцисса центра тяжести двух материальных точек весом $P_1 = 4$ Н и $P_2 = 8$ Н $x_C = \ldots$ м. **Ответ**: 4 м.	
2	Ордината центра тяжести двух материальных точек весом $P_1 = 4$ Н и $P_2 = 4$ Н $y_C = \ldots$ м. **Ответ**: 2 м.	
3	Из однородной пластины весом $P_1 = 30$ Н вырезан круг весом $P_2 = 10$ Н. Абсцисса центра тяжести пластины с вырезом $x_C = \ldots$ м. **Ответ**: 5 м.	
4	Ордината центра тяжести фигуры из однородной проволоки $y_C = \ldots$ см. **Ответ**: 4 см.	
5	Для системы двух материальных точек: M_1 ($x_1 = 3{,}5$ м, $y_1 = -3$ м, $m_1 = 4$ кг) и M_2 ($x_2 = 1$ м, $y_2 = 5$ м, $m_2 = 6$ кг) координата центра тяжести $x_C = \ldots$ м. **Ответ**: 2 м.	