3. ДИНАМИКА

3.1. Предмет и задачи динамики. Законы динамики

Предметом динамики является изучение движения материальных точек, тел и их систем с учётом действующих сил.

Все задачи динамики делятся на две.

Первая задача – закон движения точки задан, требуется найти силы, действующие на эту точку. *Вторая задача* обратная, силы являются заданными, а требуется найти закон движения.

Динамика построена на законах Ньютона.

Первый закон – изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения.

Фундаментальное значение для всей динамики имеет *второй закон* Ньютона: сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое пропорционально величине силы и имеет направление силы. В аналитической форме этот закон представляется в виде

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{3.1}$$

где $\bar{F}$ – сила, действующая на материальную точку, $\bar{a}$ – её ускорение, m – масса точки, являющаяся мерой её инертных свойств.

Третий закон Ньютона: две материальные точки взаимодействуют друг с другом так, что силы их взаимодействия равны по величине, противоположны по направлению и имеют общую линию действия.

Единица силы называется Ньютоном, из выражения (3.1) следует, что 1Н = 1кг·м/с^2.

3.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Выражение (3.1) является основным уравнением динамики точки. Положение материальной точки определим радиус-вектором $\bar{r}$. Сила, действующая на точку, может быть функцией радиус-вектора $\bar{r}$, скорости $\bar{V} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ (например, сила сопротивления) и времени t.

Следовательно, в общем случае основное уравнение динамики точки (3.1) можно записать в форме

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(\bar{r}, \bar{V}, t). \tag{3.2}$$

Это есть *дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме*. Спроецируем обе части уравнения (3.2) на неподвижные оси декартовых координат, получаем три уравнения:

$$m\ddot{x} = F_x,\ m\ddot{y} = F_y,\ m\ddot{z} = F_z, \tag{3.3}$$

где $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции ускорения точки на оси координат,

F_x, F_y, F_z – проекции силы на те же оси.

При проецировании уравнения (3.2) на оси естественного трехгранника получается

$$ma_\tau = F_\tau,\ ma_n = F_n,\ ma_b = F_b, \tag{3.4}$$

где F_τ, F_n, F_b – проекции силы на касательную, нормаль и бинормаль. Из кинематики известно, что

$$a_\tau = \frac{d\sigma}{dt},\ a_n = \frac{V^2}{\rho},\ a_b = 0.$$

С учетом этого уравнения (3.4) принимают вид

$$m\frac{d^2\sigma}{dt^2} = F_\tau,\ m\frac{V^2}{\rho} = F_n,\ 0 = F_n. \tag{3.5}$$

3.3. Материальная система

Материальной системой называется совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны.

Массой M материальной системы называется сумма масс всех точек, входящих в систему, $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$, где m_k – масса материальной точки с номером k, а n – число всех точек системы.

Центром масс, или центром инерции материальной системы, называется геометрическая точка, радиус-вектор $\bar{r}_C$ которой определяется равенством

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k, \tag{3.6}$$

или точка с координатами

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k,\ y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\ z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k. \tag{3.7}$$

При непрерывном распределении массы суммы, стоящие в правых частях формул (3.6), (3.7), переходят в соответствующие интегралы.

Центр масс твердого тела, находящегося в однородном поле силы тяжести, совпадает с его центром тяжести. Умножим числитель и знаменатель правой части формулы (3.6) на модуль ускорения силы тяжести g, в результате будем иметь

$$\bar{r}_C = \frac{1}{Mg}\sum_{k=1}^{n} m_k g \bar{r}_k .$$

Так как $Mg = P$, весу тела, а $m_k g = P_k$, весу материальной точки, то

$$\bar{r}_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n} P_k \bar{r}_k ,$$

что совпадает с выражением для радиус-вектора центра тяжести твердого тела.

3.4. Моменты инерции тел простейшей геометрической формы

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси называется произведение массы m этой точки на квадрат ее расстояния h до оси:

$$J_z = mh^2. \tag{3.8}$$

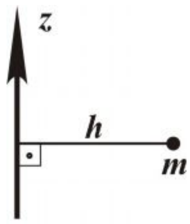

Рис. 3.1

Моментом инерции материальной системы относительно оси называется сумма моментов инерции всех точек системы относительно той же оси:

$$J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2. \tag{3.9}$$

При непрерывном распределении массы сумма переходит в интеграл.

Момент инерции относительно оси представляет определенно положительную величину. Размерность момента инерции в системе СИ равна $кг \cdot м^2$.

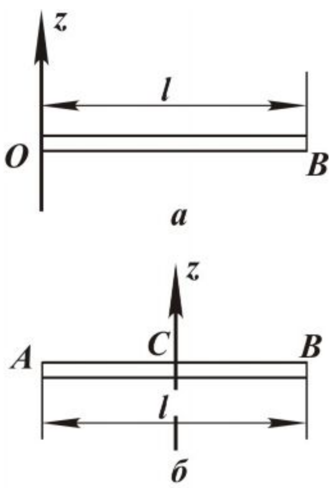

Рис. 3.2

Момент инерции однородного тонкого стержня массы M и длины l относительно оси z, проходящей перпендикулярно стержню через его конец (рис. 3.2,*а*), равен

$$J_{Oz} = \frac{1}{3}Ml^2 \tag{3.10}$$

и относительно оси, проходящей через его центр тяжести (рис. 3.2,*б*), равен

$$J_{Cz} = \frac{1}{12} M l^2 . \qquad 3.11)$$

Момент инерции материального круга с массой M и радиусом R относительно оси z, перпендикулярной плоскости круга и проходящей через его центр тяжести (рис. 3.3), равен

$$J_{Cz} = \frac{1}{2} M R^2 . \qquad (3.12)$$

Момент инерции однородного круглого цилиндра (рис. 3.4) относительно продольной оси z равен

$$J_z = \frac{1}{2} M R^2 , \qquad (3.13)$$

где M – масса цилиндра, R – радиус.

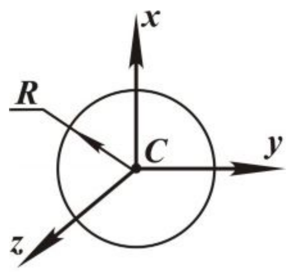

Рис. 3.3

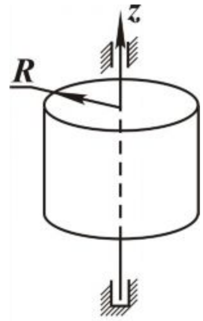

Рис. 3.4

Моменты инерции относительно параллельных осей. Существует простая связь между моментами инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, а именно *момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

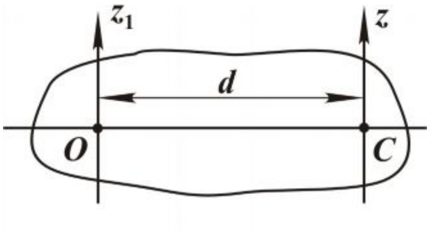

Рис. 3.5

Пусть Oz_1 – ось, относительно которой определяется момент инерции тела (рис. 3.5), а Cz – ось, проходящая через центр масс тела, параллельно первой. Тогда

$$J_{Oz_1} = J_{Cz} + M d^2 , \qquad (3.14)$$

где d – расстояние между осями.

Пример. Определим момент инерции материального круга относительно оси, перпендикулярной плоскости круга и проходящей через точку, находящуюся на расстоянии R от его центра (рис. 3.6):

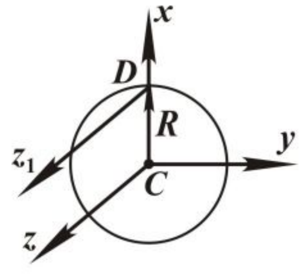

Рис. 3.6

$$J_{z_1} = J_{Cz} + MR^2,$$

так как

$$J_{Cz} = \frac{1}{2}MR^2, \text{ то}$$

$$J_{z_1} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

3.5. Работа силы. Мощность

В курсе физики понятие работы вводится следующим образом. Пусть материальная точка M движется по прямой линии BC и на нее действует сила $\overline{F}$, постоянная по модулю и направлению (рис. 3.7).

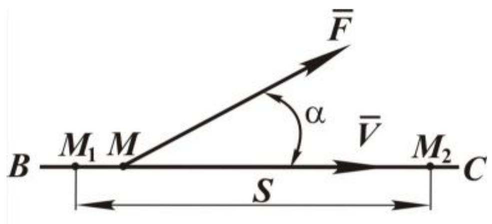

Рис. 3.7

Угол между силой $\overline{F}$ и скоростью $\overline{V}$ точки обозначим через α. Тогда работа постоянной силы $\overline{F}$ на прямолинейном перемещении точки M_1, M_2 определяется как произведение модуля силы на величину перемещения $S = M_1, M_2$ и на косинус угла между ними, то есть

$$A_{1,2} = F \cdot S\cos\alpha. \tag{3.15}$$

Это же равенство можно записать в виде скалярного произведения:

$$A_{1,2} = \overline{F} \cdot \overline{S}, \tag{3.16}$$

где $\overline{S} = \overline{M_1M_2}$ – вектор перемещения точки.

В системе СИ единицей измерения работы является Джоуль, 1Дж = 1Нм.

Формулы (3.9) и (3.10) справедливы в случае действия постоянной силы как по модулю, так и по направлению, а также тогда, когда точка движется только прямолинейно. В случае переменной силы и криволинейной траектории движения точки определяется вначале элементарная работа

$$dA = F\cos\alpha dS, \tag{3.17}$$

где dS – дифференциал перемещения точки. Так как дифференциал перемещения dS равен модулю дифференциала радиуса-вектора $d\bar{r}$, то есть $dS = dr$, то элементарную работу можно записать как

$$dA = Fdr\cos\alpha$$

или через скалярное произведение

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}, \tag{3.18}$$

а также через проекции векторов

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{3.19}$$

Мощность N силы $\bar{F}$ определяется как скорость изменения работы

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \tag{3.20}$$

или

$$N = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{V}, \tag{3.21}$$

то есть мощность N равна скалярному произведению силы $\bar{F}$ на скорость $\bar{V}$ точки. Единицей измерения мощности в системе СИ является Ватт, 1Вт=1Дж/с.

3.6. Работа сил, приложенных к материальной точке и твёрдому телу

Работа силы тяжести. Пусть точка M, на которую действует сила тяжести, перемещается из положения $M_O(x_0, y_{0,}, z_0)$ в положение $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 3.8).

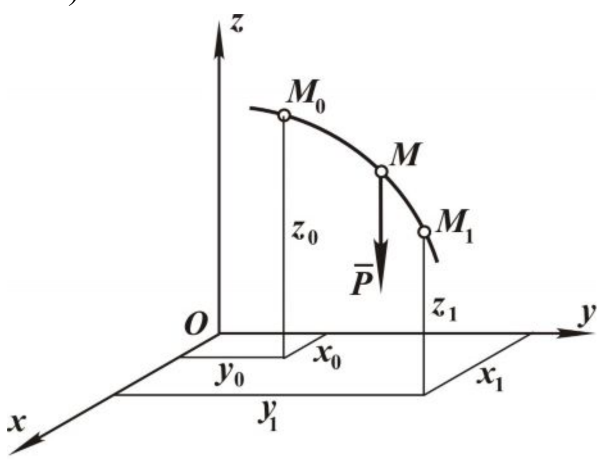

Рис. 3.8

Проекции силы на оси координат равны $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = -P$.

Используя выражение (3.19), определяем

$$A = -P \int_{z_0}^{z_1} dz = P(z_0 - z_1).$$

Если точка M_0 выше M_1, то $z_0 - z_1 = h$, где h величина вертикального перемещения точки; если же точка M_0 ниже точки M_1, то $z_0 - z_1 = -h$.

Поэтому можно записать

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \qquad (3.22)$$

Следовательно, *работа силы тяжести равна произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки её приложения, взятое с соответствующим знаком.* Если точка перемещается вверх – то знак минус, если вниз – то плюс.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории перемещения точки.

Работа силы упругости. Рассмотрим пружину BC, конец C которой закреплён неподвижно (рис. 3.9). При растяжении пружины возникают силы упругости, и на тело, вызывающее растяжение, действует реакция пружины $\overline{F}$. Эта сила направлена противоположно перемещению свободного конца пружины, а её модуль пропорционален удлинению пружины:

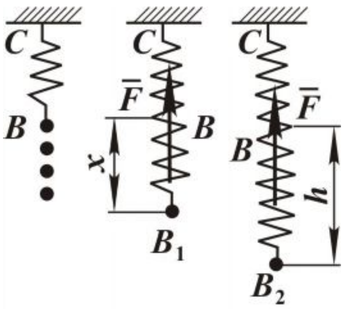

Рис. 3.9

$$F = c \cdot BB_1,$$

где c – коэффициент жесткости пружины.

Ось x направим по оси пружины, приняв за начало координат конец недеформированной пружины B. Проекция силы $\overline{F}$ на ось x определяется как

$$F_x = -cx.$$

Вычислим работу силы упругости на перемещении, используя понятие элементарной работы (3.19):

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Проекции силы упругости на оси:

$$F_x = -cx;$$

$$F_y = 0;$$

$$F_z = 0,$$

отсюда элементарная работа силы упругости

$$dA = -cxdx,$$

а работа силы упругости на перемещении $B_1B_2 = h$ определяется как

$$A_{1,2} = -c\int_0^h xdx = -\frac{ch^2}{2}. \qquad (3.23)$$

Работа силы упругости отрицательна в том случае, когда деформация увеличивается, то есть когда сила упругости направлена противоположно перемещению её точки приложения, и положительна, когда деформация уменьшается.

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Пусть сила $\overline{F}$ приложена в некоторой точке тела, отстоящей от оси вращения z на величину h (рис. 3.10).

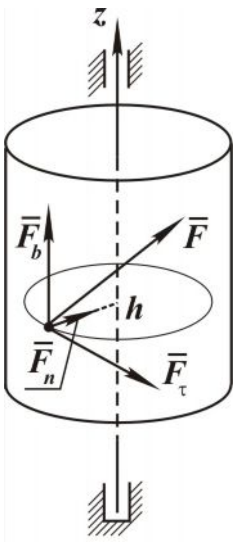

Рис. 3.10

Точка приложения силы описывает при своём движении окружность радиуса h. Разложим силу $\overline{F}$ по осям естественного трёхгранника и обозначим её составляющие через F_τ, F_n, F_b. Работа составляющих $\overline{F}_n$ и $\overline{F}_b$ равна нулю, так как эти силы перпендикулярны к перемещению точки их приложения. Следовательно, работа силы $\overline{F}$ равна работе её касательной составляющей.

Для элементарной работы имеем

$$dA = F_\tau d\sigma = F_\tau h d\varphi ,$$

где $d\sigma = hd\varphi$ – дифференциал дуговой координаты точки приложения силы, а $d\varphi$ – дифференциал угла поворота тела. Учитывая, что произведение $F_\tau h$ равно моменту силы $\overline{F}$ относительно оси вращения тела, получаем

$$dA = M_z d\varphi . \qquad (3.24)$$

Элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна моменту этой силы относительно оси вращения, умноженному на дифференциал угла поворота тела. Работа силы $\overline{F}$ на конечном углу поворота определяется как

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi , \qquad (3.25)$$

где φ_0 и φ – начальное и конечное значение угла поворота тела.

Если момент является постоянной величиной, то есть $M_z = const$, то

$$A = M_z(\varphi - \varphi_0) . \qquad (3.26)$$

Делим обе части равенства (3.24) на dt и получаем выражение для мощности силы, приложенной к вращающемуся телу:

$$\frac{dA}{dt} = N , \; N = M_z \omega_z . \qquad (3.27)$$

Мощность силы $\overline{F}$, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению момента M_z этой силы относительно оси вращения на угловую скорость ω_z тела.

3.7. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Определим связь между работой сил, приложенных к материальной точке, и изменением её скорости движения. Для этого воспользуемся основным уравнением динамики точки

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

или

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F},$$

где $\bar{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке. Умножим скалярно обе части этого выражения на дифференциал радиуса- вектора $d\bar{r}$:

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot d\bar{r}. \qquad (3.28)$$

Видно, что правая часть является элементарной работой dA сил, действующих на точку. Левую часть можно представить в виде

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} \cdot d\bar{r} = m\frac{d\bar{r}}{dt} d\bar{V} = m\bar{V} \cdot d\bar{V} = \frac{d(mV^2)}{2},$$

при этом учтено, что $\bar{V} \cdot \bar{V} = V^2$. С учётом этого равенство (3.28) записывается в форме

$$\frac{d(mV^2)}{2} = dA. \qquad (3.29)$$

В левой части

$$\frac{mV^2}{2} = T \qquad (3.30)$$

есть кинетическая энергия материальной точки. С учётом (3.24) выражение (3.29) принимает вид

$$dT = dA \qquad (3.31)$$

и представляет собой математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме: *полный дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе всех действующих на эту точку сил.*

Разделив обе части равенства (3.31) на dt, получаем

$$\frac{dT}{dt} = N, \qquad (3.32)$$

так как

$$\frac{dA}{dt} = N .$$

Таким образом, *полная производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности всех действующих на точку сил.*

Пусть материальная точка M перемещается по кривой BC (рис.3.11) от положения M_1 до положения M_2. Обозначим через $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$ скорость точки в положениях M_1 и M_2 соответственно и проинтегрируем обе части равенства (3.29):

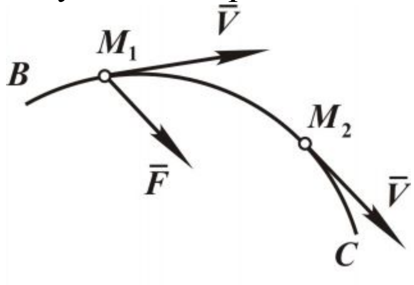

Рис. 3.11

$$\int\limits_{V_1}^{V_2} d(\frac{mV^2}{2}) = \int\limits_{M_1M_2} dA .$$

Правая часть этого равенства равна работе $A_{1,2}$ силы на перемещении M_1M_2. Таким образом, после интегрирования и подстановки пределов имеем

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A_{1,2}, \qquad (3.33)$$

то есть *изменение кинетической энергии материальной точки, при переходе её из начального положения в конечное, равно работе силы, приложенной к точке*. Это есть интегральная форма теоремы.

3.8. Кинетическая энергия материальной системы

Как было установлено, кинетическая энергия материальной точки определяется как

$$T = \frac{mV^2}{2},$$

то есть половина произведения массы m точки на квадрат её скорости.

Кинетической энергией материальной системы называется сумма кинетических энергий всех точек, входящих в систему, таким образом

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2 . \qquad (3.34)$$

Здесь скорости V_k определяются относительно неподвижной системы координат, то есть это абсолютные скорости. Из кинематики сложного движения точки известно, что абсолютное движение можно представить состоящим из переносного и относительного движений. Такой подход довольно часто позволяет упростить вычисление кинетической энергии системы.

Итак, движение системы рассматриваем относительно неподвижных осей $Ox_1y_1z_1$ (рис. 3.12). Вводим подвижные координатные оси $Cx_2y_2z_2$, перемещающиеся поступательно относительно неподвижных осей, причём начало координат совпадает с центром масс. Пусть M_k –одна из точек материальной системы массы m_k. Положение точки M_k относительно неподвижной системы координат определяется радиусом-вектором $\bar{r}_k$, а относительно подвижной – радиусом-вектором $\bar{\rho}_k$. Центр масс C системы определяется радиусом-вектором $\bar{r}_C$.

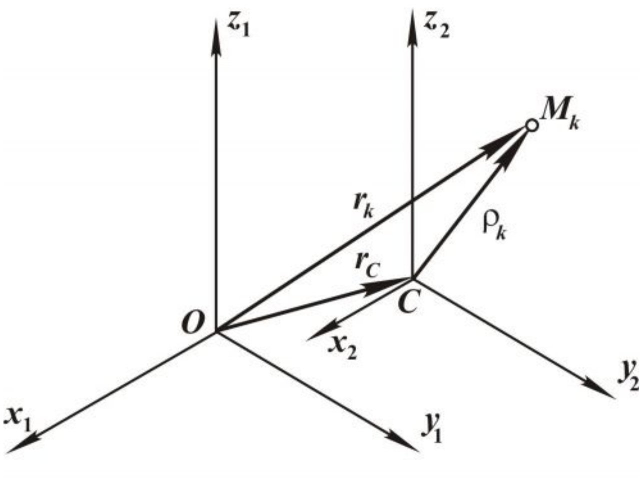

Рис. 3.12

На основании теоремы о сложении скоростей абсолютная скорость точки M_k

$$\bar{V}_k = \bar{V}_{ek} + \bar{V}_{rk}, \tag{3.35}$$

где $\bar{V}_{ek}$ – переносная скорость, $\bar{V}_{rk}$ – относительная скорость.

Так как подвижная система координат $Cx_2y_2z_2$ совершает поступательное движение, то переносные скорости всех точек одинаковы и равны скорости $\bar{V}_c$, отсюда

$$\bar{V}_k = \bar{V}_C + \bar{V}_{rk}, \tag{3.36}$$

подставив (3.36) в выражение кинетической энергии (3.34), имеем

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k (\bar{V}_C + \bar{V}_{rk})^2.$$

Возведём скобку в квадрат и разобьём сумму на три части

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_C^2 + \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{V}_C \bar{V}_{rk} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_{rk}^2 \tag{3.37}$$

Здесь учтено, что скалярный квадрат любого вектора равен квадрату его модуля, то есть

$$\bar{V}_C^2 = V_C^2;$$

$$\overline{V}_{rk}^2 = V_{rk}^2 .$$

Последнее слагаемое – $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_{rk}^2$ – есть кинетическая энергия T_r относительного движения.

В первом слагаемом множитель V_C^2 не зависит от индекса суммирования и его можно вынести за знак суммы, то есть

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_C^2 = \frac{1}{2} V_C^2 \sum_{k=1}^{n} m_k .$$

Сумма $\sum_{k=1}^{n} m_k$ есть масса M всей системы, отсюда

$$T_C = \frac{1}{2} M V_C^2 ,$$

что представляет собой кинетическую энергию центра масс системы.

Рассматриваем второе слагаемое выражения (3.37). Выносим V_C за знак суммы, имеем

$$\overline{V}_C \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_{rk} .$$

Это выражение равно нулю, так как

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_{rk} = 0 .$$

Определяем относительный радиус-вектор центра масс

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{\rho}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{\rho}_k ,$$

где $\overline{\rho}_k$ – относительный радиус-вектор, определяющий положение точки с номером k относительно начала подвижной системы координат.

В связи с тем, что центр C масс системы совпадает с началом подвижной системы координат $Cx_2 y_2 z_2$, $\overline{\rho}_c = 0$ и, соответственно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{\rho}_k = 0 .$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\overline{\rho}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_{rk} .$$

Таким образом, выражение (3.37) для кинетической энергии принимает вид

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + T_r . \tag{3.38}$$

Кинетическая энергия материальной системы в ее абсолютном движении складывается из кинетической энергии ($\frac{1}{2} M V_c^2$) центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии T_r системы в ее относительном движении.

3.9. Кинетическая энергия твердого тела

Так как твердое тело рассматривается как непрерывно распределенная масса, то все суммы, входящие в выражения для кинетической энергии материальной системы, переходят в интегралы, а масса m_k отдельной точки заменяется дифференциалом dm. Поэтому для твердого тела формула (3.32) принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \int V^2 dm , \tag{3.39}$$

где интегрирование производится по всей массе тела.

Определим кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

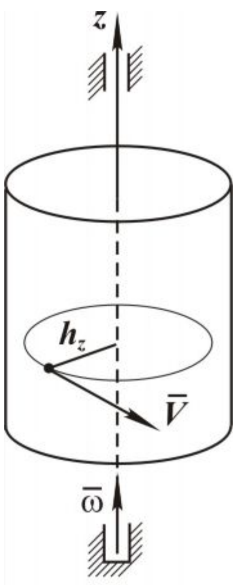

Рис. 3.13

Поступательное движение. При поступательном движении твердого тела скорости всех точек одинаковы. Поэтому в формуле (3.39) V^2 можно вынести за знак интеграла, то есть

$$T = \frac{1}{2} V^2 \int dm = \frac{1}{2} M V^2 , \tag{3.40}$$

где $M = \int dm$.

Таким образом, *кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.*

Вращательное движение. При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 3.13) модуль скорости любой точки определяется по формуле

$$V = \omega h_z ,$$

где ω – модуль угловой скорости тела, h_z – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения z.

Подставляя в формулу (3.40) значение скорости *V,* получаем

$$T = \frac{1}{2}\int \omega^2 h_z^2 dm ,$$

или, вынося за знак интеграла ω^2, так как угловая скорость для всех точек тела одинакова, имеем

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \int h_z^2 dm .$$

Интеграл $\int h_z^2 dm$ зависит только от характера распределения массы по объему тела и не зависит от кинематического состояния. Он называется моментом инерции тела относительно оси *z* и обозначается символом J_z.

$$J_z = \int h_z^2 dm. \tag{3.41}$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \tag{3.42}$$

то есть кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

Момент инерции тела представляет меру его инерции во вращательном движении.

Плоскопараллельное движение. При плоском движении твердого тела вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ всегда перпендикулярен к плоскости движения. Для определения кинетической энергии тела воспользуемся формулой (3.38)

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2, \tag{3.43}$$

учитывая, что момент инерции J_c определяется относительно оси, проходящей через центр масс тела.

3.10. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Установим взаимосвязь между изменением кинетической энергии материальной системы и работой приложенных сил.

Рассматриваем два момента времени: начальный t_0 и текущий, или конечный, t.

Пусть модуль скорости точки с индексом *k* в момент времени t_0 равняется V_{0k}, а в момент времени $t - V_k$.

Записываем для каждой точки теорему об изменении кинетической энергии (3.33):

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} - \frac{m_1 V_{01}^2}{2} = A_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{m_n V_n^2}{2} - \frac{m_n V_{01}^2}{2} = A_n.$$

Складывая почленно все равенства, получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_{0k}^2 = \sum_{k=1}^{n} A_n, \quad (3.44)$$

или, учитывая выражение для кинетической энергии системы (3.34), имеем

$$T - T_0 = A, \quad (3.45)$$

где $T_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_{0k}^2$ – начальное значение кинетической энергии,

$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2$ – конечное значение кинетической энергии,

A – работа всех внешних и внутренних сил системы.

Равенство (3.45) представляет математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме: *изменение кинетической энергии материальной системы при переходе ее из начального в текущее (конечное) положение равно сумме работ на этом перемещении всех действующих на систему сил.*

Продифференцируем равенство (3.45) по времени:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{dT_0}{dt} = \frac{dA}{dt};$$

так как T_0 есть величина постоянная, то

$$\frac{dT_0}{dt} = 0,$$

а $\frac{dA}{dt}$ – мощность сил, получим

$$\frac{dT}{dt} = N. \quad (3.46)$$

Это уравнение представляет математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: *производная кинетической энергии по времени равна сумме мощностей всех сил, приложенных к системе.*

Пример. Груз 1 массой m_1 поднимается с помощью электрической лебедки (рис. 3.14). Барабан 2 приводится во вращение электромотором, который создает постоянный вращающий момент M_O. Моменты инерции блока 3 и барабана 2 относительно их осей вращения равны соответственно J_3, J_2, а их радиусы – R и r. Определить угловую скорость вращения барабана 2 в тот момент, когда груз 1 поднимется на высоту h. В начальный момент система находилась в покое. Массой троса пренебречь.

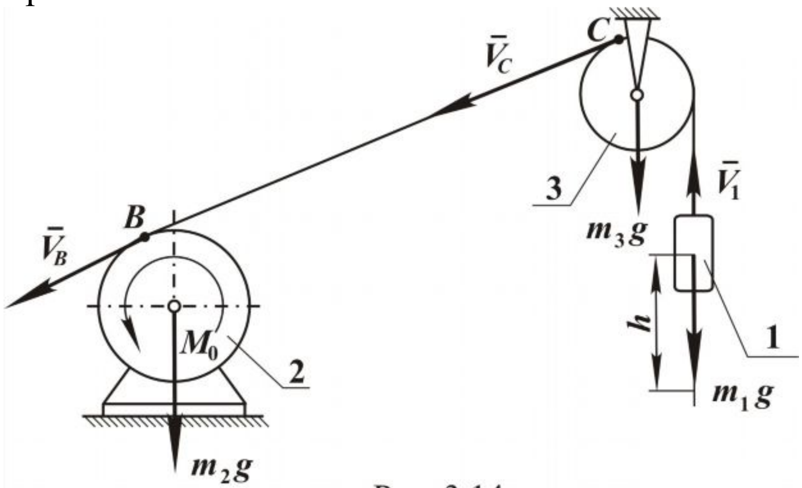

Рис. 3.14

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной системы

$$T - T_0 = A,$$

и так как в начальный момент система находилась в покое, то

$$T_0 = 0,$$

поэтому имеем

$$T = A,$$

где T – кинетическая энергия системы в конечный момент времени, A – работа сил, действующих на систему. Определяем кинетическую энергию системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T_1, T_2, T_3 – кинетическая энергия груза, блока и барабана соответственно.

Барабан и блок вращаются вокруг неподвижных осей, поэтому согласно формуле (3.42)

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2,$$

где ω_2, ω_3 – угловые скорости барабана и блока. Скорость точки B касания троса с барабаном равна $V_B = \omega_2 R$. Эту же скорость имеет и точка C касания троса с блоком, т.е. $\overline{V}_C = \overline{V}_B$. Зная скорость $\overline{V}_B$, находим угловую скорость блока

$$\omega_3 = \frac{V_B}{r},$$

откуда

$$V_B = \frac{\omega_2 R}{r}.$$

Следовательно,

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \frac{R^2}{r^2} \omega^2.$$

Груз 1 движется поступательно со скоростью

$$V_1 = V_C = \omega_2 R,$$

так как трос нерастяжим.

Кинетическая энергия груза равна

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2 \omega^2.$$

Подставляя выражения T_1, T_2, T_3 в выражение кинетической энергии системы, получаем

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{пр}} \cdot \omega_2^2,$$

где приведенный к оси вращения барабана момент инерции системы определяется равенством

$$J_{\text{пр}} = J_2 + J_3 \frac{R^2}{r^2} + m_1 R^2.$$

Перейдем теперь к определению работ. Работа сил тяжести барабана и блока, а также реакций их опор равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Работа силы тяжести груза равна:

$$A_1 = -m_1 g h.$$

Работу вращающего момента M_O вычисляем по формуле (3.32)

$$A_2 = M_0 \varphi_2,$$

где φ_2 – угол поворота барабана, равный h/R; таким образом,

$$A_2 = M_0\, h/R.$$

Работа всех сил, действующих на систему, равна

$$A = A_1 + A_2 = -m_1 g h + M_0 \frac{h}{R}.$$

Подставляя значения T и A в формулу $T = A$, получаем

$$\frac{1}{2}J_{\text{пр}}\omega_2^2 = M_0\frac{h}{R} - m_1gh,$$
откуда находим угловую скорость барабана
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{J_{\text{пр}}}(\frac{M_0}{R} - m_1g)h}\ .$$

3.11. Метод кинетостатики (Принцип Даламбера)

Для решения задач динамики несвободной материальной точки удобным является метод кинетостатики. Содержание этого метода заключается в следующем. Записываем основное уравнение (3.1) динамики точки в виде
$$\overline{F} + \overline{R} + (-m\overline{a}) = 0\ .$$
Введя обозначение $-m\overline{a} = \overline{\Phi}$, получаем
$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} = 0\ . \qquad (3.47)$$
Вектор $\overline{\Phi}$, равный по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленный противоположно вектору ускорения, называется силой инерции.

Равенство (3.47) представляет собой уравнение движения материальной точки, записанное в форме условия равновесия сил. В этом и заключается существо метода кинетостатики.

Метод кинетостатики является формальным приемом сведения уравнения динамики к форме уравнения статики.

Реакция связи, в соответствии с уравнением (3.47), равна
$$\overline{R} = -(\overline{F} + \overline{\Phi})\ .$$

Для решения конкретных задач векторное уравнение (3.47) необходимо спроецировать на соответствующие оси координат, в частности, на оси декартовой системы координат:
$$\begin{aligned} &F_x + R_x + \Phi_x = 0; \\ &F_y + R_y + \Phi_y = 0; \\ &F_z + R_z + \Phi_z = 0 \end{aligned} \qquad (3.48)$$
и на оси естественного трехгранника:
$$\begin{aligned} &F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau = 0; \\ &F_n + R_n + \Phi_n = 0. \end{aligned} \qquad (3.49)$$

Так же как и для одной материальной точки, дифференциальным уравнениям движения материальной системы можно придать форму уравнений статики. Этот метод часто применяется в инженерных расчетах, особенно при определении динамических реакций опор твердого тела.

Рассматриваем материальную систему, состоящую из n материальных точек.

Для каждой точки запишем основное уравнение динамики –

$$m_k\overline{a}_k = \overline{F}_k + \overline{R}_k\,,\ (k = 1,2,\ .\ .\ .,\ n)$$

и придадим вид уравнений статики

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0\,, \qquad (3.50)$$

где сила инерции $\overline{\Phi}_k = -m_k\overline{a}_k$.

Складывая почленно все уравнения (3.50), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k + \sum_{k=1}^{n}\overline{R}_k + \sum_{k=1}^{n}\overline{\Phi}_k = 0.$$

Первая сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k$ равна главному вектору $\overline{F}$ всех активных сил, приложенных к системе.

Вторая сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{R}_k$ – главному вектору $\overline{R}$ реакций связей.

Третья сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{\Phi}_k$ – главному вектору $\overline{\Phi}$ сил инерции.

Учитывая это, записываем уравнение кинетостатики

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} = 0\,, \qquad (3.51)$$

которое можно прочитать следующим образом:

В каждый момент времени движения материальной системы сумма главных векторов активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю.

Выберем произвольный неподвижный центр *О,* и положение каждой точки M_k определим с помощью радиуса вектора $\overline{r}_k$. Умножая каждое из уравнений (3.50) векторно слева на соответствующий $\overline{r}_k$ и складывая почленно все произведения, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k\cdot\overline{F}_k + \sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k\cdot\overline{R}_k + \sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k\cdot\overline{\Phi}_k = 0.$$

Первая сумма равна главному моменту $\overline{M}_O^F$ всех активных сил, приложенных к системе, вторая сумма – главному моменту $\overline{M}_O^R$ всех реакций связей системы, а последняя – главному моменту $\overline{M}_O^\Phi$ сил инерции. Следовательно, имеем

$$\overline{M}_O^F + \overline{M}_O^R + \overline{M}_O^\Phi = 0, \qquad (3.52)$$

то есть *в каждый момент времени движения материальной* *системы сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю.*

При решении конкретных задач от двух векторных уравнений (3.51), (3.52) переходят к шести уравнениям в проекциях на оси декартовых координат:

$$\left.\begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0; \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0; \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0; \\ M_x^F + M_x^R + M_x^\Phi &= 0; \\ M_y^F + M_y^R + M_y^\Phi &= 0; \\ M_z^F + M_z^R + M_z^\Phi &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

За оси координат можно выбрать любую систему декартовых осей, как неподвижных, так и перемещающихся произвольным образом в пространстве, но только каждый раз следует правильно определять проекции главного вектора $\bar{\Phi}$ и главного момента $\bar{M}_O^\Phi$ сил инерции.

Движение твердого тела полностью определяется этими шестью уравнениями кинетостатики, так же как равновесие твердого тела вполне определяется аналогичными шестью уравнениями за исключением проекций главного вектора сил инерции $\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}_y, \bar{\Phi}_z$ и проекций главного момента сил инерции $M_x^\Phi, M_y^\Phi, M_z^\Phi$.

Если рассматриваемая система состоит из нескольких тел, то уравнения кинетостатики можно составить для всей системы и для каждого тела в отдельности.

Пример. Тело массой m может скользить по поверхности призмы, имеющей угол наклона α (рис. 3.15). С каким ускорением $\bar{a}$ должна двигаться призма по горизонтальной поверхности, чтобы тело относительно призмы оставалось неподвижным? Трение скольжения между телом и призмой отсутствует.

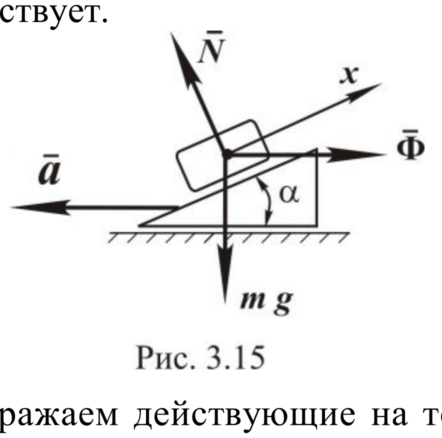

Рис. 3.15

Решение. Изображаем действующие на тело силы: $m\bar{g}$ – сила тяжести, $\overline{N}$ – нормальная реакция и $\overline{\Phi}$ – сила инерции, которая по модулю равна произведению массы тела на ускорение движения, то есть $\Phi = ma$ и направлена в противоположную сторону вектора ускорения $\overline{a}$.

С телом связываем ось x, направленную перпендикулярно реакции $\overline{N}$, так как по условию реакцию N находить не требуется.

Проецируем все силы на ось x

$$\Phi\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0,$$

то есть записываем уравнение кинетостатики, откуда находим силу инерции

$$\Phi = mg \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

и затем ускорение призмы

$$ma = mg \cdot \mathrm{tg}\alpha,$$

$$a = g \cdot \mathrm{tg}\alpha.$$

Видим, что ускорение должно быть тем больше, чем больше угол α. При α, стремящемся к $\pi/2$, ускорение стремится к бесконечности.

Пример. Центр тяжести C махового колеса смещен относительно его оси вращения на величину 1мм. Ось вращения вала горизонтальна (рис. 3.16). Масса колеса m=300 г, колесо находится на валу посередине. между подшипниками. и вращается равномерно, делая n = 1200 об/мин.

Найти статические и добавочные динамические реакции подшипников.

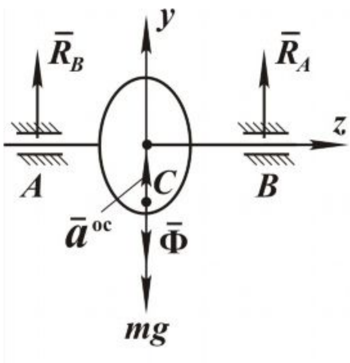

Рис. 3.16

Решение. Вначале определим статические реакции подшипников, направленные перпендикулярно оси вала, обозначив их R_{1A}, R_{1B}. Проецируем все силы на ось *у:*

$$R_{1A} + R_{1B} - mg = 0.$$

Здесь сила инерции не учитывается. Поскольку маховик находится в середине, между подшипниками, то статические реакции равны между собой и их значение определяется так:

$$R_{1A} = R_{1B} = \frac{mg}{2},$$

$$R_{1A} = R_{1B} = 150\ \text{Н}.$$

Для определения добавочных динамических реакций R_{2A}, R_{2B} воспользуемся методом кинетостатики, введя силу инерции $\overline{\Phi}$ маховика. Так как маховик вращается равномерно, то центр тяжести C имеет только осестремительное (нормальное) ускорение $\overline{a}^{\text{ос}}$, направленное к оси вала и равное $\omega^2 \cdot OC$.

Здесь ω – угловая скорость вращения маховика,

OC – смещение центра тяжести маховика относительно оси вращения.

Следовательно, сила инерции $\overline{\Phi}$ маховика направлена в противоположную сторону ускорения $\overline{a}^{\text{ос}}$, поэтому ее еще называют центробежной силой инерции. По модулю она равна

$$\Phi = m\omega^2 \cdot OC.$$

Определяем угловую скорость

$$\omega = \frac{2\pi n}{60},$$

или

$$\omega = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 40\pi\ \text{рад/с}.$$

Записываем уравнение кинетостатики в проекции на ось y

$$R_{2A} + R_{2B} - \Phi = 0.$$

Здесь сила тяжести $m\overline{g}$ не учитывалась.

Находим добавочные динамические реакции:

$$R_{2A} = R_{2B} = \frac{\Phi}{2},$$

$$R_{2A} = R_{2B} = \frac{1}{2} m \cdot OC \cdot \omega^2,$$

$$R_{2A} = R_{2B} = 2400\ \text{Н}.$$

Сравнивая статические и добавочные динамические реакции, видим, что последние в 1,6 раза больше первых. К тому же следует заметить, что динамические реакции пропорциональны квадрату угловой скорости, то есть при ее повышении они будут возрастать по квадратичному закону.