МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Ю.С. Захаревич, А.В. Захаревич

ЛОГИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАЩИТЫ

Методические указания
к практическим работам

Издательство
«АлКом»
2021

УДК 681.51.01(076.5)
ББК 32.965-01я73
З -38

Захаревич Ю.С.
З-38 Логическое управление и технологические защиты: методические указания к практическим работам / Ю.С. Захаревич, А.В. Захаревич Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во «АлКом», 2021. – 76 с.

В пособии представлены практические задания по дисциплине «Логическое управление и защиты» Каждая работа содержит краткое изложение теоретических сведений, разобранные примеры выполнения заданий и варианты для самостоятельной индивидуальной проработки изученного материала.

В практических работах затрагиваются законы алгебры логики Буля, основные логические элементы, известные методы построения и минимизации логических схем, а также вопросы синтеза и анализа конечных логических автоматов.

Предназначено для магистров, обучающихся по направлению 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника».

УДК 681.51.01(076.5)
ББК 32.965-01я73

Рецензенты
Доктор физико-математических наук, профессор ТПУ
П.А. Стрижак
Доктор технических наук, декан факультета инновационных технологий ТГУ
С.В. Шидловский

Содержание

Практическая работа №1

Логические элементы и схемы

1 Цель работы

Ознакомление с основными характеристиками логических элементов и основами синтеза логических схем.

2 Теоретические сведения

2.1 Определения комбинационных и последовательностных устройств

Устройства, реализующие функции алгебры логики (алгебры Дж.Буля), называют ***логическими (цифровыми, булевыми)***.

Классификация логических устройств:

1) по характеру информации на входах и выходах логические устройства подразделяют:

- устройства последовательного действия,
- устройства параллельного действия,
- устройства смешанного действия.

2) по схемному решению и характеру связи между входными и выходными переменными с учётом их изменения по тактам работы:

- комбинационные,
- последовательностные.

В ***комбинационных*** устройствах значения (0 или 1) сигналов на выходах в каждый конкретный момент времени полностью определяются значениями (комбинацией, набором) действующих в данный момент цифровых входных сигналов.

В ***последовательностных*** же устройствах значения выходных сигналов в n-такте определяются не только значениями входных сигналов в этом такте, но и зависят от внутренних состояний устройств, которые произошли в результате воздействия входных сигналов в предшествующие такты.

2.2 Основные элементы алгебры логики

Анализ комбинационных устройств удобно проводить с помощью алгебры логики, оперирующей только с двумя понятиями: истинным (логическая 1) и ложным (логический 0). В результате функции, отображающие информацию, принимают в каждый момент времени только значения 0 или 1. Такие функции называют ***логическими***, а сигналы (входные и выходные переменные) – ***двоичными (бинарными).***

Схемные элементы, при помощи которых осуществляется преобразование поступающих на их входы двоичных сигналов и непосредственное выполнение предусмотренных логических операций, называют ***логическими устройствами***.

В булевой алгебре выделяют ***три основные функции***:

– дизъюнкция,
– конъюнкция,
– инверсия.

Остальные функции являются производными от приведенных выше.

Основные логические операции состоят из следующих элементарных преобразований двоичных сигналов:

1) ***дизъюнкция (логическое сложение)***, обозначаемое символом "∨" (или "+") и называемое также операцией ***ИЛИ***. При этом число аргументов (слагаемых x) может быть любым.

Эта операция для функции двух переменных x_1 и x_2 описывается в виде логической формулы: $y = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2$.

Мнемо-правило для логической функции *ИЛИ*: Выход y будет равен ″1″ тогда и только тогда, когда хотя бы на одном из входов (аргументы x_1, x_2, x_n) будет ″1″; y будет равен ″0″ тогда и только тогда, когда на всех входах действует ″0″.

Условное обозначение, таблица истинности и другие показатели логической функции *ИЛИ* приведены в табл. 1.

2) ***конъюнкция (логическое умножение)***, обозначаемое символом "∧" (или "•") и называемое также операцией ***И***. При этом число аргументов (сомножителей x) может быть любым.

Эта операция для функции двух переменных x_1 и x_2 описывается в виде логической формулы: $y = x_1 \wedge x_2 = x_1 \bullet x_2 = x_1x_2$.

Мнемо-правило для логической функции *И*: Выход y будет равен ″1″ тогда и только тогда, когда на всех входах действует ″1″; y будет равен ″0″ тогда и только тогда, когда хотя бы на одном входе действует ″0″.

Условное обозначение, таблица истинности и другие показатели логической функции *И* приведены в табл. 1.

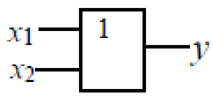
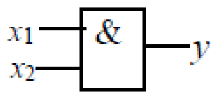
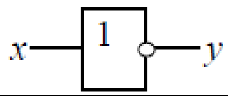
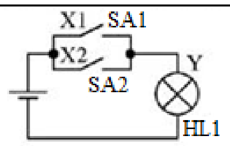
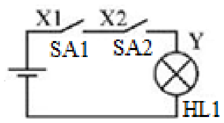
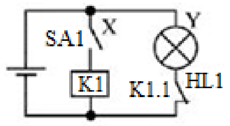
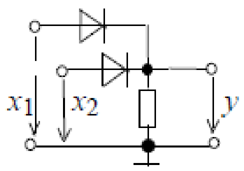
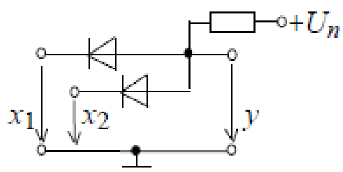
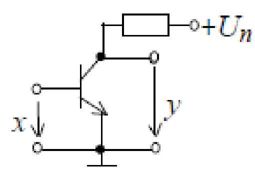
3) ***инверсия (логическое отрицание)***, обозначаемое чёрточкой над переменной и называемое операцией ***НЕ***.

Эта операция записывается в виде: $y = \overline{x}$. Очевидно, что операция y выполняется над одной переменной x и её значение всегда противоположно этой переменной.

Мнемо-правило для логической функции *НЕ*: Выход y будет равен "1" тогда и только тогда, когда на входе x действует "0"; y будет равен "0" тогда и только тогда, когда на входе x действует "1".

Условное обозначение, таблица истинности и другие показатели логической функции *НЕ* приведены в табл. 1.

Таблица 1 - Формы отображения основных логических функций

<table>
<tr><th>Наименование</th><th>Дизъюнкция</th><th>Конъюнкция</th><th>Инверсия</th></tr>
<tr><td>Символическая</td><td>∨ или +</td><td>∧ или ·</td><td>$\overline{x}$</td></tr>
<tr><td>Буквенная</td><td>ИЛИ</td><td>И</td><td>НЕ</td></tr>
<tr><td>Условная графическая</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Аналитическая</td><td>$y = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2$</td><td>$y = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$</td><td>$y = \overline{x}$</td></tr>
<tr><td>Табличная (истинности)</td><td>x_1 x_2 y
0 0 0
0 1 1
1 0 1
1 1 1</td><td>x_1 x_2 y
0 0 0
0 1 0
1 0 0
1 1 1</td><td>x y
0 1
1 0</td></tr>
<tr><td>Контактно-релейная схема</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Схемо-техническая</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Основные логические операции *ИЛИ, И*, *НЕ* позволяют аналитически описать, а логические элементы *ИЛИ* (*дизъюнктор*), *И* (*конъюнктор*) и *НЕ* (*инвертор*) – реализовать устройство любой степени сложности, т. е. операции $y = x_1 + x_2$, $y = x_1 x_2$ и $y = \overline{x}$ обладают функциональной полнотой и составляет полный набор.

В качестве примера рассмотрим производную от основных логических операций ***функцию неравнозначности*** y двух переменных x_1 и x_2, принимающую значение “1” при $x_1 \neq x_2$ и значение “0” при $x_1 = x_2 = 0$ или при $x_1 = x_2 = 1$.

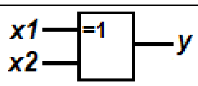
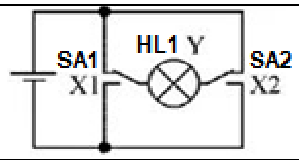
Эта операция записывается в виде: $y = \overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2}$.

Операцию неравнозначности чаще называют ***суммированием по модулю 2 (исключающее ИЛИ)*** и обозначают y = x1 ⊕ x2.

Мнемо-правило для логической функции *исключающее ИЛИ*: Выход *y* будет равен ″1″ тогда и только тогда, когда на всех входах действует нечетное количество, *y* будет равен ″0″ тогда и только тогда, когда на входах действует четное количество.

Условное обозначение и таблица истинности операции исключающее ИЛИ приведены в табл. 2.

Таблица 2 - Формы отображения логической функции Исключающее ИЛИ

Название элемента	Условное обозначение элемента	Таблица истинности			Условное обозначение логической операции	Контактно-релейная схема
Исключающее ИЛИ (сложение по модулю 2)		0	0	0	x1 ⊕ x2	
		0	1	1		
		1	0	1		
		1	1	0		

Помимо обозначенных основных логических операций в цифровой электронике особое значение имеют универсальные (базовые) логические элементы, с помощью которых можно реализовать синтез устройств любой сложности. К универсальным логическим операциям (устройствам) относят две разновидности базовых элементов:

1) ***функция Пирса***, обозначается символически вертикальной стрелкой ↓ ***(стрелка Пирса)*** и отображает операцию ***ИЛИ-НЕ***.

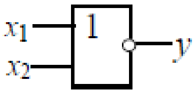
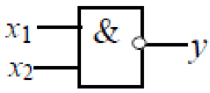
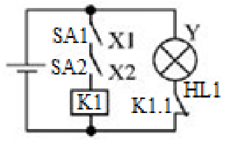
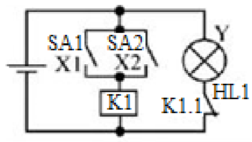
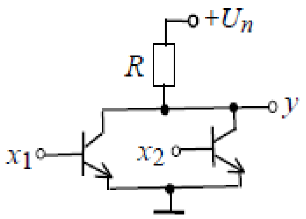
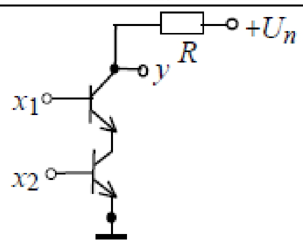
Мнемо-правило для логической функции *ИЛИ-НЕ:* Для простейшей функции двух переменных x_1 и x_2 функция $y = 1$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = 0$: $y = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 + x_2}$, выход $y = 0$ тогда и только тогда, когда хотя бы на одном входе действует ″1″.

2) ***функция Шеффера,*** обозначается символически вертикальной черточкой | ***(штрих Шеффера)*** и отображает операцию ***И-НЕ***.

Мнемо-правило для логической функции *И-НЕ:* Для простейшей функции двух переменных x_1 и x_2 функция $y = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = 1$: $y = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 x_2}$, выход $y = 1$ тогда и только тогда, когда хотя бы на одном входе действует ″0″.

При одних и тех же значениях аргументов обе функции отображают операцию инверсии. Важнейшие показатели функций Шеффера и Пирса представлены в табл. 3.

Таблица 3 - Форма отображения универсальных логических функций

Наименование	Функция Пирса	Функция Шеффера
Символическая	$\downarrow$	$\vert$
Буквенная	ИЛИ-НЕ	И-НЕ
Условная графическая		
Аналитическая	$y=x_1\downarrow x_2$	$y=x_1 \vert x_2$
Табличная (истинности)	x_1 x_2 y 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	x_1 x_2 y 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
Контактная		
Схемо-техническая		

В последней строке табл. 3 приведены примеры построения двухвходовой схемы *ИЛИ-НЕ*, в которой к нагрузочному резистору R подключены коллекторы двух параллельно включенных биполярных транзисторов р-п-р-типа, эмиттеры которых заземлены, и схемы *И-НЕ*, в которой последовательно включены два биполярных транзистора р-п-р-типа (эмиттер нижнего транзистора подключен к земле) и нагрузочный резистор R.

2.3 Алгебра логических цепей

Алгебра логики – это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания (оперирует логическими “0” и “1”).

Создателем алгебры логики является английский математик Джордж Буль (XIX век), в честь которого алгебра логики часто называется *булевой алгеброй*.

В постулатах и теоремах алгебры логики переменные подчиняются правилам, которые в основном совпадают с правилами стандартной алгебры, но есть и свои особенности, связанные с тем, что цифры “0” и “1” не рассматриваются как числа в обычном арифметическом смысле, а характеризуют условия работы логических цепей или состояния релейных элементов (закрыто/открыто, замкнуто/разомкнуто и т.д.).

Постулаты (аксиомы) алгебры логики:

1) $0 + 0 = 0$	5) $1 \cdot 1 = 1$
2) $1 + 1 = 1$	6) $0 \cdot 0 = 0$
3) $1 + 0 = 0 + 1 = 1$	7) $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$
4) $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$	

Теоремы для 1-ой переменной, если x – двоичное число, верно:

1) $x + 0 = x$	6) $x \cdot x = x$
2) $x \cdot 1 = x$	7) $(\overline{x}) = x$
3) $1 + x = 1$	8) $\overline{(\overline{x})} = x$
4) $0 \cdot x = 0$	9) $x + \overline{x} = 1$
5) $x + x = x$	10) $x \cdot \overline{x} = 0$

Теоремы доказываются методом перебора, т.к. x может принимать только значение ″0″ и ″1″, то можно легко проверить истинность теорем.

Можно заметить, что Аксиомы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, а также Теоремы 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8, 9 и 10 попарно *двойственные*, т.е. одно равенство получается из другого путем одновременной замены ″0″ и ″1″ и операций сложения и умножения. Об этом гласит принцип двойственности.

Принцип двойственности: любой постулат может быть преобразован в другой постулат одновременной заменой ″0″ и ″1″, а так же операций сложения на умножение и наоборот.

Из перечисленных теорем для одной переменной важными являются Теоремы 3 и 5. Приведем примеры, иллюстрирующие применение этих теорем.

Пример 1.

Пусть $y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, если известно, что хотя бы один из аргументов $x_1 \ldots x_5$ равен ″1″, то по Теореме 3 $y = 1$.

Пример 2.

Пусть $y = x_1 + x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_3 + x_1x_2x_3$, по Теореме 5 один из повторяющихся аргументов $x_1x_2x_3$ является лишним. Поэтому его можно откинуть, при этом результат выражения не изменится: $y = x_1 + x_2x_3 + x_3$.

Часто для упрощения выражения Теорему 5 применяют в обратном виде, т.е. наоборот добавляют повторяющееся слагаемое в выражение, чтобы затем сгруппировать и упростить его слагаемые.

Теоремы для 2-х и 3-х переменных, если *x, y, z* – двоичные числа, верно:

Переместительный закон:

11) $x + y = y + x$

12) $x \cdot y = y \cdot x$

13) $x + x \cdot y = x$

14) $x \cdot (x + y) = x$

15) $(x + \overline{y}) \cdot y = x \cdot y$

16) $x \cdot \overline{y} + y = x + y$

Сочетательный закон:

17) $x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$

18) $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Распределительный закон:

19) $x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$

20) $(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$

21) $(x + y) \cdot (y + z)(z + \overline{x}) = (x + y) \cdot (z + \overline{x})$

22) $x \cdot y + y \cdot z + z \cdot \overline{x} = x \cdot y + z \cdot \overline{x}$

23) $(x + y) \cdot (\overline{x} + z) = x \cdot z + \overline{x} \cdot y$

Теоремы 11, 12, 17, 18, 19 подтверждают тот факт, что в алгебре логики, так же как и в обычной алгебре справедливы переместительный, сочетательный и распределительный законы.

Теоремы 11 и 12, 13 и 14, 15 и 16, 17 и 18, 19 и 20, 21 и 22 аналогично являются попарно двойственными, т.е. для них справедлив принцип двойственности.

Теоремы для n-переменных.

В общем виде инверсные соотношения (или двойственные) для логических переменных *x, y, z* … выражаются *теоремой де-Моргана*:

1. $(\overline{x + y + z + \ldots}) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \ldots,$

2. $(\overline{x \cdot y \cdot z \cdot \ldots}) = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} \ldots$

Обобщая Теоремы 1 и 2, *Шеннон* предложил общую запись:

3. $\overline{f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, +, *)} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots \overline{x_n}, *, +)$

Таким образом, инверсия любой функции получается заменой любой переменной ее инверсией и одновременной заменой операций конъюнкции и дизъюнкции.

Пример 3.

$$f = x \cdot (z + w \cdot \overline{y}) + \overline{z} \cdot y$$

$$\overline{f} = \overline{x} + (\overline{z} \cdot (\overline{w} + y)) \cdot (z + \overline{y}) = \overline{x} + \overline{z} \cdot (\overline{w} + y) \cdot (z + \overline{y})$$

Понятие инверсии важно для синтеза и преобразования структуры релейных устройств.

В двузначных системах для каждой структуры существует другая структура, которая имеет действие, в точности инверсное (противоположное) первой. Инверсией пользуются для упрощения функции и схемы релейных цепей.

Помимо рассмотренных выше Постулатов и Теорем алгебры логики Буля для упрощения аналитической записи функции проводимости часто бывает полезно использовать следующее **Правило**:

«Если в первоначальной функции проводимости содержится какой-либо член, включающий все возможные комбинации меньшей группы переменных, то этот член равен единице».

Покажем применение данного правила на примере.

Пример 4.

Необходимо упростить функцию проводимости:

$$F = \overline{w} \cdot \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{w} \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{w} \cdot x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{w} \cdot x \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{w} \cdot x \cdot y \cdot z + w \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} =$$
$$= \overline{w} \cdot \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{w} \cdot x \cdot \underbrace{(\overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot z + y \cdot \overline{z} + y \cdot z)}_{=1} + w \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} = \overline{w} \cdot \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{w} \cdot x + w \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$$

Согласно Теореме № 5 x + x = x, следовательно, в получившееся выражение можно добавить еще одно слагаемое $\overline{w} \cdot x$. От этого смысл выражения не изменится, но зато этот прием позволит еще более упростить выражение:

$$F = \overline{w} \cdot \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{w} \cdot x + w \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{w} \cdot x = \overline{w} \cdot (\overline{x} \cdot y \cdot z + z) + x \cdot (w \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{w})$$

Применим к выражениям в скобках Теорему №16, получим:

$$F = \overline{w} \cdot (y \cdot z + x) + x \cdot (\overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{w}) = \overline{w} \cdot y \cdot z + \overline{w} \cdot x + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{w} = \overline{w} \cdot x + \overline{w} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}.$$

Способности распознавать возможности упрощений главным образом зависят от опыта проектировщика. Однако, если пользоваться некоторыми рекомендациями, то так же можно найти способы упрощения функции.

Общий алгебраический прием уменьшения сложности релейных функций:

1) каждый член функции проводимости сравнивается с остальными членами. Везде, где возможно, выносится общий член за скобку согласно Теореме 19 с учетом дальнейшего применения Теорем 3, 5, 9, 16. Такая процедура повторяется до тех пор, пока не останется, что упрощать;

3) затем отбрасываются избыточные члены по Теоремам 1 - 6, 10;

4) оставшиеся слагаемые называются *простыми импликантами*;

2.4 Типовые релейно-контактные схемы

Основные схемные соединения релейно-контактных устройств:

1) *Последовательное соединение*

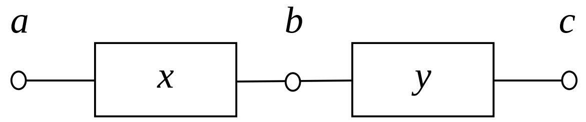


Рисунок 1 - Структурная схема последовательного соединения:
x, y – логические контактно-релейные двухполюсники

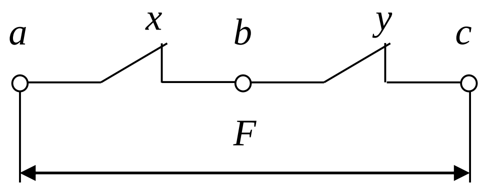


Рисунок 2 – Контактно-релейная схема последовательного соединения:
F – функция проводимости, характеризующая состояние цепи замкнута/разомкнута

Функция F соответствует операции логического умножения $F = x \cdot y$, т.е. логическому элементу «И».

Таблица состояний последовательного соединения:

x	y	$F = x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2) *Параллельное соединение*

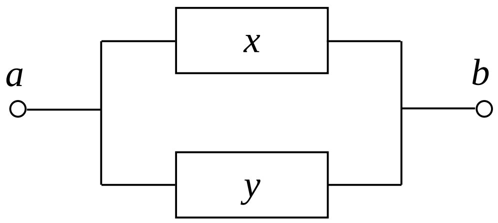


Рисунок 3 - Структурная схема параллельного соединения:
x, *y* – логические контактно-релейные двухполюсники

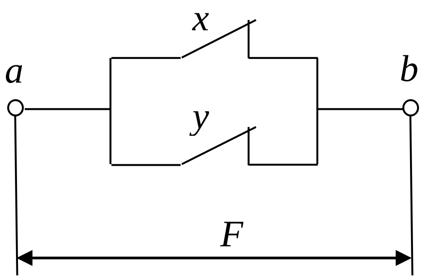


Рисунок 4 – Контактно-релейная схема параллельного соединения:
F – функция проводимости, характеризующая состояние цепи
замкнута/разомкнута

Функция *F* соответствует операции логического сложения $F = x+y$, т.е. логическому элементу «ИЛИ».

Таблица состояний параллельного соединения:

x	*y*	*F= x+y*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3) П*оследовательно-параллельное соединение*

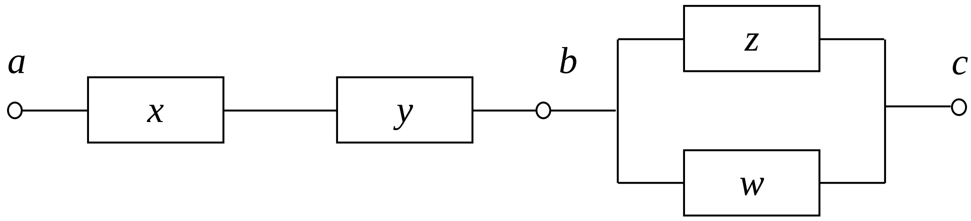


Рисунок 5 - Структурная схема последовательно-параллельного соединения:
x, *y* – логические контактно-релейные двухполюсники

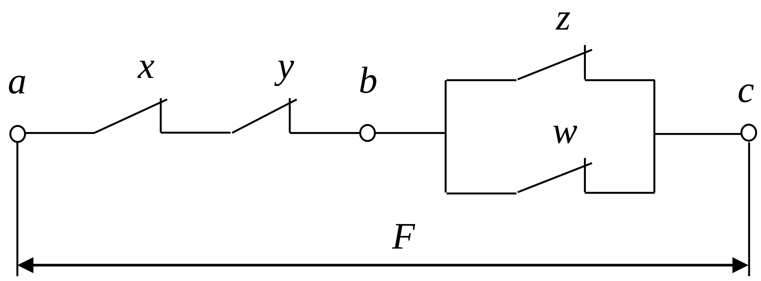


Рисунок 6 – Контактно-релейная схема последовательно-параллельного соединения: F – функция проводимости, характеризующая состояние цепи замкнута/разомкнута

Функция F соответствует логической операции $F = x \cdot y \cdot (z+w)$.

Таблица состояний последовательно-параллельного соединения:

x	y	z	w	$F = x \cdot y(z+w)$
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
…	…	…	…	…
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

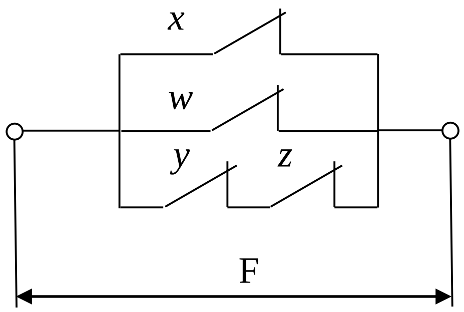
Всем приведенным структурам контактно-релейных схем свойственна двойственность.

Двойственным логическому элементу N является инверсное устройство $\overline{N}$, цепи в котором разомкнуты, когда в устройстве N цепи замкнуты и наоборот, а последовательное соединение заменено на параллельное.

По выражению функции проводимости можно построить последовательно-параллельную структуру зная, что умножение означает последовательное соединение, а сложение – параллельное.

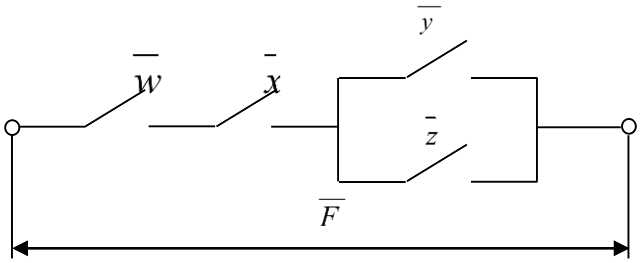
Пример 5.

Пусть дана: $F = w + x + y \cdot z$. Построим контактно-релейную схему, соответствующую заданной функции проводимости:



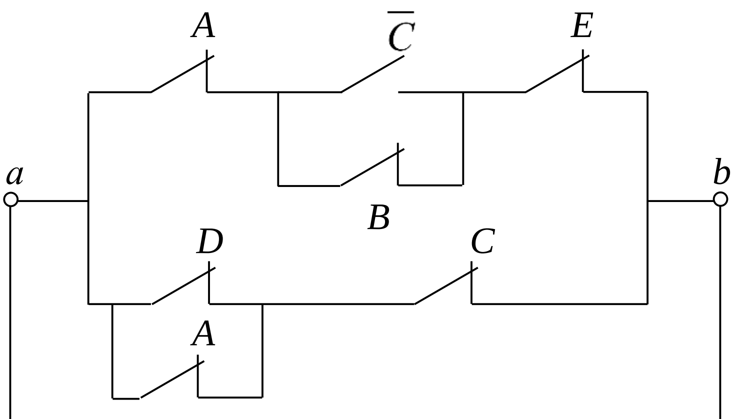
Составим инверсную (двойственную) функцию проводимости: $\overline{F} = \overline{w} \cdot \overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z})$.

Построим инверсную (двойственную) контактно-релейную структуру:



Пример 6.

Необходимо составить функцию проводимости *F* по заданной контактно-релейной схеме:



Зная, что последовательное соединение соответствует операции умножения, параллельное соединение соответствует сложению, замкнутый контакт соответствует элементу, а разомкнутый контакт - его инверсии, запишем выражение функции проводимости:

$F = (A \cdot (\overline{C} + B) \cdot E) + ((D + A) \cdot C)$

Теперь составим инверсную функцию проводимости к полученной, взаимно заменяя операции сложения и умножения, а элементы – их инверсией:

$$F = (\overline{A} + C \cdot \overline{B} + \overline{E}) \cdot ((\overline{D} \cdot \overline{A}) + \overline{C}).$$

Инверсную контактно-релейную структуру можно начертить, не составляя функцию проводимости. Для этого достаточно в заданной структуре взаимно заменить последовательное соединение и параллельное, а также разомкнутые контакты и замкнутые.

3 Задания для самостоятельного выполнения

Для заданной функции проводимости *F*, согласно своему варианту (табл.4) построить контактно-релейную схему, найти инверсную функцию проводимости и по ней составить инверсную контактно-релейную структуру.

! Прежде чем строить релейную схему, необходимо упростить представленные выражения *F*, используя теоремы алгебры логики.

Таблица 4 - Варианты заданий

№ варианта	Вид формулы
1.	$F=A+\overline{(D\cdot C)}\cdot B+\overline{(\overline{A}+B+D)}\cdot C$
2.	$F=\overline{(D+C)}+\overline{A\cdot D}+(\overline{B}+C)\cdot A$
3.	$F=\overline{B}\cdot A+\overline{(C\cdot A\cdot D)}+(A+D)\cdot\overline{C}$
4.	$F=\overline{(C+\overline{A}+D)}\cdot B+A+\overline{\overline{D}\cdot C}$
5.	$F=A+\overline{(\overline{D}+\overline{C}+A)}+D\cdot\overline{(1+B)}$
6.	$F=D+\overline{(A\cdot B)}\cdot C+\overline{(\overline{C}+B+\overline{D})}$
7.	$F=B+\overline{D}+C+\overline{(A\cdot\overline{C})}+\overline{(\overline{A}+B)}\cdot D$
8.	$F=(\overline{C}+D)\cdot(A+B)+\overline{(\overline{A}\cdot D+C)}$
9.	$F=\overline{(\overline{B}+D)}\cdot(A+C) + A+\overline{\overline{D}\cdot B\cdot C}$
10.	$F=\overline{C\cdot\overline{A}}+D+A\cdot B+B\cdot\overline{(D+A)}$
11.	$F=\overline{\overline{X}\cdot Y\cdot Z}+\overline{(Y+W)}\cdot Z+\overline{Y}+X\cdot Z$
12.	$F=\overline{(X\cdot\overline{Y}+W)}+Y\cdot Z+(Y+\overline{X})\cdot Z$

Продолжение таблицы

13.	$F=Y+\overline{Z}+\overline{W\cdot Z}+\overline{(\overline{Y}+X\cdot Z)}\cdot W$
14.	$F=\overline{(W+\overline{X}+Y)}\cdot Z+W\cdot X+Y+\overline{Y}$
15.	$F=\overline{X\cdot W\cdot \overline{Y}}+\overline{(\overline{X}+Z)}\cdot\overline{(Y+\overline{W})}+W$
16.	$F=X\cdot\overline{(X+\overline{W}\cdot Y)}+\overline{(X+Z)}\cdot\overline{(Z+W)}$
17.	$F=(Z+\overline{Z})\cdot Y+\overline{(\overline{W}+\overline{Z}+Y)}\cdot Y\cdot W+\overline{Y\cdot Z}$
18.	$F= \overline{W}+Y+\overline{(X+\overline{Z}+X)}\cdot(1+W)+\overline{\overline{W}\cdot Z}$
19.	$F=(1+X+Y)\cdot Z+\overline{(X+W+Y)}(W+Z)$
20.	$F=\overline{W\cdot Y\cdot\overline{X}}+\overline{(X+\overline{Z})}\cdot Z+\overline{(Y+1)}\cdot W$
21.	$F=1\cdot X\cdot Z+\overline{(W+\overline{Y}+Z)}\cdot W+\overline{\overline{X}\cdot Y\cdot Z}$
22.	$F=\overline{(Y+W+\overline{Z})}+Y\cdot\overline{(\overline{X}+Z)}+W\cdot Y\cdot X+Y$
23.	$F=X\cdot Z+\overline{(Y+1)}+(W+X+Z+Y)\cdot X+X\cdot\overline{Z}+Y$
24.	$F= Y\cdot(X+Z)+\overline{\overline{W}\cdot X\cdot Y}+W\cdot(X+Z)+(X+Z)+\overline{Y}\cdot W$
25.	$F=Z\cdot\overline{(\overline{W}+Y)}+\overline{(\overline{1}+X+Y)}+X\cdot Y\cdot\overline{W}+(Y+Z)$

Практическая работа № 2

Синтез логических функций по таблице состояний

1 Цель работы

Освоение навыками синтеза логических функций по таблице состояний в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) и совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ).

2 Теоретические сведения

Наиболее распространенным способом задания логических функций и условий работы релейно-контактной схемы является табличная форма. **Таблицы истинности (таблицы состояний)** позволяют полно и однозначно установить все существующие логические связи.

Рассмотрим релейно-контактную схему:

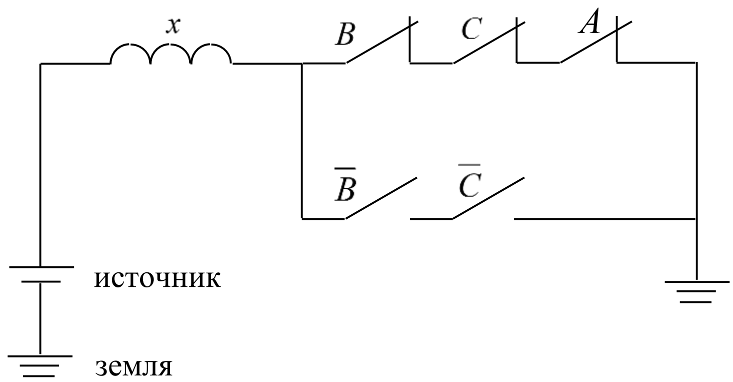


Рисунок 1 – Релейно-контактная схема:
x – рабочая обмотка реле, *A, B, C*– контакты реле

Функция проводимости для схемы (рис. 1) будет иметь вид:

$F= A\cdot B\cdot C+\overline{B}\cdot\overline{C}.$

По схеме на рисунке 1 составим таблицу истинности. Таблица истинности содержит всевозможные комбинации (наборы) бинарных значений входных переменных с соответствующими им бинарными значениями выходных переменных; каждому набору входных сигналов соответствует определенное значение выходного сигнала − значение логической функции F_i.

Максимальное число возможных различных наборов (строк таблицы истинности) зависит от числа входных переменных n и равно $\mathbf{2^n}$.

Для схемы на рисунке 1 число входных переменных n = 3, поэтому таблица состояний будет иметь 2^3=8 строк.

Таблица истинности для схемы на рис. 1:

A	*B*	*C*	*F*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Для составления контактно-релейной схемы по таблице истинности бывает достаточным указать в таблице только состояния, соответствующие единичным проводимостям. Такая таблица, в которой указаны только единичные проводимости, называется ***частично заполненной***.

Одной из особенностей полной или частично заполненной таблицы состояний является то, что она обеспечивает проектировщику автоматическую проверку полноты описания работы устройства, независимо от того заполнена ли таблица полностью или частично.

Частично заполненная таблица, в которой перечислены состояния, соответствующие проводимости равной единице, вместе с утверждением, что для всех других состояний проводимость равна нулю, полностью определяет состояние устройства.

Синтезировать контактно-релейную структуру или логическое выражение функции проводимости по таблице состояний можно двумя способами:

1. В совершенной дизъюнктивной нормальной форме - СДНФ (в форме стандартной суммы):

Аналитическое выражение логической функции в СДНФ получают из таблицы истинности следующим образом: для каждого набора аргументов, при котором функция равна единице, записывают элементарные произведения переменных, причем переменные, значения которых равны нулю, записывают с инверсией. Полученные произведения, называемые *конституентами единицы или минтермами*, суммируют.

Контактно-релейную структуру из таблицы истинности получают следующим образом: для каждого состояния входов, которым соответствует единица, на выходе строится последовательная цепочка контактов, а затем эти цепочки соединяются параллельно. Причем, переменным, значения которых равны нулю (инверсные переменные), соответствует разомкнутый контакт, а переменным, значения которых равны единице, соответствует замкнутый контакт.

Функция проводимости, записанная в СДНФ по таблице состояний 1, будет иметь вид:

$$F = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C$$

СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма) – является канонической (т.е. единственно возможной) формой представления булевой функции в виде ДНФ (дизъюнктивной нормальной форме), в которой повторы слагаемых и сомножителей запрещены. Кроме того, в каждом слагаемом должны присутствовать все переменные (в прямой или инверсной форме).

В то время как вариантов ДНФ может быть несколько. Форма записи функции в ДНФ предполагает, что булева формула имеет вид дизъюнкции конъюнкций переменных.

Минимальная форма ДНФ (МДНФ), которая получается после упрощения СДНФ с использованием теорем алгебры логики, будет единственно возможной.

Вычислим минимальную ДНФ для полученной СДНФ:

$$F = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C} + B\cdot C) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A = \overline{B}\cdot\overline{C} + A.$$

Построим контактно-релейную структуру, соответствующую минимальной форме ДНФ (рис. 2).

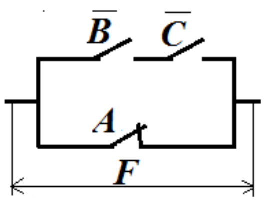


Рисунок 2 – Контактно-релейная структура для МДНФ

Построим контактно-релейную структуру для СДНФ функции проводимости (рис. 3).

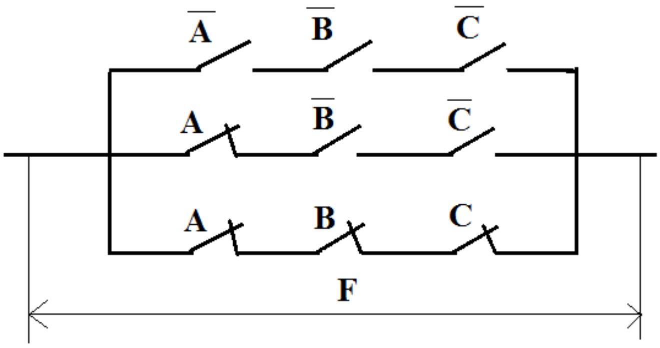


Рисунок 3 - Контактно-релейная структура для СДНФ

2. В совершенной конъюктивной нормальной форме - СКНФ (в форме стандартного произведения):

Аналитическое выражение логической функции в СКНФ получают из таблицы истинности следующим образом: для каждого набора аргументов таблицы истинности, при котором функция равна нулю, составляют элементарную сумму, причем переменные, значения которых равны единице, записывают с инверсией. Полученные суммы, называемые *конституентами нуля или макстермами*, объединяют операцией логического умножения.

Контактно-релейную структуру из таблицы истинности получают следующим образом: устанавливают совокупности параллельно соединенных контактов, которые дают проводимость, равную нулю (на выходе), а затем параллельные группы соединяются последовательно друг с другом. Причем, переменным, значения которых равны единице (инверсные переменные), соответствует разомкнутый контакт, а переменным, значения которых равны нулю, соответствует замкнутый контакт.

Функция проводимости, записанная в СКНФ по таблице состояний 1, будет иметь вид:

$$F=(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

Аналогично, СКНФ *(совершенная конъюнктивная нормальная форма)* – является канонической формой представления булевой функции в виде КНФ (конъюнктивной нормальной форме), в которой повторы слагаемых и сомножителей запрещены. Кроме того, в каждом сомножителе должны присутствовать все переменные (в прямой или инверсной форме).

Вариантов представления функции проводимости в КНФ может быть несколько. Форма записи функции в КНФ предполагает, что булева формула имеет вид конъюнкции дизъюнкций переменных.

Минимальная форма КНФ (МКНФ), которая получается после упрощения СКНФ с использованием теорем алгебры логики, будет единственно возможной.

Вычислим минимальную КНФ для полученной СКНФ:

$$F=(A+B+\bar{C})\cdot(A+\bar{B}+C)\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(\bar{A}+B+\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+C)=$$

$$(A+A\cdot\bar{B}+A\cdot C+B\cdot A+B\cdot C+\bar{C}\cdot A+\bar{C}\cdot\bar{B})\cdot(A\cdot B+A\cdot\bar{C}+\bar{B}\cdot\bar{A}+\bar{B}\cdot\bar{C}+\bar{C}\cdot\bar{A}+\bar{C}\cdot B)\cdot(\bar{A}+\bar{B}+C)=$$

$$=A\cdot\bar{C}\cdot(\bar{A}+\bar{B}+C)=A\cdot\bar{C}\cdot\bar{B}.$$

Построим контактно-релейную структуру для минимальной формы КНФ (рис. 4).

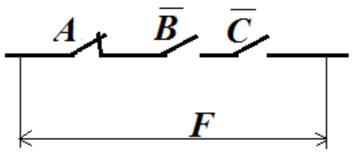


Рисунок 4 - Контактно-релейная структура для МКНФ

Контактно-релейная структура, составленная для СКНФ функции проводимости, представлена на рис. 5:

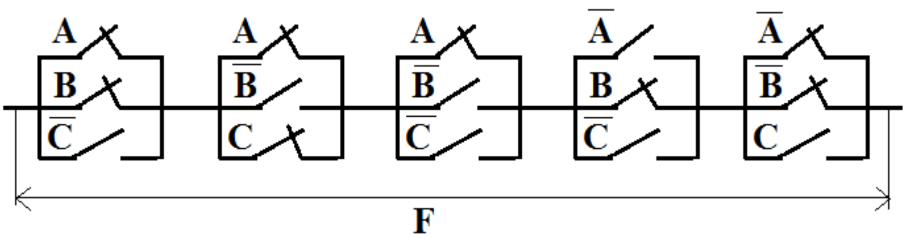


Рисунок 5 - Контактно-релейная структура для СКНФ

Из рассмотренного примера следует два вывода:

1. Контактно- релейную структуру лучше составлять по минимальным формам ДНФ и КНФ, т.к. их действие эквивалентно соответствующим СДНФ и СКНФ, но *структура будет иметь наименьшее количество контактов.* С точки зрения физической реализации контактно-релейной схемы, несомненно, более выгодным является использование минимально возможного количества контактных устройств с сохранением аналогичной функциональности.

2. *Наиболее удобной для последующего упрощения является совершенная дизъюнктивная нормальная форма*, представленная в виде

суммы произведений. Именно по этой причине чаще функцию проводимости синтезируют по таблице истинности в форме СДНФ.

Заметим, что КНФ можно получить не только из таблицы истинности, но и переходом от ДНФ. Переход от ДНФ к КНФ осуществляется путем двойного отрицания функции проводимости в ДНФ и дальнейшего преобразования с использованием последовательно Теоремы де Моргана два раза. Для рассмотренного случая:

$$\overline{\overline{(\overline{B}\cdot\overline{C}+A)}} = \overline{(\overline{\overline{B}\cdot\overline{C}}) \cdot \overline{A})} = \overline{(B+C) \cdot \overline{A}} = \overline{(B+C)} + A = \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot A$$

Путем перехода от ДНФ к КНФ получили выражение, аналогичное полученной ранее минимальной КНФ.

Переход от КНФ к ДНФ осуществляется путем простого раскрытия скобок и упрощения функции с использованием Теорем алгебры логики.

Пример 1.

Для заданной функции проводимости $F = (a+\overline{b})\cdot(c+b)$ составить таблицу состояний. По полученной таблице состояний синтезировать функцию проводимости в СДНФ и СКНФ, построить соответствующие контактно-релейные схемы.

Решение:

Функция F – это функция 3-х переменных, поэтому количество возможных состояний, т.е. строк в таблице истинности будет равно $2^3=8$ строк.

Составим таблицу истинности для заданной функции F, записав в нее все возможные комбинации переменных a, b, c. Значения функции F для каждой комбинации входных переменных находим путем подстановки в аналитическое выражение функции проводимости значений переменных a, b, c.

Таблица истинности

a	b	c	$F = (a+\overline{b})\cdot(c+b)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Из полученной таблицы истинности составим функцию проводимости в СДНФ. Для этого выбираем из таблицы только те строки, в которых комбинация входных переменных *a, b, c* дают функцию $F = 1$ и записываем для этих строк произведение переменных, учитывая, что если входная переменная в этом наборе равна нулю, то она записывается с инверсией. Полученные произведения складываем.

$$F = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c + a\cdot\bar{b}\cdot c + a\cdot b\cdot\bar{c} + a\cdot b\cdot c$$

Строим контактно-релейную схему для функции проводимости в СДНФ (рис. 6).

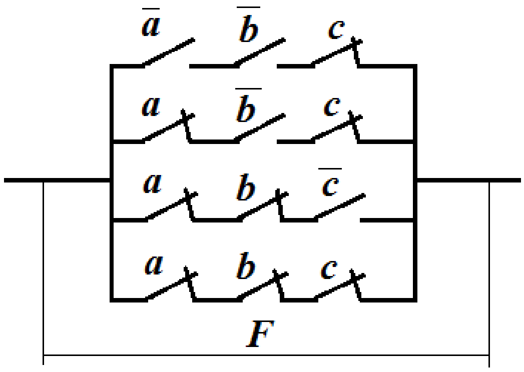


Рисунок 6 - Контактно-релейная структура для СДНФ

Синтезируем из таблицы истинности функцию проводимости в СКНФ. Для этого выбираем из таблицы только те строки, в которых комбинация входных переменных *a, b, c* дают функцию $F = 0$ и записываем для этих строк сумму переменных, учитывая, что если входная переменная в этом наборе равна единице, то она записывается с инверсией. Полученные суммы перемножаем:

$$F = (a+b+c)\cdot(a+\bar{b}+c)\cdot(a+\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{a}+b+c)$$

Строим контактно-релейную схему для функции проводимости в СКНФ (рис. 7).

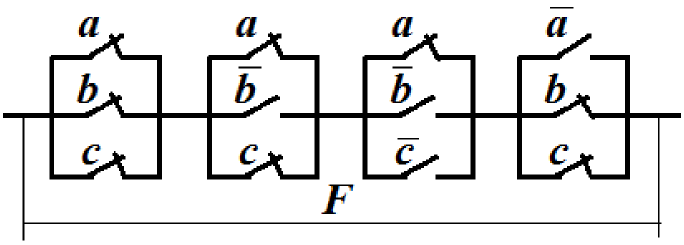


Рисунок 7 - Контактно-релейная структура для СКНФ

Пример 2.

Для функции проводимости $y = (x+\overline{w})\cdot(z\cdot w+x\cdot\overline{z})$ составить таблицу состояний. По полученной таблице состояний синтезировать функцию проводимости в СДНФ и СКНФ. Найти минимальную ДНФ, используя теоремы алгебры логики. Выполнить перевод КНФ в ДНФ.

Решение:

Составляем таблицу истинности из $2^3 = 8$ строк.

Таблица истинности

x	w	z	$y = (x+\overline{w})\cdot(z\cdot w+x\cdot\overline{z})$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Синтезируем из таблицы истинности функцию проводимости в СДНФ:

$y=x\cdot\overline{w}\cdot\overline{z}+ x\cdot w\cdot\overline{z}+ x\cdot w\cdot z.$

Найдем минимальную ДНФ для функции *y*, упростив с помощью теорем:

$y=x\cdot\overline{w}\cdot\overline{z}+ x\cdot w\cdot\overline{z}+ x\cdot w\cdot z= x\cdot\overline{w}\cdot\overline{z}+ x\cdot w\cdot(\overline{z}+z)=x\cdot(\overline{w}\cdot\overline{z}+w)=x\cdot(\overline{z}+w).$

Синтезируем из таблицы истинности функцию проводимости в СКНФ:

$y=(x+w+z)\cdot(x+w+\overline{z})\cdot(x+\overline{w}+z)\cdot(x+\overline{w}+\overline{z})\cdot(\overline{x}+w+\overline{z})$

Выполним перевод КНФ в ДНФ. Для этого раскроем скобки в СКНФ и упростим с применением теорем логики, получим ту же минимальную ДНФ функции проводимости *y*:

$y=(x+w+z)\cdot(x+w+\overline{z})\cdot(x+\overline{w}+z)\cdot(x+\overline{w}+\overline{z})\cdot(\overline{x}+w+\overline{z})=$

$=(x+x\cdot w+x+w+w)\cdot(x+x\cdot\overline{w}+x+\overline{w}+\overline{w})\cdot(\overline{x}+w+\overline{z})=(x+w)\cdot(x+\overline{w})\cdot(\overline{x}+w+\overline{z})=$

$=(x+x\cdot\overline{w}+x\cdot w)\cdot (\overline{x}+w+\overline{z})=x\cdot(\overline{x}+w+\overline{z})=x\cdot(w+\overline{z}).$

3 Задания для самостоятельного выполнения

Для заданной функции проводимости y, согласно варианту (табл.1), составить таблицу истинности, аналитическую форму записи функции y в СДНФ и СКНФ, построить соответствующие контактно-релейные схемы функции y в СДНФ и СКНФ.

Таблица 1 - Варианты заданий

№ варианта	Вид формулы
1.	$y = (a + b)\cdot(\bar{c} + d) + (c + \bar{a})\cdot d$
2.	$y = (a + d)\cdot(\bar{c} + d) + (b + \bar{a})\cdot(a + c)$
3.	$y = (a + b)\cdot(c + \bar{d}) + (c + \bar{a})\cdot b$
4.	$y = (a + b)\cdot(\bar{c} + d)\cdot(c + \bar{a}) + (d + a)$
5.	$y = (a + b)\cdot(\bar{c} + d) + (c + \bar{a}) + (d + b)$
6.	$y = (a + b + c)\cdot(\bar{c} + d) + (c + \bar{a})\cdot d$
7.	$y = (a + d + c)\cdot(\bar{c} + d) + (b + \bar{a})\cdot(a + c)$
8.	$y = (a + b + c)\cdot(c + \bar{d}) + (c + \bar{a})\cdot b$
9.	$y = (a + b + c)\cdot(\bar{c} + d)\cdot(c + \bar{a}) + (d + a)$
10.	$y = (a + b + c)\cdot(\bar{c} + d) + (c + \bar{a})\cdot(d + b)$
11.	$y = (a + b + d)\cdot(\bar{c} + d) + (c + \bar{a})\cdot d$
12.	$y = (a + d + d)\cdot(\bar{c} + d) + (b + \bar{a})\cdot(a + c)$
13.	$y = (a + b + d)\cdot(c + \bar{d}) + (c + \bar{a})\cdot b$
14.	$y = (a + b + d)\cdot(\bar{c} + d)\cdot(c + \bar{a}) + (d + a)$
15.	$y = (b + d)\cdot(\bar{c} + d) + (c + \bar{a})\cdot(d + b)$
16.	$y = (b + c)\cdot(\bar{c} + d) + (c + \bar{a})\cdot d$
17.	$y = (d + c)\cdot(\bar{c} + d) + (b + \bar{a})\cdot(a + c)$
18.	$y = (b + c)\cdot(c + \bar{d}) + (c + \bar{a})\cdot b$

Продолжение таблицы

19.	$y = (b + c)\cdot(\overline{c} + d)\cdot(c + \overline{a}) + (d + a)$
20.	$y = (b + c)\cdot(\overline{c} + d) + (c + \overline{a})\cdot(d + b)$
21.	$y = (d + b + c)\cdot(\overline{c} + d) + (c + \overline{a})\cdot d$
22.	$y = (d + d + c)\cdot (\overline{c} + d) + (b + \overline{a})\cdot(a + c)$
23.	$y = (d + b + c)\cdot(c + \overline{d}) + (c + \overline{a})\cdot b$
24.	$y = (d + b + c)\cdot(\overline{c} + d)\cdot(c + \overline{a}) + (d + a)$
25.	$y = (d + b + c)\cdot(\overline{c} + d) + (c + \overline{a})\cdot(d + b)$

Практическая работа № 3

Принципы построения карт Карно

1 Цель работы

Получить представление о картах Карно и их назначении. Научиться составлять карты Карно из таблицы истинности и по аналитической записи релейной функции проводимости.

2 Теоретические сведения

2.1 Определение и назначение карт Карно

Сложность логической функции проводимости, а, следовательно, сложность и стоимость реализующей ее схемы (цепи), пропорциональны числу логических операций и числу вхождений переменных или их инверсий. Вследствие чего естественным является стремление к сокращению, упрощению функции проводимости. В принципе, любая логическая функция может быть упрощена с помощью рассмотренных выше аксиом и теорем алгебры логики, но, как правило, такие преобразования требуют громоздких выкладок и значительного опыта в минимизации схем.

Более целесообразно для упрощения функции проводимости использовать специальные алгоритмические методы минимизации, позволяющие проводить упрощение функции более просто, быстро и безошибочно. К таким методам, в частности, относится метод карт (или их еще иногда называют матрицы) Карно.

Карты Карно были изобретены в 1952 г. Эдвардом В. Вейчем и усовершенствованы в 1953 г. физиком Морисом Карно, и были призваны помочь упростить цифровые электронные схемы.

Карта (матрица) Карно́ — графический способ минимизации переключательных (булевых) функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями и устранение потенциальных ошибок преобразования и упрощения.

Другими словами, карты Карно - графический способ представления булевых функций с целью их удобной и наглядной ручной минимизации. Карта Карно может быть построена для любого количества переменных, однако удобно работать с картой при количестве переменных не более 5-ти. Графически карта Карно изображается в виде прямоугольника или квадрата из ячеек, число которых равно $\mathbf{2^n}$, где n – количество переменных.

2.2 Построение карты Карно по таблице истинности

Карта Карно — это таблица истинности, представленная в виде матрицы в 2-мерном виде. В карту Карно булевы переменные передаются из таблицы истинности и упорядочиваются с помощью кода Грея, в котором каждое следующее число (терм) отличается от предыдущего только одним разрядом. При этом следует помнить, что порядок кодов термов в таблице (00 01 11 10) не соответствует порядку следования двоичных чисел, записанных в лексикографический ряд (00 01 10 11), а клетки, находящиеся в крайних столбцах таблицы, соседствуют между собой.

Каждая клетка соответствует набору переменных по строке в таблице истинности. В тех клетках, которые соответствуют значениям функции, равным 1, записывают единицы, а в остальных проставляют нули (часто вместо нулей оставляют пустые клетки).

На рис. 1 представлен пример таблицы истинности и соответствующей ей матрицы Карно.

а

X_1	X_2	X_3	X_4	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

б

$X_1 X_2$ \ $X_3 X_4$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Рисунок 1 – Пример заполнения карты Карно по таблицы истинности:
а - таблица истинности, *б* - карта Карно

Благодаря упорядочиванию клеток матрицы Карно с использованием кода Грея она обладает важным свойством: ***если двигаться из любой клетки горизонтально или вертикально, то соседняя клетка всегда представляет собой соседнее состояние переменной, т.е. эти состояния отличаются значением только одной переменной.*** Это свойство соседства делает матрицу Карно удобным средством для упрощения функций проводимости (методы минимизации функций проводимости с применением карт Карно будут рассмотрены в следующей практической работе № 4).

2.3 Построение карт Карно по аналитической записи релейной функции

Матрицу Карно можно построить, имея аналитическое описание релейной функции проводимости, представленной в форме стандартной суммы (СДНФ).

1. Пусть дана релейная функция проводимости 2-х переменных, записанная в форме СДНФ:

$F = \overline{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x}_2$

Для 2-х переменных карту Карно можно начертить 2-мя способами:

- в виде квадрата;
- в виде строки (строку можно вычерчивать как горизонтально, так и вертикально).

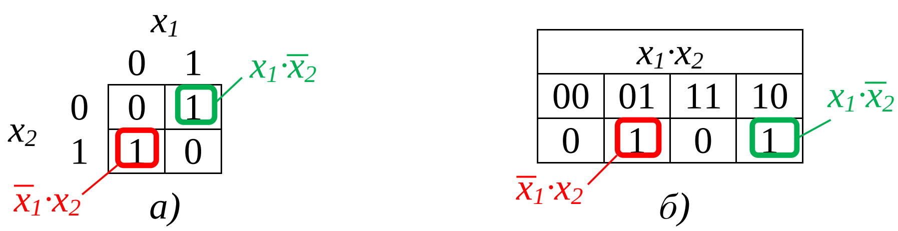


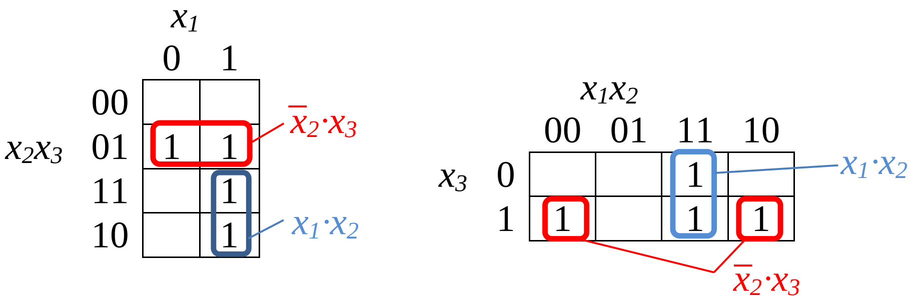
Рисунок 2 – Карта Карно для функции 2-х переменных $F = \overline{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x}_2$
а – в виде квадрата, б – в виде строки

Заполнение единицами и нулями каждой клетки матрицы Карно соответствует значениям функции проводимости F для набора (терма) переменных x_1, x_2, значения которых стоят над столбцами и около строк матрицы на линиях пересечения. Аналогично в строке таблице истинности этот же набор переменных x_1, x_2 соответствует значению функции F в этой строке.

2. Пусть задана релейная функция 3-х переменных в форме СДНФ.

$F = x_1 \cdot x_2 + \overline{x}_2 \cdot x_3$

Для 3-х переменных карта Карно может содержать либо 2 столбца и 4 строки, либо 4 столбца и 2 строки, как показано на рис. 3.



а) *б)*

Рисунок 3 – карта Карно для функции 3-х переменных $F = x_1 \cdot x_2 + \overline{x}_2 \cdot x_3$

Заполняя карту Карно, рассуждаем следующим образом:

1) согласно Теореме № 3, функция проводимости F будет равна 1, если известно, что хотя бы одно из слагаемых равно 1.

2) значение члена x_1x_2 в функции проводимости F не зависит от значения x_3, следовательно, x_3 может принимать любые два значения 1 или 0. В то же время, для F=1 нужно, чтобы x_1 и x_2 одновременно были равны 1, поэтому проставляем 1 в клетках карты Карно, где $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, а $x_3 = 0$ или 1.

2) значение члена $\overline{x}_2x_3$ не зависит от значения переменной x_1, поэтому проставляем F=1 во всех клетках карты Карно, где $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а $x_1 = 0$ или 1.

3) остальные клетки карты Карно оставляем пустыми, подразумевая, что в них функция проводимости равна нулю.

3. Пусть задана релейная функция 4-х переменных в СДНФ.

$F = \overline{x}_1 \cdot x_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$

В этом случае карта Карно будет представлять квадрат 4х4.

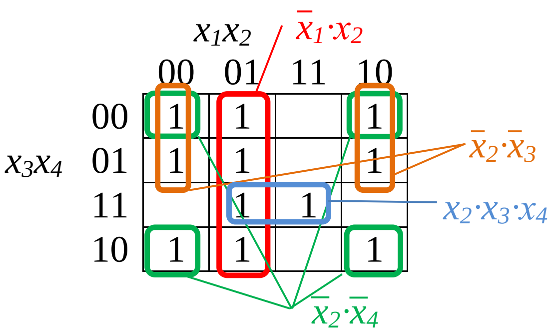


Рисунок 4 – карта Карно для функции 4-х переменных

$F = \overline{x}_1 \cdot x_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$

Заполняем карту Карно для функции 4-х переменных:

1) По Теореме № 3, функция F будет равна 1, если хотя бы одно из слагаемых в выражении функции проводимости в СДНФ равно 1.

2) значение члена стандартной суммы $\overline{x_1}\cdot x_2$ будет равно 1, когда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, а переменные x_3 и x_4 могут принимать любые значения. Проставляем 1 во всех клетках карты Карно, для которых верно $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ или 1, $x_4 = 0$ или 1.

3) значение члена $\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}$ равно 1, когда $x_2 = x_3 = 0$, а x_1 и x_4 могут быть любыми. Проставляем 1 во всех клетках карты Карно, для которых верно $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = 0$ или 1, $x_4 = 0$ или 1.

4) значение члена $\overline{x_2}\cdot\overline{x_4}$ равно 1, когда $x_2 = x_4 = 0$, а переменные x_1 и x_3 принимают любые возможные значения. Проставляем 1 во всех клетках карты Карно, для которых верно $x_2 = x_4 = 0$, $x_1 = 0$ или 1, $x_3 = 0$ или 1.

5) значение члена $x_2\cdot x_3\cdot x_4$ равно 1, когда $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, а переменная x_1 принимает любое значение. Проставляем 1 во всех клетках карты Карно, для которых верно $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_1 = 0$ или 1.

6) оставшиеся клетки карты Карно оставляем пустыми, подразумевая, что в них функция проводимости $F = 0$.

4. Пусть задана релейная функция 5-ти переменных в СДНФ.

$F = x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4\cdot x_5 + \overline{x_1}\cdot x_3 + \overline{x_5}\cdot x_2\cdot x_4 + x_1.$

Карта Карно для функции 5-ти переменных представляет собой прямоугольник размером 4x8, который составлен из двух соседних квадратов 4x4.

x_1

x_5		0				1			
x_1x_2		00	01	11	10	00	01	11	10
x_3x_4	00			1	1			1	1
	01		1	1	1		1	1	1
	11	1	1	1	1	1	1	1	1
	10	1	1	1	1	1	1	1	1

$x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4\cdot x_5$

$\overline{x_5}\cdot x_2\cdot x$ $\overline{x_1}\cdot x_3$

Рисунок 5 - карта Карно для функции 5-ти переменных
$F = x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4\cdot x_5 + \overline{x_1}\cdot x_3 + \overline{x_5}\cdot x_2\cdot x_4 + x_1$

Заполняем карту Карно для функции 5-ти переменных:

1) По Теореме № 3, функция F будет равна 1, если хотя бы одно из слагаемых в выражении функции проводимости в СДНФ равно 1.

2) значение члена стандартной суммы $x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \cdot x_5$ будет равно 1, когда $x_2 = x_4 = x_5 = 1$, $x_3 = 0$, а переменная x_1 принимает любые значения. Проставляем 1 во всех клетках карты Карно, для которых верно $x_2 = x_4 = x_5 = {}$ $=1$, $x_3 = 0$, $x_1 = 0$ или 1.

3) значение члена $\overline{x_1} \cdot x_3$ равно 1, когда $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, а переменные x_2, x_4, x_5 могут быть любыми. Проставляем 1 во всех клетках карты Карно, для которых верно $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ или 1, $x_4 = 0$ или 1, $x_5 = 0$ или 1.

4) значение члена $\overline{x_5} \cdot x_2 \cdot x_4$ равно 1, когда $x_5 = 0$, $x_2 = x_4 = 1$, а переменные x_1 и x_3 принимают любые возможные значения. Проставляем 1 во всех клетках карты Карно, для которых верно $x_5 = 0$, $x_2 = x_4 = 1$, $x_1 = 0$ или 1, $x_3 = 0$ или 1.

5) значение члена x_1 равно 1, при условии, что $x_1 = 1$, а остальные переменные x_2, x_3, x_4, x_5 принимают любые возможные значения. Проставляем 1 во всех клетках карты Карно, для которых верно $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ или 1, $x_3 = 0$ или *1*, $x_4 = 0$ или 1, $x_5 = 0$ или 1.

6) оставшиеся клетки карты Карно оставляем пустыми, подразумевая, что в них функция проводимости $F = 0$.

Пример построения и заполнения большой матрицы Карно на 8 переменных приведен на рис. 6. Алгоритм составления карт Карно, содержащих более 5-ти переменных, остается таким же, однако работать с объемными картами не так удобно.

X5 X6 X7 X8 X1 X2 X3 X4	0000	0001	0011	0010	0110	0111	0101	0100	1100	1101	1111	1110	1010	1011	1001	1000
0000							1									
0001							1									
0011							1									
0010							1									
0110							1									
0111							1									
0101							1									
0100							1									
1100	1	1		1		1					1		1		1	1
1101	1	1		1		1					1		1		1	1
1111	1	1		1		1					1		1		1	1
1110	1	1		1		1					1		1		1	1
1010	1	1		1		1					1		1		1	1
1011	1	1		1		1					1		1		1	1
1001	1	1		1		1					1		1		1	1
1000	1	1		1		1					1		1		1	1

Рисунок 6 – Пример матрицы Карно на 8 переменных

3 Задания для самостоятельного выполнения

Для функции проводимости *F*, представленной в форме СДНФ, согласно варианту (табл. 1), составить таблицу истинности и карту Карно. Проверить правильность выполнения задания путем сравнения идентичности заполнения таблицы истинности и карты Карно.

Таблица 1 - Варианты заданий

№ варианта	Вид формулы
1.	$F = \bar{x}_2 + x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_2$
2.	$F = \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 + x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
3.	$F = x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot x_2 + \bar{x}_4 + x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$
4.	$F = x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 + x_4 + x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \bar{x}_2$
5.	$F = \bar{x}_3 + \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot x_2$
6.	$F = x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$
7.	$F = x_3 \cdot \bar{x}_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
8.	$F = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$
9.	$F = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + x_3 + x_3 \cdot x_1$
10.	$F = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 + x_3 \cdot \bar{x}_4$
11.	$F = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_3 + \bar{x}_3 \cdot x_2$
12.	$F = x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_4$
13.	$F = \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_2 + x_1 \cdot x_4$
14.	$F = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2$
15.	$F = x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_4 + x_3 \cdot x_4$
16.	$F = x_2 \cdot x_3 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 + \bar{x}_1 \cdot x_4$
17.	$F = x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2$
18.	$F = x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_2 + x_3 \cdot x_4$

Продолжение таблицы

19.	$F = \overline{x}_1 + x_3{\cdot}x_4 + x_1{\cdot}\overline{x}_3{\cdot}\overline{x}_4 + x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3{\cdot}x_4$
20.	$F = x_4 + \overline{x}_1{\cdot}x_2 + x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3 + \overline{x}_1{\cdot}x_2{\cdot}\overline{x}_3{\cdot}x_4$
21.	$F = x_3 + x_1{\cdot}x_4 + x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3 + x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3{\cdot}x_4$
22.	$F = x_4 + x_1{\cdot}x_2 + \overline{x}_1{\cdot}x_2{\cdot}x_4 + x_1{\cdot}\overline{x}_2{\cdot}x_3{\cdot}x_4$
23.	$F = x_1{\cdot}x_4 + x_1{\cdot}x_3{\cdot}x_4 + x_1 + \overline{x}_1{\cdot}\overline{x}_2{\cdot}\overline{x}_3{\cdot}\overline{x}_4$
24.	$F = \overline{x}_3{\cdot}\overline{x}_2 + x_2{\cdot}x_3{\cdot}x_4 + \overline{x}_3 + x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3{\cdot}x_4$
25.	$F = x_2{\cdot}x_4 + x_2{\cdot}x_3{\cdot}x_1 + \overline{x}_2 + x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_3{\cdot}x_4$

Практическая работа № 4

Минимизация логических функций по Картам Карно

1 Цель работы

Научиться применять карты Карно для составления минимальных форм записи релейных функций проводимости, представленных в ДНФ и КНФ.

2 Теоретические сведения

После того, когда карта Карно заполнена (Принципы построения карт Карно см. практическое занятие № 3), можно приступать к минимизации релейной функции проводимости с целью получения оптимальной ее схемной реализации.

Результатом минимизации является функция проводимости, представленная либо в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), либо в конъюнктивной нормальной форме (КНФ). В первом случае работа ведётся с клетками карты, где находятся единицы, во втором — с клетками, где находятся нули (либо пустые клетки). В исходной карте, как и в таблице истинности, каждая единица соответствует одному терму (набору переменных) совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ), а каждый ноль — одному терму совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ).

2.1 Принципы минимизации

Прямоугольную область в карте Карно, которая состоит из $\mathbf{2}^{k}$, где k= 0, 1, 2…n одинаковых значений (единиц или нулей в зависимости от того, какую форму нужно получить ДНФ или КНФ) называют ***склейкой*** или ***подкубом***.

Распределение всех имеющихся в карте Карно единиц (нулей) по склейкам называют ***покрытием***.

Основным методом минимизации логических функций, представленных в виде СДНФ или СКНФ, является операция попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Операция попарного склеивания осуществляется между двумя термами, содержащими одинаковые переменные, вхождения которых (прямые и инверсные) совпадают для всех переменных, кроме одной. В этом случае все переменные, кроме одной, можно вынести за скобки, воспользовавшись

Теоремой № 19. Оставшиеся в скобках прямое и инверсное вхождения одной переменной подвергнуть поглощению, согласно Теореме № 9.

Например, для функции, заданной в ДНФ:

$$\overline{x_1}\cdot x_2\cdot \overline{x_3}\cdot x_4 + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 = \overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_4\cdot(\overline{x_3} + x_3) = \overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_4$$

Аналогично для КНФ, согласно Теореме 20 можно раскрыть скобки, а по Теореме 10 конъюнкцию прямой и инверсной переменной подвергнуть поглощению, например:

$$(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3}+x_4)\cdot(\overline{x_1}+x_2+x_3+x_4) = \overline{x_1}+x_2+x_4+\overline{x_3}\cdot x_3 = \overline{x_1}+x_2+x_4$$

Таким образом, главной задачей при минимизации СДНФ и СКНФ является поиск термов, пригодных к склейке с последующим поглощением, что для функций многих логических переменных может оказаться достаточно сложной задачей. Карты Карно предоставляют наглядный способ отыскания таких термов, т.е. выделения подкубов в карте Карно.

По заданному покрытию карты Карно можно легко составить ДНФ или КНФ.

Если необходимо составить ДНФ, то в подкубы объединяются клетки матрицы Карно, содержащие единицы. Далее берут первый подкуб и смотрят, какие переменные не меняются в его пределах, выписывают конъюнкцию этих переменных. Если неменяющаяся переменная нулевая, проставляют над ней инверсию. Затем берут следующий подкуб, выполняют то же самое, что и для первого, и т. д. для всех выделенных подкубов. Конъюнкции объединяют дизъюнкцией.

Если необходимо составить КНФ, то в подкубы объединяются клетки матрицы Карно, содержащие нули. Далее берут первый подкуб и смотрят, какие переменные не меняются в его пределах, выписывают дизъюнкцию этих переменных. Если неменяющаяся переменная равна единице, проставляют над ней инверсию. Затем берут следующий подкуб, выполняют то же самое, что и для первого, и т. д. для всех выделенных подкубов. Дизъюнкции объединяют конъюнкцией.

В зависимости от способа покрытия карты Карно можно получить разные формы записи ДНФ и КНФ, причем возможными и правильными могут быть сразу несколько разных форм. Однако, если по заданию требуется получить *минимальную форму* записи ДНФ и КНФ (МДНФ и МКНФ), используя карту Карно, то необходимо уметь находить самый оптимальный способ выделения подкубов. При этом *минимальная форма записи ДНФ и КНФ чаще всего является единственно возможной.*

2.2 Принципы склейки

С целью минимизации булевой функции необходимо построить такое покрытие карты Карно, чтобы *количество склеек было минимальным, а размер каждой склейки максимально возможным.* Для этого необходимо руководствоваться следующими правилами:

1. Склейку клеток одной и той же карты Карно можно осуществлять как по единицам рис. 1*а*, так и по нулям рис. 1*б*. Первое необходимо для получения ДНФ, второе — для получения КНФ.

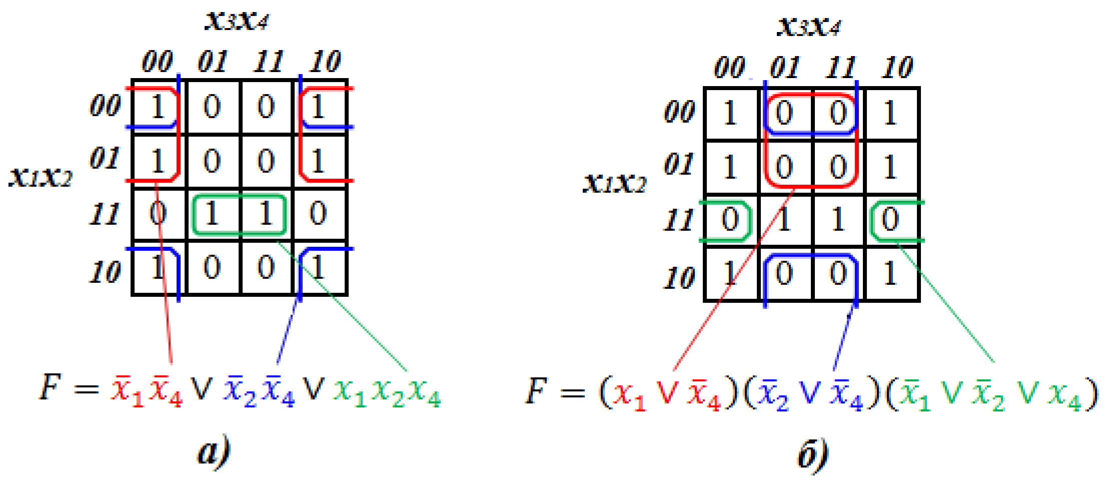


Рисунок 1 – Пример склейки:
а – по единицам для получения ДНФ, *б* – по нулям для получения КНФ

2. Склеивать можно только прямоугольные области с числом единиц (нулей) равным $\mathbf{2^k}$, где k – целое число (0, 1, 2…n).

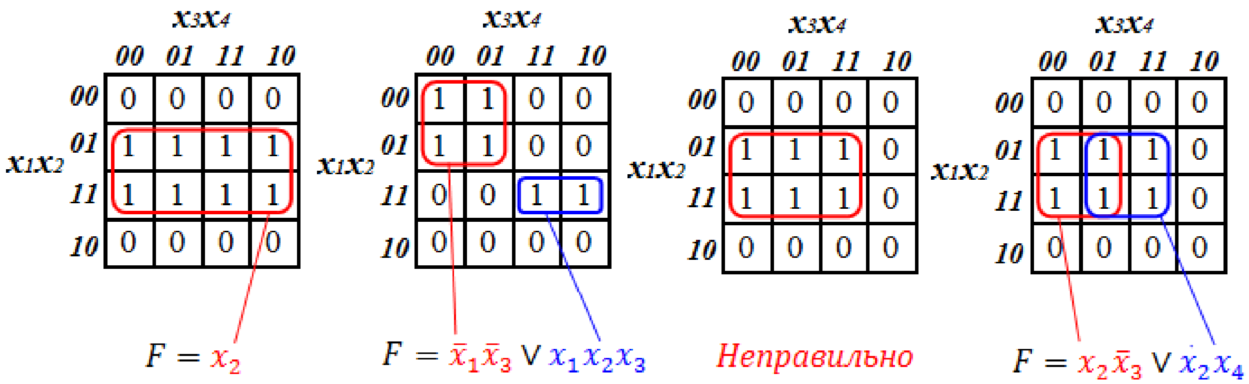


Рисунок 2 – Примеры выделение подкубов размером 2^k в карте Карно

3. Рекомендуется выбирать максимально возможные области склейки. Если область склейки не является максимально возможной, это не будет ошибкой, однако ДНФ (КНФ) не получится минимальной (рис. 3).

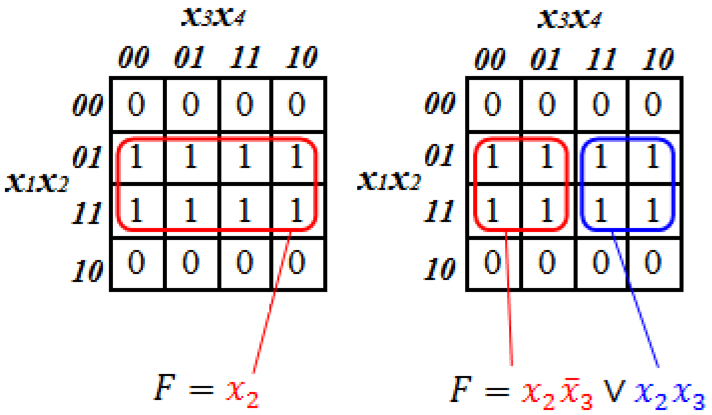


Рисунок 3 – Пример выделения максимально возможного подкуба для получения минимальной функции проводимости

Чем больше клеток будет объединено в подкуб, тем большее количество переменных подвергнется поглощению. Так подкуб из одной клетки описывается всеми переменными, входящими в терм (рис. 4*а*), 2-х клеточным подуб исключает 1 переменную (рис. 4*б*), 4-х клеточный – 2 переменные (рис. 4*в*), 8-ми клеточный – 3 переменные (рис. 4*г*), 16-ти клеточный подкуб дает тривиальное значение функции проводимости F = 1, если склейка осуществляется по единицам (рис. 4*д*) и F = 0, если склейка осуществляется по нулям (рис. 4*е*).

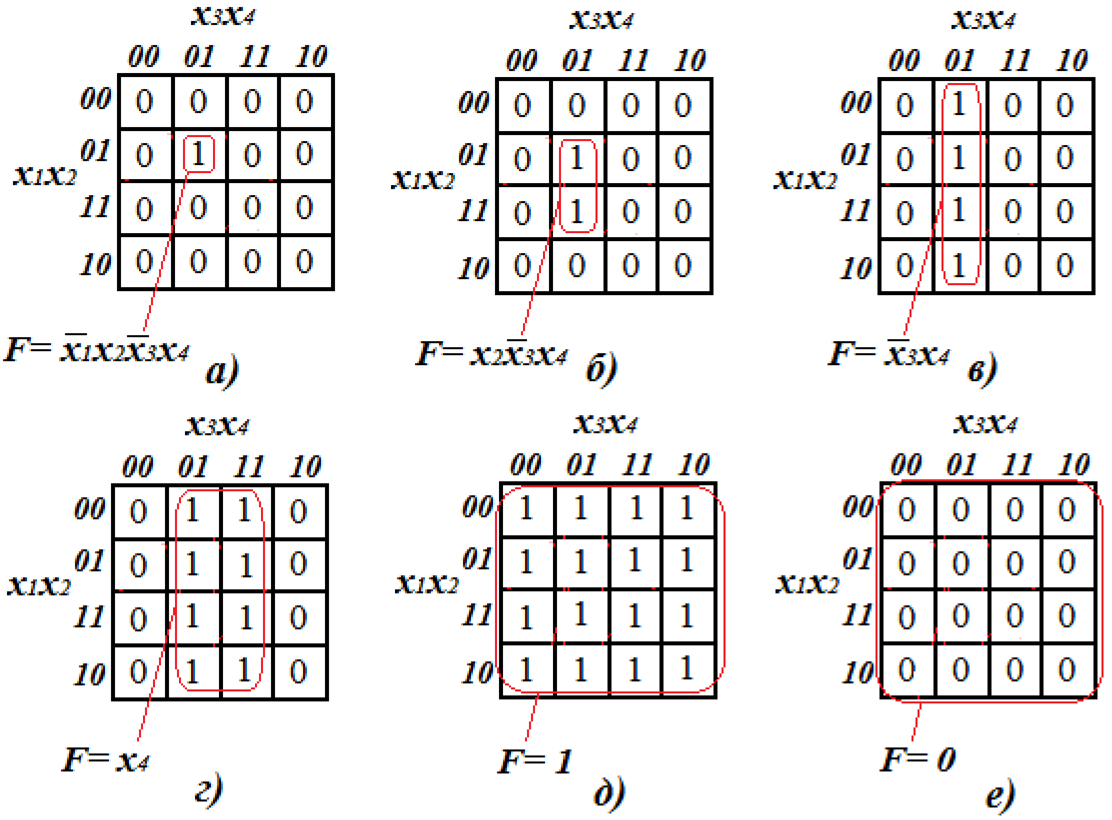


Рисунок 4 – Варианты выделения подкубов в карте Карно: *а* – одноклеточный, *б* – 2-х клеточный, *в* – 4-х клеточный, *г* – 8-ми клеточный, *д* – 16-ти клеточный при составлении ДНФ, *е* – 16-ти клеточный при составлении КНФ

4. В некоторых ситуациях в раскладке образуется изолированная единица или ноль, которую невозможно включить в какую-либо область. В этом случае единица (ноль) склеивается «сама с собой», образуя одноклеточный подкуб. Нельзя оставлять «висячие» единицы (нули), так как это приведёт к некорректной записи выражения для функции (рис. 5). Все единицы (нули) должны попасть в какую-либо область.

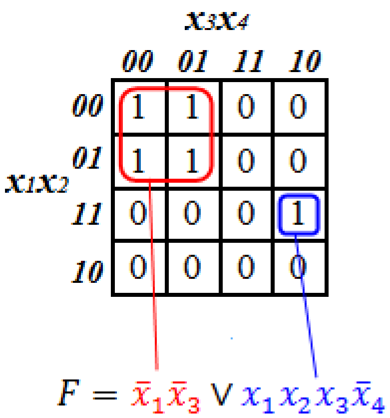


Рисунок 5 – Пример покрытия карты Карно с «висячей» единицей

5. Область, которая подвергается склейке, должна содержать одинаковые значения — только единицы или только нули (рис. 6).

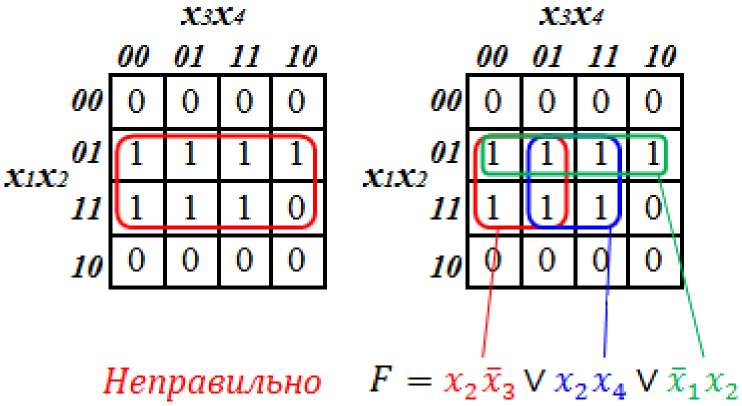


Рисунок 6 – Примеры покрытия карты Карно

6. Для карт Карно с числом переменных 3 и 4 применимо следующее правило: *крайние клетки каждой горизонтали и каждой вертикали граничат между собой и могут объединяться в прямоугольники* (топологически карта Карно представляет собой фигуру тор или бублик). Следствием этого правила является смежность всех четырёх угловых ячеек карты Карно для 4-х переменных. Для карт Карно с числом переменных менее 3-х это правило не имеет смысла, так как крайние клетки и так граничат между собой; для карт Карно с числом переменных более 4-х правила смежности более сложные.

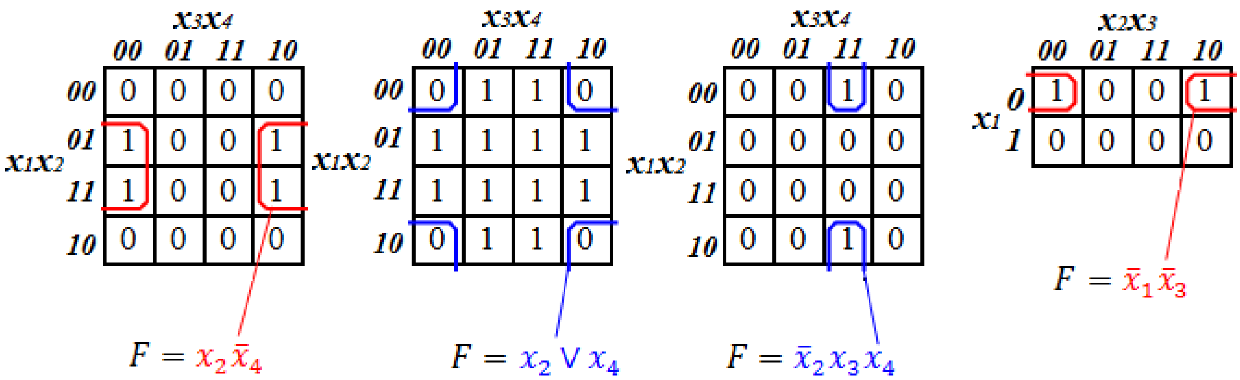


Рисунок 7 – Примеры смежности крайних клеток карты Карно

8. Одна ячейка карты Карно может входить сразу в несколько областей. Это следует из Теорем 5 и 6: повторение уже существующего слагаемого (сомножителя) не влияет на функцию: X + X = X; X · X = X

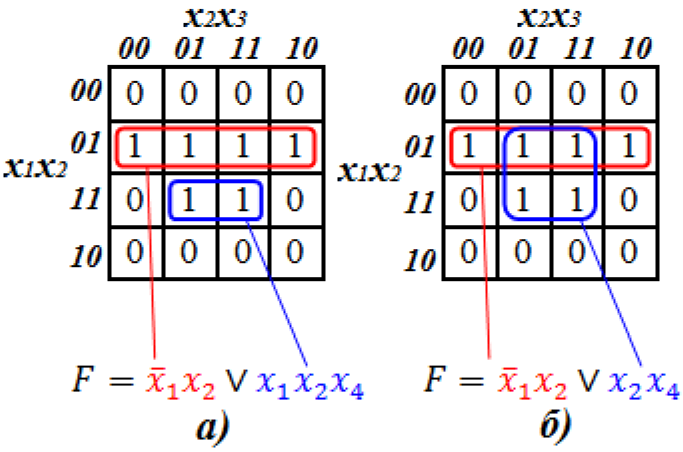


Рисунок 8 – Примеры покрытия карты Карно для получения минимальной функции проводимости: *а* - не верно, *б* - верно

9. Не следует без нужды включать клетку во все возможные склейки, это не является ошибкой, но усложняет формулу. С точки зрения минимальности ДНФ (КНФ) число склеек должно быть как можно меньше (каждая дополнительная склейка порождает дополнительный терм), а число клеток в склейке должно быть максимально возможным (чем больше клеток в склейке, тем меньше переменных содержит терм. Склейка размером 2^k клеток порождает терм с n-k переменными).

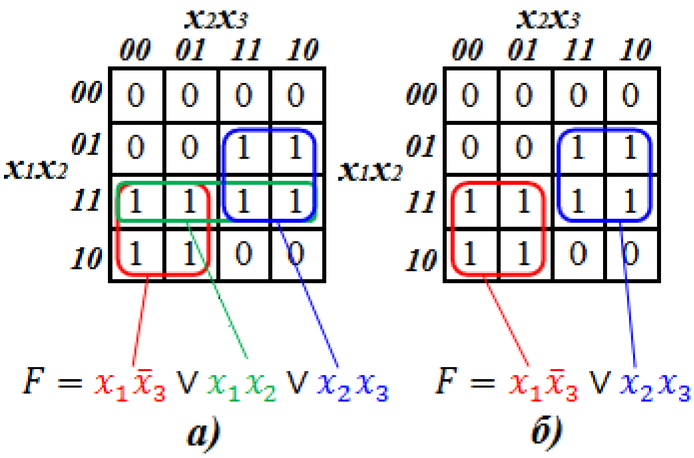


Рисунок 9 – Примеры покрытия карты Карно для получения минимальной функции проводимости: *а* – не верно, *б* - верно

10. В отличие от СДНФ и СКНФ, ДНФ и КНФ не всегда единственны. Для некоторых функций существует несколько эквивалентных друг другу ДНФ (КНФ), которые соответствуют разным способам покрытия карты Карно прямоугольными областями. Очень часто две различные ДНФ (КНФ) имеют одинаковую сложность, что не позволяет сделать однозначный выбор минимальной формулы.

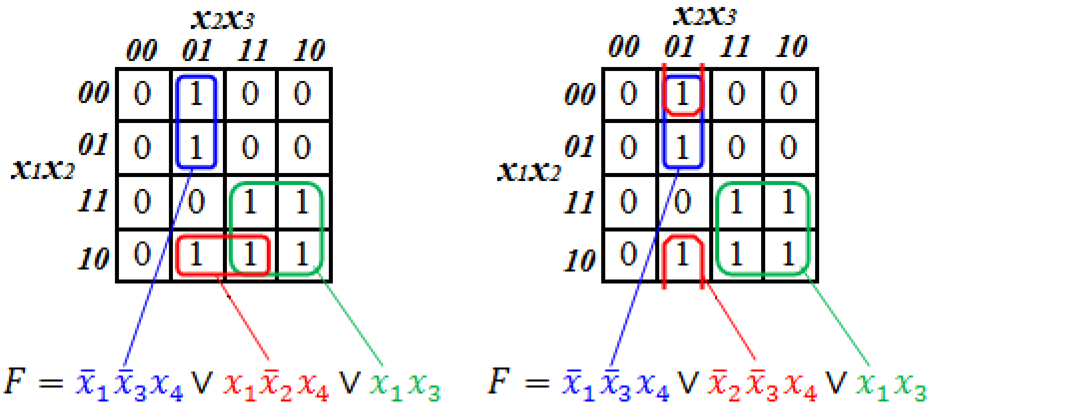


Рисунок 10 – Эквивалентные варианты покрытия карты Карно с точки зрения получения минимальной формы функции проводимости

11. Для таблиц 5-ти и более переменных нужно учитывать также, что квадраты 4x4 виртуально находятся друг над другом в третьем измерении, поэтому соответственные клетки двух соседних квадратов 4x4 являются соседними, и соответствующие им термы можно склеивать.

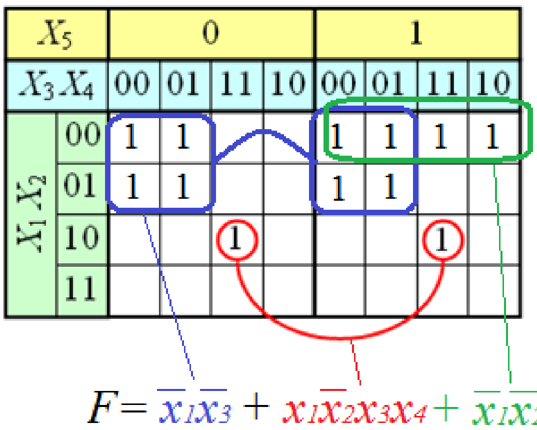


Рисунок 11 – Пример склейки карты Карно функции 5-ти переменных

Для закрепления теоретического материала рассмотрим несколько примеров составления ДНФ и КНФ по карте Карно, применяя описанные выше правила.

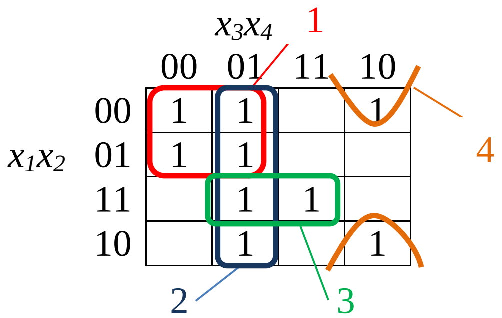
Пример 1.

Используя представленную карту Карно 4-х переменных, составить минимальную ДНФ и КНФ.

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		
11		1	1	
10		1		1

Решение:

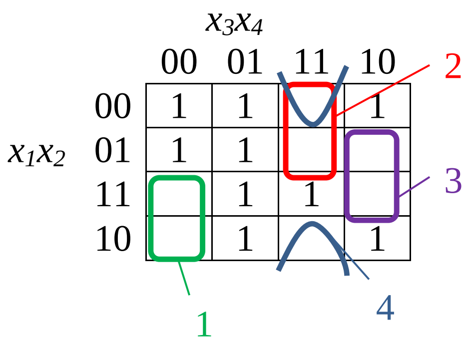
1. Чтобы составить минимальную ДНФ, используя заданную карту Карно, выделяем в подкубы единицы. Необходимо задействовать все единицы, при этом нужно обойтись минимальным количеством подкубов, а размеры выделенных областей должны быть как можно больше, т.к. чем больше подкуб, тем большее количество переменных он исключает. Таким образом, оптимальное покрытие в данном случае будет единственно возможное:



2. Используя выделенные подкубы, по карте Карно составляем минимальную ДНФ. Переменные, входящие в один подкуб, объединяем конъюнкцией, а полученные конъюнкции соединяем дизъюнкцией. Над нулевыми переменными проставляем инверсию:

$F = \overline{x_1}\cdot\overline{x_3} + \overline{x_3}\cdot x_4 + x_1\cdot x_2\cdot x_4 + \overline{x_2}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$

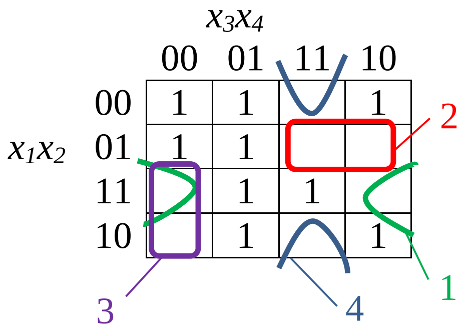
3. Аналогично составляется минимальная КНФ, за исключением того, что в подкубы выделяются пустые клетки (подразумевается что в них $F = 0$). Выделим в подкубы пустые клетки карты Карно, руководствуясь теми же правилами, что и при составлении ДНФ:



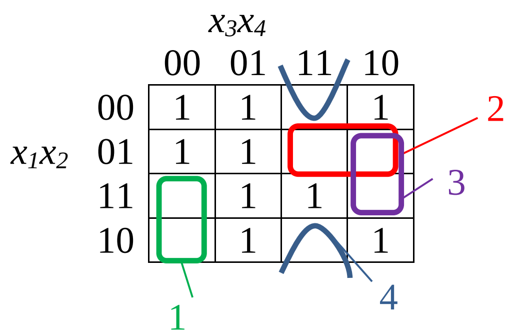
4. Используя выделенные подкубы, по карте Карно составляем минимальную КНФ. Переменные, входящие в один подкуб, объединяем дизъюнкцией, а полученные дизъюнкции соединяем конъюнкцией. Над единичными переменными проставляем инверсию:

$F = (\overline{x_1}+x_3+x_4)\cdot(x_1+\overline{x_3}+\overline{x_4})\cdot(\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_4)\cdot(x_2+\overline{x_3}+\overline{x_4})$

Заметим, что при составлении минимальной КНФ в данном случае возможны и другие варианты выделения подкубов в матрице, дающих такое же количество переменных в функции проводимости. Таким образом, в данном случае минимальных форм КНФ может быть несколько. Эквивалентные варианты покрытия карты Карно и соответствующие им минимальные КНФ приведены ниже.



$$F = (\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_4) \cdot (x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1}+x_3+x_4) \cdot (x_2+\overline{x_3}+\overline{x_4})$$



$$F = (\overline{x_1}+x_3+x_4) \cdot (x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_4) \cdot (x_2+\overline{x_3}+\overline{x_4})$$

Пример 2.

Для заданной карты Карно 4-х переменных составить не менее 3-х различных комбинаций покрытия (не обязательно минимальных), записать для них ДНФ.

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00		1		1
01	1	1		1
11				
10		1		1

Решение:

1 вариант

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00		1		1
01	1	1		1
11				
10		1		1

$F = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$

2 вариант

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00		1		1
01	1	1		1
11				
10		1		1

$F = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$

3 вариант

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00		1		1
01	1	1		1
11				
10		1		1

$F = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$

Для заданной карты Карно удалось составить две эквивалентные минимальные формы ДНФ (1 и 2 варианты). Вариант 3 не является минимальным, т.к. он содержит 5 термов (5 слагаемых) в отличие от первых двух вариантов, содержащих по 4 терма каждый.

Пример 3.

Для карты Карно 5-ти переменных составить минимальную ДНФ.

x_5		0				1			
x_3x_4		00	01	11	10	00	01	11	10
x_1x_2	00	1	1			1	1		1
	01								
	11					1			1
	10	1				1			1

Решение:

1. Выделяем подкубы в карте Карно 5-ти переменных по тем же правилам, что и для карты 4-х переменных, т.е. стараемся ограничиться минимально возможным количеством подкубов, при этом размер каждого подкуба должен быть максимально возможным. Учитываем так же, что квадраты 4х4 (для переменной $x_5 = 0$ и $x_5 = 1$) виртуально находятся как бы друг над другом, поэтому склеивать в подкубы можно единицы, находящиеся в соответственных клетках соседних квадратов 4х4.

x_5		0				1			
x_3x_4		00	01	11	10	00	01	11	10
x_1x_2	00	1	1			1	1		1
	01								
	11					1			1
	10	1				1			1

2. Используя оптимальное выделение подкубов в матрице, получаем минимальную ДНФ для функции 5-ти переменных:

$$F = \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3} + x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4} + x_1\cdot\overline{x_4}\cdot x_5 + \overline{x_2}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\cdot x_5$$

3 Задания для самостоятельного выполнения

1. Используя матрицу Карно, составленную в индивидуальном задании к практической работе№ 3, получить минимальные формы ДНФ и КНФ.

2. Для функции проводимости из практической работы № 3 (вариант взять следующий за своим) заполнить карту Карно. Используя карту, составить 3 различных варианта ее покрытия для получения ДНФ и записать соответствующие функции проводимости. ДНФ расположить в порядке возрастания количества переменных, начиная с минимальной ДНФ.

Практическая работа № 5

Описание релейных функций с помощью десятичных чисел

1 Цель работы

Научиться описывать функции алгебры логики (ФАЛ) и карты Карно с помощью десятичных чисел и применять их на практике.

2 Теоретические сведения

По мере усложнения функций проводимости представление их через символьные переменные, объединенные операциями логического сложения и умножения, становится весьма громоздким. В связи с этим для упрощения записи сложных функций алгебры логики (ФАЛ) используют представление их в виде последовательности десятичных чисел.

Пример 1. Пусть дана строка из таблицы состояний для 4-х переменных:

w	x	y	z	F
1	1	0	0	1

Строка 1100 дает двоичное представление функции:

F=$w\cdot x\cdot \overline{y}\cdot \overline{z}=1100_2$

Стандартным приемом переведем двоичное число 1100 в десятичное, получим:

F=$w\cdot x\cdot \overline{y}\cdot \overline{z}=1100_2=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^2+0\cdot 2^0=12_{10}$

Представление ФАЛ в виде десятичного числа является более компактной записью, так целую строку таблицы истинности (т.е. одно слагаемое в функции, записанной в СДНФ) можно обозначить одним десятичным числом – это будет эквивалентное обозначение.

Пример 2. Пусть ФАЛ, заданная в СДНФ, имеет вид:

$F=\overline{w}\cdot \overline{x}\cdot \overline{y}\cdot \overline{z}+\overline{w}\cdot \overline{x}\cdot y\cdot z+\overline{w}\cdot x\cdot y\cdot z+w\cdot \overline{x}\cdot \overline{y}\cdot \overline{z}+w\cdot \overline{x}\cdot y\cdot z+w\cdot x\cdot y\cdot \overline{z}$

Перепишем в двоичном виде, зная, что прямое вхождение переменной в СДНФ эквивалентно единице, а инверсное - нулю:

F = 0000 + 0011 + 0111 +1000 + 1011+1110

Переведем двоичный код в десятичный:

F = 0000 + 0011 + 0111 +1000 + 1011+1110 = 0 + 2^1+2^0 + 2^2+2^1+2^0 + 2^3 + 2^3+2^1 + 2^0 + 2^3+2^2+2^1 = 0+3+7+8+11+14.

Арифметическое сложение цифр не имеет смысла, это просто форма представления функции проводимости. Поэтому, обычно пишут через запятую:

$$F = \sum(0,3,7,8,11,14)$$

Данный метод представления функции проводимости десятичными числами применим, если функция задана в виде стандартной суммы (СДНФ), и любой из ее членов содержит все переменные.

Если в функции алгебры логики встречается член, который не содержит всех переменных, входящих в функцию, то такую функцию необходимо привести к стандартной форме.

Пусть, например, в ФАЛ содержится член *w, x, z*, а кроме этого в других членах имеется переменная *y*, тогда, воспользовавшись Теоремой 9 ($y + \overline{y} = 1$), получим эквивалентное выражение:

$$\overline{w}\cdot x\cdot \overline{z} = \overline{w}\cdot x\cdot (y+\overline{y})\cdot \overline{z} = \overline{w}\cdot x\cdot y\cdot \overline{z} + \overline{w}\cdot x\cdot \overline{y}\cdot \overline{z}$$

Полученное выражение затем можно представить в виде двоичного или десятичного числа.

Аналогичный процесс применим и для функции проводимости в форме стандартного произведения (СКНФ), но с учетом следующих правил:

цифрой 1 – обозначаются инверсные переменные,

цифрой 0 – переменные без черты.

Переход от алгебраической формы представления к десятичной остается тем же. Функция записывается в сокращенном виде как:

$F = \Pi\ (x_1, x_2, \ldots\ x_n)$.

Пример 3. Пусть ФАЛ, заданная в СКНФ, имеет вид:

$F = (\overline{w} + \overline{x} + \overline{y} + z)\cdot(\overline{w} + x + \overline{y} + z)\cdot(w + x + \overline{y} + \overline{z})\cdot(\overline{w} + x + y + z)$

Необходимо записать функцию F в виде десятичных чисел.

Решение:

F = П (1110, 1010, 0011, 1000);

F = П (14, 10, 3, 8) = П (3, 8, 10, 14).

На практике также можно встретить следующее представление ФАЛ в виде десятичных чисел:

$F\ (w, x, y, z) = 1\ (3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13)$

Такая форма записи расшифровывается следующим образом:

1) функция содержит четыре аргумента - *w, x, y, z*;

2) функция принимает значение «1» на 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13 наборах;

3) на остальных наборах (0, 1, 2, 6, 8, 10, 14, 15) функция принимает значение «0».

Пример 4. Запишем заданную в десятичном виде функцию F в форме стандартной суммы (СДНФ) символьных переменных. Для этого переведем десятичные числовые наборы в двоичные числа, а затем подставим соответствующие переменные $w, x, y, z,$ зная, что значению переменной равному «1» соответствует прямое вхождение этой переменной, а значению «0» - инверсное:

$F(w, x, y, z) = 1\ (3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13);$

$F(w, x, y, z) = 1\ (0011, 0100, 0101, 0111, 1001, 1011, 1100, 1101);$

$F(w, x, y, z) = \overline{w} \cdot \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{w} \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{w} \cdot x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{w} \cdot x \cdot y \cdot z + w \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + w \cdot \overline{x} \cdot y \cdot z + w \cdot x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + w \cdot x \cdot \overline{y} \cdot z.$

Пример 5. Необходимо по заданной в десятичном виде функции F составить СКНФ, зная, что при составлении стандартного произведения значению переменой, равному «0» соответствует прямое вхождение этой переменной, а значению, равному «1» - инверсное.

$F(w, x, y, z) = 0\ (0, 2, 6, 9, 13, 15);$

$F(w, x, y, z) = 0\ (0000, 0010, 0110, 1001, 1101, 1111);$

$F(w, x, y, z) = (w + x + y + z) \cdot (w + x + \overline{y} + z) \cdot (w + \overline{x} + \overline{y} + z) \cdot (\overline{w} + x + y + \overline{z}) \cdot (\overline{w} + \overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{w} + \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}).$

Рассмотренный в Практических работах № 3 и 4 инструмент для минимизации ФАЛ – матрицы Карно также можно представить десятичными числами. Т.к. каждая клетка матрицы соответствует строке таблицы истинности, то аналогично рассмотренному выше Примеру 1, каждую клетку матрицы можно описать десятичным числом:

Например, по столбцу $wx = 00$:

- клетка 0000 соответствует десятичному числу 0;
- клетка 0001 соответствует десятичному числу 1;
- клетка 0011 соответствует десятичному числу 3;
- клетка 0010 соответствует десятичному числу 2, и т.д.

Все клетки матрицы Карно соответствуют десятичным числам, представленным на рис. 1.

yz \ wx	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

Рисунок 1 – Обозначение клеток матрицы Карно десятичными числами

Таким образом, если функция проводимости будет задана в десятичном виде, можно не только записать аналитическую форму через символьные переменные, но также построить карту Карно и составить минимальные ДНФ и КНФ. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5.

Пусть ФАЛ задана в десятичном виде: F = 1 (3, 4, 5, 7, 11, 13, 15). Необходимо найти минимальную ДНФ и КНФ.

Решение:

Зная, что функция F = 1 на наборах 3, 4, 5, 7, 11, 13, 15 и с учетом распределения десятичных чисел по клеткам карты Карно (см. рис.1), заполним карту и выделим оптимальным образом подкубы для получения минимальной ДНФ (применение метода карт Карно для минимизации функции проводимости см. практическое занятие №4). Получим следующее покрытие:

yz \ wx	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	
11	1	1	1	1
10				

Составим минимальную ДНФ:

$F = y \cdot z + x \cdot z + \overline{w} \cdot x \cdot \overline{y}$

Приведем покрытие карты Карно, соответствующее минимальной КНФ:

yz \ wx	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	
11	1	1	1	1
10				

Составим минимальную КНФ:

$F = \overline{y}\cdot z + x\cdot y + \overline{w}\cdot z$

Вспомним перевод ДНФ в КНФ и выполним проверку получившихся минимальных ДНФ и КНФ. Для этого два раза подряд проинвертируем минимальную ДНФ и получим минимальную КНФ (см. практическую работу № 2):

$$F=\overline{\overline{(y\cdot z + x\cdot z + \overline{w}\cdot x\cdot \overline{y}\,)}}= (\overline{(\overline{y}+\overline{z}) \cdot (\overline{x}+\overline{z}) \cdot (w+\overline{x}+y)})=(\overline{(\overline{y}\cdot \overline{x}+\overline{y}\cdot \overline{z}+\overline{z})\cdot(w+\overline{x}+y)})=$$

$$=\overline{(\underline{\overline{y} \cdot \overline{x} \cdot w} + \underline{\overline{y} \cdot \overline{x}} + \underline{\underline{\overline{y} \cdot \overline{z} \cdot w}} + \overline{y} \cdot \overline{x} \cdot \overline{z} + \underline{\underline{\overline{z} \cdot w}} + \overline{z} \cdot \overline{x} + \overline{z} \cdot y)} = \overline{(\overline{y}\cdot\overline{x}+\overline{z}\cdot w+\overline{z}\cdot\overline{x}+\overline{z}\cdot y)} =$$

$$= (y+x) \cdot (z+\overline{w}) \cdot (z+x) \cdot (z+\overline{y}) = (y\cdot z+y\cdot\overline{w}+x\cdot z+x\cdot\overline{w}) \cdot (z+z\cdot\overline{y}+x\cdot z+x\cdot\overline{y}) =$$

$$=y\cdot z+y\cdot x\cdot z+y\cdot\overline{w}\cdot z+y\cdot\overline{w}\cdot x\cdot z+x\cdot z+x\cdot z\cdot\overline{y}+x\cancel{\cdot}z+x\cancel{\cdot}z\cdot\overline{y} +x\cdot\overline{w}\cdot z+x\cdot\overline{w}\cdot z\cdot\overline{y}+x\cdot\cancel{\overline{w}}\cdot z+x\cdot\overline{w}\cdot\overline{y} =$$

$$=y\cdot z +y\cdot\overline{w}\cdot z +x\cdot z+ x\cdot\overline{w}\cdot z+ x\cdot\overline{w}\cdot\overline{y} =y\cdot z+x\cdot z+ x\cdot\overline{w}\cdot\overline{y}.$$

Пример 6.

Для заданной ФАЛ составить аналитическую запись через символьные переменные в СКНФ, найти минимальные ДНФ и КНФ:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ = П (1, 2, 6, 8, 10, 11, 12, 15);

Решение:

Перепишем функцию F в двоичном виде:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ = П (0001, 0010, 0110, 1000, 1010, 1011, 1100, 1111);

Подставим вместо двоичных чисел переменные, зная, что при составлении СКНФ «0» соответствует прямому вхождению переменной, а «1» – инверсному. Получим ФАЛ, представленную в форме СКНФ:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+ x_2+ x_3+ \overline{x_4})\cdot(x_1+ x_2+ \overline{x_3}+ x_4) \cdot(x_1+ \overline{x_2}+ \overline{x_3}+ x_4) \cdot(\overline{x_1}+ x_2+ x_3+ x_4) \cdot(\overline{x_1}+ x_2+ \overline{x_3}+ x_4) \cdot(\overline{x_1}+ x_2+ \overline{x_3}+ \overline{x_4}) \cdot(\overline{x_1}+ \overline{x_2}+ x_3+ x_4) \cdot(\overline{x_1}+ \overline{x_2}+ \overline{x_3}+ \overline{x_4})$;

Для нахождения минимальных ДНФ и КНФ составим карту Карно по десятичному представлению заданной ФАЛ:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ = П (1, 2, 6, 8, 10, 11, 12, 15), т.к. ФАЛ задана в форме произведения, то единицы будут стоять во всех клетках карты Карно, не вошедших в заданный набор ФАЛ:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	
01		1		1
11	1	1		
10			1	

Покрытие карты Карно для составления минимальной ДНФ:

		x_1x_2			
		00	01	11	10
	00	1	1	1	
x_3x_4	01		1		1
	11	1	1		
	10			1	

Минимальная ДНФ:

$F = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4;$

Покрытие карты Карно для составления минимальной КНФ:

		x_1x_2			
		00	01	11	10
	00	1	1	1	
x_3x_4	01		1		1
	11	1	1		
	10			1	

Минимальная КНФ:

$F = (x_1+\bar{x}_3+x_4) \cdot (\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1+\bar{x}_3+\bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1+x_2+x_4) \cdot (x_1+x_2+x_3+\bar{x}_4).$

3 Задания для самостоятельного выполнения

Для заданной ФАЛ (табл. 1), описанной десятичными числами, составить аналитическую запись через символьные переменные в СДНФ, найти минимальные ДНФ и КНФ:

Таблица 1 - Варианты заданий

№ варианта	Вид формулы
1.	$F = 1$ (0, 2, 3, 5, 8, 11, 14, 15)
2.	$F = 0$ (0, 2, 3, 5 ,8, 11, 14, 15)
3.	$F = 1$ (1, 2, 4, 6, 9, 12, 13, 14)
4.	$F = 0$ (1, 2, 4, 6, 9, 12, 13, 14)
5.	$F = 1$ (0, 1, 3, 5, 10, 11, 12, 15)

Продолжение таблицы

6.	F = 0 (0, 1, 3, 5, 10, 11, 12, 15)
7.	F = 1 (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15)
8.	F = 0 (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15)
9.	F = 1 (0, 2, 3, 6 , 7, 9, 11, 13)
10.	F = 0 (0, 2, 3, 6 , 7, 9, 11, 13)
11.	F = 1 (1, 3, 6, 7 ,8, 12, 13, 14)
12.	F = 0 (1, 3, 6, 7 ,8, 12, 13, 14)
13.	F = 1 (0, 3, 4, 7 , 9, 10, 11, 13)
14.	F = 0 (0, 3, 4, 7 , 9, 10, 11, 13)
15.	F = 1 (1, 2, 3, 7 ,8, 9, 10, 12)
16.	F = 0 (1, 2, 3, 7 ,8, 9, 10, 12)
17.	F = 1 (5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13)
18.	F = 0 (5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13)
19.	F = 1 (3, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15)
20.	F = 0 (3, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15)
21.	F = 1 (0, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13)
22.	F = 0 (0, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13)
23.	F = 1 (2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 14)
24.	F = 0 (2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 14)
25.	F = 1 (1, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12)

Практическая работа № 6

Анализ и синтез логических автоматов

1 Цель работы

Познакомиться с основами анализа и синтеза логических автоматов. Научиться проектировать комбинационные схемы конечных автоматов на логическом уровне.

2 Теоретические сведения

2.1 Основные понятия и определения

Конечные логические автоматы – это устройства, имеющие конечное число входов $X = \{x_1, x_2 \ldots x_n\}$, конечное число выходов $Y=\{y_1, y_2 \ldots y_m\}$, конечное число внутренних состояний $Q = \{q_1, q_2 \ldots q_k\}$ и работающие в дискретные моменты времени (такты). Зависимость между входными и выходными сигналами в логических автоматах выражается логической функцией.

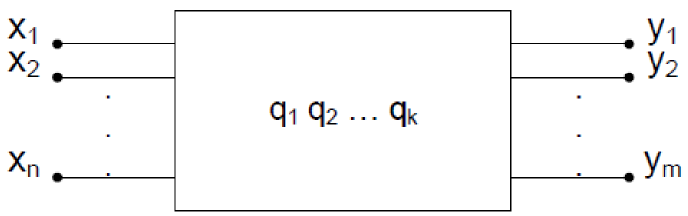


Рисунок 1 – Представление логического автомата в виде «черного ящика»

Логические автоматы делятся на 2 основных класса:

1. *Логические автоматы без памяти* (однотактные или комбинационные) – это автоматы, в которых значения входных переменных в текущий момент времени полностью определяют значения выходных переменных, а в случае отсутствия входных сигналов отсутствуют и выходные.

Такие логические автоматы можно полностью описать таблицей истинности или булевым выражением, т.е. составить функцию проводимости.

У комбинационных автоматов нет памяти, поэтому нет внутренних состояний, т.е. $Q = 0$.

Примером могут служить цифровые устройства: дешифраторы, шифраторы, мультиплексоры и др.

2. *Логические автоматы с памятью* (многотактные или последовательностные) - это автоматы, в которых выходной сигнал зависит не только от комбинации входных сигналов в текущий момент времени, но и от предыстории событий на его входе, т.е. от входных сигналов в предыдущие моменты времени или от последовательности появления входных сигналов. В таких автоматах обязателен элемент «память».

Примером последовательностных автоматов служат счетчики импульсов и регистры.

Основными задачами теории автоматов являются вопросы анализа и синтеза схем логических автоматов.

Анализ - выяснение того, какое преобразование информации реализует заданная схема логического автомата.

Синтез - построение схемы логического автомата, реализующей заданное преобразование, а также минимизация числа элементов в схемах логических автоматов, проектирование надежных схем логических автоматов из элементов, обладающих некоторой вероятностью отказа в работе.

При решении этих вопросов широко используются изученный ранее аппарат алгебры логики Буля.

2.2 Основы проектирования логических схем конечных автоматов

Под определение конечного логического автомата подходит широкий спектр различных узлов и блоков ЭВМ и вся ЭВМ в целом. Поэтому умение проектировать подобные устройства в конечном итоге, это умение проектировать ЭВМ в целом.

Задачей логического проектирования является разработка схем конечных автоматов в целом и его блоков с той или иной степенью подробности, описывающих их структуру:

1. Под *структурой* конечного автомата (блока) понимается совокупность его физических элементов и соединений между ними;

2. Под *схемой* понимается графическое изображение структуры автомата, содержащее условное изображение блоков, элементов структуры и соединений между ними.

Конечным результатом логического проектирования является разработка структурных (комбинационных) схем. Неделимой частью на структурной схеме является логический элемент (ЛЭ). Логический элемент предназначен для выполнения некоторого элементарного преобразования его входных воздействий в выходные. При логическом проектировании, как правило, оптимизируется количество ЛЭ с учетом всех ограничений. Ограничения могут быть наложены на быстродействие автомата, на число входов и нагрузочную способность элементов, на потребляемую мощность, на вес и на габариты устройства и т.д. Кроме этого могут быть выдвинуты требования по надежности и однородности структуры (использование при проектирование одинаковых элементов). Ограничения могут быть различными, и все они должны быть учтены при проектировании.

В целом, определяя задачу логического проектирования конечного автомата, можно выделить 5 основных ее частей:

1. Необходимо от словесного описания задачи проектирования перейти к её математическому представлению. Чаще всего этим представлением является таблица истинности работы устройств.

2. От таблицы истинности необходимо перейти к аналитической форме записи логических уравнений, описывающих проектируемое устройство.

3. Используя любой доступный метод необходимо провести минимизацию переключательных функций, описывающих устройство. Можно считать, что это основной этап проектирования, так как он позволяет получить проектируемое устройство в оптимальном виде с точки зрения количества структурных логических элементов.

4. Привести все логические уравнения к виду, позволяющему спроектировать устройство в заданном базисе логических элементов.

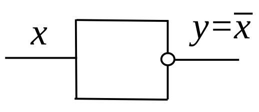
5. По полученным аналитическим уравнениям построить структурную схему проектируемого устройства на базе простых логических элементов.

Для построения структурной схемы любой сложной булевой функций необходимо знать схемную реализацию, графическое отображение и принцип работы ограниченного набора простых логических элементов, приведенных ниже. Первые три логических элемента являются базовыми, на них можно построить любую функцию. Остальные более сложные, сочетающие в себе несколько базовых операций.

1) *Инвертор (схема «НЕ»)*

Аналитическая запись: $y = \overline{x}$

Обозначение на 0схемах:



Электрический эквивалент - размыкающий ключ:

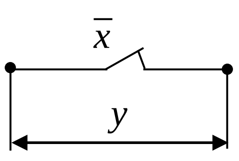
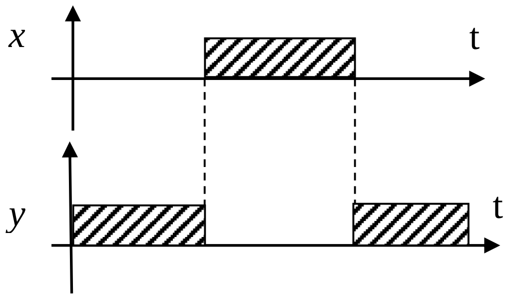


Таблица истинности:

x	y
0	1
1	0

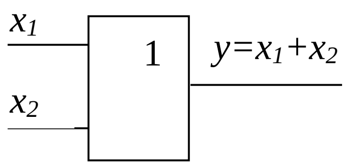
Графическое представление принципа работы элемента «инвертор»:



2) *Дизъюнктор (схема «ИЛИ»)*

Аналитическая запись: $y = x_1 + x_2$

Обозначение на схемах:



Электрический эквивалент:

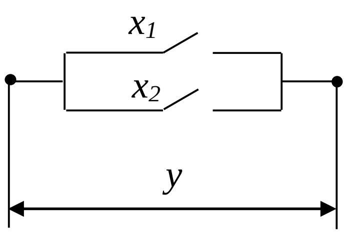
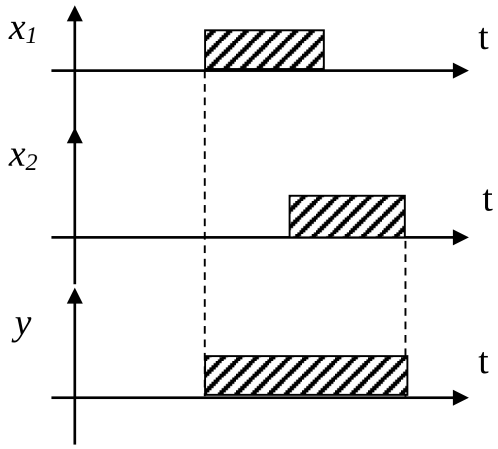


Таблица истинности:

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

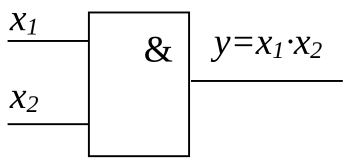
Графическое представление принципа работы элемента «дизъюнктор»:



3) *Конъюктор (схема «И»)*

Аналитическая запись: $y = x_1 \cdot x_2$

Обозначение на схемах:



Электрический эквивалент:

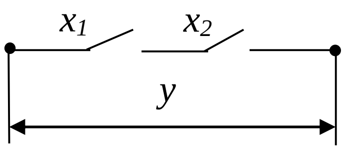
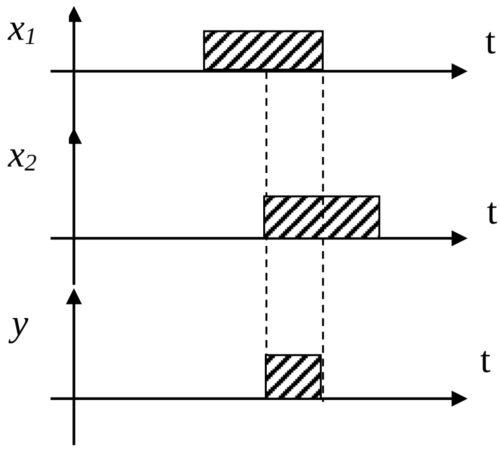


Таблица истинности:

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

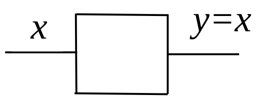
Графическое представление принципа работы элемента «конъюктор»:



4) *Повторитель*

Аналитическая запись: $y = x$

Обозначение на схемах:



Электрический эквивалент – замыкающий ключ:

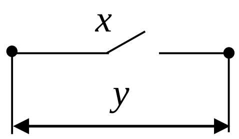
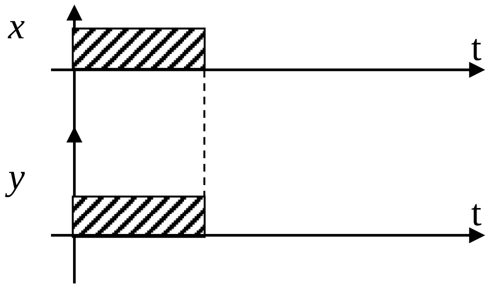


Таблица истинности:

x	y
0	0
1	1

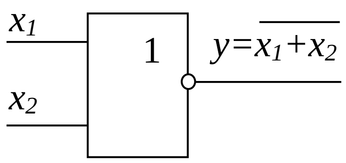
Графическое представление принципа работы элемента «повторитель»:



5) *Функция Вебера (стрелка Пирса) (схема «ИЛИ-НЕ»)*

Аналитическая запись: $y = \overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

Обозначение на схемах:



Электрический эквивалент:

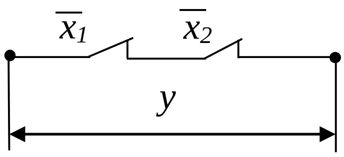
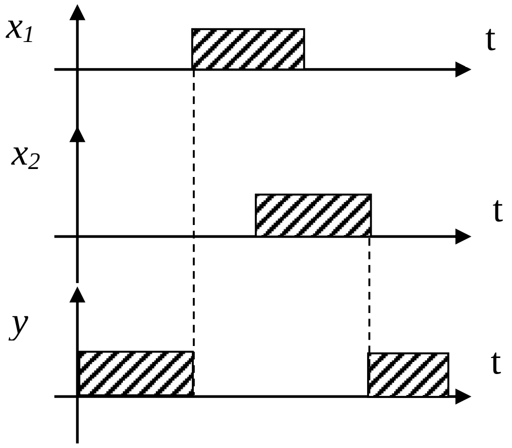


Таблица истинности:

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

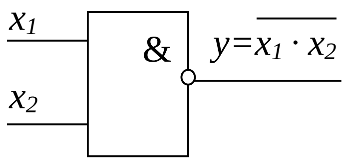
Графическое представление принципа работы элемента «стрелка Пирса»:



6) *штрих Шеффера (схема «И-НЕ»)*

Аналитическая запись: $y = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$

Обозначение на схемах:



Электрический эквивалент:

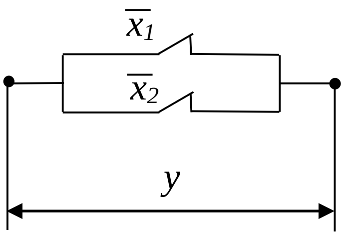
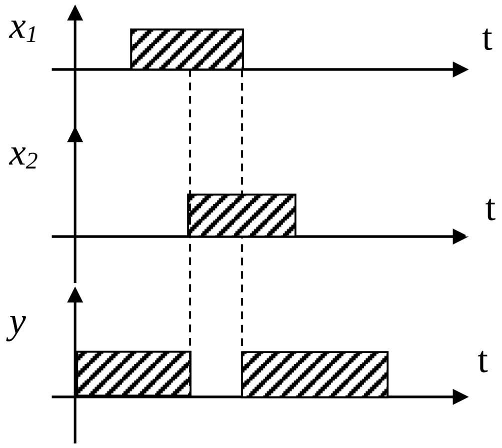


Таблица истинности:

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

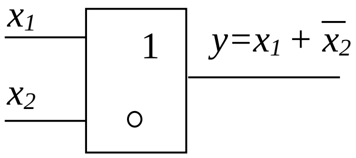
Графическое представление принципа работы элемента «штрих Шеффера»



7) *Импликатор*

Аналитическая запись: $y = x_1 + \overline{x_2}$

Обозначение на схемах:



Электрический эквивалент:

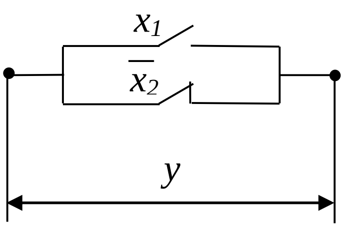
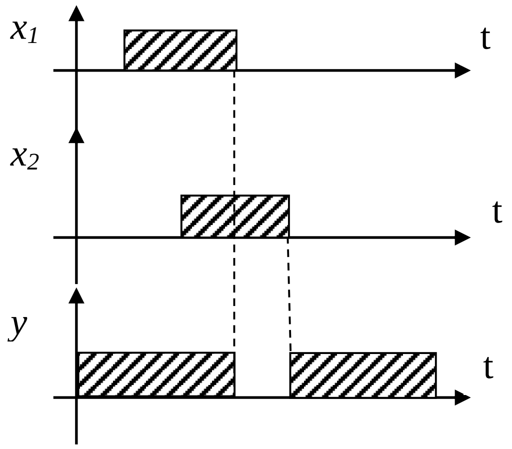


Таблица истинности:

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

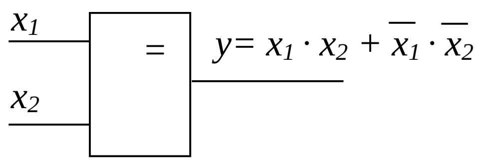
Графическое представление принципа работы элемента «импликатор»:



8) *Эквивалентность*

Аналитическая запись: $y = x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

Обозначение на схемах:



Электрический эквивалент:

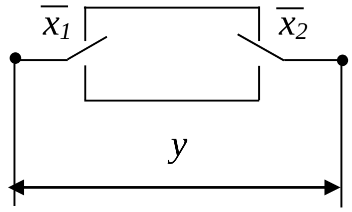
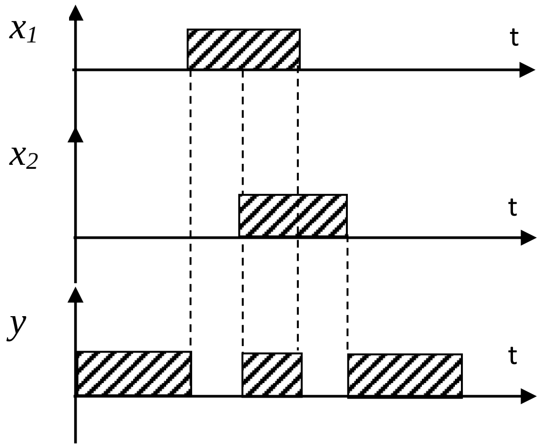


Таблица истинности:

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

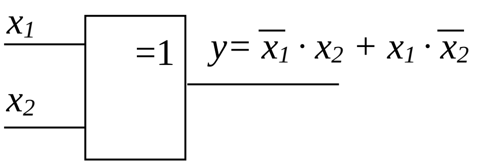
Графическое представление принципа работы элемента «эквивалентность»



9) *Сложение по модулю 2 («исключающее ИЛИ»)*

Аналитическая запись: $y = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$

Обозначение на схемах:



Электрический эквивалент:

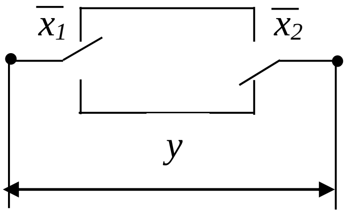
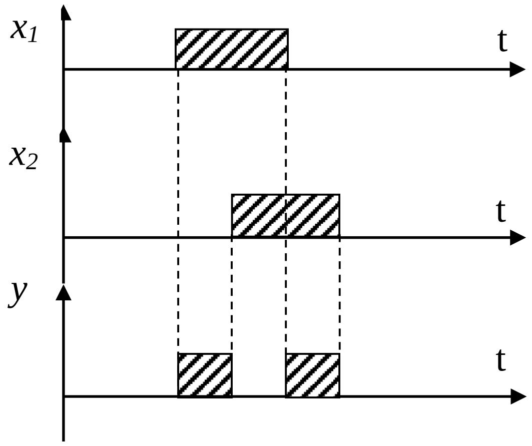


Таблица истинности:

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

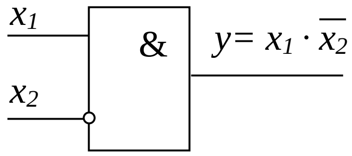
Графическое представление принципа работы элемента «исключающее ИЛИ»:



10) *Запрет*

Аналитическая запись: $y = x_1 \cdot \overline{x_2}$

Обозначение на схемах:



Электрический эквивалент:

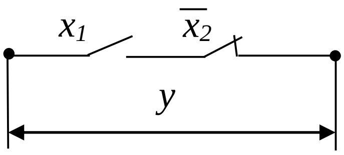
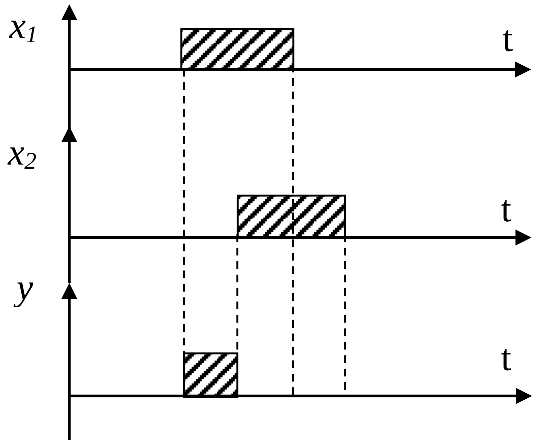


Таблица истинности:

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Графическое представление принципа работы элемента «запрет»



Различные электронные схемы и их комбинации на логическом уровне могут быть описаны с помощью базовых логических элементов. Такое описание электронных схем позволяет абстрагироваться от физической природы конкретных электронных элементов и осуществлять их анализ. При этом оказывается, что для анализа совсем не обязательно иметь саму схему. Для того, чтобы получить значение функции на выходе какой-либо схемы, достаточно записать эту зависимость в виде логических элементов, связанных между собой в соответствии с выполняемой функцией.

Для анализа электронной схемы с помощью аппарата алгебры логики нужно найти логическую функцию, описывающую работу заданной схемы. При этом каждому элементу электронной схемы можно поставить в соответствие логический элемент. Этим самым устанавливается однозначное соответствие между элементами схемы и ее математическим описанием.

Пример 1.

Выполнить анализ представленной комбинационной схемы устройства на рис. 1.

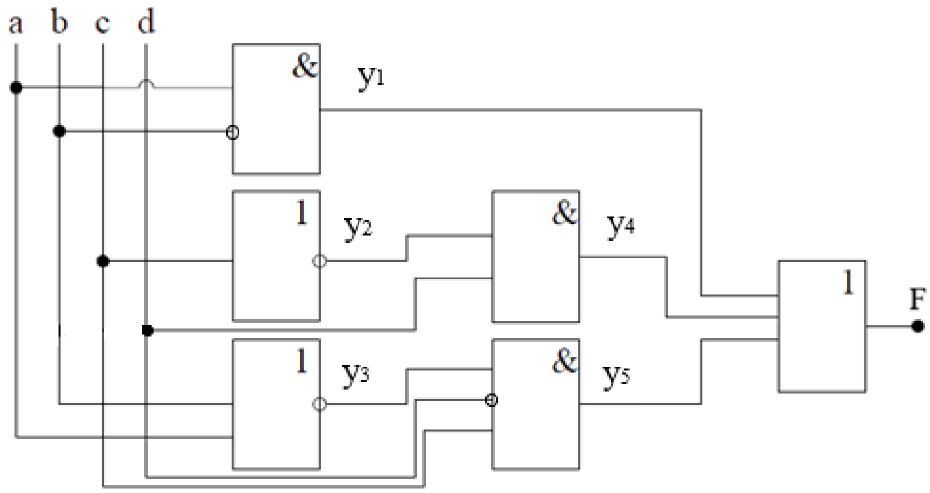


Рисунок 1 – Структурная схема логического устройства

Анализ подразумевает описание работы структурной схемы с помощью функции алгебры логики. Поэтому решение поставленной задачи будет заключаться в составлении аналитической записи логической функции по заданной схеме.

Начинаем разбирать схему со входов. Имеем 4 входа, т.е. функцию четырех аргументов. Затем, рассматриваем последовательно каждый логический элемент схемы, двигаясь слева направо, записываем выражение аргументов на его выходе. В итоге получаем выражение для функции F:

$y_1 = a\bar{b};$

$y_2 = \bar{c};$

$y_3 = (\overline{a+b}) = \bar{a}\bar{b};$

$y_4 = y_2 d = \bar{c}d;$

$y_5 = y_3 c\bar{d} = \bar{a}\bar{b}c\bar{d};$

$F = y_1 + y_4 + y_5 = a\bar{b} + \bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}.$

Ответ: работа комбинационной схемы, представленной на рис. 1 описывается ФАЛ: $F = a\bar{b} + \bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}.$

Анализ структурной схемы логического устройства можно проводить и в обратном направлении, двигаясь от выхода ко входам. При этом ход рассуждений и результат остаются прежними.

2.3 Схемная реализация совершенной дизъюнктивной нормальной формы и совершенной конъюнктивной нормальной формы

Любую переключательную ФАЛ можно представить в СДНФ или в СКНФ, где в качестве логических элементов используются функции НЕ, И, ИЛИ и изобразить в схемной реализации эту функцию с помощью базовых логических элементов. Если не брать в расчет ограничений по количеству входов у логических элементов «И» и «ИЛИ», то любая СДНФ или СКНФ будут реализованы схемой, содержащей не более трех уровней логических элементов.

Пример 2.

Пусть дана ФАЛ: $F = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c}$. Для её реализации потребуется 3 ЛЭ «НЕ», 4 ЛЭ «И» и 1 ЛЭ «ИЛИ» (рис. 2).

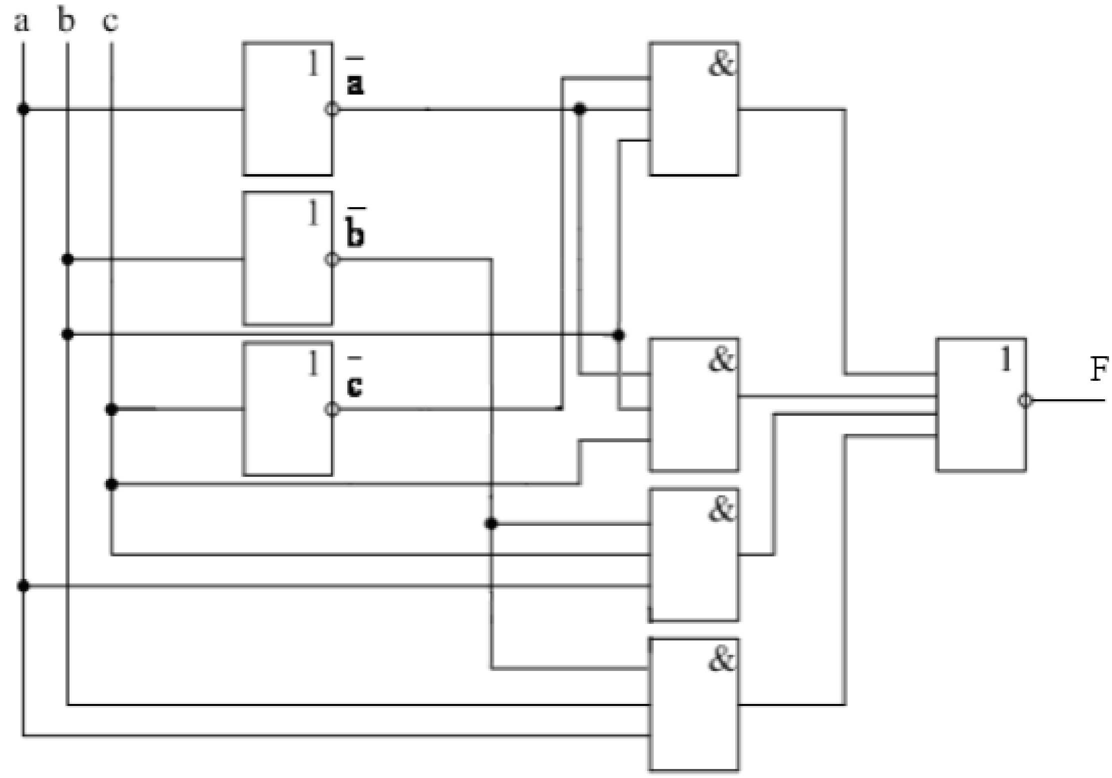


Рисунок 2 – Пример схемной реализации ФАЛ в СДНФ

На первом уровне (рис. 2) расположены ЛЭ «НЕ», на втором – ЛЭ «И» и на третьем – ЛЭ «ИЛИ». Тоже самое получается при реализации СКНФ.

Пример 3.

Пусть ФАЛ задана в СКНФ: $F = (a+b+\bar{c}) \cdot (a+\bar{b}+\bar{c}) \cdot (\bar{a}+\bar{b}+c) \cdot (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$.

Для её реализации потребуется 3 ЛЭ «НЕ», 4 ЛЭ «ИЛИ» и 1 ЛЭ «И» (рис. 3).

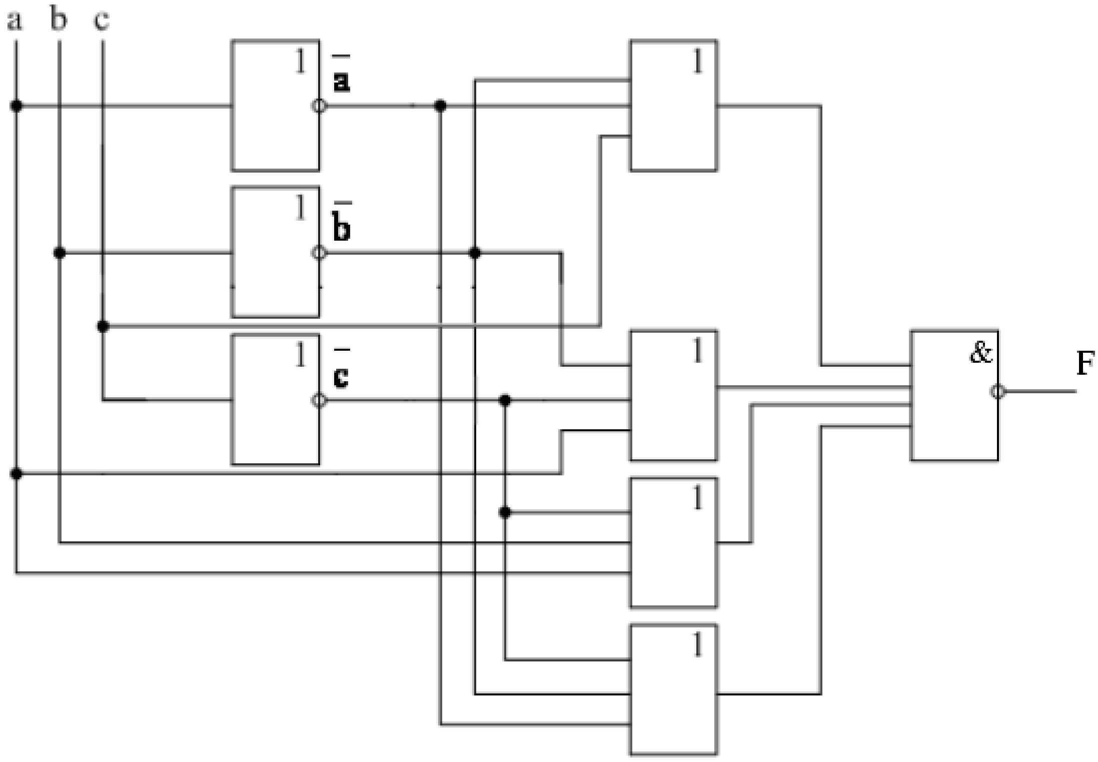


Рисунок 3 – Пример схемной реализации ФАЛ в СКНФ

В случае на рис. 3 на первом уровне расположены ЛЭ «НЕ», на втором – ЛЭ «ИЛИ» и на третьем – ЛЭ «И».

В примерах 2 и 3 ФАЛ содержат небольшое количество аргументов, поэтому и количество входов у ЛЭ не велико. Однако, при возрастании числа аргументов, увеличивается и потребность во входах. При этом у реальных ЛЭ есть ограничения по количеству входов. В связи с этим реальные схемы логических автоматов значительно более громоздки, а число уровней в них существенно больше 3-х.

2.4 Схемы с одним и несколькими выходами

Задача логического проектирования, как правило, имеет различные решения в зависимости от выбранной системы логических элементов. Однако для любой заданной функции алгебры логики почти всегда можно синтезировать схему, соответствующую этой функции. Получение схемы с минимальным количеством логических элементов и связей между ними требует нахождение минимальной формы для ФАЛ. Но не всегда минимальная форма дает правильное решение поставленной задачи.

Некоторые более сложные схемы, имеющие несколько выходов, могут быть сведены в частном случае к набору схем с одним выходом. Тогда логическое проектирование осуществляется путем декомпозиции для каждой выделенной схемы. Рассмотрим решения данных задач поочередно, начиная с более простой.

1. Схемы с одним выходом

Схемы с одним выходом и несколькими входами относятся к наиболее простым схемам. Основная сложность при логическом проектировании подобных схем состоим в том, чтобы найти выражение для выходной функции в заданном базисе с учетом всех критериев проектирования.

Пусть задан классический базис ЛЭ И, ИЛИ, НЕ. Казалось бы, что синтез заданной схемы можно производить, получив минимальные ДНФ или КНФ данной функции. Однако это не всегда приводит к оптимальной схеме с точки зрения количества ЛЭ и связей между ними. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.

Возьмем МДНФ переключательной функции $F = ab + ac + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Для реализации такой функции необходимо иметь 3 ЛЭ «НЕ», 3 ЛЭ «И» и 1 ЛЭ «ИЛИ» (рис. 4). Всего 7 шт. ЛЭ.

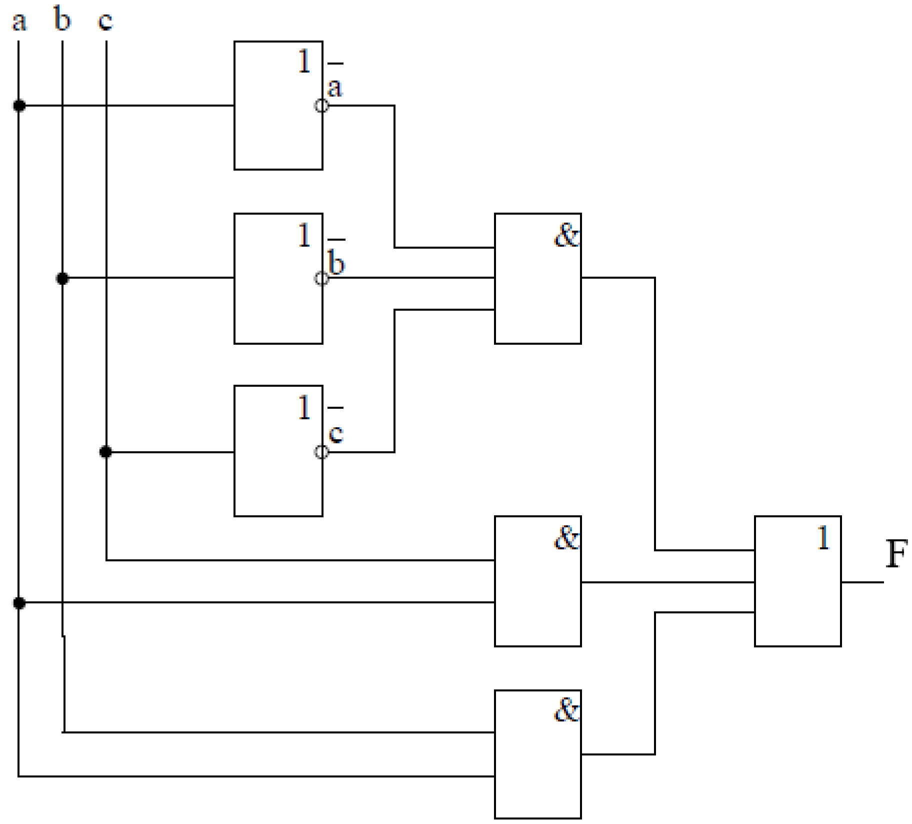


Рисунок 4 – Структурная схема ФАЛ $F = ab + ac + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

С помощью основных законов булевой алгебры попробуем преобразовать данную функцию. Вынесем за скобки общий множитель, получим:

$F = a{\cdot}(b + c) + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

Для реализации функции в таком виде потребуется 3 ЛЭ «НЕ», 2 ЛЭ «И», 2 ЛЭ «ИЛИ». Всего 7 шт. ЛЭ. Экономии нет.

Применим к последнему слагаемому правило де Моргана:

$F = a{\cdot}(b + c) + \overline{(a+b+c)}$

Подобная функция для своей реализации потребует 1 ЛЭ «НЕ», 1 ЛЭ «И» и 3 ЛЭ «ИЛИ». Всего 5 шт. ЛЭ (рис. 5).

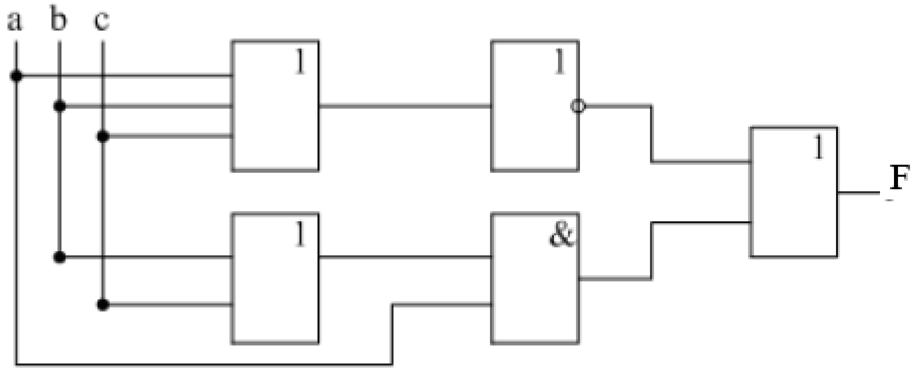


Рисунок 5 - Структурная схема ФАЛ $F = a{\cdot}(b + c)+\overline{(a+b+c)}$

Пример 5.

Возьмем МКНФ $F = (a+b){\cdot}\,(a+c){\cdot}\,(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$

Для реализации такой функции требуется 3 ЛЭ «НЕ», 3 ЛЭ «ИЛИ» и 1 ЛЭ «И». Всего 7 шт. ЛЭ (рис. 6).

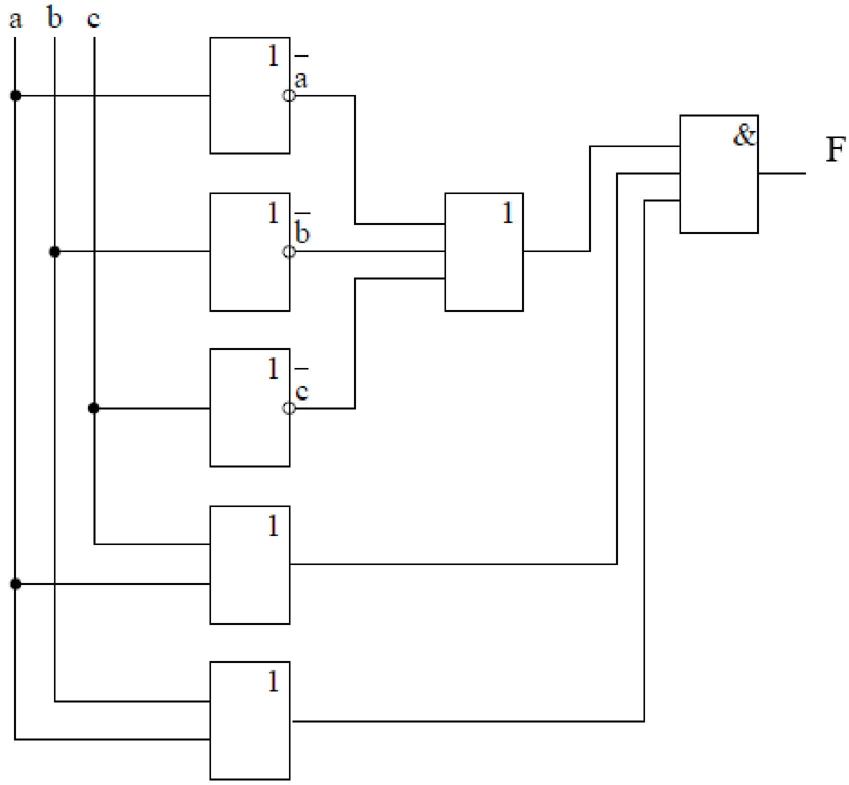


Рисунок 6 - Структурная схема ФАЛ $F = (a+b){\cdot}\,(a+c){\cdot}\,(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$

Попробуем так же преобразовать эту функцию, сначала раскрывая скобки, а потом применяя правило де Моргана:

$F = (a+b)\cdot (a+c)\cdot (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = (a + bc) \cdot (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$ – 7 шт. ЛЭ.

$F = (a + bc) \cdot \overline{(a\cdot b\cdot c)}$ – 5 шт. ЛЭ. Структурная схема для последней записи ФАЛ представлена на рис. 7.

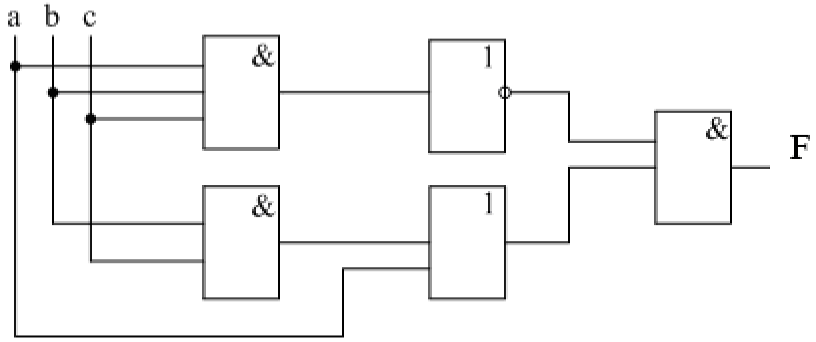


Рисунок 7 - Структурная схема ФАЛ $F = (a + bc) \cdot \overline{(abc)}$

Вывод: МДНФ или МКНФ не всегда дают возможность построить схему с минимальным количеством ЛЭ и с минимальным количеством связей между ЛЭ.

Для выполнения этих требований необходимо применить следующий прием:

1. Вынесение аргументов за скобки в МДНФ переключательной ФАЛ;

2. Раскрытие скобок в МКНФ переключательной ФАЛ;

3. Использование правила де Моргана для МДНФ или для МКНФ переключательных ФАЛ.

2. Схемы с несколькими выходами

Задачу проектирования схемы с n входами и m выходами можно решать двумя способами.

Если требуется максимальная надежность схемы, то каждый выход проектируется как самостоятельная схема, содержащая n входов. Таких схем будет R. Но если требуется проектировать схему с минимальным количеством элементов, а как следствие этого с минимальным потреблением энергии, минимальными габаритами, минимальной стоимостью и т.д., то при решении подобной задачи необходимо исключить дублирование в этих R схемах проектируемых функций. Другими словами, необходимо выделить общую часть всей схемы, которая синтезируется один раз и используется при получении функций каждого выхода.

Однако, как отмечалось ранее, при любом логическом проектировании нет четких методик, которым необходимо следовать при синтезе произвольной схемы. Многое зависит от разработчика. Существует ряд правил, которые помогают получить искомый результат. Рассмотрим пример.

Пример 6.

Пусть необходимо спроектировать элементарное устройство, содержащее 2 входа и 3 выхода (рис. 8).

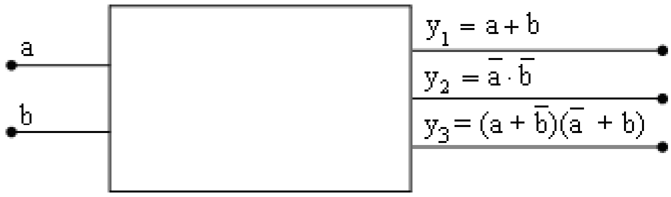


Рисунок 8 – Логическое устройство с 2-мя входами и 3-мя выходами

Если каждый выход проектировать отдельно в классическом базисе ЛЭ (И, ИЛИ, НЕ) потребуется 9 шт. ЛЭ (рис. 9).

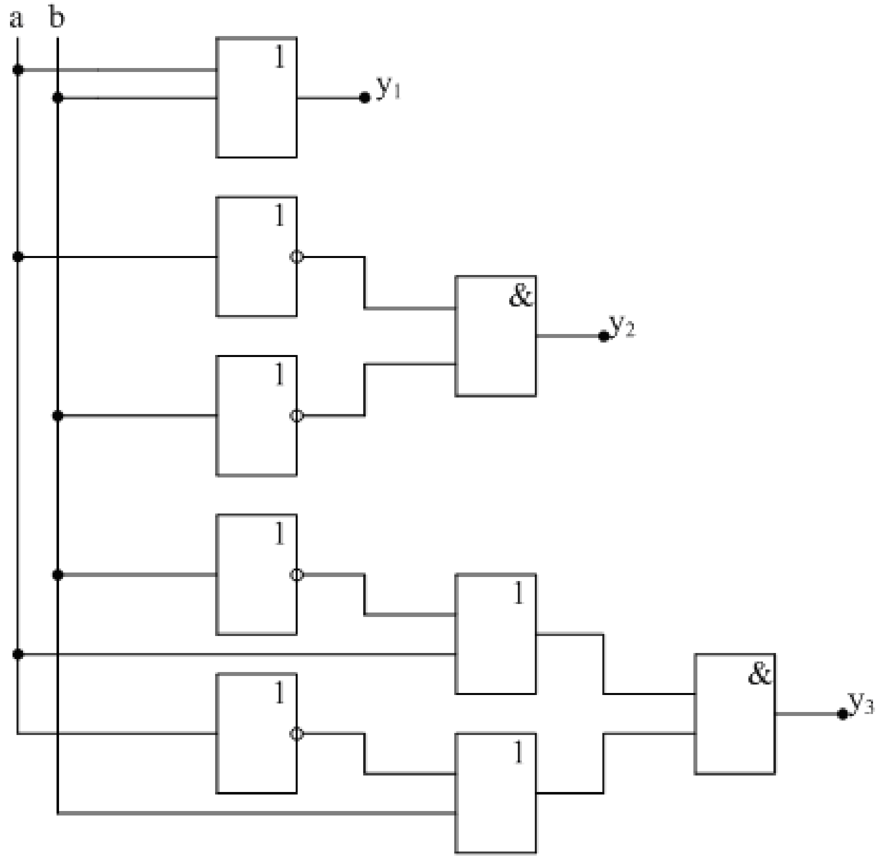


Рисунок 9 – Структурная схема для логического устройства на рис. 8

При проектировании вторым способом можно преобразовать переключательные ФАЛ, описывающие выходы системы, следующим образом:

$y_1 = a + b;$

$y_2 = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a + b} = \overline{y_1};$

$y_3 = (a + \overline{b}) \cdot (\overline{a}+b) = a{\cdot}b + \overline{a}{\cdot}\overline{b} = a{\cdot}b + y_2;$

Структурная схема для такого описания выходов содержит 4 шт. ЛЭ (рис. 10).

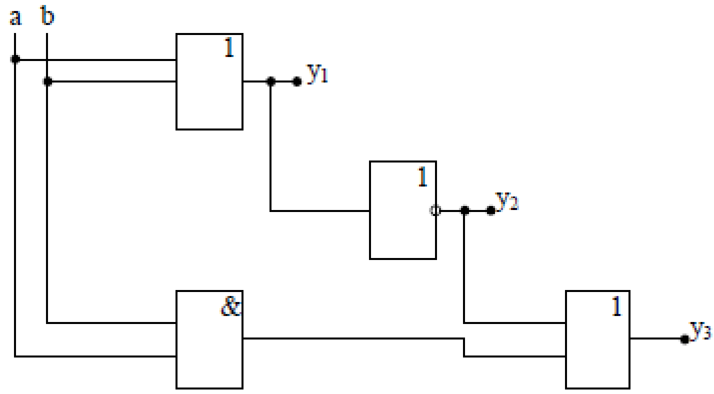


Рисунок 10 – Структурная схема для логического устройства на рис. 8 с учетом минимизации ЛЭ

В данном случае рассмотрен очень простой пример. При наличии более сложных функций выделение общей части надо проводить одним из методов минимизации переключательных ФАЛ, например, с помощью диаграмм Вейтча. Если переключательная ФАЛ содержит более 5 аргументов, то для выделения общей части удобно использовать метод Квайна или метод Квайна-Мак-Класки. В данном курсе эти методы минимизации функций не рассматриваются. Достаточно доступно они описаны в учебном пособии Бирюкова И.И. «Теория автоматов. Часть 1. Логическое проектирование комбинационных схем».

3 Задания для самостоятельного выполнения

Составить три эквивалентные комбинационные схемы конечного логического автомата. Одну для исходной ФАЛ, вторую, с учетом критерия минимизации ЛЭ на структурной схеме, третью с учетом унификации ЛЭ на схеме. Аналитическую запись ФАЛ взять из таблицы заданий практической работы № 3 согласно своему варианту.

Литература

1. Бирюков И.И. Теория автоматов. Часть 1. Логическое проектирование комбинационных схем: Учебное пособие. – М. – 2010. – 62 с.

2. Алексенко А.Г., Шагурин И.И. Микросхемотехника: Учебное пособие для вузов- 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь.- 1990. – 496 с.

3. Насыров И.А. Конспекты лекций по цифровой электронике: Учебное пособие. – Казань.- 2006.- 97 с.

4. Савельев А.Я. Прикладная теория цифровых автоматов: Учебник для вузов по специальности ЭВМ.- М.- Высшая школа.- 1987. – 272 с.

Учебное издание

Захаревич Юлия Сергеевна
Захаревич Аркадий Владимирович

ЛОГИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАЩИТЫ

Методические указания к практическим работам

Издано в авторской редакции