

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

В.С. Андык

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2013

УДК 681.51.01(075.8)
ББК 32.965-5я73
А66

Андык В.С.

А66 Теория автоматического управления: учебное пособие / В.С. Андык; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 109 с.

В пособии изложены основные сведения по задачам классической теории автоматического управления. Рассматриваются практические аспекты решения вопросов устойчивости, параметрического синтеза и оценки качества работы систем автоматического управления. Приведены примеры решения перечисленных задач, варианты заданий для их выполнения практических занятиях.

Предназначено для студентов, изучающих теорию автоматического управления.

УДК 681.51.01(075.8)
ББК 32.965-5я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор ТУСУРа

А.А. Светлаков

Доктор технических наук, профессор ТГУ

Ю.И. Параев

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2013
© Андык В.С., 2013
© Обложка. Издательство Томского
политехнического университета, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	
1.1. Дифференциальные уравнения элементов систем автоматического управления. Практическое занятие № 1	6
1.2. Временные характеристики систем. Практическое занятие № 2 .	9
1.3. Простейшие методы идентификации систем по их переходным характеристикам. Практическое занятие № 3	15
1.4. Передаточные функции и частотные характеристики звеньев и систем. Практическое занятие № 4	21
2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИХ РАБОТЫ	
2.1. Исследование устойчивости систем автоматического управления с помощью критериев Рауса, Гурвица, Лъенара-Шипара. Практическое занятие № 5	25
2.2. Исследование устойчивости систем автоматического управления с помощью критериев Михайлова и Найквиста. Практическое занятие № 6	31
2.3. Построение областей устойчивости. D-разбиение. Практическое занятие № 7	38
2.4. Построение переходных процессов в линейных системах автоматического управления. Метод трапеций. Прямые оценки качества регулирования. Практическое занятие № 8	44
3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ	
3.1. Параметрический синтез линейных систем регулирования корневым методом (РАФЧХ). Практическое занятие № 9	51

3.2. Параметрический синтез линейных систем регулирования с оценкой запаса устойчивости по максимуму АЧХ замкнутой системы. Практическое занятие № 10	59
4. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ, С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ КАНАЛАМИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ, ИМПУЛЬСНЫЕ	
4.1. Автоматические системы регулирования при случайных воздействиях. Практическое занятие № 11	69
4.2. Системы с дополнительными информационными каналами. Системы с компенсацией возмущений. Практическое занятие № 12	79
4.3. Нелинейные системы. Метод гармонического баланса. Практическое занятие № 13	84
4.4. Импульсные системы. Практическое занятие № 14	89
ПРИЛОЖЕНИЕ	
П.1. Вывод диаграммы Ольденбурга и Сарториуса	99
П.2. Диаграмма Ольденбурга и Сарториуса	101
П.3. Таблицы h_{χ} -функций	102
П.4. Таблица преобразований функций по Лапласу и z -изображений	104
П.5. Таблица соответствия корреляционных функций и спектров мощности сигналов	105
П.6. Формулы для интегралов от дробно-рациональных функций ..	106
П.7. Коэффициенты гармонической линеаризации	107
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	108

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для привития студентам практических навыков применения основных положений классической теории автоматического управления. Пособие состоит из четырех разделов.

В первом разделе приведены методы математического описания элементов систем автоматического управления (дифференциальные уравнения, временные и частотные характеристики, передаточные функции, простейшие методы идентификации).

Во втором разделе рассматриваются задачи исследования на устойчивость и оценку качества линейных динамических систем управления (алгебраические и частотные критерии устойчивости, построение областей устойчивости, расчет переходных процессов, прямые оценки качества систем регулирования).

Третий раздел пособия посвящен параметрическому синтезу автоматических систем регулирования (корневой метод (РАФЧХ), методы, основанные на оценке запаса устойчивости АСР по максимуму АЧХ замкнутой системы, в т.ч. метод В.Я. Ротача).

В четвертом разделе рассматриваются вопросы анализа и синтеза систем с дополнительными информационными каналами, системы автоматического управления при случайных воздействиях, синтез оптимальных по Винеру систем регулирования, нелинейные и импульсные системы управления.

В пособии приведены необходимые справочные материалы, к каждому практическому занятию прилагаются задания на работу, варианты заданий, требования к отчету. Ссылки на формулы, таблицы, графики даны в пределах каждого раздела.

Учебное пособие может быть полезным не только студентам, но и всем, изучающим основы современной теории управления.

Выполнение заданий к практическим занятиям предполагает широкое применение средств вычислительной техники: персональных компьютеров, инженерных микрокалькуляторов, в т.ч. программируемых.

ВНИМАНИЕ!

1. К каждому практическому занятию студент должен иметь: инженерный микрокалькулятор; миллиметровую бумагу; чертежные принадлежности (линейка, циркуль, карандаш); тетрадь для отчетов и тетрадь для черновиков.

2. Следует учесть, что результаты расчетов на данном практическом занятии могут являться исходными данными для выполнения заданий других практических занятий.

3. Задания, не выполненные в аудиторное время, подлежат завершению в часы самостоятельной работы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Практическое занятие № 1

Предварительные сведения

На этом практическом занятии составление дифференциальных уравнений элементов систем автоматического управления рассматривается на примере пассивных электрических цепей относительно входных и выходных напряжений.

Для составления дифференциальных уравнений электрических цепей удобно пользоваться операторной формой записи сопротивлений: индуктивного LP , емкостного $1/CP$ и активного R , где $P = \frac{d}{dt}$ – символ или оператор дифференцирования.

Пример

Для электрической цепи (рис. 1.1) с известными значениями индуктивности L , емкости C , активного сопротивления R требуется составить дифференциальное уравнение относительно входного $U_{вх}(t)$ и выходного $U_{вых}(t)$ напряжений.

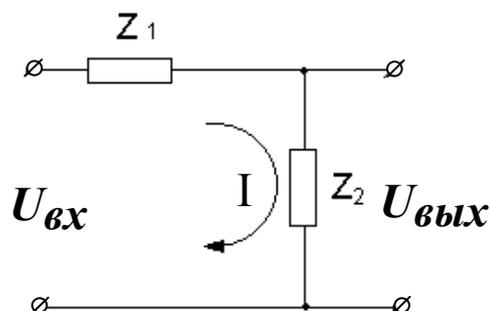
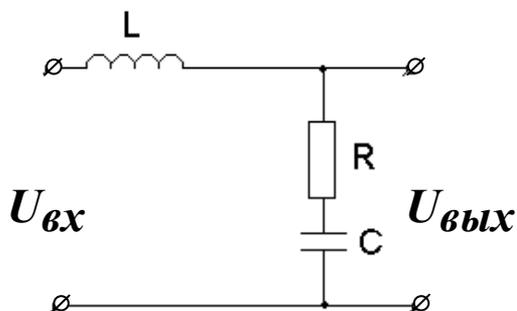


Рис. 1.1. Схема электрической цепи

Рис. 1.2. Преобразованная схема

Решение

Преобразуем исходную схему электрической цепи к расчетной (рис. 1.2), где

$$Z_1(P) = LP, \quad Z_2(P) = R + \frac{1}{CP}.$$

При условии, что сопротивление источника бесконечно мало, а сопротивление нагрузки бесконечно велико, значение тока, протекающего по цепи, определяется выражением

$$I(P) = \frac{U_{\text{вх}}(P)}{Z_1(P) + Z_2(P)}.$$

Тогда

$$U_{\text{вых}}(P) = I(P) \cdot Z_2(P).$$

На основании последних двух уравнений получим

$$U_{\text{вых}}(P) = \frac{Z_2(P)}{Z_1(P) + Z_2(P)} U_{\text{вх}}(P)$$

или, подставляя выражения для $Z_1(P)$ и $Z_2(P)$,

$$U_{\text{вых}}(P) = \frac{R \cdot C \cdot P + 1}{L \cdot C \cdot P^2 + R \cdot C \cdot P + 1} \cdot U_{\text{вх}}(P),$$

или

$$U_{\text{вых}}(P) = \frac{T_1 P + 1}{T_2^2 P^2 + T_1 P + 1} U_{\text{вх}}(P),$$

где $T_1 = R \cdot C$, $T_2^2 = L \cdot C$.

Последнее уравнение запишем в следующем виде:

$$(T_2^2 P^2 + T_1 P + 1) U_{\text{вых}}(P) = (T_1 P + 1) U_{\text{вх}}(P).$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $P = \frac{d}{dt}$ – символ дифференцирования,

а следовательно, $P^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d^2}{dt^2}$, получим искомое дифференциальное уравнение электрической цепи

$$T_2^2 \frac{d^2 U_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt} + U_{\text{вых}}(t) = T_1 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + U_{\text{вх}}(t).$$

Задача решена. В качестве замечания отметим, что произведение $R \cdot C$ или L/R имеют размерность времени, произведение $L \cdot C$ имеет размерность времени в квадрате.

Задание для практической работы

Дано:

схема электрической цепи и ее параметры.

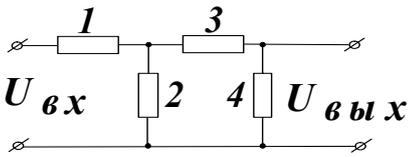
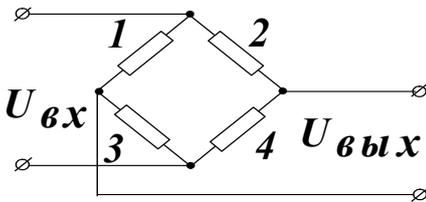
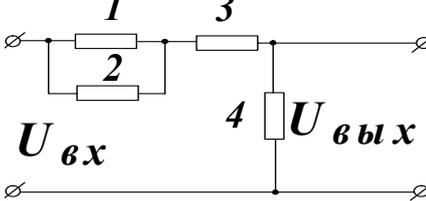
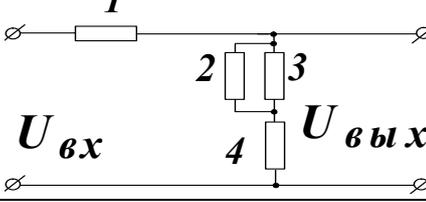
Требуется:

составить дифференциальное уравнение электрической цепи относительно входного $U_{вх}(t)$ и выходного $U_{вых}(t)$ напряжений. Считать сопротивление источника бесконечно малым, а сопротивление нагрузки бесконечно большим.

В отчете представить:

- а) задание для практической работы и вариант задания;
- б) порядок выполняемых действий с комментариями;
- в) промежуточные и окончательные результаты.

Варианты задания

№ варианта	Электрическая схема	Номер элемента и его вид			
		1	2	3	4
1		C_1	R_1	C_2	R_2
2		L_1	R_1	L_2	R_2
3		C_1	R_1	L_1	R_2
4		R_1	L_1	R_2	L_2
5		R_1	C_1	R_2	C_2
6		C_1	R_1	C_2	R_2
7		L_1	R_2	L_2	R_2
8		C_1	R_1	R_2	C_2
9		C_1	L_1	L_2	C_2
10		C_1	L_1	C_2	R_2
11		R_1	R_2	C_1	R_3
12		C_1	R_1	L_1	C_2
13		C_1	R_1	L_1	L_2
14		R_1	R_2	L_1	C_1
15		L_1	R	C	R
16		C	R_1	R_2	R_3
17		C_1	R_1	L_1	C_2
18		R_1	R_2	L_1	C_1
19		L_1	R_1	C_1	L_2
20		L_1	R_1	C_1	R_2

1.2. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ

Практическое занятие № 2

Предварительные сведения

Под временными характеристиками систем понимают импульсные (весовые) и переходные характеристики. На этом практическом занятии рассматриваются переходные характеристики систем, их определение классическим способом – решением дифференциального уравнения системы.

Переходной характеристикой называют реакцию системы на ступенчатое единичное входное воздействие при нулевых начальных условиях (из установившегося состояния). Рассмотрим порядок определения переходной характеристики системы путем решения ее дифференциального уравнения.

Пусть поведение системы описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y &= \\ = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из определения переходной характеристики

$$x(t) = 1(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Предварительно рассмотрим решение дифференциального уравнения, в котором отсутствует производные от входного воздействия, т.е. дифференциального уравнения вида

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x. \quad (1.2)$$

Решение дифференциального уравнения состоит из двух составляющих:

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{вын}(t), \quad (1.3)$$

где $y_{св}(t)$ – свободная составляющая решения; $y_{вын}(t)$ – вынужденная составляющая решения.

Вынужденная составляющая решения ищется в форме правой части уравнения (1.2):

$$y_{\text{вын}}(t) = \frac{b_0}{a_0} \mathbf{1}(t) \text{ при } a_0 \neq 0.$$

$$\text{При } a_0 = 0 \text{ и } a_1 \neq 0 \quad y_{\text{вын}}(t) = \frac{b_0}{a_1} t.$$

$$\text{При } a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 \neq 0 \quad y_{\text{вын}}(t) = \frac{b_0}{a_2} t^2 \text{ и т.д.} \quad (1.4)$$

Свободная составляющая решения определяется видом корней характеристического уравнения системы.

Характеристическое уравнение системы составляется непосредственно по ее дифференциальному уравнению и имеет вид

$$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0 = 0. \quad (1.5)$$

Вещественным различным корням характеристического уравнения системы соответствует следующая компонента свободной составляющей решения

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^K c_i e^{P_i \cdot t}, \quad (1.6)$$

где K – число различных вещественных корней; p_i – корни характеристического уравнения, $i = 1, 2, \dots, K$; c_i – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий, $i = 1, 2, \dots, K$.

Для вещественных кратных корней кратности l

$$y_{\text{св}}(t) = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{l-1} t^{l-1}) \cdot e^{P \cdot t}, \quad (1.7)$$

где P – корень кратности l ; c_0, c_1, \dots, c_{l-1} – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Для пары комплексных сопряженных корней $p_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta$

$$y_{\text{св}}(t) = A \cdot e^{\alpha \cdot t} \sin(\beta \cdot t + \varphi)$$

или

$$y_{\text{св}}(t) = (c_1 \sin(\beta \cdot t) + c_2 \cos(\beta \cdot t)) e^{\alpha \cdot t}, \quad (1.8)$$

где α и β – соответственно, вещественная и мнимая части корней; A, φ, c_1, c_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Решение

На основе выражений (1.4) вынужденная составляющая решения

$$y_{\text{вын}}(t) = k \cdot t,$$

т.к. $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$.

Составляем характеристическое уравнение

$$0.2 \cdot T^2 P^3 + T \cdot P^2 + P = 0,$$

или

$$(0.2 \cdot T^2 P^2 + T \cdot P + 1)P = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$P_1 = 0; \quad P_2 = -1.38/T; \quad P_3 = -3.62/T.$$

Корни вещественные, различные. Согласно формуле (1.6) свободная составляющая решения

$$y_{\text{св}}(t) = c_1 e^{P_1 \cdot t} + c_2 e^{P_2 \cdot t} + c_3 e^{P_3 \cdot t}.$$

Общее решение, как сумма $y_{\text{св}}(t)$ и $y_{\text{вын}}(t)$,

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{P_2 \cdot t} + c_3 e^{P_3 \cdot t} + k \cdot t.$$

Для определения постоянных интегрирования c_1 , c_2 , c_3 используем начальные условия. Найдем производные:

$$\begin{aligned} y'(t) &= P_2 c_2 e^{P_2 \cdot t} + P_3 c_3 e^{P_3 \cdot t} + k, \\ y''(t) &= P_2^2 c_2 e^{P_2 \cdot t} + P_3^2 c_3 e^{P_3 \cdot t}. \end{aligned}$$

Начальные условия дают систему уравнений

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ y'(0) = P_2 c_2 + P_3 c_3 + k = 0, \\ y''(0) = P_2^2 c_2 + P_3^2 c_3 = 0, \end{cases}$$

из которой находим

$$c_3 = \frac{k \cdot P_2}{(P_3 - P_2) \cdot P_3} = -0.17 \cdot k \cdot T;$$

$$c_2 = -\frac{P_3^2 \cdot c_3}{P_2^2} = 1.17 \cdot k \cdot T;$$

$$c_1 = -c_2 - c_3 = -k \cdot T.$$

Подставляя постоянные интегрирования в общее решение, получаем искомое решение поставленной задачи:

$$y(t) = k \cdot (t + T \cdot (1.17 e^{-\frac{1.38}{T}t} - 0.17 e^{-\frac{3.62}{T}t} - 1)).$$

Пример 2

Дифференциальное уравнение объекта управления имеет вид

$$T_2 y'(t) + y(t) = T_1 x'(t) + x(t).$$

Требуется найти переходную функцию.

Решение

На основе выражений (1.4) вынужденная составляющая решения

$$y_{вын}(t) = 1, \text{ т.к. } a_0 \neq 0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$T_2 P + 1 = 0.$$

Корень характеристического уравнения $P_1 = -\frac{1}{T_2}$ – вещественный.

Свободная составляющая решения

$$y_{св}(t) = c_1 e^{P_1 \cdot t}.$$

Общее решение:

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{вын}(t) = c_1 e^{P_1 \cdot t} + 1.$$

Дифференциальное уравнение содержит в правой части производную от входного воздействия. Пересчитываем начальное условие:

$$y(+0) = y(-0) + \frac{b_m}{a_n} = 0 + \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Новое начальное условие дает уравнение

$$y(0) = c_1 + 1 = \frac{T_1}{T_2}$$

и

$$c_1 = \frac{T_1}{T_2} - 1 = -\frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Подставляя постоянную c_1 в общее решение, получаем окончательное решение задачи:

$$y(t) = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Задание для практической работы

Дано:

- а) дифференциальное уравнение элемента системы автоматического управления;
- б) коэффициенты дифференциального уравнения.

Требуется:

решить дифференциальное уравнение элемента и найти переходную характеристику.

В отчете представить:

- а) задание для практической работы и вариант задания;
- б) порядок выполняемых действий с комментариями по решению дифференциального уравнения элемента;
- в) расчет переходной характеристики элемента;
- г) промежуточные и окончательные результаты;
- д) график переходной характеристики на миллиметровой бумаге.

Варианты задания

Дифференциальное уравнение элемента

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t),$$

для всех вариантов $a_0 = 1$.

Номер варианта	Коэффициенты дифференциального уравнения			
	a_2	a_1	b_1	b_0
1	–	10	–	1
2	5000	150	–	1
3	2400	110	–	2
4	3500	120	–	1
5	–	50	–	10
6	100	20	–	1
7	10000	20	–	1
8	2500	100	–	2
9	2500	20	–	1
10	–	20	10	2
11	6400	160	–	1
12	–	20	40	0.5
13	7000	170	–	1
14	1600	20	–	1
15	–	10	20	–
16	2000	105	–	1
17	1089	20	–	1
18	–	30	30	–
19	625	20	–	1
20	–	40	12	1

1.3. ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ ПО ИХ ПЕРЕХОДНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Практическое занятие № 3

Предварительные сведения

Под словом «идентификация» понимается определение математической модели элемента или системы управления. На этом практическом занятии будут рассматриваться системы, описываемые дифференциальными уравнениями не выше второго порядка. Задача состоит в определении коэффициентов дифференциального уравнения системы по

ее переходной характеристике. Для систем первого порядка это сделать несложно. Поэтому рассмотрим задачу идентификации лишь для систем второго порядка. Примеры идентификации не приводятся, т.к. дальнейшие выкладки дают наглядную иллюстрацию простейших примеров по идентификации.

Идентификации подлежат системы, для которых определены переходные характеристики на практическом занятии № 2. Таким образом, вам заранее известны коэффициенты дифференциальных уравнений. Проведите идентификацию и сравните исходные коэффициенты дифференциального уравнения с полученными. Оцените качество идентификации по степени расхождения полученных коэффициентов дифференциального уравнения с исходными, по степени расхождения переходных характеристик исходной системы и полученной модели.

Идентификация систем второго порядка

Дифференциальное уравнение системы второго порядка имеет вид

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x(t) + b_0 x(t).$$

Выражение для переходной характеристики системы зависит от вида корней характеристического уравнения.

Корни действительные и различные

В этом случае дифференциальное уравнение системы может быть записано в виде

$$T_1 T_2 y''(t) + (T_1 + T_2) y'(t) + y(t) = kx(t).$$

Корни характеристического уравнения

$$P_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad P_2 = -\frac{1}{T_2}.$$

Переходная характеристика

$$y(t) = k \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

График переходной характеристики представлен на рис. 1.3.

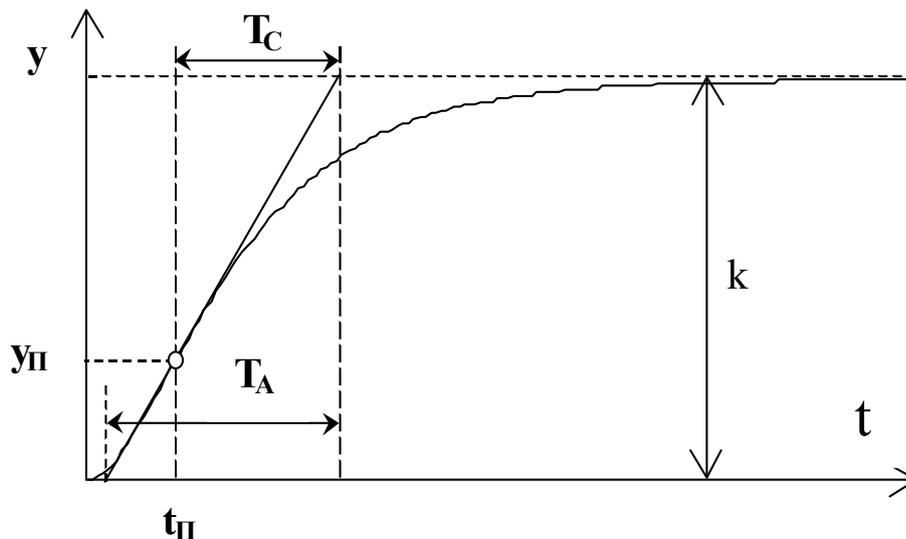


Рис. 1.3. Переходная характеристика системы и определение постоянных T_C и T_A для идентификации

Коэффициент передачи системы k определяется непосредственно по графику переходной характеристики

$$k = y(\infty).$$

Параметры T_1 , T_2 можно определить с помощью диаграммы Ольденбурга и Сарториуса (рис. 1.4). Вывод уравнений для составления диаграммы приведен в приложении 1, в приложении 2 приводится рабочая диаграмма.

Порядок пользования диаграммой следующий.

На переходной характеристике провести касательную через точку перегиба и определить значения времен T_C и T_A , как показано на рис. 1.3. На диаграмме (рис. 1.4) отношение T_C / T_A ($0,736 < T_C / T_A < 1$) используется как значение точек пересечения прямой с каждой из осей. Прямая линия, проведенная таким образом, пересекает кривую на диаграмме в двух точках, каждая из которых позволяет определить отношения T_1 / T_A и T_2 / T_A . По этим отношениям легко определить T_1 и T_2 .

Под точкой перегиба понимается такая точка $y(t)$, в которой производная dy/dt имеет максимальное значение. Так как переходные функции многих промышленных объектов не имеют явно выраженной точки перегиба, то определение ее координат надо осуществлять следующим образом. В средней, наиболее быстро изменяющейся части

графика $y(t)$ берется несколько ординат $y(t_i) = y_i$; $i = 0, 1, 2, \dots, m$; m обычно не более 6–7; $t_i - t_{i-1} = \Delta t = \text{const}$, и вычисляются первые разности $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$; $i = 0, 1, 2, \dots, m - 1$. Далее находим максимальную величину Δy_i и соответствующее ей значение времени $t_n = t_i - 0.5 \cdot \Delta t$ и, наконец, ординату y_n .

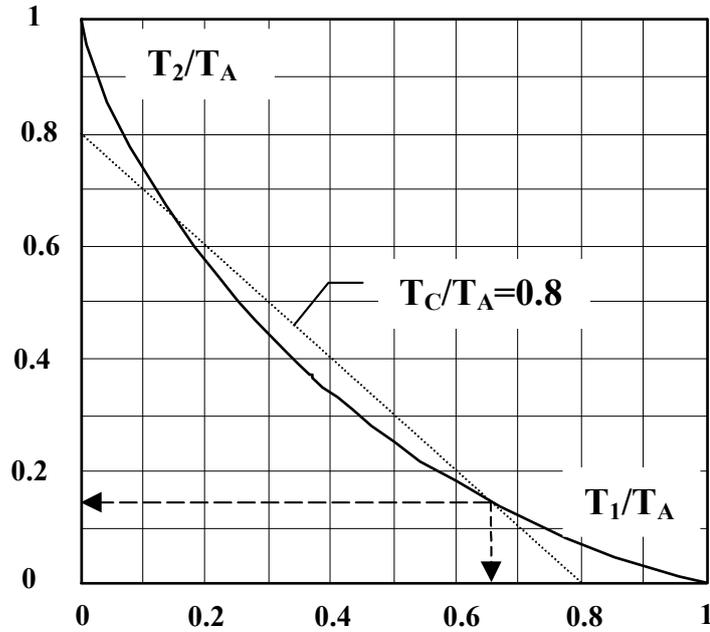


Рис. 1.4. Диаграмма Ольденбурга и Сарториуса

Корни действительные, кратные

В этом случае дифференциальное уравнение системы может быть записано в виде

$$T^2 y''(t) + 2 \cdot T \cdot y'(t) + y(t) = k \cdot x(t).$$

Корни характеристического уравнения:

$$P_{1,2} = -1/T.$$

Переходная характеристика:

$$y(t) = k \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

График переходной характеристики подобен представленному графику на рис. 1.3. Коэффициент передачи системы k определяется непосредственно по графику переходной характеристики $k = y(\infty)$.

Постоянную времени T найдем следующим образом. Определим точку перегиба

$$y'(t) = k \frac{t}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}; \quad y''(t) = k \cdot \left(\frac{1}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T^3} e^{-\frac{t}{T}} \right); \quad y''(t_n) = 0, \text{ отсюда } T = t_n.$$

В рассматриваемом случае точку перегиба легко найти с помощью выражения

$$y(t_n) = k \cdot (1 - 2 \cdot e^{-1}) = 0.264 \cdot k.$$

Определив точку перегиба, находим и T , а следовательно, и коэффициенты дифференциального уравнения.

Корни комплексные, сопряженные

В этом случае дифференциальное уравнение системы может быть записано в виде

$$T_2^2 y''(t) + T_1 y'(t) + y(t) = k \cdot x(t), \quad T_1 < 2T_2.$$

Корни характеристического уравнения:

$$P_{1,2} = -\alpha \pm i\beta,$$

где

$$\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2}.$$

Переходная характеристика:

$$y(t) = k \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha \cdot t} \sin \left(\beta \cdot t + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right).$$

Примерный вид переходной характеристики показан на рис. 1.5. По кривой переходной характеристики определяются ее параметры A_1 , A_2 , T_K , $y(\infty)$.

По параметрам кривой находим параметры системы

$$k = y(\infty), \quad \beta = \frac{2\pi}{T_K}.$$

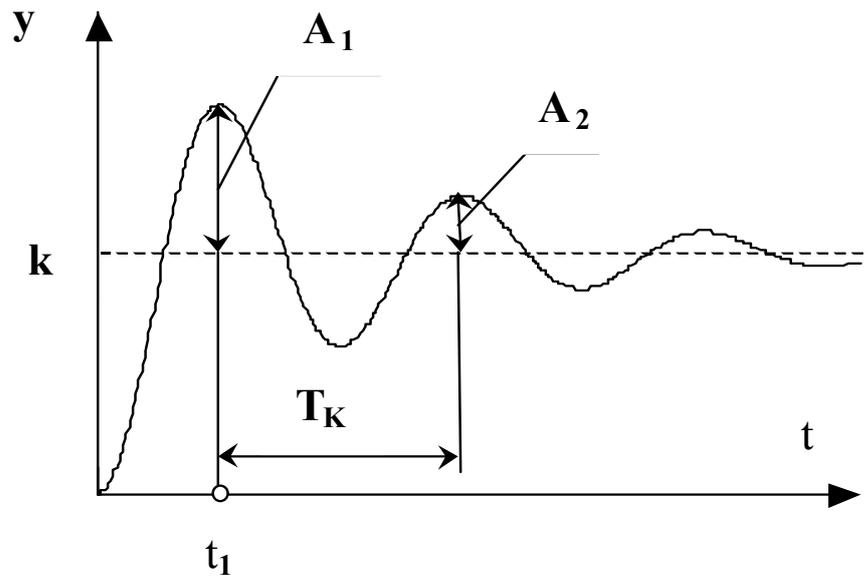


Рис. 1.5. Переходная характеристика системы с комплексными корнями характеристического уравнения

Рассмотрим отношение

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{y(t_1 + T_K) - k}{y(t_1) - k} = e^{-\alpha \cdot T_K},$$

из которого, логарифмируя, находим

$$\alpha = -\frac{\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}{T_K}.$$

Постоянные времени T_1 и T_2 определяются через α и β следующим образом:

$$T_1 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad T_2^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Задание для практической работы

Дано:

дифференциальное уравнение и переходная характеристика системы (результаты практического занятия № 2 по заданному варианту).

Требуется:

идентифицировать систему по ее переходной характеристике.

В отчете представить:

- а) задание для практической работы и вариант задания;
- б) порядок и результаты идентификации;
- в) оценку качества идентификации по степени расхождения полученных коэффициентов дифференциального уравнения с исходными, по степени расхождения переходных характеристик исходной системы и полученной модели;
- г) выводы по полученным результатам.

1.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ

Практическое занятие № 4

Основные сведения

Рассмотрим порядок определения передаточной функции системы по ее дифференциальному уравнению.

Пусть система описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 x'(t) + b_0 x(t). \end{aligned}$$

Применим к дифференциальному уравнению преобразование Лапласа. При нулевых начальных условиях справедливы следующие формулы преобразования операций дифференцирования:

$$x'(t) \Rightarrow P \cdot X(P); \quad x''(t) \Rightarrow P^2 \cdot X(P); \quad \dots; \quad x^{(n)}(t) \Rightarrow P^n X(P).$$

При нулевых начальных условиях дифференциальное уравнение, преобразованное по Лапласу, записывается в виде

$$\begin{aligned} (a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0) \cdot Y(P) = \\ = (b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_1 P + b_0) \cdot X(P). \end{aligned}$$

Отношение изображений $Y(P)$ к $X(P)$ при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией системы и обозначается как $W(P)$:

$$W(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_1 P + b_0}{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0}.$$

Часто при исследовании систем автоматического управления являются полезными теоремы о начальном и конечном значениях оригинала:

$$y(0) = \lim_{P \rightarrow \infty} P \cdot Y(P); \quad y(\infty) = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot Y(P).$$

При воздействии $x(t) = 1(t)$ на вход системы, т.е. $X(P) = 1/P$, с учетом указанной теоремы и определения передаточной функции

$$y(0) = \lim_{P \rightarrow \infty} W(P); \quad y(\infty) = \lim_{P \rightarrow 0} W(P).$$

Пример

Дано: дифференциальное уравнение системы

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1 x' + b_0 x.$$

Требуется:

- а) получить передаточную функцию системы по ее дифференциальному уравнению;
- б) найти значения $y(0)$ и $y(\infty)$ при $x(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях с помощью теорем о начальном и конечном значениях оригинала.

Решение

Преобразуем дифференциальное уравнение по Лапласу

$$a_3 P^3 Y(P) + a_2 P^2 Y(P) + a_1 P \cdot Y(P) + a_0 \cdot Y(P) = b_1 P \cdot X(P) + b_0 X(P),$$

или

$$(a_3 P^3 + a_2 P^2 + a_1 P + a_0) \cdot Y(P) = (b_1 P + b_0) X(P).$$

Найдем отношение $Y(P)$ к $X(P)$, т.е. передаточную функцию $W(P)$:

$$W(P) = \frac{b_1 P + b_0}{a_3 P^3 + a_2 P^2 + a_1 P + a_0}.$$

Начальное и конечное значения $y(t)$:

$$y(0) = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{b_1 P + b_0}{a_3 P^3 + a_2 P^2 + a_1 P + a_0} = 0;$$

$$y(\infty) = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{b_1 P + b_0}{a_3 P^3 + a_2 P^2 + a_1 P + a_0} = \frac{b_0}{a_0}.$$

Частотные характеристики

Амплитудно-фазочастотную характеристику (АФЧХ) можно получить с помощью формальной замены в передаточной функции системы $W(P)$ оператора P на чисто мнимое число $i\omega$. Схема замены следующая:

$$W(P) \rightarrow P = i\omega \rightarrow W(i\omega).$$

Как комплексное выражение от аргумента ω , $W(i\omega)$ можно представить двумя способами:

$$W(i\omega) = A(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)}$$

и

$$W(i\omega) = \text{Re}(\omega) + i \text{Im}(\omega),$$

где $A(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика системы (АЧХ);
 $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ);
 $\text{Re}(\omega)$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);
 $\text{Im}(\omega)$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Связь между различными видами частотных характеристик:

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \pm k \cdot \pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{Re}(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega);$$

$$\text{Im}(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

При определении $\varphi(\omega)$ следует учитывать свойство периодичности функции **arctg** путем выбора значения **k** и знака перед ним.

Начальное и конечное значения выходного сигнала системы, при входном воздействии $x(t)=1(t)$ и нулевых начальных условиях, можно определить и по ее частотным характеристикам

$$y(0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\omega);$$

$$y(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\omega).$$

Пример

Дано: передаточная функция системы

$$W(P) = \frac{2}{10P + 1}.$$

Требуется найти частотные характеристики АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ системы.

Решение

Заменяем в $W(P)$ оператор P на $i\omega$ и проводим необходимые преобразования:

$$W(i\omega) = \frac{2}{10i\omega + 1}.$$

Умножаем числитель и знаменатель $W(i\omega)$ на комплексное сопряженное число знаменателю

$$W(i\omega) = \frac{2(1 - 10i\omega)}{(10i\omega + 1)(1 - 10i\omega)} = \frac{2 - 20i\omega}{10^2\omega^2 + 1} = \frac{2}{100\omega^2 + 1} - i \frac{20\omega}{100\omega^2 + 1}.$$

Находим АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)} = \frac{2\sqrt{100\omega^2 + 1}}{100\omega^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{100\omega^2 + 1}};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)} = -\operatorname{arctg}(10\omega).$$

Тогда

$$W(i\omega) = \frac{2}{\sqrt{100\omega^2 + 1}} e^{-i \cdot \operatorname{arctg}(10\omega)}.$$

Задание для практической работы

Дано:

дифференциальное уравнение системы (см. исходные данные к практическому занятию № 2 согласно заданному варианту).

Требуется:

- а) найти передаточную функцию системы;
- б) найти начальное и конечное значения $y(t)$ при $x(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях;
- в) определить частотные характеристики системы АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ;
- г) на миллиметровой бумаге построить график АФЧХ в координатах Im , Re для 10–15 значений частот ω . Расчетные точки на графике обозначить кружками с указанием значений и размерности ω . Указать размерности осей Im , Re .

В отчете представить:

- а) задание для практической работы и вариант задания;
- б) порядок выполняемых действий с комментариями;
- в) результаты по выполнению пунктов а, б, в, г, задания.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИХ РАБОТЫ

2.1. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КРИТЕРИЕВ РАУСА, ГУРВИЦА, ЛЬЕНАРА-ШИПАРА

Практическое занятие № 5

Предварительные сведения

Алгебраические критерии Рауса, Гурвица, Льенара-Шипара представляют собой алгебраические неравенства, связывающие между собой коэффициенты характеристического уравнения системы:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

В дальнейшем будем полагать, что коэффициент $a_n > 0$. Если это не так, то умножением на -1 характеристическое уравнение приводится к нужной форме.

Приведем формулировки, правила и примеры применения алгебраических критериев устойчивости.

Критерий Рауса

Критерий Рауса наиболее просто поясняет предложенная им таблица.

Таблица Рауса

r	Номер строки	Номер столбца					
		1	2	3	...	K	..
	–	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	a_{n-2k+2}	..
	–	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	a_{n-2k+1}	..
$r_1 = \frac{a_n}{a_{n-1}}$	1	$c_{11} = a_{n-2}$ $-r_1 \cdot a_{n-3}$	$c_{12} = a_{n-4}$ $-r_1 \cdot a_{n-5}$	$c_{13} = a_{n-6}$ $-r_1 \cdot a_{n-7}$...	$c_{1k} = a_{n-2k}$ $-r_1 \cdot a_{n-2k-1}$..
$r_2 = \frac{a_{n-1}}{c_{11}}$	2	$c_{21} = a_{n-3}$ $-r_2 \cdot c_{12}$	$c_{22} = a_{n-5}$ $-r_2 \cdot c_{13}$	$c_{23} = a_{n-7}$ $-r_2 \cdot c_{14}$...	$c_{2k} = a_{n-2k-1}$ $-r_2 \cdot c_{1,k+1}$..
$r_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	3	$c_{31} = c_{12}$ $-r_3 \cdot c_{22}$	$c_{32} = c_{13}$ $-r_3 \cdot c_{23}$	$c_{33} = c_{14}$ $-r_3 \cdot c_{24}$...	$c_{3k} = c_{1,k+1}$ $-r_3 \cdot c_{2,k+1}$..
...
$r_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$	i	$c_{i1} = c_{i-2,2}$ $-r_i \cdot c_{i-1,2}$	$c_{i2} = c_{i-2,3}$ $-r_i \cdot c_{i-1,3}$	$c_{i3} = c_{i-2,4}$ $-r_i \cdot c_{i-1,4}$...	$c_{i,k} = c_{i-2,k+1}$ $-r_i \cdot c_{i-1,k+1}$..

Правило составления таблицы Рауса легко просматривается из анализа приведенной таблицы. Процесс заполнения таблицы продолжается до тех пор, пока при заданном порядке характеристического уравнения не получится строка, содержащая один коэффициент, соответствующий свободному члену характеристического уравнения.

Критерий Рауса формулируется так: *автоматическая система устойчива, если положительны все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса.*

Если не все коэффициенты столбца положительны, то система неустойчива. При этом число перемен знака среди этих коэффициентов соответствует числу правых корней характеристического уравнения.

Пример

Определить устойчива ли система с характеристическим уравнением

$$0.8p^7 + 5.5p^6 + 15p^5 + 25p^4 + 28p^3 + 17p^2 + 6p + 1 = 0.$$

Решение

Составляем таблицу Рауса:

r	Номер строки	Номер столбца			
		1	2	3	4
	–	0,8	15	28	6
	–	5,5	25	17	1
$r_1=0,8/5,5=0,145$	1	$c_{11}=15-0,145 \cdot 25=11,4$	$c_{12}=28-0,145 \cdot 17=25,5$	$c_{13}=6-0,145 \cdot 1=5,85$	0
$r_2=5,5/11,4=0,482$	2	$c_{21}=25-0,482 \cdot 25,5=12,7$	$c_{22}=17-0,482 \cdot 5,85=14,2$	$c_{23}=1$	0
$r_3=11,4/12,7=0,898$	3	$c_{31}=25,5-0,898 \cdot 14,2=12,8$	$c_{32}=5,85-0,898 \cdot 1=4,96$	$c_{33}=0$	0
$r_4=12,7/12,8=0,992$	4	$c_{41}=14,2-0,992 \cdot 4,96=9,28$	$c_{42}=1$	0	0
$r_5=12,8/9,28=1,38$	5	$c_{51}=4,97-1,38 \cdot 1=3,59$	$c_{52}=0$	0	0
	6	$c_{61}=1$			

Все элементы первого столбца положительны и все корни характеристического уравнения поэтому левые. Система устойчива.

Критерии Гурвица и Лъенара-Шипара

Критерий Гурвица можно сформулировать следующим образом: для того чтобы система была устойчивой (все корни характеристического уравнения были левыми), необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-k} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

были одного знака с a_n .

Так как в последующем характеристическое уравнение приводится к виду, где $a_n > 0$, то для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица были положительны.

Определитель Δ_n имеет вид

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \cdot \Delta_{n-1}.$$

Отчеркивая в этом определителе, как показано пунктиром, диагональные миноры, получим определители Гурвица низшего порядка.

Мнемоническое правило образования определителя Δ_n Гурвица: первой заполняется сверху вниз главная диагональ определителя, начиная с коэффициента a_{n-1} и последовательно заканчивая коэффициентом a_0 . Ниже коэффициентов главной диагонали ставятся коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, выше — с последовательно убывающими индексами. Взамен недостающих коэффициентов ставятся нули.

Критерий Льенара-Шипара формулируется следующим образом.

Если все коэффициенты характеристического уравнения системы положительны, то для ее устойчивости достаточно положительности или всех определителей Гурвица Δ_k с четными или всех Δ_k — с нечетными индексами.

Критерий Льенара-Шипара позволяет при положительности коэффициентов характеристического уравнения ограничиваться исследованием только знаков определителей $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-3}, \dots$

Пример

Дано характеристическое уравнение системы

$$5p^3 + 6p^2 + 8p + 1 = 0.$$

Требуется определить, устойчива ли система.

Решение

Составляем определитель Гурвица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем определители Гурвица:

$$\Delta_1 = 6 > 0; \Delta_2 = 6 \cdot 8 - 1 \cdot 5 = 43 > 0; \Delta_3 = \Delta_2 \cdot a_0 = 48 \cdot 1 > 0.$$

Все определители Гурвица положительны. Система устойчива.

Задание для практической работы

Дано:

а) характеристическое уравнение системы № 1

$$a_6 p^6 + a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0;$$

б) характеристическое уравнение системы № 2

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Требуется:

- а) исследовать систему № 1 на устойчивость с помощью критерия Рауса;
 б) исследовать систему № 2 на устойчивость с помощью критерия Гурвица.

Варианты задания

Номер варианта	Значение коэффициентов системы № 1, системы № 2						
	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	7	6	5	4	3	2	1
	–	–	5	4	3	2	1
2	8	1	4	11	9	6	1
	–	–	6	2	7	1	1
3	2	3	4	5	6	7	8
	–	–	10	5	2	10	1
4	15	7	4	6	3	8	2
	–	–	4	6	3	8	1
5	40	76	76	42	22	16	5
	–	–	48	78	82	44	2
6	56	80	88	46	28	24	8
	–	–	64	82	94	48	1
7	95	90	16	56	41	44	3
	–	–	3	92	21	8	3

Варианты задания

Номер варианта	Значение коэффициентов системы № 1, системы № 2						
	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
8	10	4	6	1	5	2	1
	–	–	8	6	2	2	7
9	26	98	37	64	5	6	5
	–	–	33	1	41	6	4
10	1	2	6	8	4	8	1
	–	–	8	4	1	7	5
11	5	6	5	2	7	6	1
	–	–	3	8	6	1	1
12	7	1	4	6	1	4	1
	–	–	4	6	1	4	1
13	7	2	9	8	3	8	8
	–	–	9	8	3	8	8
14	5	2	5	5	9	2	3
	–	–	5	3	7	4	1
15	9	1	3	1	4	2	2
	–	–	2	2	9	8	7
16	5	2	5	6	9	2	1
	–	–	1	6	7	0.5	1
17	9	8	1	4	7	9	1
	–	–	5	6	7	8	1
18	1	2	3	4	5	6	1
	–	–	3	4	5	6	1
19	2	6	7	2	6	6	9
	–	–	7	2	6	6	1
20	4	4	3	8	4	2	8
	–	–	7	2	9	8	3

В отчете представить:

- а) задание для практической работы и вариант задания;
- б) порядок исследования систем на устойчивость;
- в) промежуточные и окончательные результаты исследования.

2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КРИТЕРИЕВ МИХАЙЛОВА И НАЙКВИСТА

Практическое занятие № 6

Предварительные сведения

Критерий устойчивости Михайлова

При применении критерия Михайлова рассматривают функцию комплексного переменного $M(i\omega)$, полученную при подстановке $p = i\omega$ в характеристический полином системы управления:

$$M(i\omega) = a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot i\omega + a_0.$$

Об устойчивости системы судят по виду кривой, описываемой в плоскости комплексного переменного концом вектора $M(i\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ (годограф Михайлова).

Система n -го порядка является устойчивой, если годограф вектора $M(i\omega)$, никогда не обращаясь в нуль, проходит последовательно против часовой стрелки n квадрантов, начиная с положительной ветви вещественной оси.

Критерий устойчивости Михайлова может быть сформулирован также в другом виде.

Кривая Михайлова характеризуется выражением

$$M(i\omega) = \operatorname{Re}[M(i\omega)] + i \cdot \operatorname{Im}[M(i\omega)];$$

для устойчивости системы необходимо, чтобы все корни уравнений

$$\operatorname{Re}[M(i\omega)] = 0, \quad \operatorname{Im}[M(i\omega)] = 0$$

были вещественными и перемежающимися друг с другом.

Пример № 1

Оценить с помощью критерия Михайлова устойчивость системы с характеристическим уравнением

$$p^3 + 0,5p^2 + p + 2 = 0.$$

Решение

Уравнение кривой Михайлова:

$$M(i\omega) = (i\omega)^3 + 0,5 \cdot (i\omega)^2 + i\omega + 2 = 2 - 0,5 \cdot \omega^2 + i \cdot (\omega - \omega^3).$$

Выделяем вещественную и мнимую части годографа:

$$\operatorname{Re}(\omega) = 2 - 0,5 \cdot \omega^2; \quad \operatorname{Im}(\omega) = \omega - \omega^3.$$

Задаваясь рядом значений ω , запишем результаты расчётов $\operatorname{Re}(\omega)$ и $\operatorname{Im}(\omega)$ в таблицу. По данным таблицы строим годограф Михайлова (рис. 2.1).

Результаты расчета
годографа

ω	Re	Im
0.0	2.00	0.00
0.2	1.98	0.19
0.4	1.92	0.336
0.6	1.82	0.384
0.8	1.68	0.288
1.0	1.50	0.00
1.2	1.28	-0.53
1.4	1.02	-1.34
1.6	0.72	-2.50
1.8	0.38	-4.00
2.0	0.00	-6.00
2.2	-0.42	-8.40

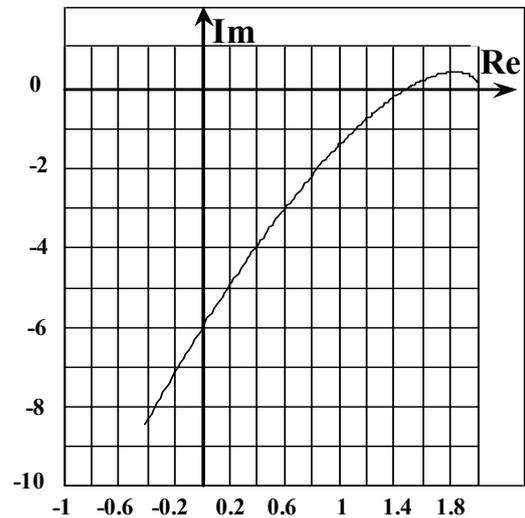


Рис. 2.1. Годограф Михайлова

Анализ рис. 2.1 показывает, что нарушена последовательность прохождения годографом квадрантов. Система неустойчива.

Пример № 2

Оценить с помощью критерия Михайлова устойчивость системы с характеристическим уравнением

$$0,5 \cdot p^4 + 5 \cdot p^3 + 16 \cdot p^2 + 19 \cdot p + 7,5 = 0.$$

Решение

Уравнение кривой Михайлова:

$$\begin{aligned} M(i\omega) &= 0,5 \cdot (i\omega)^4 + 5 \cdot (i\omega^3) + 16 \cdot (i\omega)^2 + 19 \cdot (i\omega) + 7,5 = \\ &= 0,5 \cdot \omega^4 - 16 \cdot \omega^2 + 7,5 + i \cdot (19 \cdot \omega - 5 \cdot \omega^2). \end{aligned}$$

Определим точки пересечения кривой с осями **Re** и **Im**:

$$0,5 \cdot \omega^4 - 16 \cdot \omega^2 + 7,5 = 0; \quad 19 \cdot \omega - 5 \cdot \omega^3 = 0.$$

С осью **Re** кривая пересекается при

$$\omega_3 = \sqrt{19/5} = 1,95.$$

С осью **Im** кривая пересекается при

$$\omega_2 = \sqrt{16 - \sqrt{256 - 15}} = 0,7 \quad \text{и} \quad \omega_4 = \sqrt{16 + \sqrt{256 - 15}} = 5,6.$$

Таким образом, кривая последовательно пересекает вещественную полуось, затем мнимую, вещественную и снова мнимую. Система устойчива.

Критерий устойчивости Найквиста

Об устойчивости замкнутой системы судят по АФЧХ той же системы в разомкнутом состоянии. Условия устойчивости формулируют следующим образом.

Система, устойчивая или нейтральная в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии (обратная связь отрицательна), если АФЧХ разомкнутой системы при изменении ω от 0 до $+\infty$ не охватывает в плоскости комплексного переменного точку с координатами $(-1; i0)$. Охватываемой областью является область, лежащая справа от направления роста частоты.

Система, включающая неустойчивые звенья (характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет k корней в правой полуплоскости), будет устойчива в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ охватывает точку $(-1; i0)$ k раз. Охватываемой областью является область, лежащая слева.

Критерий устойчивости Найквиста справедлив и для систем, включающих звенья запаздывания.

Пример

Используя критерий устойчивости Найквиста, исследовать на устойчивость замкнутую систему, которая в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию:

$$W(P) = \frac{k}{P \cdot (T_1 \cdot P + 1)(T_2 \cdot P + 1)}, \text{ где } k = 0,1; T_1 = 10\text{с}; T_2 = 40\text{с}.$$

Решение

АЧХ разомкнутой системы

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega \cdot \sqrt{(T_1^2 \cdot \omega^2 + 1)(T_2^2 \cdot \omega^2 + 1)}},$$

при фазовом сдвиге $\varphi(\omega) = -\pi$ характеризует устойчивость замкнутой системы. Если $A(\omega) < 1$, замкнутая система устойчива, если $A(\omega) > 1$ – неустойчива, так как разомкнутая система нейтральна (находится на границе устойчивости).

Фазовая характеристика имеет вид

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{\omega \cdot (T_1 + T_2)}{1 + T_1 \cdot T_2 \cdot \omega^2} - \frac{\pi}{2}.$$

Частоту, при которой происходит фазовый сдвиг $-\pi$, определяем по уравнению

$$\text{arctg} \frac{\omega \cdot (T_1 + T_2)}{1 - T_1 \cdot T_2 \cdot \omega^2} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$1 - T_1 \cdot T_2 \cdot \omega^2 = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 40}} = 0,05 \text{ рад/с}.$$

При этой частоте

$$A(0,05) = \frac{0,1}{0,05 \cdot \sqrt{(0,5^2 + 1)(2^2 + 1)}} = 0,8 < 1,$$

следовательно, замкнутая система устойчива. Решение также может быть получено графически – путём построения $W(i\omega)$.

Задание для практической работы

Дано:

- а) характеристическое уравнение замкнутой системы № 1;
- б) передаточная функция разомкнутой системы № 2.

Требуется:

- а) исследовать на устойчивость систему № 1 с помощью критерия Михайлова;
- б) исследовать на устойчивость систему № 2 в замкнутом состоянии с помощью критерия Найквиста.

Варианты задания

Номер варианта	Характеристическое уравнение замкнутой системы № 1, передаточная функция разомкнутой системы № 2
1	$0,15 \cdot p^3 + 0,9 \cdot p^2 + 1,8 \cdot p + 1,2 = 0$ $W(P) = \frac{1}{4 \cdot P^2 + 3 \cdot P + 1} \cdot \frac{2 \cdot P + 10}{P}$
2	$p^3 + 15 \cdot p^2 + 700 \cdot p + 11250 = 0$ $W(P) = \frac{1}{4 \cdot P^2 + 3 \cdot P + 1} \cdot \frac{2 \cdot P + 1,8}{P}$
3	$0,05 \cdot p^4 + 5,05 \cdot p^3 + 5,2 \cdot p^2 + 0,2 \cdot p + 1 = 0$ $W(P) = \frac{6 \cdot e^{-6 \cdot P}}{25 \cdot P + 1}$
4	$105 \cdot p^4 + 126 \cdot p^3 + 86 \cdot p^2 + 16 \cdot p + 1 = 0$ $W(P) = \frac{k}{(T \cdot P + 1)^3}$ <p>– определить предельное значение k, при котором замкнутая система сохраняет устойчивость</p>
5	$0,04 \cdot p^4 + 0,5 \cdot p^2 + 2 \cdot p + 10 = 0$ $W(P) = \frac{k_1}{P + 1} \cdot \frac{k_2}{5 \cdot P + 1} \cdot \frac{k_3}{10 \cdot P + 1}$ <p>– определить предельное значение $k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$, при котором замкнутая система сохраняет устойчивость</p>

Варианты задания

6	$0,05 \cdot p^3 + 0,65 \cdot p^2 + 1,6 \cdot p + 11 = 0$ $W(P) = \frac{k \cdot e^{-6 \cdot P}}{25 \cdot P + 1}$ <p>– определить максимальное значение k, при котором замкнутая система сохраняет устойчивость</p>
7	$p^4 + 2 \cdot p^3 + 3 \cdot p^2 + 2 \cdot p + 1,25 = 0$ $W(P) = \frac{3 \cdot e^{-25 \cdot P}}{(30 \cdot P + 1)(12 \cdot P + 1)}$
8	$p^4 + 4 \cdot p^3 + 2 \cdot p + 1,25 = 0$ $W(P) = \frac{1,2 \cdot (10 \cdot P + 1) \cdot e^{-30 \cdot P}}{15 \cdot P}$
9	$p^4 + 8 \cdot p^3 + 2 \cdot p + 1,25 = 0$ $W(P) = \frac{0,2 \cdot (3 \cdot P + 1) \cdot e^{-\tau \cdot P}}{P}$ <p>– определить величину критического запаздывания, выводящего систему при замыкании на границу устойчивости</p>
10	$p^3 + 55 \cdot p^2 + 700 \cdot p + 11250 = 0$ $W(P) = \frac{10}{(0,2 \cdot P + 1)(0,5 \cdot P + 1)(3 \cdot P - 1)}$
11	$(p + 1)(0,2 \cdot p + 1)(0,005 \cdot p + 1) + 25 = 0$ $W(P) = \frac{10}{(0,2 \cdot P + 1)(0,5 \cdot P + 1)(P - 1)}$
12	$0,004 \cdot p^5 + 0,1 \cdot p^4 + 1,05 \cdot p^3 + 2,8 \cdot p^2 + 4,3 \cdot p + 1,6 = 0$ $W(P) = \frac{15 \cdot P + 40}{P^3 + 4 \cdot P^2 - 10 \cdot P}$
13	$20 \cdot p^3 + 8 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 1 = 0$ $W(P) = \frac{8 \cdot P + 1}{(10 \cdot P + 1)(20 \cdot P + 1)(30 \cdot P + 1)}$
14	$15 \cdot p^4 + 10 \cdot p^3 + 7 \cdot p^2 + 2 \cdot p + 1 = 0$ $W(P) = \frac{k}{P^n \cdot (T \cdot P + 1)}$ <p>– определить величину n, при которой замкнутая система становится структурно-неустойчивой</p>

Варианты задания

15	$100 \cdot p^3 + 20 \cdot p^2 + 5 \cdot p + 1 = 0$ $W(P) = \frac{4}{P \cdot (5 \cdot P + 1)(20 \cdot P + 1)(100 \cdot P + 1)}$
16	$2 \cdot p^3 + 17 \cdot p^2 + 10 \cdot p + 1 = 0$ $W(P) = \frac{0,2}{(2 \cdot P + 1)(10 \cdot P + 1)(50 \cdot P + 1)}$
17	$25 \cdot p^4 + 16 \cdot p^3 + 12 \cdot p + 8 = 0$ $W(P) = \frac{5 \cdot P + 7}{3 \cdot P^3 + 4 \cdot P^2 - 10 \cdot P}$
18	$25 \cdot p^3 + 5 \cdot p^2 + 8 \cdot p + 3 = 0$ $W(P) = \frac{5 \cdot P + 1}{P \cdot (10 \cdot P + 1)(20 \cdot P + 1)(50 \cdot P + 1)}$
19	$7 \cdot p^3 + 3 \cdot p^2 + p + 1 = 0$ $W(P) = \frac{5}{(12 \cdot P + 1)(7 \cdot P + 1)(20 \cdot P + 1)}$
20	$40 \cdot p^4 + 25 \cdot p^3 + 12 \cdot p^2 + 7 \cdot p + 3 = 0$ $W(P) = \frac{5 \cdot (17 \cdot P + 1)(20 \cdot P + 1)}{(40 \cdot P + 1)(50 \cdot P + 1)(100 \cdot P + 1)}$

В отчёте представить:

- а) задание для практической работы и вариант задания;
- б) порядок исследования систем на устойчивость;
- в) промежуточные и окончательные результаты исследования.

2.3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ. D-РАЗБИЕНИЕ

Практическое занятие № 7

Предварительные сведения

Область устойчивости в плоскости одного параметра

Выделяют исследуемый параметр α и приводят характеристическое уравнение системы к виду

$$L(p) + \alpha \cdot M(p) = 0. \quad (2.1)$$

Производят подстановку $p = i\omega$ и решают уравнение (2.1) относительно α :

$$\alpha = \operatorname{Re}(\omega) + i \cdot \operatorname{Im}(\omega).$$

Задаваясь различными значениями ω от 0 до $+\infty$, вычисляют для каждого значения ω соответствующую величину $\alpha(\omega)$ и строят изображение полученных значений $\alpha(\omega)$ на комплексной плоскости (Re , $i \cdot \operatorname{Im}$). Дополняют кривую ее зеркальным изображением относительно вещественной оси Re . Построенные кривые являются границами областей D-разбиения по параметру α . Кривую D-разбиения штрихуют слева, если вычерчивать ее в направлении увеличения ω . Кривые D разбивают всю комплексную плоскость на области, среди которых могут быть одна или несколько областей устойчивости. Эти области находят с учетом того, что при переходе через кривую D с незаштрихованной стороны на заштрихованную в характеристическом уравнении системы число корней с отрицательной вещественной частью увеличивается на единицу; в то же время область устойчивости должна содержать n таких корней (n – порядок характеристического уравнения). Область, в которой имеется наибольшее по сравнению с другими областями число корней с отрицательной вещественной частью, является “претендентом” на область устойчивости для любого значения параметра в пределах этой области. Область, имеющая m правых корней, обозначается как $D(m)$, а область устойчивости как $D(0)$.

Отрезок (или отрезки) вещественной оси Re , лежащий в области устойчивости, дает пределы возможного изменения параметра α в устойчивой системе.

Пример

Дано: характеристическое уравнение системы

$$T_1 \cdot p \cdot (T_2 \cdot p + k_1)(T_3 \cdot p + k_2) + 1 = 0,$$

где $T_1 = 3$ с, $T_2 = 0,01$ с, $T_3 = 10$ с, $k_1 = 0,02$.

Требуется: построить кривые D-разбиения и выделить области устойчивости при изменении параметра k_2 .

Решение

Решаем характеристическое уравнение относительно исследуемого параметра

$$k_2 = -\frac{100}{3 \cdot p \cdot (p + 2)} - 10 \cdot p.$$

После подстановки $p = i\omega$ получаем

$$k_2 = \frac{100}{3 \cdot (\omega^2 + 4)} + i \cdot \left[\frac{200}{3 \cdot \omega \cdot (\omega^2 + 4)} - 10 \cdot \omega \right] = \text{Re} + i \cdot \text{Im}.$$

Задавая ω значения от 0 до ∞ (от 0 до $-\infty$), вычисляем **Re** и **Im** и строим кривые D-разбиения (рис. 2.2). Плоскость (**Re**, **i Im**) разбиваем на четыре зоны: 1, 2, 3, 4. “Претендентом” на область устойчивости является зона 4. Проверка при $k_2 = 10$ дает следующее.

Характеристическое уравнение системы

$$0,3p^3 + 0,9p^2 + 0,6p + 1 = 0.$$

Определитель Гурвица

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} 0,9 & 1 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определители Гурвица

$$\Delta_1 = 0,9 > 0; \Delta_2 = \Delta_3 = 0,24 > 0.$$

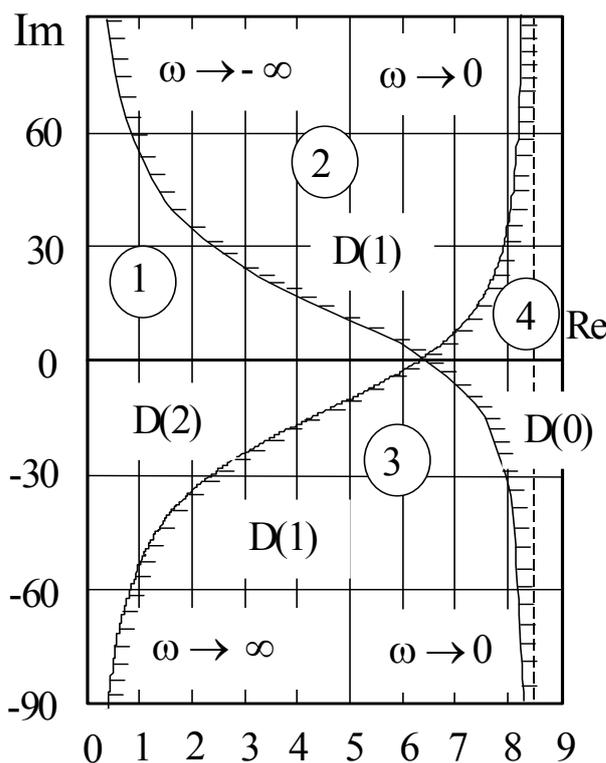


Рис. 2.2. Кривые D-разбиения

Следовательно, зона 4 является областью устойчивости, причем наименьшее значение k_2 , при котором система устойчива $k_{2 \min} = 6,33$.

Область устойчивости в плоскости двух параметров

Характеристическое уравнение системы приводят к виду

$$\alpha_1 L(p) + \alpha_2 M(p) + N(p) = 0,$$

где α_1 и α_2 – исследуемые параметры.

После подстановки $p = i\omega$

$$\alpha_1 L_1(\omega) + \alpha_2 M_1(\omega) + N_1(\omega) + i \cdot [\alpha_1 L_2(\omega) + \alpha_2 M_2(\omega) + N_2(\omega)] = 0,$$

где $L_1(\omega)$, $M_1(\omega)$, $N_1(\omega)$ – вещественные части, $L_2(\omega)$, $M_2(\omega)$, $N_2(\omega)$ – мнимые части, соответственно, $L(i\omega)$, $M(i\omega)$, $N(i\omega)$.

Приравнявая отдельно вещественные и мнимые составляющие левой части уравнения нулю и решая полученную систему двух уравнений относительно α_1 и α_2 , получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{N_2(\omega) \cdot M_1(\omega) - N_1(\omega) \cdot M_2(\omega)}{L_1(\omega) \cdot M_2(\omega) - L_2(\omega) \cdot M_1(\omega)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ \alpha_2 &= \frac{N_1(\omega) \cdot L_2(\omega) - N_2(\omega) \cdot L_1(\omega)}{L_1(\omega) \cdot M_2(\omega) - L_2(\omega) \cdot M_1(\omega)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В плоскости $(\alpha_1; \alpha_2)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ строят кривую, которая является основной кривой D-разбиения. К ней необходимо добавить особые прямые, получающиеся, если приравнять к нулю a_0 или a_n в характеристическом уравнении системы, когда a_0 и a_n зависят от α_0 или α_n .

Внимание! При построении D-разбиения следует учесть порядок расположения членов в характеристическом уравнении системы. В плоскости $(\alpha_1; \alpha_2)$, с учетом уравнений (2.2), параметр α_1 нужно откладывать по оси абсцисс, а параметр α_2 – по оси ординат. Несоблюдение этого правила может привести к неверным результатам.

Основную кривую D-разбиения штрихуют дважды: при движении в сторону увеличения ω справа, если $\Delta < 0$, и слева, если $\Delta > 0$. При переходе с незаштрихованной стороны кривой на заштрихованную, в характеристическом уравнении системы добавляется два отрицательных корня. Особые прямые, построенные для $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, штрихуют одинарной штриховкой, остальные – двойной, таким образом, чтобы стороны углов между основной кривой и особыми прямыми были обращены друг к другу заштрихованными или незаштрихованными сторонами.

В соответствии со штриховкой в плоскости двух параметров выбирают область, являющуюся по максимальному числу отрицательных корней “претендентом” на область устойчивости, и проверяют систему на устойчивость в какой-либо точке этой области.

Пример

Дано: характеристическое уравнение системы

$$(T_1 \cdot p + k)(T_2 \cdot p + 1) \cdot T_3 \cdot p + 1 = 0,$$

где $T_2 = 1,5$ с; $T_3 = 8$ с.

Требуется: определить область устойчивости по параметрам T_1 и k .

Решение

После подстановки в характеристическое уравнение $p = i\omega$ получаем

$$-12T_1 \cdot i\omega^3 - \omega^2(8T_1 + 12k) + 8i \cdot \omega \cdot k + 1 = \text{Re} + i \cdot \text{Im} = 0,$$

откуда

$$\text{Re} = -\omega^2(8T_1 + 12k) + 1 = T_1 L_1(\omega) + k \cdot M_1(\omega) + N_1(\omega) = 0;$$

$$\text{Im} = -12T_1 \omega^3 + 8\omega \cdot k = T_1 L_2(\omega) + k \cdot M_2(\omega) + N_2(\omega) = 0,$$

где

$$L_1(\omega) = -8\omega^2; \quad M_1(\omega) = -12\omega^2; \quad N_1(\omega) = 1;$$

$$L_2(\omega) = -12\omega^3; \quad M_2(\omega) = 8\omega; \quad N_2(\omega) = 0.$$

Составляем определители (см. (2.2)):

$$\Delta = -16\omega^3(4 + 9\omega^2); \quad \Delta_1 = -8\omega; \quad \Delta_2 = -12\omega^3.$$

Значения T_1 и k :

$$T_1 = \frac{1}{2\omega^2(4 + 9\omega^2)}; \quad k = \frac{3}{4(4 + 9\omega^2)}.$$

При изменении значения ω от 0 до $\pm \infty$ величина параметра k монотонно изменяется от 0,1875 до 0. Решая совместно полученные уравнения, имеем

$$T_1 = \frac{24 \cdot k^2}{3 - 16 \cdot k}$$

и строим кривую D-разбиения в плоскости $(T_1; k)$ (рис.2.3).

Для нахождения особых прямых полагаем:

- а) свободный член характеристического уравнения равен нулю, поскольку этот член не зависит от T_1 и k , отбрасываем это решение;

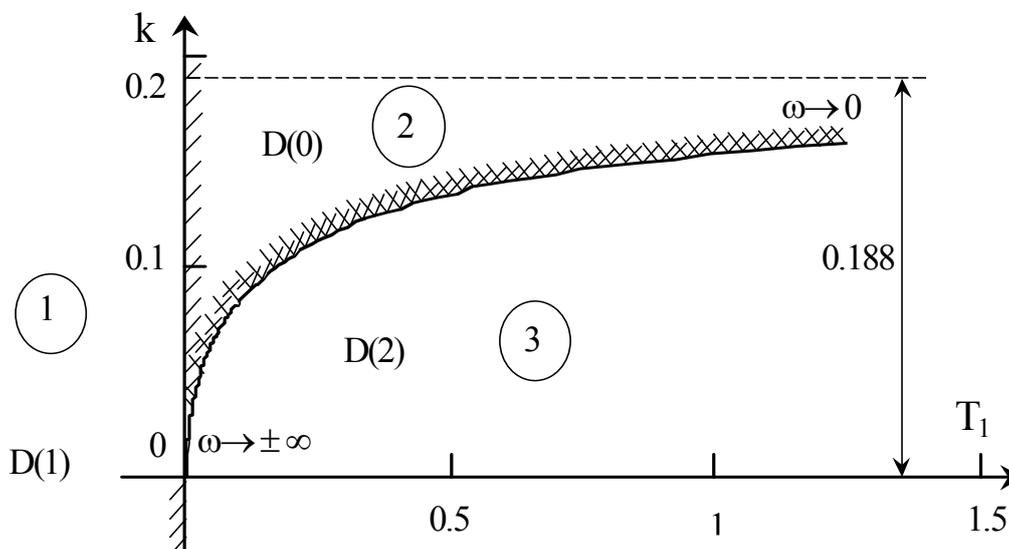


Рис. 2.3. Кривые D-разбиения

- б) коэффициент при старшем члене характеристического уравнения равен нулю; это уравнение вертикальной оси: $T_1 = 0$.

Плоскость $(T_1; k)$ разбиваем на зоны 1, 2 и 3. Основную кривую D-разбиения штрихуем дважды справа при изменении ω от 0 до $+\infty$ (поскольку $\Delta < 0$). Особую прямую штрихуем одинарной штриховкой таким образом, чтобы стороны между основной кривой D-разбиения и особой прямой были обращены друг к другу заштрихованными или незаштрихованными сторонами.

В плоскости параметров T_1 и k кривыми D-разбиения выделены три области. В соответствии со штриховкой “претендентом” на область устойчивости является область 2. Полагая $k \gg T_1$ и $T_1 > 0$, получаем вырожденное уравнение

$$k(T_2 p + 1) \cdot T_3 p + 1 = 0,$$

соответствующее системе, устойчивой при любых значениях параметров k , T_2 и T_3 , следовательно, область 2 является областью устойчивости.

Задание для практической работы

Дано:

характеристическое уравнение системы.

Требуется:

построить кривые D-разбиения по неизвестным параметрам и найти область устойчивости.

Варианты задания

№ варианта	Характеристическое уравнение системы
1	$p^3 + p^2 + p + k = 0$
2	$p^3 + \mu \cdot p^2 + \delta \cdot p + 1 = 0$
3	$(T \cdot p + 1)(0.2p^2 + 5p + 1) + 25k = 0$
4	$2T \cdot p^3 + (2 + T) \cdot p^2 + p + k = 0$
5	$0,02T \cdot p^3 + (0,02 + 0,3T) \cdot p^2 + (0,3 + T) \cdot p + k + 1 = 0$
6	$(1 + 0,2p)(1 + 2 \cdot \xi \cdot p + p^2) + k = 0$
7	$p \cdot (1 + 0,2T \cdot p + T^2 p^2) + k = 0$
8	$p \cdot (1 + p)(1 + 5p)(1 + T \cdot p) + 6(1 + 3p) = 0$
9	$(1 + p)(1 + 2p)(1 + T \cdot p) + k = 0$
10	$p \cdot (32p^2 + 4p - 1)(1 + T \cdot p) + (2p^2 + 3p + 1) \cdot k = 0$
11	$p \cdot (1 + 4p)(1 + T_1 p) + (1 + 2p)(1 + T_2 p) = 0$
12	$p \cdot (1 + 0,4T \cdot p + T^2 p^2) + k = 0$
13	$0,2p^4 + 2,4p^3 + 4p^2 + (0,5k_2 - 0,6) \cdot p + 0,5k_1 = 0$
14	$p \cdot (1 + 0,6T \cdot p + T^2 p^2) + k = 0$
15	$10T \cdot p^3 + (10 + T) \cdot p^2 + p + k = 0$
16	$p^3 + p^2 + p + A = 0$
17	$(p + 1)(2p + 1)(3p + 1) + k = 0$
18	$1000p^4 + 300p^3 + 30p^2 + (1 + k_p) \cdot p + k_n = 0$
19	$5p^2 + 8p^2 + 3p + k = 0$
20	$k_n \cdot (p + 1) - k_d \cdot (p^2 + p) + 4 \cdot p^2 - 1 = 0$

В отчете представить:

- задание для практической работы и вариант задания;
- порядок построения кривых D-разбиения;
- таблицы расчетов, график кривых D-разбиения на миллиметровой бумаге, промежуточные и окончательные результаты.

2.4. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. МЕТОД ТРАПЕЦИЙ. ПРЯМЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Практическое занятие № 8

Предварительные сведения

При нулевых начальных условиях и единичном ступенчатом воздействии связь между переходной характеристикой и ВЧХ системы имеет вид

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\omega)}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot d\omega.$$

В методе трапеций интегрирование в этом уравнении и определение $y(t)$ осуществляется с помощью специальных таблиц \mathbf{h} -функций.

Метод трапеций заключается в следующем.

График ВЧХ системы разбивают на ряд прямолинейных участков (рис. 2.4) так, что

$$\operatorname{Re}(\omega) \approx \sum_{i=1}^n r_i(\omega).$$

Каждая $r_i(\omega)$ имеет вид трапеции, две стороны которой совпадают с осями координат (рис. 2.5).

Построение переходного процесса в системе производят алгебраическим суммированием функций $\mathbf{h}_i(t)$.

Функции $\mathbf{h}_i(t)$ определяют по следующей методике:

1) вычисляют коэффициент наклона трапецеидальной характеристики:

$$\chi = \frac{\omega_d}{\omega_c};$$

2) по таблице \mathbf{h}_χ -функций (приложение 3) определяют величины \mathbf{h}_χ для различных значений τ ;

3) значение функции $\mathbf{h}_i(t)$, соответствующее моменту времени $t = \tau / \omega_c$, вычисляют по формуле

$$\mathbf{h}_i = r_{0i} \cdot \mathbf{h}_\chi,$$

где r_{0i} – высота трапеции с учетом знака.

В частных случаях трапецеидальные характеристики имеют вид прямоугольных ($\chi = 1$) или треугольных ($\chi = 0$) фигур.

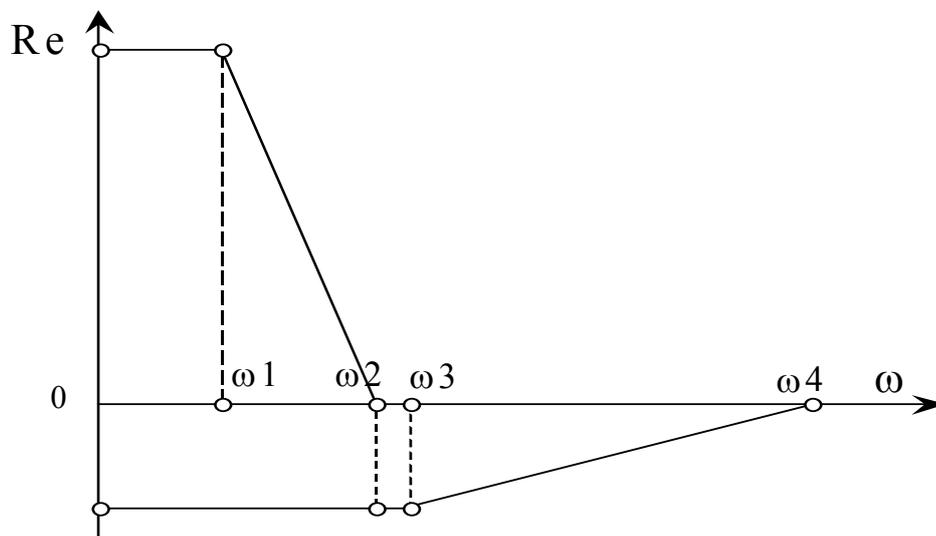
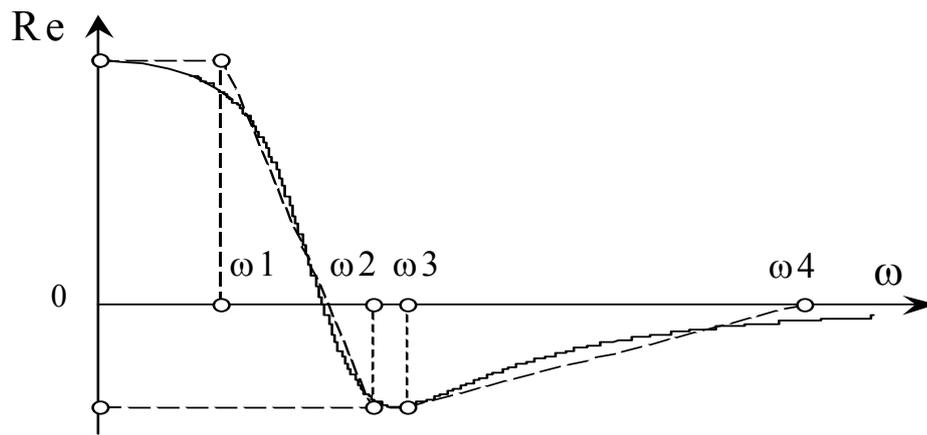


Рис. 2.4. Разделение ВЧХ системы на трапеции и аппроксимирующие трапеции

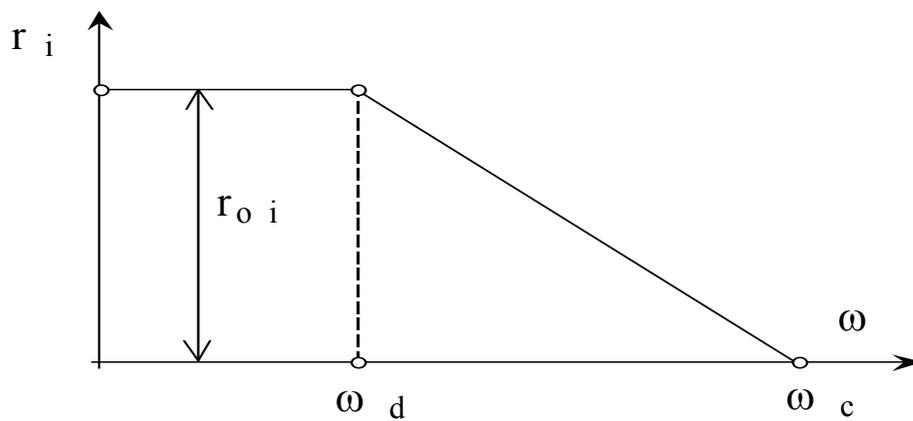


Рис. 2.5. Расчетные параметры трапецидальной характеристики

Пример

Дано:

передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{p + 3}{p^3 + 4,5p^2 + 14,5p + 20}$$

Требуется:

по вещественной частотной характеристике системы построить приближенную кривую переходного процесса при единичном ступенчатом входном воздействии и нулевых начальных условиях.

Решение

Вещественная частотная характеристика системы

$$\text{Re}(\omega) = \frac{-\omega^4 + \omega^2 + 60}{(20 - 4,5\omega^2)^2 + \omega^2(14,5 - \omega^2)^2}$$

приведена на рис. 2.6.

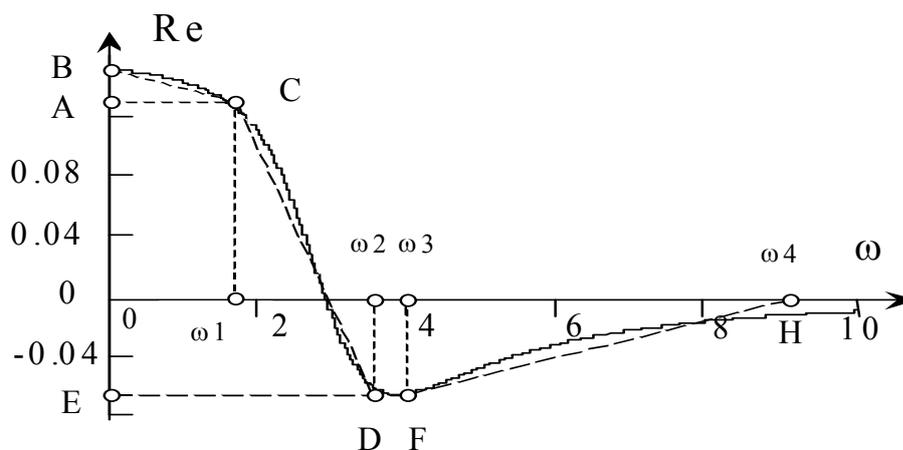


Рис. 2.6. ВЧХ и ее разделение на трапеции

Разбиваем вещественную частотную характеристику на участки:

- 1) трапеция ACDE;
- 2) треугольник ABC;
- 3) трапеция EFH0.

По рис. 2.6 определяем величины: $\omega_1 = 1,75$ рад/с; $\omega_2 = 3,5$ рад/с; $\omega_3 = 4$ рад/с; $\omega_4 = 9,0$ рад/с; $r_{01} = EA = 0,13 + 0,066 = 0,196$; $r_{02} = AB = 0,15 - 0,13 = 0,02$; $r_{03} = OE = -0,066$.

Используя таблицу приложения 3, составляем таблицу вычислений

Время $\tau, [-]$	Трапеция ACDE $\chi = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0,5$		Треугольник ABC $\chi = 0$		Трапеция EFHO $\chi = \frac{\omega_3}{\omega_4} = 0,44$	
	$t = \tau / \omega_2$	$h_1 = h_\chi r_{01}$	$t = \tau / \omega_1$	$h_2 = h_\chi r_{02}$	$t = \tau / \omega_4$	$h_3 = h_\chi r_{03}$
0,0	0,00	0,000	0,00	0,000	0,00	0,000
1,0	0,29	0,090	0,57	0,006	0,11	-0,030
2,0	0,57	0,163	1,14	0,011	0,22	-0,053
3,0	0,86	0,208	1,71	0,015	0,33	-0,069
4,0	1,14	0,224	2,29	0,017	0,44	-0,074
5,0	1,43	0,219	2,86	0,018	0,56	-0,074
6,0	1,71	0,206	3,43	0,018	0,67	-0,070
7,0	2,00	0,195	4,00	0,018	0,78	-0,067
8,0	2,29	0,189	4,57	0,018	0,89	-0,065
9,0	2,57	0,190	5,14	0,018	1,00	-0,065
10,0	2,86	0,192	5,71	0,019	1,11	-0,065
11,0	3,14	0,195	6,29	0,019	1,22	-0,065
12,0	3,43	0,195	6,86	0,019	1,33	-0,065

Кривая переходного процесса $y(t)$ и ее составляющие, соответствующие участкам разбивки вещественной характеристики, изображены на рис. 2.7.

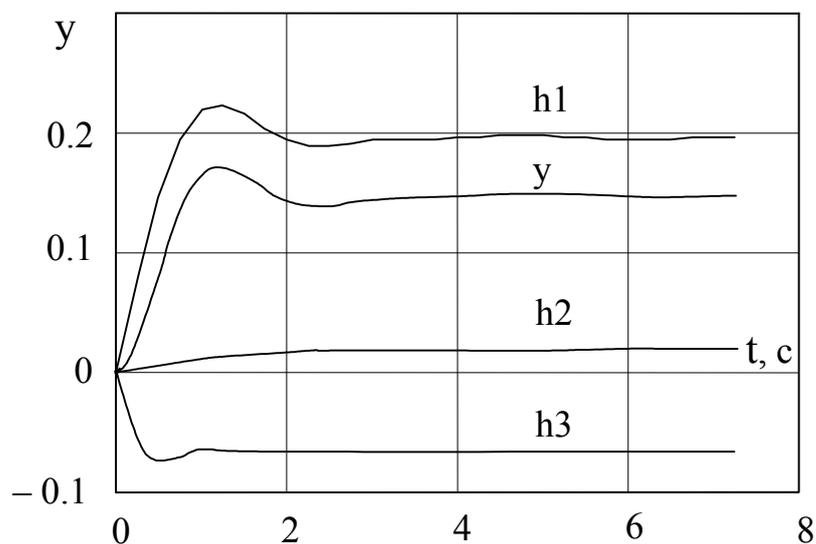


Рис. 2.7. Кривая переходного процесса и ее составляющие

Кривую переходного процесса $y(t)$ получают путем графического суммирования ординат $h_i(t)$.

Внимание! Перед составлением таблицы вычислений проверьте равенство суммы высот трапеций (с учетом знака) значению ВЧХ при $\omega = 0$.

Прямые оценки качества работы систем управления

При самой общей оценке качества обращают внимание прежде всего на форму переходного процесса. Различают следующие типовые переходные процессы (рис. 2.8): колебательный (кривая 1), монотонный (кривая 2) и апериодический (кривая 3).

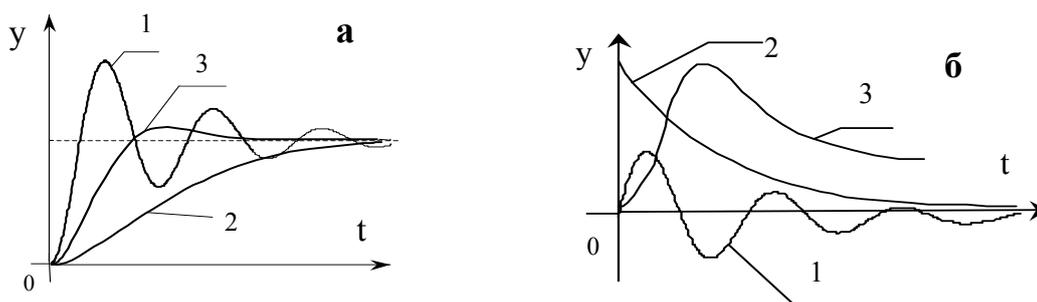


Рис. 2.8. Типовые переходные процессы:
а – по заданию; б – по возмущению

На графиках переходных процессов (рис. 2.9), вызванных ступенчатым изменением задающего воздействия S (а) и возмущения γ , действующего на входе объекта (б), находят ряд величин, определяющих прямые критерии качества.

К прямым критериям качества относятся:

1) перерегулирование σ (%), рис. 2.9, а:

$$\sigma = \frac{A_1}{y(\infty)} \cdot 100,$$

для процессов (рис. 2.9, б):

$$\sigma = \frac{A_3}{A_1} \cdot 100;$$

2) динамический коэффициент регулирования R_D (%), рис. 2.9, б:

$$R_D = \frac{A_1 + y(\infty)}{K_{об}} \cdot 100,$$

где $K_{об}$ – коэффициент передачи объекта (предельное отклонение регулируемой величины объекта $y_{об}(t)$ при отсутствии регулирования;

3) статическая ошибка:

$$\epsilon_{ст} = S - y(\infty) \quad (\text{рис. 2.9, а}), \quad \epsilon_{ст} = y(\infty) \quad (\text{рис. 2.9, б});$$

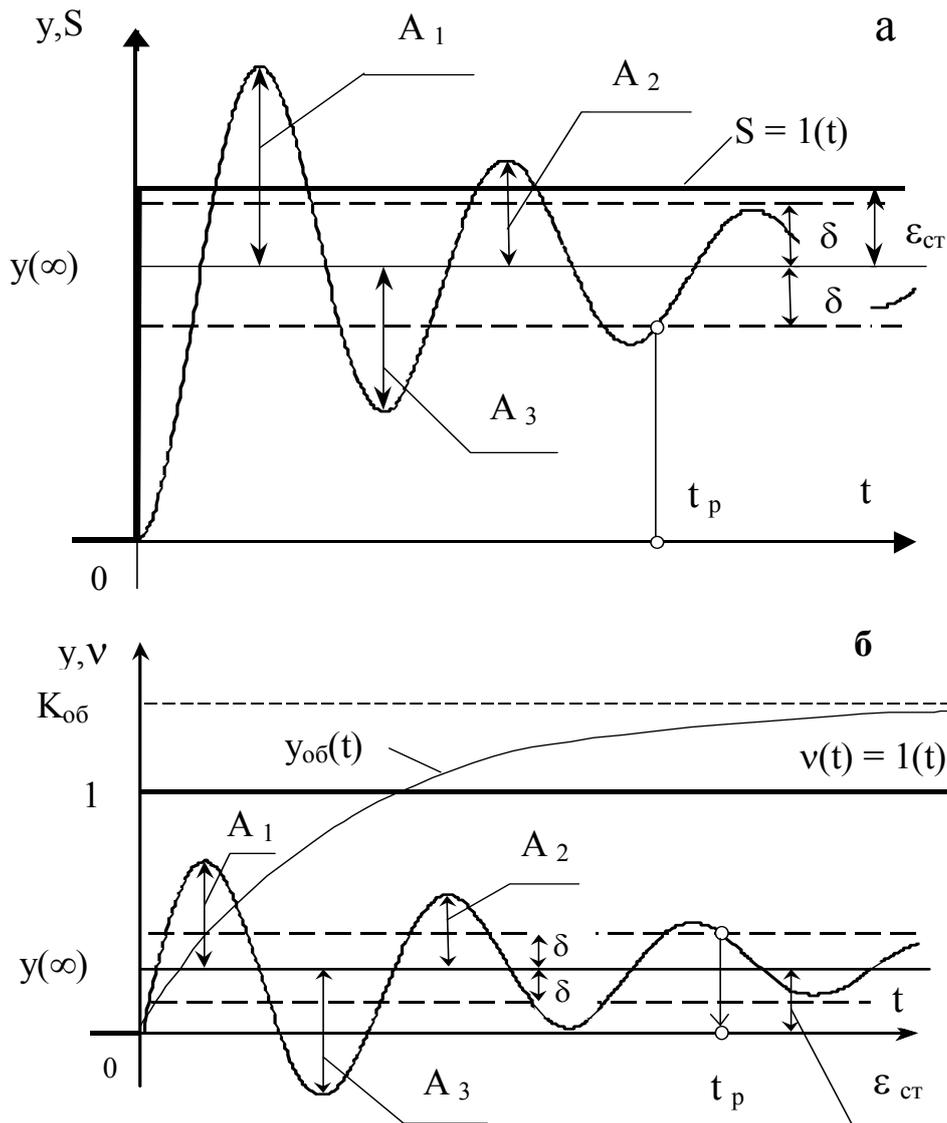


Рис. 2.9. Прямые показатели качества процесса регулирования:
а – по каналу задания; б – по каналу возмущения

4) степень затухания Ψ :

$$\Psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} ;$$

5) время регулирования t_p – время, по истечению которого отклонение регулируемой величины от установившегося состояния не будет превышать некоторой, наперед заданной величины δ . Обычно $\delta = 0,05 \cdot y(\infty)$ для процессов (рис. 2.9, а) и $\delta = 0,05 \cdot K_{об}$ для процессов (рис. 2.9, б);

6) максимальная динамическая ошибка A_1 .

Задание для практической работы

Дано:

таблица значений ВЧХ системы, таблица h_x -функций.

Требуется:

построить переходный процесс системы методом трапеций, определить прямые оценки качества регулирования.

В отчете представить:

- а) задание на работу и вариант задания;
- б) график ВЧХ системы на миллиметровой бумаге, разбивку ВЧХ на трапеции, параметры трапеций;
- в) таблицу расчета составляющих переходного процесса, график переходного процесса и его составляющих на миллиметровой бумаге;
- г) оценку качества переходного процесса;
- д) порядок и результаты расчетов.

Варианты задания

ω, c^{-1}	Номер варианта, ВЧХ системы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Re	Re	Re	Re	Re	Re	Re	Re	Re	Re
0,000	0,000	1,00	0,000	1,00	0,000	1,00	0,00	1,00	0,000	1,00
0,006	0,021	1,03	0,013	1,04	0,021	1,02	0,041	0,997	0,033	1,02
0,012	0,084	1,12	0,052	1,16	0,087	1,08	0,164	0,987	0,131	1,06
0,018	0,188	1,24	0,112	1,32	0,209	1,17	0,364	0,961	0,300	1,12
0,024	0,323	1,33	0,186	1,45	0,406	1,28	0,634	0,900	0,533	1,14
0,030	0,451	1,22	0,248	1,36	0,704	1,33	0,945	0,766	0,778	0,96
0,036	0,451	0,60	0,233	0,69	1,020	0,92	1,220	0,491	0,824	0,35
0,042	0,209	-0,46	0,088	-0,49	0,770	-0,53	1,270	-0,002	0,428	-0,60
0,048	-0,088	-1,18	-0,071	-1,28	-0,044	-1,60	0,858	-0,657	-0,109	-1,16
0,054	-0,243	-1,31	-0,145	-1,42	-0,443	-1,53	0,060	-1,150	-0,405	-1,19
0,066	-0,271	-0,98	-0,146	-1,05	-0,498	-0,93	-0,953	-1,090	-0,487	-0,84
0,078	-0,211	-0,65	-0,109	-0,68	-0,392	-0,56	-0,961	-0,659	-0,391	-0,53
0,090	-0,151	-0,42	-0,075	-0,44	-0,292	-0,35	-0,734	-0,363	-0,286	-0,33
0,102	-0,103	-0,26	-0,050	-0,27	-0,209	-0,21	-0,508	-0,182	-0,196	-0,20
0,114	-0,067	-0,15	-0,031	-0,15	-0,142	-0,12	-0,322	-0,067	-0,126	-0,10
0,138	-0,017	-0,01	-0,006	-0,01	-0,046	0,00	-0,062	0,057	-0,027	0,02
0,162	0,012	0,07	0,007	0,07	0,016	0,07	0,091	0,111	0,032	0,08
0,186	0,029	0,11	0,015	0,11	0,053	0,10	0,171	0,128	0,065	0,11
0,210	0,037	0,12	0,019	0,13	0,071	0,11	0,196	0,120	0,078	0,11
0,234	0,038	0,12	0,019	0,12	0,076	0,11	0,176	0,093	0,076	0,10
0,258	0,033	0,10	0,016	0,10	0,067	0,09	0,119	0,051	0,060	0,07
0,282	0,023	0,06	0,011	0,07	0,045	0,05	0,039	0,002	0,034	0,03

Варианты задания

ω , c^{-1}	Номер варианта, ВЧХ системы									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	Re	Re	Re	Re	Re	Re	Re	Re	Re	Re
0,000	0,000	1,00	0,000	1,00	0,000	1,00	0,00	1,00	0,000	1,00
0,006	0,032	1,00	0,022	1,02	0,023	1,03	0,016	1,00	0,014	1,04
0,012	0,125	1,00	0,087	1,06	0,089	1,12	0,062	1,01	0,053	1,16
0,018	0,273	1,00	0,197	1,14	0,197	1,23	0,133	1,02	0,115	1,32
0,024	0,468	0,99	0,353	1,23	0,335	1,32	0,223	1,04	0,189	1,45
0,030	0,703	0,96	0,560	1,31	0,458	1,19	0,330	1,06	0,250	1,34
0,036	0,965	0,88	0,803	1,25	0,444	0,55	0,438	1,05	0,230	0,66
0,042	1,220	0,70	0,932	0,66	0,186	-0,53	0,476	0,95	0,081	-0,53
0,048	1,350	0,26	0,462	-0,95	-0,115	-1,23	0,232	0,55	-0,079	-1,31
0,054	1,010	-0,64	-0,378	-2,08	-0,262	-1,33	-0,231	-0,38	-0,150	-1,43
0,066	-1,170	-2,06	-0,654	-1,42	-0,277	-0,96	-0,382	-1,32	-0,147	-1,04
0,078	-1,280	-1,16	-0,459	-0,77	-0,209	-0,62	-0,250	-0,81	-0,108	-0,67
0,090	-0,842	-0,55	-0,303	-0,43	-0,147	-0,39	-0,156	-0,48	-0,074	-0,42
0,102	-0,514	-0,24	-0,194	-0,23	-0,098	-0,24	-0,096	-0,31	-0,049	-0,26
0,114	-0,294	-0,07	-0,117	-0,10	-0,061	-0,13	-0,056	-0,21	-0,030	-0,14
0,138	-0,033	0,09	-0,019	0,04	-0,012	0,07	-0,007	-0,10	-0,005	0,00
0,162	0,101	0,15	0,036	0,11	0,016	0,08	0,018	-0,06	0,008	0,08
0,186	0,167	0,17	0,064	0,14	0,032	0,11	0,032	-0,03	0,016	0,11
0,210	0,187	0,16	0,076	0,14	0,038	0,12	0,037	-0,02	0,019	0,13
0,234	0,170	0,13	0,074	0,13	0,038	0,11	0,067	-0,01	0,019	0,12
0,258	0,120	0,06	0,060	0,09	0,031	0,09	0,031	-0,01	0,016	0,10
0,282	0,044	0,01	0,035	0,05	0,020	0,05	0,020	0,00	0,011	0,06

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

3.1. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ КОРНЕВЫМ МЕТОДОМ (РАФЧХ)

Практическое занятие № 9

Предварительные сведения

Рассматриваемый корневой метод параметрического синтеза систем автоматического управления основан на понятии расширенных амплитудно-фазочастотных характеристик (РАФЧХ). РАФЧХ какого-либо звена можно получить подстановкой в передаточную функцию этого звена $W(p)$ оператора $p = -m \cdot \omega + i \cdot \omega$ или $p = -\eta + i \cdot \omega$.

В первом случае расчетные формулы метода обеспечивают получение границы заданной степени колебательности системы m , а во втором – получение границы заданной степени устойчивости η в пространстве параметров настройки регулятора. Дальнейший поиск параметров настройки регулятора осуществляется вдоль границы заданного запаса устойчивости системы регулирования до достижения экстремума принятого критерия качества. Расчетные формулы корневого метода для типовых регуляторов имеют следующий вид:

И-регулятор

$$\begin{cases} k_{\text{И}} = \frac{\omega \cdot (m^2 + 1) \cdot \text{Re}_{\text{об}}(m, \omega)}{m \cdot A_{\text{об}}^2(m, \omega)}, \\ k_{\text{И}} = \frac{-\omega \cdot (m^2 + 1) \cdot \text{Im}_{\text{об}}(m, \omega)}{A_{\text{об}}^2(m, \omega)}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} k_{\text{И}} = \frac{\omega \cdot \sqrt{m^2 + 1}}{A_{\text{об}}(m, \omega)}, \\ \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(m) + \varphi_{\text{об}}(m, \omega) = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений определяются значения настроечного параметра $k_{\text{И}}$ и частоты ω , на которой будет работать система регулирования. Здесь и в дальнейшем: $\text{Re}_{\text{об}}(m, \omega)$ – расширенная вещественная частотная характеристика объекта; $\text{Im}_{\text{об}}(m, \omega)$ – расширенная мнимая частотная характеристика объекта; $A_{\text{об}}(m, \omega)$ – расширенная амплитудно-частотная характеристика объекта

$$A_{\text{об}}(m, \omega) = \sqrt{\text{Re}_{\text{об}}^2(m, \omega) + \text{Im}_{\text{об}}^2(m, \omega)},$$

где m – заданная величина степени колебательности; ω – частота.

П-регулятор

$$\begin{cases} k_{\text{П}} = -\frac{\text{Re}_{\text{об}}(m, \omega)}{A_{\text{об}}^2(m, \omega)}, \\ \varphi_{\text{об}}(m, \omega) + \pi = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k_{\text{П}} = \frac{1}{A_{\text{об}}(m, \omega)}, \\ \varphi_{\text{об}}(m, \omega) + \pi = 0. \end{cases}$$

ПД-регулятор

$$k_{\text{п}} = \frac{m \cdot \text{Im}_{06}(m, \omega) - \text{Re}_{06}(m, \omega)}{A_{06}^2(m, \omega)}, \quad k_{\text{д}} = \frac{\text{Im}_{06}(m, \omega)}{A_{06}^2(m, \omega)}.$$

ПИ-регулятор

$$\frac{k_{\text{р}}}{T_{\text{и}}} = -\frac{\omega \cdot (m^2 + 1) \cdot \text{Im}_{06}(m, \omega)}{A_{06}^2(m, \omega)}, \quad k_{\text{р}} = -\frac{m \cdot \text{Im}_{06}(m, \omega) + \text{Re}_{06}(m, \omega)}{A_{06}^2(m, \omega)}.$$

ПИД-регулятор

$$\begin{cases} \frac{K_{\text{р}}}{T_{\text{и}}} = \omega \cdot (m^2 + 1) \cdot \left[\omega \cdot C_2 - \frac{\text{Im}_{06}(m, \omega)}{A_{06}^2(m, \omega)} \right], \\ K_{\text{р}} = -\frac{m \cdot \text{Im}_{06}(m, \omega) + \text{Re}_{06}(m, \omega)}{A_{06}^2(m, \omega)} + 2\omega \cdot m \cdot C_2, \end{cases}$$

где $C_2 = K_{\text{р}} \cdot T_{\text{д}}$.

Порядок применения расчетных формул следующий:

- 1) задаются величиной m , диапазоном и шагом изменения частоты ω ;
- 2) по передаточной функции объекта рассчитываются значения расширенной частотной характеристики объекта и в явном виде определяются настройки регулятора в заданном диапазоне частот;
- 3) для П,- И-регуляторов решение системы расчетных уравнений сразу дает параметр настройки и резонансную частоту замкнутой системы;
- 4) для ПД,- ПИ,- ПИД-регуляторов расчетные формулы дают в пространстве параметров настройки границу заданного запаса устойчивости;
- 5) на границе заданного запаса устойчивости ищут значения параметров, минимизирующих принятый критерий качества работы системы. Так, например, минимуму первого интегрального критерия соответствует максимум отношения $K_{\text{р}}/T_{\text{и}}$, минимуму второго интегрального критерия соответствует точка $0,95 \cdot \max(K_{\text{р}}/T_{\text{и}})$ в сторону большего значения частоты («правее максимума»).

Расчетные формулы имеют общий характер. На одной и той же частоте ω величины η и m связаны однозначной зависимостью $m \cdot \omega = \eta$.

Поэтому, подставив в расчетные формулы $m = \frac{\eta}{\omega}$, получим формулы, которыми можно пользоваться для построения границы заданной степени устойчивости η . Если требуется построить границу заданных η и

m , то в диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \frac{\eta}{m}$ используются формулы с η , а в диапазоне $\frac{\eta}{m} \leq \omega \leq \infty$ – формулы с m . При $\eta = 0$ или $m = 0$ формулы позволяют построить границу устойчивости.

При расчетах настроек регуляторов бывает полезной ниже приведенная таблица соответствия оценок запаса устойчивости: степени затухания Ψ ; степени колебательности m ; показателя колебательности M .

Таблица соответствия оценок запаса устойчивости

Ψ	0	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,998	1,0
m	0	0,221	0,256	0,302	0,366	0,477	0,989	∞
M	∞	2,38	2,08	1,81	1,55	1,29	1,0	1,0

Аналитическая связь между оценками запаса устойчивости:

$$\psi = 1 - e^{-2 \cdot \pi \cdot m}; \quad m = -\frac{\ln(1 - \psi)}{2 \cdot \pi}; \quad M = \frac{m^2 + 1}{2 \cdot m};$$

$$m = M - \sqrt{M^2 - 1}; \quad \psi = 1 - e^{-2 \cdot \pi \cdot (M - \sqrt{M^2 - 1})}.$$

Пример 1

Дано: передаточная функция объекта

$$W_{об}(p) = \frac{K \cdot e^{-P \cdot \tau}}{T \cdot P + 1}, \quad \text{где } K=5; \quad \tau=10 \text{ с}; \quad T=50 \text{ с}$$

и требование к запасу устойчивости $\Psi = 0,75$.

Требуется: найти параметр настройки П-регулятора k_P .

Решение

Определяем РАФЧХ объекта:

$$\begin{aligned} W_{об}(m, i\omega) &= \frac{K \cdot e^{-\tau \cdot (-m \cdot \omega + i\omega)}}{T \cdot (-m \cdot \omega + i\omega) + 1} = \frac{K \cdot e^{m \cdot \omega \cdot \tau} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}}{(1 - T \cdot m \cdot \omega) + i \cdot T \cdot \omega} = \\ &= \frac{K \cdot e^{m \omega \cdot \tau} (\cos(\omega \cdot \tau) - i \cdot \sin(\omega \cdot \tau)) \cdot [(1 - T \cdot m \cdot \omega) - i \cdot T \cdot \omega]}{(1 - T \cdot m \cdot \omega)^2 + T^2 \omega^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\mathbf{K} \cdot e^{m \cdot \omega \cdot \tau} [(1 - \mathbf{T} \cdot m \cdot \omega) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) - \mathbf{T} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot \tau)]}{(1 - \mathbf{T} \cdot m \cdot \omega)^2 + \mathbf{T}^2 \omega^2} -$$

$$- i \cdot \frac{\mathbf{K} \cdot e^{m \cdot \omega \cdot \tau} [(1 - \mathbf{T} \cdot m \cdot \omega) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) + \mathbf{T} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot \tau)]}{(1 - \mathbf{T} \cdot m \cdot \omega)^2 + \mathbf{T}^2 \omega^2}.$$

Для удобства расчета частотных характеристик введем обозначения:

$$\mathbf{A}_1 = 1 - \mathbf{T} \cdot m \cdot \omega; \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{T} \cdot \omega; \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2; \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{K} / \mathbf{A}_0;$$

$$\mathbf{A}_4 = -\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{K} / \mathbf{A}_0; \quad \mathbf{A}_5 = e^{m \cdot \omega \cdot \tau}.$$

Тогда выражения для составляющих РАФЧХ будут выглядеть компактней:

$$\mathbf{Re}_{o6}(m, \omega) = \mathbf{A}_5 \cdot [\mathbf{A}_3 \cdot \cos(\omega \cdot \tau) + \mathbf{A}_4 \cdot \sin(\omega \cdot \tau)];$$

$$\mathbf{Im}_{o6}(m, \omega) = \mathbf{A}_5 \cdot [\mathbf{A}_4 \cdot \cos(\omega \cdot \tau) - \mathbf{A}_3 \cdot \sin(\omega \cdot \tau)];$$

$$\mathbf{A}_{o6}^2(m, \omega) = \mathbf{Re}_{o6}^2(m, \omega) + \mathbf{Im}_{o6}^2(m, \omega).$$

Для определения \mathbf{K}_{Π} регулятора используем расчетную систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{\Pi} = -\frac{\mathbf{Re}_{o6}(m, \omega)}{\mathbf{A}_{o6}^2(m, \omega)}, \\ \mathbf{F}_{\Pi} = \varphi_{o6}(m, \omega) + \pi = 0, \end{cases}$$

причем

$$\varphi_{o6}(m, \omega) = \arctg \frac{\mathbf{Im}_{o6}(m, \omega)}{\mathbf{Re}_{o6}(m, \omega)} - k \cdot \pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Значение k находим с учетом периодичности функции \arctg . Так, например, по мере роста частоты ω от $\omega = 0$ и выше, k последовательно изменяется по мере прохождения вектором РАФЧХ квадрантов комплексной плоскости:

$$k = 0 \text{ при } \mathbf{Re}_{o6}(m, \omega) \geq 0, \quad \mathbf{Im}_{o6}(m, \omega) \leq 0;$$

$$k = 1 \text{ при } \mathbf{Re}_{o6}(m, \omega) < 0, \quad \mathbf{Im}_{o6}(m, \omega) \leq 0;$$

$$k = 1 \text{ при } \mathbf{Re}_{o6}(m, \omega) < 0, \quad \mathbf{Im}_{o6}(m, \omega) > 0;$$

$$k = 2 \text{ при } \mathbf{Re}_{o6}(m, \omega) \geq 0, \quad \mathbf{Im}_{o6}(m, \omega) \geq 0;$$

$$k = 2 \text{ при } \mathbf{Re}_{o6}(m, \omega) \geq 0, \quad \mathbf{Im}_{o6}(m, \omega) < 0 \text{ и т.д.}$$

По таблице соответствия оценок запаса устойчивости для $\Psi = 0,75$ определяем $m = 0,221$, задаем начальную частоту $\omega = 0$ и шаг по частоте $\Delta\omega = 0,02$. Результаты расчетов сводим в таблицу 3.1 и по данным таб-

лицы строим график зависимости k_{Π} от F_{Π} (рис. 3.1). Точка на графике, соответствующая $F_{\Pi}=0$, определяет параметр настройки П-регулятора $k_{\Pi}=1,074$. Задача решена.

Таблица 3.1

Результаты расчета настройки П-регулятора

$\omega,$ c^{-1}	$Re_{OB}(m, \omega)$	$Im_{OB}(m, \omega)$	$\varphi_{OB}(m, \omega)$	$F_{\Pi}(m, \omega)$	$K_{\Pi}(m, \omega)$
0.00	5.000	0.000	0.000	3.142	-0.200
0.02	1.837	-3.691	-1.109	2.033	-0.108
0.04	-0.336	-2.609	-1.699	1.443	0.048
0.06	-0.887	-1.670	-2.059	1.083	0.248
0.08	-1.039	-1.069	-2.342	0.800	0.467
0.10	-1.063	-0.652	-2.592	0.550	0.684
0.12	-1.031	-0.338	-2.825	0.317	0.876
0.14	-0.996	-0.090	-3.049	0.093	1.026
0.16	-0.879	0.110	-3.267	-0.125	1.120
0.18	-0.775	0.273	-3.480	-0.339	1.147
0.20	-0.659	0.403	-3.691	-0.550	1.104
0.22	-0.532	0.504	-3.900	-0.759	0.990
0.24	-0.399	0.577	-4.108	-0.966	0.810
0.26	-0.262	0.623	-4.314	-1.172	0.574
0.28	-0.126	0.644	-4.519	-1.378	0.293
0.30	0.007	0.639	-4.724	-1.582	-0.018

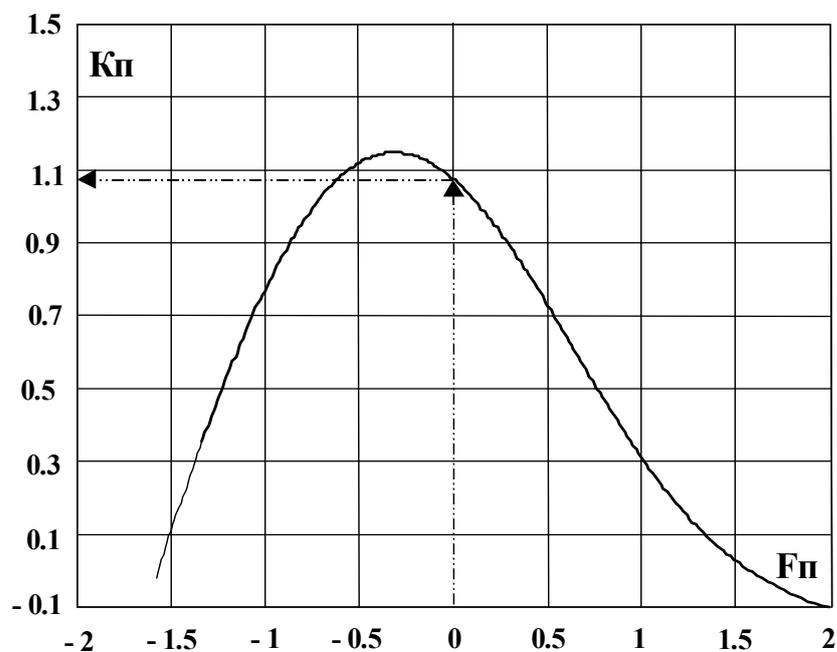


Рис. 3.1. Расчет настройки П-регулятора

Пример 2

Требуется при исходных данных примера 1 определить параметры настройки ПИ-регулятора с учетом минимизации первого интегрального критерия качества работы системы регулирования.

Решение

При известной величине $m=0,221$ (см. пример 1) задаем начальное значение частоты $\omega=0$ и шаг по частоте $\Delta\omega=0,01$. Необходимые вычисления ведем по расчетным формулам для ПИ-регулятора с учетом выражений для расширенных частотных характеристик объекта (см. пример 1). Результаты расчетов сводим в таблицу 3.2 и по данным таблицы строим график зависимости K_p/T_n от K_p (рис. 3.2). Точка на графике, соответствующая максимуму отношения K_p/T_n (т.е. минимуму первого интегрального критерия), определит параметры настройки ПИ-регулятора: $K_p=0,776$; $T_n=K_p/(K_p/T_n)=0,776/0,044=17,6$ с. Резонансная частота замкнутой системы $\omega_{рез}=0.1$ с⁻¹. Задача решена.

Таблица 3.2

Результаты расчета настройки ПИ-регулятора

$\omega, \text{с}^{-1}$	$\text{Re}_{\text{ОБ}}(m, \omega)$	$\text{Im}_{\text{ОБ}}(m, \omega)$	K_p	K_p/T_n
0.00	5.000	0.000	-0.200	0.000
0.01	4.100	-2.878	-0.138	0.001
0.02	1.837	-3.691	-0.060	0.005
0.03	0.387	-3.230	0.031	0.010
0.04	-0.336	-2.609	0.132	0.016
0.05	-0.698	-2.085	0.240	0.023
0.06	-0.887	-1.670	0.351	0.029
0.07	-0.988	-1.339	0.464	0.036
0.08	-1.039	-1.069	0.574	0.040
0.09	-1.061	-0.844	0.679	0.043
0.10	-1.063	-0.652	0.776	0.044
0.11	-1.052	-0.485	0.864	0.042
0.12	-1.031	-0.338	0.939	0.036
0.13	-1.002	-0.207	1.001	0.027
0.14	-0.966	-0.090	1.047	0.014
0.15	-0.925	0.015	1.077	-0.003
0.16	-0.879	0.110	1.089	-0.024
0.17	-0.829	0.196	1.083	-0.048
0.18	-0.775	0.273	1.058	-0.076
0.19	-0.718	0.342	1.015	-0.108
0.20	-0.659	0.403	0.955	-0.142

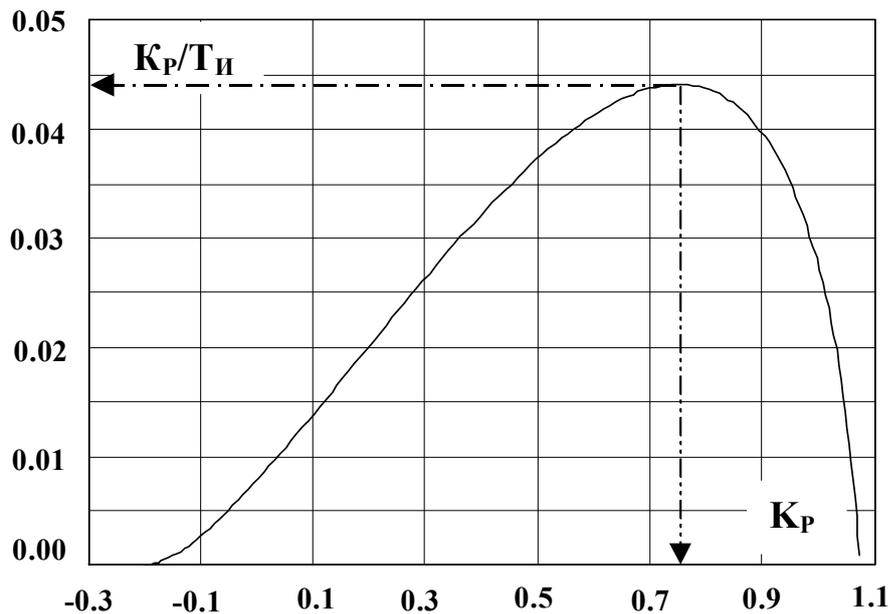


Рис. 3.2. Расчет настройки ПИ-регулятора

Задание для практической работы

Дано:

- а) передаточная функция объекта регулирования

$$W_{об}(p) = \frac{K \cdot e^{-P \cdot \tau}}{T \cdot p + 1}$$

и его параметры;

- б) тип регулятора и критерий его оптимальной настройки;
в) требование к запасу устойчивости системы.

Требуется:

определить параметры настройки регулятора в одноконтурной системе регулирования.

В отчете представить:

- а) задание для практической работы и вариант задания;
б) порядок и результаты расчетов;
в) график границы заданного запаса устойчивости на миллиметровой бумаге;
г) найденные параметры настройки регулятора и резонансную частоту системы.

Варианты задания

Номер варианта	К	T, с	τ , с	Ψ	Тип регулятора	Критерий качества
1	1	10	2	0.75	П	---
2	2	80	5	0.80	И	---
3	1	80	10	0.85	ПИ	I_2
4	1	100	10	0.90	ПД	$\varepsilon_{СТ}$
5	1	100	20	0.95	ПИ	I_1
6	3	50	7	0.75	ПИ	I_2
7	2	90	20	0.80	П	---
8	1	70	15	0.90	П	---
9	5	70	10	0.90	И	---
10	1	200	30	0.85	И	---
11	1	150	30	0.90	ПИ	I_2
12	2	120	25	0.95	ПИ	I_1
13	3	120	40	0.75	ПД	$\varepsilon_{СТ}$
14	5	100	15	0.80	ПИ	I_2
15	1	130	30	0.75	ПИ	I_2
16	1	140	25	0.85	ПИ	I_1
17	1	250	30	0.90	ПД	$\varepsilon_{СТ}$
18	1	200	50	0.80	П	---
19	2	180	35	0.90	И	---
20	1	300	50	0.75	ПИ	I_1

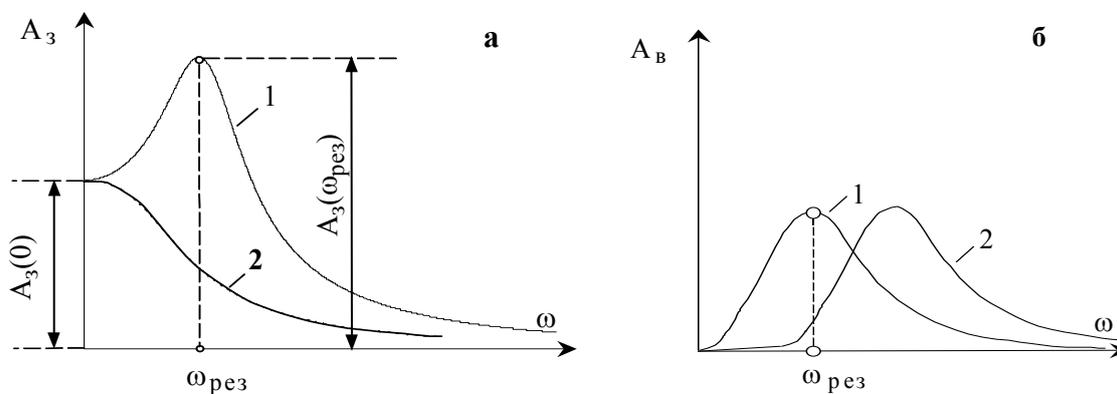
I_1 – первый интегральный критерий; I_2 – второй интегральный критерий;
 $\varepsilon_{СТ}$ – статическая ошибка системы.

3.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ОЦЕНКОЙ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ ПО МАКСИМУМУ АЧХ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Практическое занятие № 10

Предварительные сведения

АЧХ системы регулирования по каналам задания и возмущения имеют вид, представленный на рис. 3.3.



*Рис. 3.3. Графики АЧХ систем регулирования по каналам:
а – задания; б – возмущения*

Оценкой запаса устойчивости системы регулирования может служить показатель колебательности:

$$M = \frac{A_3(\omega_{рез})}{A_3(0)},$$

где $\omega_{рез}$ – резонансная частота системы.

Резонансная частота определяет быстродействие системы. Время переходного процесса можно оценить как

$$t_p \approx (1 \div 2) \frac{2 \cdot \pi}{\omega_{рез}}.$$

В общем виде задача параметрического синтеза системы регулирования может быть поставлена следующим образом: при принятом запасе устойчивости, т.е. при заданном значении M , определить параметры регулятора так, чтобы обеспечивался минимум принятого критерия качества, например чтобы АЧХ $A_3(\omega)$ замкнутой системы обладала наиболее широким диапазоном пропускаемых частот, а система – максимальным быстродействием ($t_p \rightarrow \min$).

Запас устойчивости задается выбором M . Далее рассматриваются два случая: $M > 1$ и $M = 1$. В первом случае $\omega_{рез} > 0$ и величина $\omega_{рез}$ заранее неизвестна. Во втором случае $\omega_{рез} = 0$, и это известно заранее, что сильно упрощает задачу синтеза.

Уравнения, связывающие параметры системы K_1, K_2, K_3 с заданным показателем колебательности M , имеют вид

$$\begin{cases} A_3(\omega_{рез}, K_1, K_2, K_3) = \frac{|W(i\omega)|}{|1 + W(i\omega)|} = M \cdot A_3(0); \\ \frac{dA_3(\omega, K_1, K_2, K_3)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_{рез}} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где второе уравнение есть условие экстремума АЧХ.

Если искомый параметр один (системы с П- или И-регуляторами), система уравнений (3.1) однозначно определяет этот параметр и резонансную частоту. При двух или трех искомых параметрах (система с ПИ- или ПИД-регуляторами) двух уравнений недостаточно для определения параметров регуляторов и $\omega_{рез}$. Систему уравнений необходимо дополнить новыми условиями связи ее параметров с требованиями к качеству регулирования.

Например, условие

$$\frac{dA_B(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (3.2)$$

способствует расширению полосы пропускания частот и улучшает $A_B(\omega)$ в области низких частот (см. рис. 3.3, б, кривая 2), т.е. в том диапазоне частот, который соответствует частотам основных внешних возмущений, действующих на промышленные объекты регулирования. Можно показать, что условие (3.2) соответствует минимуму первого интегрального критерия I_1 или максимуму отношения K_p/T_n для ПИ и ПИД-регуляторов.

Другой путь состоит в том, что на основе уравнений (3.1) строится график $K_1 = f(K_2)$. На графике ищется точка, обеспечивающая в системе минимум принятого критерия качества. Метод построения графика предложен Ротачем В.Я., и будет рассмотрен ниже.

Для упрощения промежуточных операций бывает полезно от системы уравнений (3.1) перейти к эквивалентной системе

$$\begin{cases} A_3^2(\omega) = M^2 \cdot A_3^2(0) = \frac{L(\omega)}{R(\omega)}, \\ \frac{dA_3^2(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{R^2(\omega)} \left[\frac{dL(\omega)}{d\omega} \cdot R(\omega) - \frac{dR(\omega)}{d\omega} \cdot L(\omega) \right] = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $L(\omega)$ и $R(\omega)$ определяются формулой

$$A_3^2(\omega) = \frac{B(i\omega) \cdot B(-i\omega)}{A(i\omega) \cdot A(-i\omega)} = \frac{|B(i\omega)|^2}{|A(i\omega)|^2} = \frac{L(\omega)}{R(\omega)}$$

при $W_3(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ – передаточной функции замкнутой системы по каналу задания.

Синтез систем автоматического регулирования при $M=1$

Основная идея рассматриваемого ниже метода состоит в том, чтобы при $M=1$ выбором параметров системы регулирования максимально расширить в области низких частот горизонтальный участок АЧХ системы (см. кривую 2 на рис. 3.3, а). Это соответствует увеличению диапазона пропускаемых частот, а следовательно, и быстродействию системы регулирования. Математически формулировка этой идеи может быть представлена так:

$$\frac{d^m A_3(\omega)}{d\omega^m} \Big|_{\omega=0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, z, \quad (3.4)$$

где z – число варьируемых параметров системы (далее z будет обозначать число параметров регулятора).

Для упрощения вычислений целесообразно от условий (3.4) перейти к эквивалентным условиям:

$$\frac{d^{2m} A_3^2(\omega)}{d\omega^{2m}} \Big|_{\omega=0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, z. \quad (3.5)$$

Число требований к АЧХ остается прежним. Нечетные производные $A_3^2(\omega)$ не могут быть использованы, поскольку при $\omega=0$ они все тождественны нулю (т.е. равны нулю при любых значениях параметров системы). Последнее объясняется тем, что $A_3^2(\omega)$ является произведением комплексно-сопряженных функций от ω , и поэтому содержит ω только в четных степенях.

Требования к АЧХ (3.5) будут удовлетворены, если удастся выполнить следующие условия:

$$R(0) \cdot \left[\frac{d^{2m} L(\omega)}{d\omega^{2m}} \right] \Big|_{\omega=0} - L(0) \cdot \left[\frac{d^{2m} R(\omega)}{d\omega^{2m}} \right] \Big|_{\omega=0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, z. \quad (3.6)$$

В случае статических систем регулирования

$$R(0) = (1 + K)^2, \quad L(0) = K^2;$$

для астатических систем регулирования

$$R(0) = L(0) = K^2,$$

где K – коэффициент передачи разомкнутой системы.

Для вычисления производных от $R(\omega)$ можно использовать формулу:

$$\frac{d^{2m} R(\omega)}{d\omega^{2m}} = \frac{d^{2m} |A_3(i\omega)|^2}{d\omega^{2m}} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k A_3^{(2m-k)}(i\omega) \cdot A_3^{(k)}(i\omega), \quad (3.7)$$

где C_{2m}^k – число сочетаний; $A_3^{(2m-k)}(\omega)$, $A_3^{(k)}(\omega)$ – производные $(2m-k)$ и k -го порядков по частоте; $A_3(i\omega) = A_3(p) \Big|_{p=i\omega}$; $A(p)$ – знаменатель передаточной функции замкнутой системы $W_3(p)$. Аналогичную формулу можно применить для вычисления $L^{(2m)}(\omega)$.

Подставляя $R^{(2m)}(\omega)$ и $L^{(2m)}(\omega)$ в систему уравнений (3.6) и учитывая, что знаменатель и числитель передаточной функции замкнутой системы связаны условием

$$A(p) = A_1(p) + B(p),$$

можно получить систему уравнений (3.6) в такой форме:

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \cdot C_{2m}^k \left[A_1^{(2m-k)}(i\omega) \cdot A_1^{(k)}(i\omega) \right] \Big|_{\omega=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \cdot C_{2m}^k \left[A_1^{(2m-k)}(i\omega) \cdot B^{(k)}(i\omega) + A_1^{(k)}(i\omega) \cdot B^{(2m-k)}(i\omega) \right]_{/\omega=0}, \quad (3.8)$$

при $m = 1, 2, \dots, z$ (формула для астатической системы регулирования).

Если передаточная функция разомкнутой системы регулирования запишется

$$W(p) = W_o(p) \cdot W_p(p) = \frac{B_o(p) \cdot B_p(p)}{A_o(p) \cdot A_p(p)},$$

то в системе (3.8) $A_1(p) = A_o(p) \cdot A_p(p)$, $B(p) = B_o(p) \cdot B_p(p)$. В этом случае уравнениями (3.8) можно пользоваться, не составляя уравнения замкнутой системы и не вычисляя модуля ее АФЧХ. При этом, поскольку в обеих частях осуществляется подстановка $\omega=0$, можно в произвести замены $A_1(i\omega)$ и $B(i\omega)$ на $A_1(p)$ и $B(p)$ и $\omega=0$ на $p=0$.

Пример

Передаточные функции объекта и регулятора имеют вид

$$W_o(p) = \frac{K_o}{(T_o p + 1)^2}; \quad W_p(p) = \frac{K_1 + K_2 \cdot p}{p}.$$

Требуется определить параметры регулятора K_1 и K_2 , удовлетворяющие условиям (3.5).

Решение

Имеем

$$A_1(p) = A_o(p) \cdot A_p(p) = T_o^2 \cdot p^3 + 2 \cdot T_o \cdot p^2 + p,$$

$$B(p) = B_o(p) \cdot B_p(p) = C_o + C_1 \cdot p,$$

где $C_o = K_o \cdot K_1$, $C_1 = K_o \cdot K_2$.

Производные от $A_1(p)$ и $B(p)$ по p при $p=0$ равны

$$\begin{aligned} A_1(0) &= 0, & B(0) &= C_o, \\ A_1'(0) &= \left[3 \cdot T_o^2 \cdot p^2 + 4 \cdot T_o \cdot p + 1 \right]_{/p=0} = 1, & B'(0) &= C_1, \\ A_1''(0) &= \left[6 \cdot T_o \cdot p + 4 \cdot T_o \right]_{/p=0} = 4 \cdot T_o, & B''(0) &= 0, \\ A_1'''(0) &= 6 \cdot T_o, \quad A_1^{(4)}(0) = 0, & B'''(0) &= B^{(4)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя значения производных в выражение (3.8), получим систему уравнений

$$4 \cdot T_o \cdot C_o - 2 \cdot C_1 = 1, \quad C_1 = 1$$

решив которую, найдем

$$C_0 = K_0 \cdot K_1 = \frac{3}{4 \cdot T_0}, \quad C_1 = K_0 \cdot K_2 = 1 \quad \text{или} \quad K_1 = \frac{3}{4 \cdot T_0 \cdot K_0}, \quad K_2 = \frac{1}{K_0}.$$

При сделанном выборе параметров регулятора переходный процесс будет близок к границе между монотонным и колебательным при таких показателях запаса устойчивости $\eta \approx 0,8$, $m \approx 0,8$.

Пример 2

Пусть передаточные функции объекта и регулятора имеют вид

$$W_o(P) = \frac{K_0 \cdot e^{-P \cdot \tau}}{T_0 \cdot P + 1} = \frac{K_0}{(T_0 \cdot P + 1) \cdot e^{P \cdot \tau}}, \quad W_p(P) = \frac{K_1 + K_2 \cdot P}{P}.$$

Требование к запасу устойчивости $M=1$.

Требуется определить параметры настройки регулятора.

Решение

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(P) = \frac{K_0}{(T_0 \cdot P + 1) \cdot e^{P \cdot \tau}} \cdot \frac{K_1 + K_2 \cdot P}{P},$$

а передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{C_0 + C_1 \cdot p}{(T_0 \cdot p^2 + p) \cdot e^{p \cdot \tau} + C_0 + C_1 \cdot p} = \frac{B(p)}{A_1(p) + B(p)}.$$

Определим производные от $A_1(p)$ и $B(p)$ по p при $p=0$ и подставим их в уравнения (3.8) для $m=1$ и $m=2$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(T+1) \cdot \tau \cdot K_0 \cdot K_1 - 2 \cdot K_0 \cdot K_2 = 1, \\ (3 \cdot T + 1) \cdot \tau \cdot K_0 \cdot K_1 - 3 \cdot (2 \cdot T + 1) \cdot K_0 \cdot K_2 = -3 \cdot T^2, \end{cases}$$

где $T = T_0 / \tau$.

Разрешив систему относительно $\tau \cdot K_0 \cdot K_1$ и $K_0 \cdot K_2$, получим

$$\tau \cdot K_0 \cdot K_1 = \frac{6 \cdot T^2 + 6 \cdot T + 3}{4 \cdot (3 \cdot T^2 + 3 \cdot T + 1)},$$

$$K_0 \cdot K_2 = \frac{6 \cdot T^3 + 6 \cdot T^2 + 3 \cdot T + 1}{4 \cdot (3 \cdot T^2 + 3 \cdot T + 1)}.$$

Формулы позволяют по известным параметрам объекта K_0 , T_0 , τ

просто определять K_1 , и K_2 , удовлетворяющие требованиям системы уравнений (3.4) к АЧХ замкнутой системы регулирования.

Действуя аналогичным образом, можно получить формулы для определения параметров всех типовых регуляторов при типовых передаточных функциях объекта.

Метод В.Я. Ротача

Метод В.Я Ротача рассмотрим на примере определения параметров настройки типовых П,- И,- ПИ,- и ПИД-регуляторов.

П-регулятор

Порядок расчета П-регулятора следующий.

1. В комплексной плоскости строится АФЧХ регулируемого объекта, и из начала координат проводится луч под углом β к отрицательной вещественной полуоси (рис. 3.4). Угол β определяется формулой

$$\beta = \arcsin \frac{1}{M}. \quad (3.9)$$

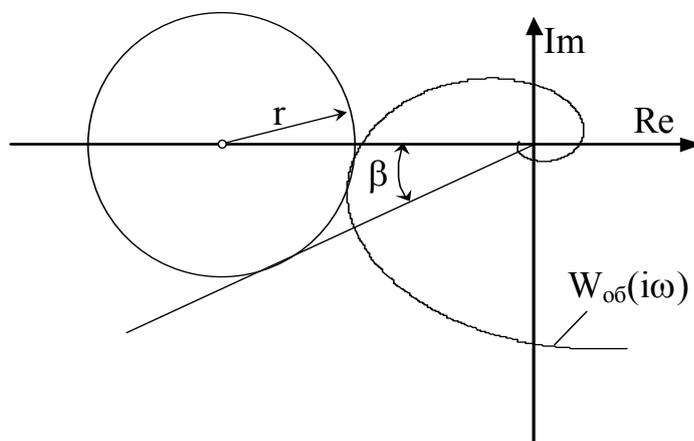


Рис.3.4. Определение настройки П-регулятора

2. Чертится окружность с центром на вещественной отрицательной полуоси, касающаяся одновременно АФЧХ объекта и этого луча. Определяется радиус этой окружности r . Искомый параметр настройки П-регулятора определится выражением

$$K_P = \frac{M}{M^2 - 1} \cdot \frac{1}{r}. \quad (3.10)$$

Расчет закончен.

И-регулятор

Для удобства производства графических построений АФЧХ И-регулятора целесообразно представить в следующем виде:

$$W_p(i\omega) = \frac{K_p}{T_n \cdot i\omega}.$$

Расчет производится в два этапа.

1. По АФЧХ регулируемого объекта строится АФЧХ разомкнутой системы для $K_p=1$ и некоторого значения постоянной времени T_n , величина которой может быть выбрана любая, удобная для построения характеристики

$$W_1(i\omega) = \frac{W_{об}(i\omega)}{i \cdot \omega \cdot T_n}.$$

Для построения указанной характеристики следует каждый вектор АФЧХ объекта повернуть на угол 90° по часовой стрелке и уменьшить его длину в $T_n \cdot \omega$ раз (рис. 3.5).

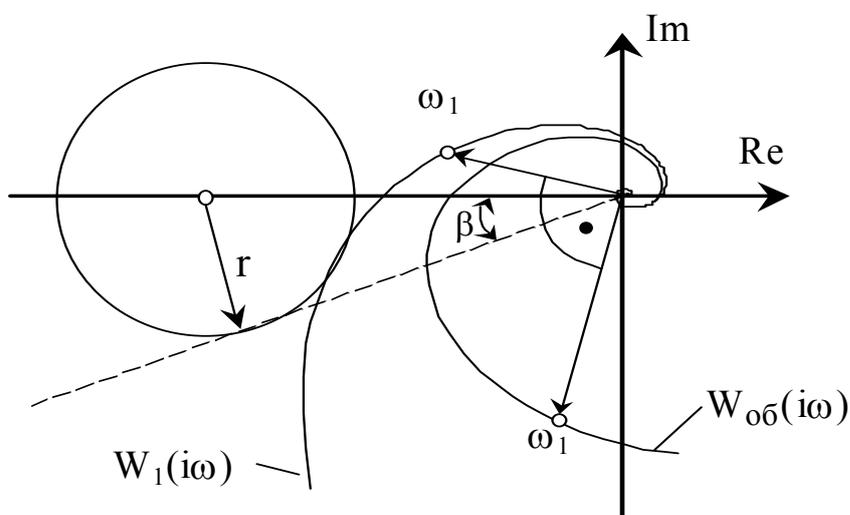


Рис. 3.5. Определение настройки И-регулятора

2. Проводится линия под углом β (рис. 3.5) к отрицательной вещественной полуоси и чертится окружность с центром, расположенным на этой оси, касающаяся одновременно построенной линии и АФЧХ $W_1(i\omega)$. Величина K_p определяется по формуле (3.10). Расчет закончен.

ПИ-регулятор

Расчет ПИ-регулятора проводится в три этапа.

1. В комплексной плоскости по АФЧХ объекта строятся АФЧХ разомкнутой системы для нескольких фиксированных значений времени изодрома $T_{и}$ и единичном коэффициенте передачи регулятора.

Построение указанных АФЧХ разомкнутой системы можно осуществить следующим образом.

АФЧХ разомкнутой системы $W(i\omega) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot T_{и}}\right) \cdot W_{об}(i\omega)$,

при $K_p=1$, имеет вид $W_1(i\omega) = W_{об}(i\omega) - i \cdot \frac{W_{об}(i\omega)}{\omega \cdot T_{и}}$.

Таким образом, для получения АФЧХ разомкнутой системы с ПИ-регулятором, при $K_p=1$ и некотором заданном $T_{и}$, следует к каждому вектору АФЧХ объекта добавить вектор длиной

$$\Delta A = \frac{A_{об}}{\omega \cdot T_{и}},$$

где $A_{об}$ – длина вектора АФЧХ объекта для данной частоты ω , повернутый на угол 90° по часовой стрелке (рис. 3.6).

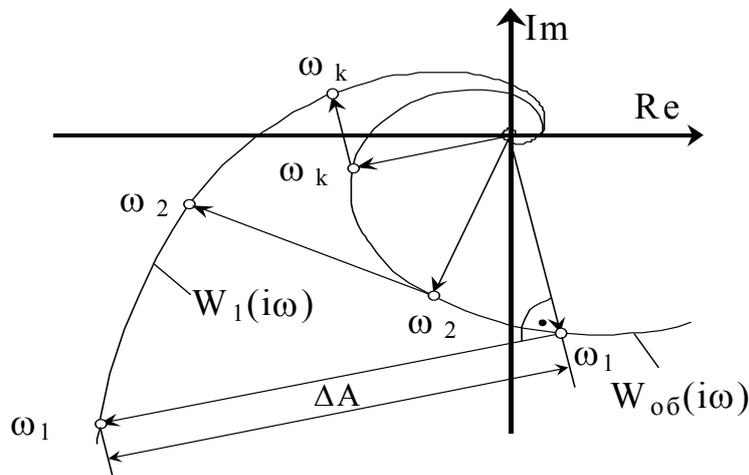


Рис. 3.6. Построение АФЧХ разомкнутой системы с ПИ-регулятором при $K_p=1$ для выбранного значения $T_{и}$

2. Проводится прямая из начала координат под углом β к вещественной отрицательной полуоси и строятся окружности с центром на этой оси, касающиеся амплитудно-фазовых характеристик и этой пря-

мой. Значение коэффициента передачи регулятора для каждого из выбранных значений времени издрома определяется по формуле (3.10) (в этом случае в формулу следует подставлять значение радиуса окружности, касающейся АФЧХ, для соответствующего времени издрома).

3. По результатам п. 2 в плоскости параметров настройки регулятора ($K_p / T_n, T_n$) строится граница заданного запаса устойчивости. Выбор параметров настройки осуществляют на этой границе с учетом минимума принятого критерия качества работы системы.

ПИД-регулятор

Настройка ПИД-регулятора определяется аналогично настройке ПИ-регулятора. Для этого строится семейство АФЧХ разомкнутой системы для $K_p = 1$ и для фиксированного оптимального значения отношения постоянной дифференцирования ко времени издрома $T_d / T_n = 0,5$. Порядок такого построения тот же, что и для ПИ-регулятора, но при других значениях ΔA :

$$\Delta A = \frac{A_{об}}{\omega \cdot T_n} - A_{об} \cdot \omega \cdot \frac{T_d}{T_n}.$$

В остальном расчет не отличается от расчета настройки ПИ-регулятора.

Задание для практической работы

Дано:

а) передаточная функция объекта регулирования

$$W_{об}(P) = \frac{K \cdot e^{-P \cdot \tau}}{T \cdot P + 1}$$

и его параметры;

б) тип регулятора;

в) критерий оптимальной настройки и требование к запасу устойчивости системы;

д) варианты задания соответствуют вариантам практического занятия № 9.

В отчете представить:

а) задание для практической работы и вариант задания;

б) порядок и результаты расчетов;

в) графические построения на миллиметровой бумаге, промежуточные вычисления в таблицах;

г) параметры настройки регулятора и резонансную частоту замкнутой системы;

д) сравнительную оценку найденных параметров регулятора с параметрами, определенными по корневому методу.

4. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ, С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ КАНАЛАМИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ, ИМПУЛЬСНЫЕ

4.1. АВТОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Практическое занятие № 11

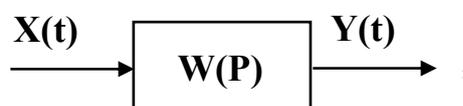
Предварительные сведения

Практическое занятие № 11 посвящено рассмотрению следующих вопросов:

- 1) преобразование случайных воздействий линейными динамическими системами;
- 2) синтез оптимальных линейных динамических систем;
- 3) определение дисперсии ошибки регулирования в одноконтурной системе, как показателя качества регулирования.

Преобразование случайных воздействий линейной динамической системой

Для системы вида



где $X(t)$ – стационарный случайный процесс с известными: математическим ожиданием m_x и корреляционной функцией $r_{xx}(\tau)$; требуется определить характеристики выходного случайного процесса $Y(t)$.

Математическое ожидание m_y случайного процесса $Y(t)$ определяется выражением

$$m_y = k \cdot m_x,$$

где $k = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\xi) \cdot d\xi$ – коэффициент передачи системы;

$\varpi(t)$ – весовая (импульсная) характеристика системы.

Корреляционная функция:

$$r_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\eta) \cdot r_{xx}(\tau + \xi - \eta) d\eta d\xi.$$

Часто корреляционную функцию удобнее определять по выражению

$$r_{yy}(\tau) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot \tau} d\omega,$$

где $G_{yy}(\omega)$ – спектр мощности случайного процесса $Y(t)$.

$$G_{yy}(\omega) = |W(i\omega)|^2 \cdot G_{xx}(\omega).$$

Здесь $|W(i\omega)|$ – модуль АФЧХ системы, т.е. ее АЧХ; $G_{xx}(\omega)$ – спектр мощности случайного процесса $X(t)$:

$$G_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot \tau} d\tau.$$

Дисперсия выходного случайного процесса

$$\sigma_y^2 = r_{yy}(0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(\omega) \cdot d\omega.$$

Пример

Линейная система описывается уравнением вида

$$a_1 \cdot Y'(t) + a_0 \cdot Y(t) = b_1 \cdot X'(t) + b_0 \cdot X(t).$$

Случайный процесс $X(t)$, действующий на входе системы, имеет корреляционную функцию

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|}.$$

Требуется найти дисперсию сигнала на выходе системы.

Решение

Определим спектр мощности входного сигнала. Так как $r_{xx}(\tau)$ является двусторонней и четной функцией, определенной для положи-

тельных и отрицательных значений τ , то ее спектр нужно определять по формуле

$$G_{xx}(P) = G_{xx}^+(P) + G_{xx}^+(-P),$$

где $G_{xx}^+(P)$ – изображение односторонней «правой» части функции $r_{xx}(\tau)$.

Согласно таблице преобразований Лапласа (см. приложение 4)

$$G_{xx}^+(P) = \frac{\sigma_x^2}{\alpha + P},$$

тогда

$$G_{xx}(P) = \frac{\sigma_x^2}{\alpha + P} + \frac{\sigma_x^2}{\alpha - P} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2}{(\alpha + P)(\alpha - P)}.$$

Подставляя $P = i\omega$, получаем

$$G_{xx}(\omega) = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Отметим, что спектры мощности для типовых корреляционных функций приведены в приложении 5.

По уравнению системы

$$(a_1 \cdot P + a_0) \cdot Y(P) = (b_1 \cdot P + b_0) \cdot X(P)$$

находим ее АФЧХ

$$W(i\omega) = \frac{b_1 \cdot i \cdot \omega + b_0}{a_1 \cdot i \cdot \omega + a_0},$$

тогда

$$|W(i\omega)|^2 = \frac{b_1^2 \cdot \omega^2 + b_0^2}{a_1^2 \cdot \omega^2 + a_0^2}.$$

Спектр мощности выходного сигнала $Y(t)$:

$$G_{yy}(\omega) = |W(i\omega)|^2 \cdot G_{xx}(\omega) = \frac{2 \cdot \sigma_x^2 \cdot \alpha \cdot (b_1^2 \cdot \omega^2 + b_0^2)}{(a_1^2 \cdot \omega^2 + a_0^2)(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Дисперсия сигнала на выходе:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(\omega) \cdot d\omega = \frac{2 \cdot \sigma_x^2 \cdot \alpha}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_1^2 \cdot \omega^2 + b_0^2}{(a_1^2 \cdot \omega^2 + a_0^2)(\alpha^2 + \omega^2)} d\omega.$$

Полученный интеграл можно вычислить путем разложения подынтегрального выражения на простейшие дроби, с привлечением приложения 6 (при $n=2$). Так,

$$I_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_0 \cdot (i\omega)^2 + \mathbf{B}_1}{|\mathbf{A}_0 \cdot (i\omega)^2 + \mathbf{A}_1 \cdot i\omega + \mathbf{A}_2|^2} d\omega = \frac{-\mathbf{B}_0 + \frac{\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mathbf{A}_2}}{2 \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2} =$$

$$= \frac{-\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{2 \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2}.$$

Поскольку $\mathbf{B}_0 = -b_1^2$; $\mathbf{B}_1 = b_0^2$; $\mathbf{A}_0 = a_1$; $\mathbf{A}_1 = a_1 \cdot \alpha + a_0$; $\mathbf{A}_2 = a_0 \cdot \alpha$, окончательно имеем

$$\sigma_y^2 = \frac{2 \cdot \sigma_x^2 \cdot \alpha \cdot (a_0 \cdot \alpha \cdot b_1^2 + a_1 \cdot b_0^2)}{2 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot \alpha \cdot (a_1 \cdot \alpha + a_0)} = \frac{\sigma_x^2 \cdot (a_1 \cdot b_0^2 + a_0 \cdot \alpha \cdot b_1^2)}{a_0 \cdot a_1 \cdot (a_1 \cdot \alpha + a_0)}.$$

Синтез оптимальных линейных динамических систем

Задачей настоящего раздела является синтез оптимального оператора регулятора $\mathbf{W}_p(\mathbf{P})$ в одноконтурной системе (рис.4.1), минимизирующего дисперсию ошибки регулирования.

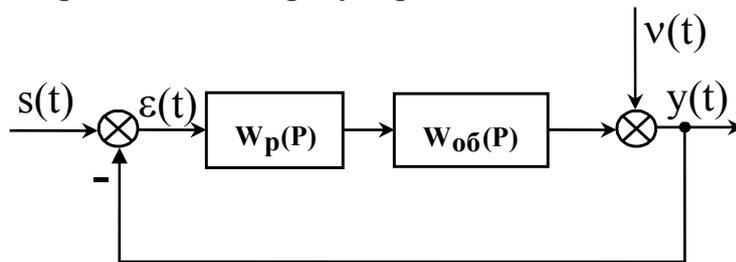


Рис. 4.1. Структурная схема синтезируемой АСР

Путем структурных преобразований структурная схема системы приводится к виду (рис. 4.2), где $\mathbf{W}_p(\mathbf{P})$ – передаточная функция регулятора; $\mathbf{W}_{об}(\mathbf{P})$ – передаточная функция объекта регулирования; $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{t})$ – ошибка регулирования; $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{s}(\mathbf{t}) - \mathbf{v}(\mathbf{t})$; $\mathbf{s}(\mathbf{t})$ – задающее воздействие; $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ – аддитивное возмущение; $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{P})$ – передаточная функция замкнутой системы по каналу $\mathbf{s}(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{t})$.

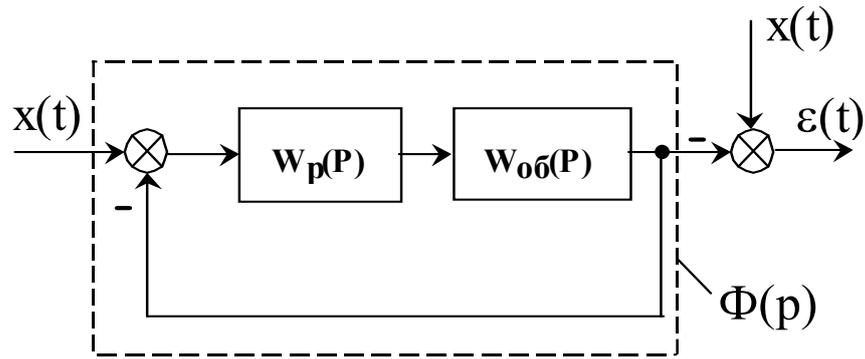


Рис. 4.2. Преобразованная структурная схема системы

Порядок синтеза оптимального оператора регулятора следующий:

- 1) по известным корреляционным функциям задающего воздействия $r_{ss}(\tau)$ и возмущения $r_{vv}(\tau)$ определяется корреляционная функция воздействия $x(t)$. Если $s(t)$ и $v(t)$ статистически независимы, то

$$r_{xx}(\tau) = r_{ss}(\tau) + r_{vv}(\tau),$$

после чего определяем соответствующий спектр мощности $G_{xx}(P)$;

- 2) находим выражение для сомножителя $G_{xx}^*(+P)$ в составе $G_{xx}(P)$, зависящего лишь от $+P$, после чего применением обратного преобразования находится соответствующее этому сомножителю $r_{mx}(t)$;
- 3) по формуле

$$\varpi_{1opt}(t) = r_{mx}(t) \text{ при } t \geq \tau_{об},$$

$$\varpi_{1opt}(t) = 0 \text{ при } t < \tau_{об},$$

определяем $\varpi_{1opt}(t)$ и соответствующий ей оператор $W_{1opt}(P)$;

- 4) по формуле

$$\Phi_{opt}(P) = \frac{W_{1opt}(P)}{G_{xx}^*(+P)}$$

находим искомый оператор оптимальной системы регулирования $\Phi_{opt}(P)$.

После определения оптимального оператора $\Phi_{opt}(P)$ находим и оператор оптимального регулятора:

$$W_{p.opt}(P) = \frac{\Phi_{opt}^0(P)}{1 - \Phi_{opt}^0(P) \cdot e^{-P \cdot \tau_{об}}} \cdot \frac{1}{W_{об}^0(P)},$$

где $\Phi_{\text{опт}}^0(\mathbf{P})$ – оператор оптимальной системы без учета запаздывания;
 $\mathbf{W}_{\text{об}}^0(\mathbf{P})$ – оператор объекта регулирования без учета запаздывания $\tau_{\text{об}}$.

Дисперсия ошибки регулирования при применении оптимального регулятора будет определяться формулой

$$\sigma_{\varepsilon \text{ min}}^2 = \int_0^{\tau_{\text{об}}} r_{\text{mx}}^2(t) dt.$$

Пример

Требуется найти оптимальный алгоритм функционирования регулятора и определить предельную динамическую точность системы регулирования, которая должна поддерживать заданное значение регулируемой величины ($\mathbf{s}(t) = \mathbf{0}$), если корреляционная функция приведенного к выходу объекта возмущения $\mathbf{v}(t)$ (рис. 4.1) определяется формулой

$$r_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\tau) = r_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|},$$

а оператор объекта по регулируемому каналу

$$\mathbf{W}_{\text{об}}(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{K}_{\text{об}}}{\mathbf{T}_{\text{об}} \cdot \mathbf{P} + 1} \cdot e^{-\mathbf{P} \cdot \tau_{\text{об}}}.$$

В предыдущем разделе было найдено выражение для спектра мощности, соответствующего корреляционной функции $r_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)$:

$$\mathbf{G}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{P}) = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2}{(\alpha + \mathbf{P})(\alpha - \mathbf{P})}.$$

Таким образом, сомножитель в этом выражении, зависящий лишь от $+\mathbf{P}$, определяется формулой

$$\mathbf{G}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^*(+\mathbf{P}) = \frac{\sqrt{2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2}}{\alpha + \mathbf{P}},$$

а соответствующий ему оригинал

$$r_{\text{mx}}(t) = \sqrt{2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2} \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

График этой функции приведен на рис. 4.3.

Следовательно, весовая характеристика $\varpi_{\text{1опт}}(t)$:

$$\varpi_{\text{1опт}}(t) = \mathbf{0} \text{ при } t < \tau_{\text{об}} \text{ и } \varpi_{\text{1опт}}(t) = \sqrt{2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \text{ при } t \geq \tau_{\text{об}}$$

(ее график приведен на рис. 4.3 пунктиром), а оператор

$$W_{1\text{опт}}(P) = \sqrt{2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x} \cdot \frac{e^{-\alpha \cdot \tau_{\text{об}}} \cdot e^{-\tau_{\text{об}} \cdot P}}{\alpha + P}.$$

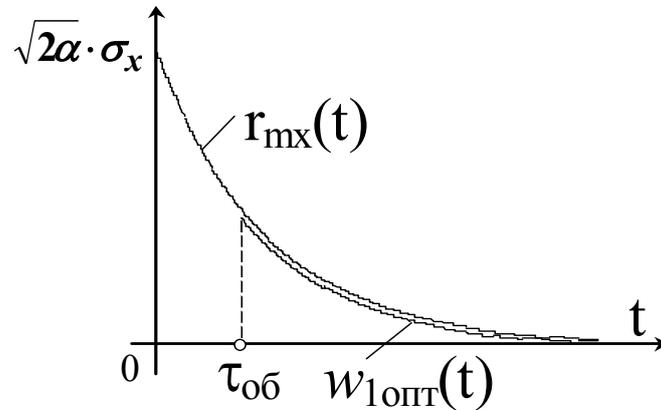


Рис. 4.3. Определение оптимальной весовой характеристики системы

Оператор оптимальной системы определим по формуле

$$\Phi_{\text{опт}}(P) = \frac{W_{1\text{опт}}(P)}{G_{\text{xx}}^*(+P)} = e^{-\alpha \cdot \tau_{\text{об}}} \cdot e^{-\tau_{\text{об}} \cdot P},$$

а оператор оптимального регулятора

$$W_{\text{р.опт}}(P) = \frac{e^{-\alpha \cdot \tau_{\text{об}}}}{1 - e^{-\alpha \cdot \tau_{\text{об}}} \cdot e^{-\tau_{\text{об}} \cdot P}} \cdot \frac{1}{K_{\text{об}}} \cdot (\tau_{\text{об}} \cdot P + 1).$$

Дисперсия ошибки регулирования в оптимальной системе:

$$\sigma_{\varepsilon, \text{min}}^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2 \cdot \int_0^{\tau_{\text{об}}} e^{-2 \cdot \alpha \cdot \tau} d\tau = \sigma_x^2 \cdot (1 - e^{-2 \cdot \alpha \cdot \tau_{\text{об}}}).$$

Определение дисперсии ошибки регулирования в одноконтурной системе, как показателя качества регулирования

Дисперсия ошибки регулирования в системе (рис. 4.1) определяется на основе формул, приведенных в разделе «Преобразование случайных воздействий линейными динамическими системами». Эти формулы приобретают для рассматриваемого случая вид

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) d\omega, \quad G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |W_{s\varepsilon}(i\omega)|^2 \cdot G_{\text{xx}}(\omega);$$

$$W_{s\varepsilon}(i\omega) = \frac{1}{1 + W_p(i\omega) \cdot W_{об}(i\omega)},$$

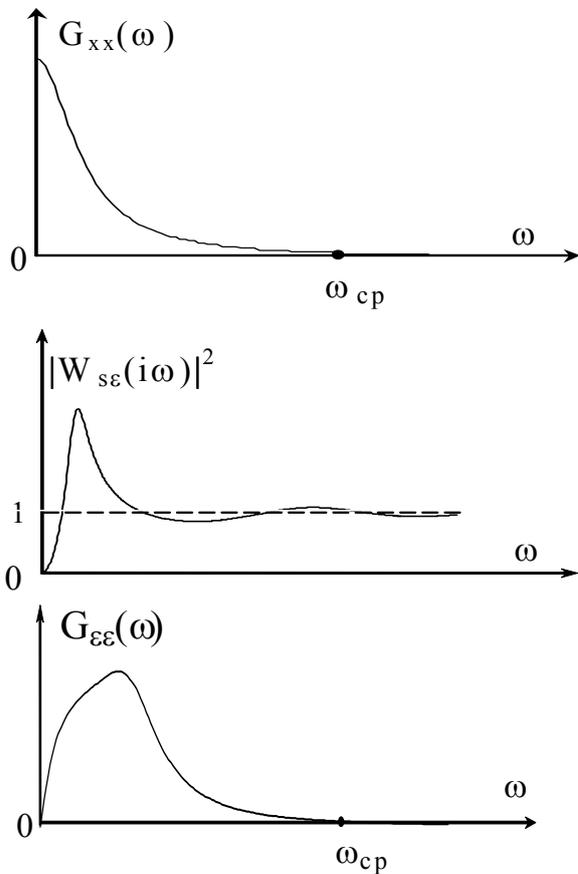


Рис. 4.4. Определение спектра мощности ошибки регулирования

и регулятора определяется квадрат АЧХ замкнутой системы по каналу $s(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, т.е. $|W_{s\varepsilon}(i\omega)|^2$. Строится график квадрата АЧХ системы (рис. 4.4).

3. Перемножением ординат графиков $G_{xx}(\omega)$ и $|W_{s\varepsilon}(i\omega)|^2$ определяется $G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)$. Строится график $G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)$ (рис. 4.4).

4. Интегрирование в формуле для дисперсии ошибки регулирования выполняют численным методом. Например, методом Симпсона.

Метод Симпсона дает приближенное значение определенного интеграла непрерывной функции (пусть $y = f(x)$) на интервале $[a, b]$, заданной в виде таблицы значений y_0, y_1, \dots, y_n с постоянным шагом, где n – четное число, $y_0 = f(a)$ и $y_n = f(b)$. Вычисление ведется по формуле Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{3 \cdot n} (y_0 + 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \dots + 4 \cdot y_{n-1} + y_n) \cdot$$

где σ_ε^2 – дисперсия ошибки регулирования; $G_{xx}(\omega)$ – спектр мощности эквивалентной помехи (возмущения); $W_p(i\omega)$ – АФЧХ регулятора; $W_{об}(i\omega)$ – АФЧХ объекта регулирования; $W_{s\varepsilon}(i\omega)$ – АФЧХ замкнутой системы по каналу $s(t) \rightarrow \varepsilon(t)$.

Вычисление интеграла в формуле для дисперсии ошибки регулирования может встретить значительные трудности. Поэтому задачу определения дисперсии ошибки регулирования удобнее решать графоаналитически. Порядок выполняемых действий при этом следующий.

1. По заданной корреляционной функции эквивалентной помехи определяется ее спектр мощности и строится график $G_{xx}(\omega)$ (рис. 4.4).

2. По заданным передаточным функциям объекта регулирования

Вычисление интеграла удобно вести с помощью небольшой программы для ЭВМ (БЕЙСИК):

```
SUM=(Y(0)-Y(N))/2
FOR I=2 STEP 2 TO N
SUM=SUM +2*Y(I-1)+Y(I)
NEXT I
INTEGR=2*(B-A)*SUM/(3*N)
```

5. Полученное значение интеграла умножается на коэффициент $1/\pi$. Дисперсия ошибки регулирования найдена.

Задание для практической работы

В задании предусматривается три типа задач:

A – преобразование случайных воздействий линейными динамическими системами;

B – синтез оптимальных линейных динамических систем;

C – определение дисперсии ошибки регулирования в одноконтурной системе.

Для задачи типа **A** дано:

1) передаточная функция системы

$$W(P) = \frac{k}{(T_1 \cdot P + 1)(T_2 \cdot P + 1)}$$

и ее параметры;

- 2) тип корреляционной функции входного сигнала (приложение 5, по порядку ее расположения в таблице);
- 3) параметры корреляционной функции.

Для задачи типа **B** дано:

- 1) передаточная функция объекта регулирования (вариант практического занятия № 9);
- 2) тип корреляционной функции эквивалентного возмущения (приложение 5, по порядку ее расположения в таблице);
- 3) параметры корреляционной функции.

Для задачи типа **C** дано:

- 1) передаточные функции объекта и регулятора (вариант и результаты практического занятия № 9);
- 2) тип корреляционной функции эквивалентного возмущения (приложение 5, по порядку ее расположения в таблице);
- 3) параметры корреляционной функции.

Требуется:

решить поставленные задачи согласно заданному варианту. В задаче типа **A** – определить дисперсию выходного сигнала системы; в задаче типа **B** – осуществить синтез оптимального регулятора, минимизирующего дисперсию ошибки регулирования; в задаче типа **C** – определить дисперсию ошибки регулирования.

Варианты задания

Номер варианта	Тип задачи	Тип корреляционной функции	Параметры корреляционной функции			Параметры системы к задаче типа A		
			σ_x^2	α	β	K	T ₁	T ₂
1	A, B	2	1	0,01	–	1	19	–
2	A, C	3	4	0,02	0,1	2	20	30
3	A, B	6	9	0,03	0,2	3	30	–
4	A, C	2	16	0,04	–	4	40	50
5	A, B	3	100	0,05	0,3	0,5	50	–
6	A, C	6	25	0,06	0,4	1,5	60	80
7	A, B	6	36	0,07	0,5	1	70	–
8	A, C	2	49	0,08	–	2	80	100
9	A, B	3	64	0,01	0,1	3	90	–
10	A, C	3	121	0,02	0,2	4	100	150
11	A, B	6	81	0,03	0,3	10	150	–
12	A, C	2	144	0,04	–	15	200	300
13	A, B	2	100	0,05	–	5	250	–
14	A, C	2	169	0,06	–	4	300	100
15	A, B	3	9	0,07	0,4	3	350	–
16	A, C	3	16	0,08	0,5	2	400	100
17	A, B	6	25	0,01	0,1	1	20	–
18	A, C	6	36	0,02	0,2	2	50	100
19	A, B	3	49	0,03	0,1	2	60	–
20	A, C	3	81	0,04	0,3	5	80	100

В отчете представить:

- 1) задание на работу и вариант задания;
- 2) порядок и результаты расчетов;
- 3) графические построения на миллиметровой бумаге, промежуточные вычисления в таблицах;
- 4) по задаче типа **B** вывод о низкочастотности или высокочастотности возмущающего воздействия.

4.2. СИСТЕМЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ КАНАЛАМИ. СИСТЕМЫ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЙ

Практическое занятие № 12

Предварительные сведения

Структурная схема системы с компенсацией возмущений имеет вид (рис. 4.5).

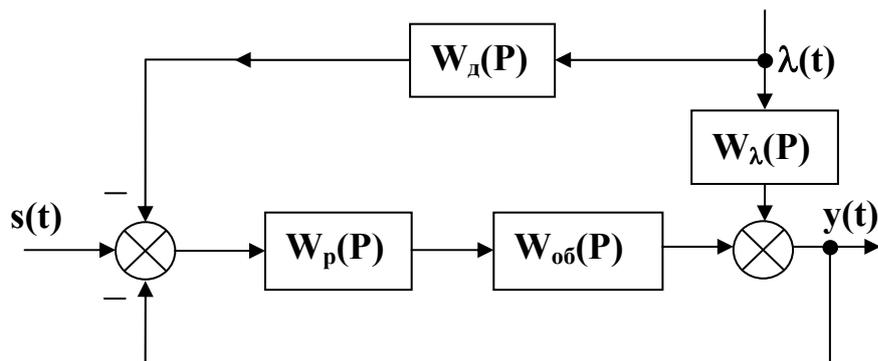


Рис. 4.5. Структурная схема системы с компенсацией возмущений

Смысл обозначений на структурной схеме следующий:

$W_p(P)$ – передаточная функция регулятора;

$W_{об}(P)$ – передаточная функция объекта по каналу регулирующего воздействия;

$s(t)$ – задающее воздействие;

$y(t)$ – регулируемая величина;

$\lambda(t)$ – возмущающее воздействие, добавочная информация о котором подается на вход регулятора;

$W_d(P)$ – передаточная функция устройства компенсации;

$W_\lambda(P)$ – передаточная функция объекта по каналу возмущающего воздействия $\lambda - y$.

Порядок расчета систем с компенсацией возмущений следующий:

1. Обычным образом осуществляют расчет параметров настройки (или синтез) регулятора в системе без учета компенсирующего устройства и возмущения λ .
2. Определяют передаточную функцию и параметры идеального компенсирующего устройства:

$$W_d^{ид}(P) = \frac{W_\lambda(P)}{W_p(P) \cdot W_{об}(P)}.$$

3. Если полученное идеальное устройство компенсации физически реализуемо и может быть использовано в системе регулирования, то на этом расчет устройства компенсации заканчивается. В противном случае выполняется п. 4.
4. Практически оптимальную частотную характеристику компенсирующего устройства обычно требуется выбрать в виде дробно-рациональной функции относительно невысокого порядка. В рамках практического занятия компенсирующее устройство представляется реальным дифференцирующим звеном. При этом ставится задача выбора параметров компенсирующего устройства из условия максимального сближения частотных характеристик идеального компенсирующего устройства $W_d^{ид}(i\omega)$ и дифференциатора $W_d(i\omega)$ в диапазоне частот $0 - \omega_{max}$, соответствующим частотному спектру возмущения λ (рис. 4.6).

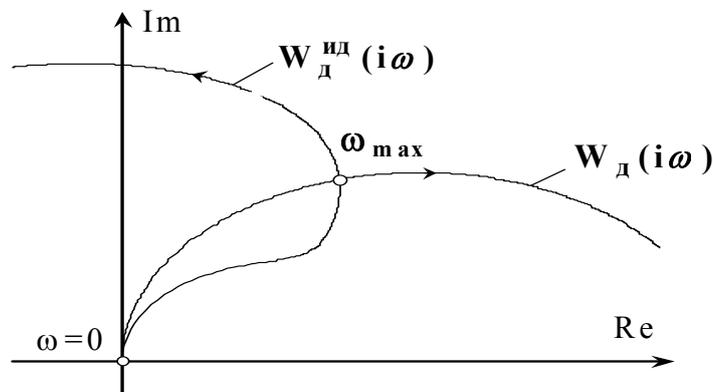


Рис. 4.6. АФЧХ компенсирующих устройств

Наиболее просто расчет настройки компенсирующего устройства, выполненного в виде реального дифференцирующего звена, осуществляется при условии

$$W_d(i\omega_{max}) = W_d^{ид}(i\omega_{max}).$$

Расчет настроек дифференциатора для частоты $\omega_j = \omega_{max}$ производится по формулам:

$$K_d = \frac{A_d^{ид}(\omega_j)}{\cos \varphi_d^{ид}(\omega_j)}; \quad T_d = \frac{1}{\omega_j} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_d^{ид}(\omega_j),$$

где $A_d^{ид}(\omega_j)$ и $\varphi_d^{ид}(\omega_j)$ – соответственно, модуль и фаза вектора $W_d^{ид}(i\omega_j)$.

Вышеприведенные формулы справедливы при $\varphi_d^{ид}(\omega_j) < \frac{\pi}{2}$, то есть в случае, когда АФЧХ дифференциатора полностью компенсирует АФЧХ $W_d^{ид}(i\omega)$ на заданной частоте ω_j .

Если $\varphi_{д}^{ид}(\omega_j) \geq \frac{\pi}{2}$ (случай частичной компенсации вектором $W_{д}(i\omega)$ вектора $W_{д}^{ид}(i\omega)$) или вычисленное значение $K_{д}$ больше предельно возможного $K_{д,пр}$, то принимают $K_{д} = K_{д,пр}$, а $T_{д}$ определяется по формуле:

$$T_{д} = \frac{1}{\omega_j} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_{д}(\omega_j),$$

где

$$\varphi_{д}(\omega_j) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arccctg} \left[\operatorname{ctg} \varphi_{д}^{ид}(\omega_j) - \frac{K_{д,пр}}{2 \cdot A_{д}^{ид}(\omega_j) \cdot \sin \varphi_{д}^{ид}(\omega_j)} \right].$$

Пример

Дано:

- 1) одноконтурная система автоматического регулирования с объектом с передаточной функцией по каналу регулирующего воздействия

$$W_{об}(P) = \frac{K}{T \cdot P + 1} \cdot e^{-P \cdot \tau}$$

и ПИ-регулятором

$$W_p(P) = K_p \cdot \frac{T_n \cdot P + 1}{T_n \cdot P},$$

где $K = 1$; $T = 10$ с.; $\tau = 3$ с; $K_p = 2,2$; $T_n = 5$ с; $\omega_{рез} = 0,3$ с⁻¹;

- 2) передаточная функция объекта по каналу возмущения λ -у:

$$W_{\lambda}(P) = \frac{K_{\lambda}}{T_{\lambda} \cdot P + 1},$$

где $K_{\lambda} = 1$; $T_{\lambda} = 50$ с;

- 3) частотный диапазон помехи $0 \div 0,5 \omega_{рез}$.

Требуется определить параметры настройки компенсирующего устройства, выполненного в виде реального дифференцирующего звена.

Решение

1. Определяем передаточную функцию идеального устройства компенсации:

$$W_{д}^{ид}(P) = \frac{W_{\lambda}(P)}{W_p(P) \cdot W_{об}(P)} = \frac{\frac{K_{\lambda}}{T_{\lambda} \cdot P + 1}}{K_p \cdot \frac{T_n \cdot P + 1}{T_n \cdot P} \cdot \frac{K \cdot e^{-P \cdot \tau}}{T \cdot P + 1}} =$$

$$= \frac{K_{\lambda} \cdot T_n \cdot P \cdot (T \cdot P + 1) \cdot e^{P \cdot \tau}}{K \cdot K_p \cdot (T_n \cdot P + 1)(T_{\lambda} \cdot P + 1)}$$

2. Находим АЧХ и ФЧХ идеального устройства компенсации:

$$A_{\text{д}}^{\text{ид}}(\omega) = \frac{K_{\lambda} \cdot T_n}{K \cdot K_p} \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{T^2 \cdot \omega^2 + 1}{(T_n^2 \cdot \omega^2 + 1)(T_{\lambda}^2 \cdot \omega^2 + 1)}};$$

$$\varphi_{\text{д}}^{\text{ид}}(\omega) = \frac{\pi}{2} + \text{arctg}(T \cdot \omega) + \omega \cdot \tau - \text{arctg}(T_n \cdot \omega) - \text{arctg}(T_{\lambda} \cdot \omega).$$

На частоте $\omega_2 = 0,5 \cdot \omega_{\text{рез}} = 0,15 \text{ с}^{-1}$

$$A_{\text{д}}^{\text{ид}}(\omega_2) = 0,065; \quad \varphi_{\text{д}}^{\text{ид}}(\omega_2) = 0,927 \text{ рад.} = 53,1^{\circ} < \frac{\pi}{2}.$$

3. Определяем параметры настройки дифференциатора:

$$K_{\text{д}} = \frac{A_{\text{д}}^{\text{ид}}(\omega_2)}{\cos \varphi_{\text{д}}^{\text{ид}}(\omega_2)} = \frac{0,065}{\cos 0,927} = \frac{0,065}{0,6} = 0,108;$$

$$T_{\text{д}} = \frac{1}{\omega_2} \cdot \text{ctg} \varphi_{\text{д}}^{\text{ид}}(\omega_2) = \frac{1}{0,15} \cdot \text{ctg} 0,927 = 5 \text{ с.}$$

Графики АФЧХ идеального и реального компенсирующих устройств представлены на рис. 4.7. На частоте $\omega = \omega_2$ они совпадают. Расчет закончен.

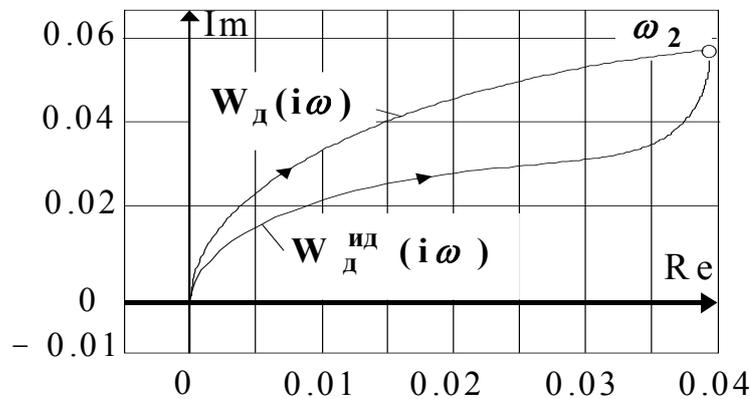


Рис.4.7. АФЧХ компенсирующих устройств

Задание для практической работы

Дано:

1) одноконтурная система автоматического регулирования с передаточной функцией объекта по каналу регулирующего воздействия

$$W_{об}(P) = \frac{K_1 \cdot e^{-P \cdot \tau}}{(T_1 \cdot P + 1)(T_2 \cdot P + 1)} \text{ и ПИ-регулятором } W_p(P) = K_p \cdot \frac{T_n \cdot P + 1}{T_n \cdot P}$$

с параметрами настройки K_p, T_n ;

2) передаточная функция объекта по каналу возмущения $\lambda - y$:

$$W_{\lambda}(P) = \frac{K_2}{(T_3 \cdot P + 1)(T_4 \cdot P + 1)};$$

3) частотный диапазон возмущения.

Требуется:

определить параметры настройки компенсирующего устройства, выполненного в виде реального дифференцирующего звена.

В отчете представить:

- 1) задание на работу и вариант задания;
- 2) структурную схему системы с компенсацией возмущений;
- 3) алгоритм решения поставленной задачи;
- 4) расчет параметров настройки компенсирующего устройства;
- 5) графики АФЧХ идеального компенсирующего устройства и дифференциатора в рассматриваемом диапазоне частот. Графики выполнить на миллиметровой бумаге.

Варианты задания

Но- мер вари- анта	Параметры объекта по ка- налу регулирующего воз- действия			Параметры настройки регулятора		Параметры объекта по каналу $\lambda-y$		Частот- ный диапа- зон $0-\omega_j$
	T_1, c	T_2, c	τ, c	K_p	T_n, c	T_3, c	T_4, c	ω_j, c^{-1}
1	10	20	5	1,3	17	30	70	0,03
2	10	10	4	1,2	13	30	80	0,05
3	10	30	4	2,2	24	50	90	0,03
4	20	20	5	1,6	58	50	50	0,03
5	20	40	7	1,9	40	100	100	0,02
6	20	0	5	2,7	9	100	0	0,09
7	30	0	5	4,2	11	200	0	0,09
8	40	0	5	5,1	11	150	0	0,08
9	50	0	10	3,4	20	150	0	0,05
10	60	0	10	4,2	22	200	0	0,05
11	70	0	10	4,4	21	200	0	0,04
12	70	30	8	2,3	64	300	0	0,02
13	80	40	10	2,2	80	300	0	0,01
14	90	50	15	1,7	85	400	0	0,01
15	50	50	10	1,6	62	200	50	0,01
16	60	60	10	1,9	83	300	50	0,01
17	70	60	10	1,9	85	350	50	0,01
18	80	80	20	1,5	100	500	100	0,01
19	90	50	20	1,4	83	500	200	0,01
20	100	50	20	1,6	92	500	200	0,01

Для всех вариантов $K_1=K_2=1$

4.3. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Практическое занятие № 13

Предварительные сведения

Метод гармонического баланса позволяет для нелинейных систем (рис. 4.8) оценить возможность и устойчивость автоколебаний регулируемой величины, определить амплитуду и частоту автоколебаний.

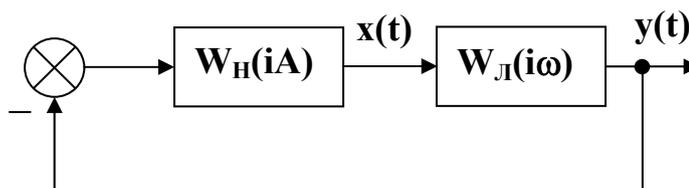


Рис. 4.8. Структурная схема нелинейной системы

Уравнение гармонического баланса имеет вид

$$W_L(i\omega) = -\frac{1}{W_H(iA)},$$

где $W_L(i\omega)$ – АФЧХ линейной части системы;

$W_H(iA)$ – эквивалентная передаточная функция нелинейного элемента.

Решение уравнения гармонического баланса осуществляют либо аналитически, либо графически. Во многих случаях более удобен графический способ. Способ заключается в следующем (рис. 4.9).

1. В комплексной плоскости строится годограф АФЧХ линейной части системы $W_L(i\omega)$.

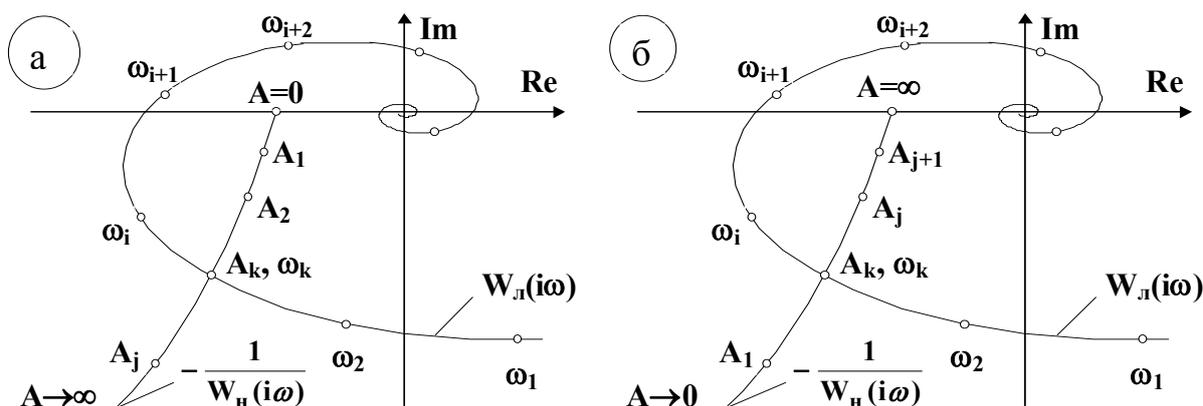


Рис. 4.9. Случаи взаимного расположения АФЧХ линейной части системы и характеристики нелинейного элемента:

а – в замкнутой системе возможны автоколебания с параметрами ω_K, A_K ;

б – в замкнутой системе автоколебания с параметрами ω_K, A_K невозможны

2. В той же плоскости строится годограф $\frac{-1}{W_H(iA)}$.
3. Точка (точки) пересечения графиков $W_L(i\omega)$ и $\frac{-1}{W_H(iA)}$ дает параметры автоколебаний: амплитуду A_K , определяемую по $\frac{-1}{W_H(iA)}$, и частоту ω_K , определяемую по $W_L(i\omega)$ (рис. 4.9). Если указанные годографы не пересекаются, то возникновение автоколебаний за счет первой гармонической составляющей выходного сигнала нелинейного элемента невозможно.
4. Проверяется выполнение гипотезы фильтра

$$\frac{|W_L(i \cdot 2 \cdot \omega_K)|}{|W_L(i \cdot \omega_K)|} \leq 0.1.$$

При выполнении этого неравенства гипотеза принимается.

5. Исследуются автоколебания на устойчивость по следующему правилу. Если ветвь годографа $\frac{-1}{W_H(iA)}$ от точки пересечения в сторону возрастания амплитуд входного сигнала A лежит вне области, охватываемой АФЧХ линейной части, то колебания в системе будут устойчивы (рис. 4.9, а), в противном случае (рис. 4.9, б) в замкнутой системе автоколебания с параметрами ω_K, A_K невозможны.
6. Определяется постоянная составляющая выходных колебаний

$$y_0 = W_L(0) \cdot x_0 \text{ при } |W_L(0)| \neq \infty,$$

где x_0 – среднее за период значение выходной величины нелинейного элемента. Для нечетно-симметричных нелинейностей $x_0 = 0$.

Пример

Дано: три последовательно соединенных аperiodических звена замкнуты отрицательной обратной связью при помощи реле (рис. 4.10)

$$\left(T \frac{d}{dt} + 1\right)^3 \cdot y = \begin{cases} -C & \text{при } y > 0, \\ +C & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

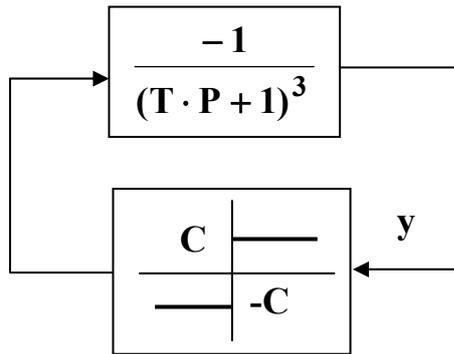


Рис. 4.10. Нелинейная система

Требуется оценить возможность и устойчивость автоколебаний в системе, определить параметры автоколебаний.

Решение

1. Постоянная составляющая автоколебаний $y_0 = 0$, поскольку характеристика нелинейного элемента нечетно-симметричная.
2. В $W_H(iA) = q_0 + i \cdot q_1$ (приложение 7) $q_1 = 0$, т.к. характеристика нелинейного элемента нечетная и однозначная. Тогда

$$\frac{-1}{W_H(iA)} = -\frac{\pi \cdot A}{4 \cdot C}.$$

Следовательно, годограф $\frac{-1}{W_H(iA)}$ будет совпадать с отрицательной вещественной полуосью (рис. 4.11).

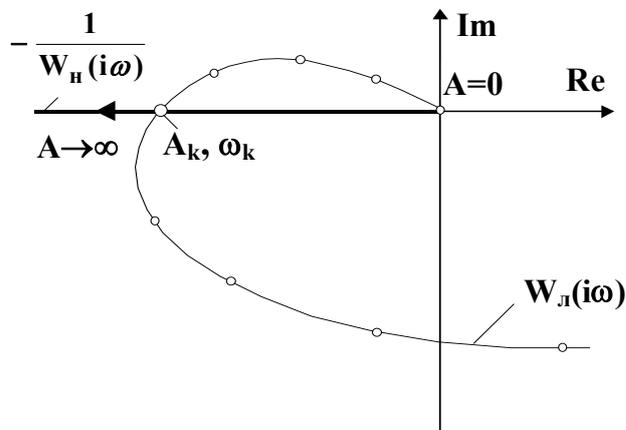


Рис. 4.11. Графическое решение уравнения гармонического баланса. Определение амплитуды и частоты автоколебаний

3. В данном случае, вообще говоря, не обязательно строить годограф $W_{\text{л}}(i\omega)$, так как достаточно знать точку пересечения $W_{\text{л}}(i\omega)$ с отрицательной вещественной полуосью:

$$\arg W_{\text{л}}(i\omega) = -3 \cdot \arctg(T \cdot \omega_{\text{К}}) = -\pi,$$

откуда определим значение частоты автоколебаний:

$$\omega_{\text{К}} = \frac{1}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{T}.$$

При данной частоте

$$|W_{\text{л}}(i\omega_{\text{К}})| = \frac{1}{(\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega_{\text{К}}^2})^3} = \frac{1}{8}.$$

Из условия

$$|W_{\text{л}}(i\omega_{\text{К}})| = \left| -\frac{1}{W_{\text{н}}(iA_{\text{К}})} \right|$$

определим амплитуду колебаний

$$\frac{1}{8} = \frac{\pi \cdot A_{\text{К}}}{4 \cdot C}, \quad A_{\text{К}} = \frac{C}{2 \cdot \pi}.$$

4. Проверяем гипотезу фильтра. Находим отношение

$$\frac{|W_{\text{л}}(i \cdot 2 \cdot \omega_{\text{К}})|}{|W_{\text{л}}(i \cdot \omega_{\text{К}})|} = 8 \cdot |W_{\text{л}}(i \cdot 2 \cdot \omega_{\text{К}})| = 0.171.$$

Гипотеза фильтра удовлетворена частично, т.к. вторая гармоническая составляющая колебаний примерно в шесть раз меньше по амплитуде первой гармонической составляющей.

5. Проверяем автоколебания на устойчивость. От точки пересечения в сторону возрастания амплитуд A ветвь $-\frac{1}{W_{\text{н}}(iA)}$ лежит вне области, охватываемой АФЧХ линейной части (рис. 4.11). Следовательно, автоколебания будут устойчивы.

Задание для практической работы

Дано:

- 1) передаточная функция линейной части нелинейной системы $W_{\text{л}}(i\omega)$ и ее параметры;
- 2) тип нелинейного элемента (см. приложение 7) и его параметры.

Требуется:

оценить возможность и устойчивость автоколебаний в системе, определить параметры автоколебаний.

В отчете представить:

- 1) задание на работу и вариант задания, структурную схему исследуемой нелинейной системы;
- 2) порядок и результаты расчетов (постоянная составляющая, амплитуда и частота автоколебаний, анализ устойчивости автоколебаний);
- 3) графические построения на миллиметровой бумаге, промежуточные вычисления в таблицах.

Варианты задания

Но- мер вари- анта	Передаточная функция линейной части системы	Параметры линейной части системы			Тип нели- ней- ного эле- мента	Параметры нелинейного элемента		
		K	T₁	T₂		Прил.7	b	C
1	$W_{\text{л}}(P) = \frac{K}{P \cdot (T_1 P + 1)(T_2 P + 1)}$	0,28	0,05	0,05	NEL 1	0,25	110	---
2		2	0,05	0,02		0,25	110	---
3		4	0,01	0,08		0,25	110	---
4		5	0,1	0,01		0,5	110	---
5		2	0,05	0,05		0,1	40	---
6		2	0,05	0,02		0,25	11	---
7	$W_{\text{л}}(P) = \frac{K \cdot e^{-P \cdot T_2}}{T_1 P + 1}$	1	10	3	NEL4	0,5	1	0,5
8		2	20	8		1	1	0,6
9		3	40	15		3	2	0,7
10		4	50	20		3	2	0,6
11		2	70	25		1	1	0,7
12		1	90	30		0,5	1	0,8
13	$W_{\text{л}}(P) = \frac{K}{P \cdot (T_1^2 P^2 + T_2 P + 1)}$	20	0,02	0,06	NEL2	---	5	---
14		25	0,03	0,02		---	4	---
15		30	0,01	0,01		---	3	---
16		40	0,02	0,01		---	3	---
17		50	0,04	0,02		---	5	---
18		35	0,05	0,03		---	6	---
19		45	0,10	0,05		---	5	---
20		30	0,20	0,10		---	5	---

4.4. ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

Практическое занятие № 14

Предварительные сведения

Математическое описание импульсных систем

Структурная схема импульсной системы может быть приведена к виду (рис. 4.12), где $s(t)$ – задающее воздействие; $\varepsilon(t)$ – ошибка регулирования;

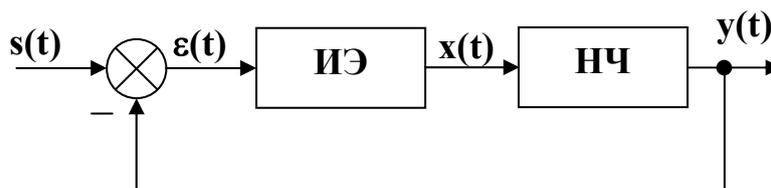


Рис. 4.12. Структурная схема импульсной системы

$y(t)$ – регулируемая величина; ИЭ – импульсный элемент; НЧ – непрерывная часть.

Любой импульсный элемент можно представить в виде последовательного соединения дельта-импульсного модулятора и формирующего фильтра. Относя формирующий фильтр (ФФ) к непрерывной части, получают приведенную непрерывную часть (ПНЧ). В итоге простейшая схема линейной импульсной системы имеет следующий вид (рис. 4.13).

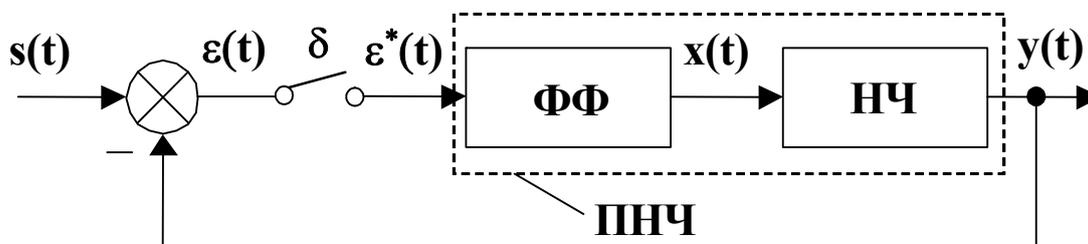


Рис. 4.13. Структурная схема линейной импульсной системы

Наиболее широко используются формирующие фильтры в виде фиксаторов нулевого и первого порядков, имеющих передаточные функции вида

$$W_{\Phi}(P) = \frac{\kappa_{\Phi} \cdot (1 - e^{-T \cdot P})}{P} \quad \text{– для фиксатора нулевого порядка;}$$

$$W_{\Phi}(P) = \frac{\kappa_{\Phi} \cdot (1 - e^{-T \cdot P})^2}{P^2} \quad \text{– для фиксатора первого порядка,}$$

где T – период квантования дельта-импульсного модулятора (период повторения импульсов).

Выходной сигнал разомкнутой импульсной системы может быть определен через весовую характеристику $\varpi(t)$ приведенной непрерывной части:

$$y(t) = y_n(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon[mT] \cdot \varpi[t - mT].$$

Для произвольного дискретного времени $t = kT$:

$$y[kT] = y_n[kT] + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon[mT] \cdot \varpi[(k - m)T],$$

где $y_n(t)$ – реакция приведенной непрерывной части на ненулевые начальные условия.

Если передаточная функция приведенной непрерывной части:

$$\Phi(P) = \frac{B(P)}{A(P)} = \frac{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_1 P + b_0}{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0}, \quad n > m,$$

то $y_n(t)$ – решение однородного дифференциального уравнения

$$A(P) \cdot y_n(t) = 0; \quad y_n(0) = y_0; \quad y_n'(0) = y_{0,1}; \quad \dots; \quad y_n^{(n-1)}(0) = y_{0,n-1}.$$

При нулевых начальных условиях $y_n(t) = 0$.

В основе современных методов анализа и синтеза импульсных систем лежит z -преобразование. Формула прямого z -преобразования решетчатой функции $y[kT]$ имеет вид

$$Y^*(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[kT] \cdot z^{-k}.$$

Z -преобразование некоторых типовых функций приведено в приложении 4.

Z -преобразование весовой характеристики системы дает дискретную передаточную функцию этой системы:

$$Z\{\varpi(t)\} = W^*(z) = \frac{b_m \cdot z^{-m} + b_{m-1} \cdot z^{-(m-1)} + \dots + b_1 \cdot z^{-1} + b_0}{a_n \cdot z^{-n} + a_{n-1} \cdot z^{-(n-1)} + \dots + a_1 \cdot z^{-1} + a_0},$$

представляющую собой отношение полиномов от $z = e^{pT}$.

Определяя передаточную функцию импульсной системы как отношение z -изображений выходного и входного сигналов системы, при нулевых начальных условиях

$$W^*(z) = \frac{Y^*(z)}{X^*(z)}$$

можно получить разностное (рекуррентное) уравнение системы следующим образом:

$$\frac{Y^*(z)}{X^*(z)} = \frac{b_m \cdot z^{-m} + b_{m-1} \cdot z^{-(m-1)} + \dots + b_1 \cdot z^{-1} + b_0}{a_n \cdot z^{-n} + a_{n-1} \cdot z^{-(n-1)} + \dots + a_1 \cdot z^{-1} + a_0}$$

или

$$\begin{aligned} (a_n \cdot z^{-n} + a_{n-1} \cdot z^{-(n-1)} + \dots + a_1 \cdot z^{-1} + a_0) \cdot Y^*(z) = \\ = (b_m \cdot z^{-m} + b_{m-1} \cdot z^{-(m-1)} + \dots + b_1 \cdot z^{-1} + b_0) \cdot X^*(z), \end{aligned}$$

или, применяя обратное z -преобразование и выражая $y[kT]$,

$$\begin{aligned} y[kT] = \frac{1}{a_0} \cdot \{ -a_1 \cdot y[(k-1)T] - \dots - a_{n-1} \cdot y[(k-n+1)T] - a_n \cdot y[(k-n)T] + \\ + b_m \cdot x[(k-m)T] + b_{m-1} \cdot x[(k-m+1)T] + \dots + b_1 \cdot x[(k-1)T] + b_0 \cdot x[kT] \} \end{aligned}$$

получаем рекуррентное уравнение для вычисления выходной последовательности $y[kT]$ при известных начальных условиях и входной последовательности $x[kT]$.

АФЧХ импульсной системы можно получить из передаточной функции $W^*(z)$ путем замены оператора z на $e^{i\omega T}$. Важная особенность импульсных систем – периодичность их частотных характеристик с периодом $\omega_{кв} = 2 \cdot \pi / T$. Как и в случае непрерывных систем, АФЧХ импульсной системы может быть представлена в двух формах: показательной и алгебраической.

В показательной форме

$$W^*(i\omega) = A^*(\omega) \cdot e^{i\varphi^*(\omega)},$$

где $A^*(\omega)$ – АЧХ, а $\varphi^*(\omega) = \arg W^*(i\omega)$ – ФЧХ.

В алгебраической форме

$$W^*(i\omega) = \text{Re}^*(\omega) + i \cdot \text{Im}^*(\omega),$$

где $\text{Re}^*(\omega)$ и $\text{Im}^*(\omega)$ – соответственно, ВЧХ и МЧХ.

В силу четности $\text{Re}^*(\omega)$ и нечетности $\text{Im}^*(\omega)$ частотные характеристики импульсных систем достаточно строить в диапазоне ω от 0 до π/T .

Пример

Разомкнутая система состоит из непрерывной части

$$W_{\text{нч}}(P) = \frac{10}{(P+1)(P+5)}$$

и экстраполятора нулевого порядка с $K_{\text{н}} = 1$.

Определить импульсную передаточную функцию разомкнутой системы, если период квантования $T=2$ с.

Решение

Экстраполятор (фиксатор) нулевого порядка имеет передаточную функцию

$$W_{\phi}(P) = \frac{1 - e^{-T \cdot P}}{P}$$

Получим передаточную функцию приведенной непрерывной части

$$W_{\text{пнч}}(P) = \frac{10 \cdot (1 - e^{-T \cdot P})}{P \cdot (P+1)(P+5)} = \frac{10 \cdot (1 - z^{-1})}{P \cdot (P+1)(P+5)} = \frac{10}{P \cdot (P+1)(P+5)} \cdot \frac{z-1}{z}$$

Разложим первый сомножитель на составляющие

$$\frac{10}{P \cdot (P+1)(P+5)} = \frac{10}{P} - \frac{12,5}{P+1} + \frac{2,5}{P+5}$$

Пользуясь таблицей соответствия изображений по Лапласу и z -изображений (приложение 4), выписываем z -изображение для каждой составляющей:

$$\frac{10}{P} \Rightarrow 10 \cdot \frac{z}{z-1}; \quad \frac{12,5}{P+1} \Rightarrow 12,5 \cdot \frac{z}{z - e^{-T}}; \quad \frac{2,5}{P+5} \Rightarrow 2,5 \cdot \frac{z}{z - e^{-5 \cdot T}}$$

Сложим полученные z -изображения и умножим на $(z-1)/z$:

$$W^*(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \left[\frac{10 \cdot z}{z-1} - \frac{12,5 \cdot z}{z - e^{-T}} + \frac{2,5 \cdot z}{z - e^{-5 \cdot T}} \right]$$

При $T=2$

$$W^*(z) = \frac{8,308 \cdot z^2 - 7,97 \cdot z - 0,338}{(z-1)(z-1,35 \cdot 10^{-1})(z-4,54 \cdot 10^{-5})}.$$

Задача решена.

Устойчивость импульсных систем

Устойчивость импульсных систем определяется расположением корней характеристического уравнения в комплексной плоскости. Для передаточной функции $W^*(z)$ характеристическое уравнение

$$A^*(z) = a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot z + a_n = 0.$$

Асимптотическая устойчивость системы имеет место, когда все корни характеристического уравнения лежат внутри круга единичного радиуса.

Из-за трудностей в определении корней $A^*(z) = 0$ применяют критерии устойчивости. К ним относятся аналог критерия Найквиста и аналоги критериев Рауса и Гурвица.

Аналоги критериев устойчивости основываются на билинейном преобразовании по формуле

$$z = \frac{1 + \varpi}{1 - \varpi}.$$

Для определения устойчивости замкнутой импульсной системы по критерию Найквиста можно применять передаточную функцию разомкнутой системы, полученную как на основе z -преобразования, так и на основе ϖ -преобразования (билинейного преобразования). И в этом и в другом случаях АФЧХ разомкнутой системы не должна охватывать точку $(-1, i0)$.

Применяя билинейное преобразование к характеристическому уравнению системы $A^*(z) = 0$ и умножая его на $(1 - \varpi)^n$, получают аналог характеристического уравнения на ϖ -плоскости

$$A^*(\varpi) = a_0 \cdot (1 + \varpi)^n + a_1 \cdot (1 + \varpi)^{n-1} \cdot (1 - \varpi) + \dots + a_n \cdot (1 - \varpi)^n = 0,$$

или после раскрытия скобок

$$A^*(\varpi) = A_n \cdot \varpi^n + A_{n-1} \cdot \varpi^{n-1} + \dots + A_1 \cdot \varpi + A_0 = 0.$$

Далее к $A^*(\varpi)$ применимы критерии Рауса и Гурвица в обычной форме.

Пример

Характеристическое уравнение импульсной системы регулирования имеет вид

$$A^*(z) = 5 \cdot z^3 + 4 \cdot z^2 + B \cdot z + 1 = 0.$$

Требуется определить с помощью билинейного преобразования, при каких значениях параметра B система устойчива.

Решение

Воспользуемся подстановкой $z = (1 + \varpi)/(1 - \varpi)$:

$$A^*(\varpi) = 5 \cdot \left(\frac{1 + \varpi}{1 - \varpi}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1 + \varpi}{1 - \varpi}\right)^2 + B \cdot \frac{1 + \varpi}{1 - \varpi} + 1 = 0.$$

После умножения на $(1 - \varpi)^3$ получаем характеристический полином $D(\varpi)$:

$$D(\varpi) = 5 \cdot (1 + \varpi)^3 + 4 \cdot (1 + \varpi)^2 \cdot (1 - \varpi) + B \cdot (1 + \varpi)(1 - \varpi)^2 + (1 - \varpi)^3.$$

Раскрывая скобки, приводим полином $D(\varpi)$ к стандартному виду:

$$D(\varpi) = B \cdot \varpi^3 + (14 - B) \cdot \varpi^2 + (16 - B) \cdot \varpi + (10 + B) = 0.$$

Необходимое условие устойчивости – положительность всех коэффициентов – выполняется при $0 < B < 14$. По критерию Гурвица система будет устойчива, если при B в интервале $(0 \div 14)$ выполняется условие

$$(14 - B)(16 - B) > B \cdot (10 + B) \text{ или } B < 5.6.$$

Таким образом, импульсная САУ будет устойчива при значениях параметра B в интервале $(0 \div 5,6)$.

Расчет переходных процессов в импульсных системах

Для расчета переходных процессов в импульсных системах применяют таблицы обратного z -преобразования, метод разложения в ряд Лорана, рекуррентные уравнения. В первом случае находят z -изображение переходной характеристики

$$H^*(z) = \frac{z}{z - 1} \cdot W^*(z),$$

раскладывают его на составляющие вида $\frac{C_0 \cdot z}{z - 1}$ и $\frac{C_j \cdot z}{z - z_j}$, находят ори-

сигналы по таблице z -изображений типовых функций (см. приложение 4) и суммируют их аналитически. При использовании этого способа требуется знание корней знаменателя $W^*(z)$.

Во втором случае, разделив числитель на знаменатель, разлагают $H^*(z)$ в ряд по степеням z^{-i} :

$$H^*(z) = h(0) + h(T) \cdot z^{-1} + h(2T) \cdot z^{-2} + \dots$$

Коэффициентами разложения служат искомые ординаты $h(kT)$.

В третьем случае при известной передаточной функции замкнутой импульсной системы относительно выходного сигнала

$$W^*(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z + \dots + b_{n-1} \cdot z^{n-1}}{a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n},$$

переходную характеристику $h(kT)$ можно найти по простому рекуррентному соотношению

$$h(kT) = \begin{cases} 0 & , k=0 \\ \frac{1}{a_n} \left[- \sum_{i=1}^k a_{n-i} \cdot h[(k-i)T] + \sum_{i=1}^k b_{n-i} \right] & , k < n, \\ \frac{1}{a_n} \left[- \sum_{i=1}^n a_{n-i} \cdot h[(k-i)T] + \sum_{i=1}^n b_{n-i} \right] & , k \geq n. \end{cases}$$

Пример

На вход импульсной системы с передаточной функцией в замкнутом состоянии

$$W^*(z) = \frac{0.1}{z^2 - 1.3 \cdot z + 0.4}$$

поступает единичная ступенчатая функция $s(t) = 1(t)$.

Требуется построить переходный процесс для выходной величины $y[kT]$ и определить время переходного процесса. Период дискретности $T=1$ с.

Решение поставленной задачи осуществим двумя способами.

Решение 1

Изображение входной величины

$$S(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Изображение выходной величины

$$Y(z) = W^*(z) \cdot S(z) = \frac{0.1 \cdot z}{(z-1)(z^2 - 1.3 \cdot z + 0.4)}.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$z^2 - 1.3 \cdot z + 0.4 = 0.$$

Решение дает $z_1 = 0.8$ и $z_2 = 0.5$. Представим выражение для $Y(z)$ в виде

$$Y(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.8} + \frac{C}{z-0.5}.$$

Коэффициенты разложения на простые дроби $A=1$, $B=-1.67$ и $C=0.67$. В результате имеем

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1.67 \cdot z}{z-0.8} + \frac{0.67 \cdot z}{z-0.5}.$$

Для приведения слагаемых этого уравнения к табличному виду положим $z_1 = e^{-\alpha_1 \cdot T} = 0.8$ и $z_2 = e^{-\alpha_2 \cdot T} = 0.5$. Отсюда находим

$$\alpha_1 = \frac{1}{T} \cdot \ln \frac{1}{0.8} = 1 \cdot 0.223 = 0.223 \text{ с}^{-1},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{T} \cdot \ln \frac{1}{0.5} = 1 \cdot 0.693 = 0.693 \text{ с}^{-1}.$$

В соответствии с приложением 4 получаем искомую дискретную функцию времени

$$\begin{aligned} y[kT] &= 1 - 1.67 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot k \cdot T} + 0.67 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot k \cdot T} = 1 - 1.67 \cdot z_1^k + 0.67 \cdot z_2^k = \\ &= 1 - 1.67 \cdot 0.8^k + 0.67 \cdot 0.5^k. \end{aligned}$$

Результаты расчета переходного процесса сведем в таблицу.

Таблица результатов расчета переходного процесса

k	$-1.67 \cdot 0.8^k$	$0.67 \cdot 0.5^k$	y[kT]	k	$-1.67 \cdot 0.8^k$	$0.67 \cdot 0.5^k$	y[kT]
0	-1.67	0.67	0.00	9	-0.22	0.00	0.78
1	-1.33	0.33	0.00	10	-0.18	0.00	0.82
2	-1.06	0.16	0.10	11	-0.14	0.00	0.86
3	-0.85	0.08	0.23	12	-0.11	0.00	0.89
4	-0.68	0.04	0.36	13	-0.09	0.00	0.91
5	-0.54	0.02	0.48	14	-0.07	0.00	0.93
6	-0.43	0.01	0.58	15	-0.06	0.00	0.94
7	-0.35	0.00	0.65	16	-0.05	0.00	0.95
8	-0.28	0.00	0.72				

Вычисление $y[kT]$ проводилось в таблице до тех пор, пока ошибка не стала равной 5% от $y[\infty]=1$. Время переходного процесса составляет при этом $t_p=16 \cdot T=16$ с.

Решение 2

Решим поставленную задачу разложением изображения выходной величины $Y(z)$ в ряд Лорана путем деления числителя на знаменатель

$$\begin{array}{l} 0.1 \cdot z \\ \hline 0.1 \cdot z - 0.23 + 0.17 \cdot z^{-1} - 0.04 \cdot z^{-2} \end{array} \left| \frac{z^3 - 2.3 \cdot z^2 + 1.7 \cdot z - 0.4}{0.1 \cdot z^{-2} + 0.23 \cdot z^{-3} + 0.36 \cdot z^{-4} + \dots} \right.$$

$$\begin{array}{l} \hline 0.23 - 0.17 \cdot z^{-1} + 0.04 \cdot z^{-2} \\ \hline 0.23 - 0.53 \cdot z^{-1} + 0.39 \cdot z^{-2} - 0.092 \cdot z^{-3} \\ \hline 0.36 \cdot z^{-1} - 0.35 \cdot z^{-2} + 0.092 \cdot z^{-3} \end{array}$$

Коэффициенты при z^{-k} у частного представляют собой значения выходной величины $y[kT]$. Таким образом, при $k=0$ и $k=1$ имеем $y[0]=y[T]=0$. Далее получаем $y[2T]=0.1$; $y[3T]=0.23$; $y[4T]=0.36$. Продолжая деление дальше, получим числа, совпадающие с числами, приведенными в таблице.

Задание для практической работы

В задании предусматривается три типа задач:

А – получение импульсной передаточной функции разомкнутой системы;

В – оценка устойчивости замкнутой импульсной системы;

С – расчет переходного процесса в замкнутой импульсной системе.

Для задачи типа А дано:

а) передаточная функция непрерывной части системы

$$W_{нч}(P) = \frac{K_1}{(T_1 \cdot P + 1)(T_2 \cdot P + 1)}$$

и ее параметры;

- б) тип экстраполятора (0 – нулевого порядка, 1 – первого порядка, $K_n=1$);
 в) период квантования T .

Для задач типа В и С дано:

- а) дискретная передаточная функция разомкнутой импульсной системы

$$W^*(z) = \frac{b_1 \cdot z + b_0}{a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0}$$

и ее параметры;

- б) период квантования T .

Требуется:

решить поставленные задачи согласно заданному варианту.

В отчете представить:

- а) задание на работу и вариант задания;
 б) порядок и результаты расчетов;
 в) графические построения на миллиметровой бумаге, промежуточные вычисления в таблицах.

Варианты задания на работу

Но- мер ва- ри- ан- та	Тип за- да- чи	Тип экст- рапо- лятора	Интер- вал кванто- вания T, c	Параметры $W_{нч}(P)$			Параметры $W^*(z)$					
				K_1	T_1	T_2	b_1	b_0	a_3	a_2	a_1	a_0
1	А	0	1	1	10	20	–	–	–	–	–	–
2	В	–	1	–	–	–	–	0,1	–	1	–1,5	0,6
3	С	–	1	–	–	–	0,8	1	1	–0,1	–0,12	0,16
4	А	1	1	2	20	20	–	–	–	–	–	–
5	В	–	2	–	–	–	1	2	1	0,6	0,11	$6 \cdot 10^{-3}$
6	С	–	5	–	–	–	3	3	2	1,1	0,17	$6 \cdot 10^{-3}$
7	А	0	5	1	20	30	–	–	–	–	–	–
8	В	–	5	–	–	–	4	1	3	0,96	0,083	0,002
9	С	–	5	–	–	–	5	1	1	0,75	0,17	0,012
10	А	0	2	2	5	10	–	–	–	–	–	–
11	А	0	2	1	10	30	–	–	–	–	–	–
12	В	–	2	–	–	–	6	1	5	5,75	1,53	0,1
13	С	–	2	–	–	–	10	1	4	2,8	0,56	0,032
14	А	1	1	5	15	25	–	–	–	–	–	–
15	В	–	1	–	–	–	4	3	3	3	0,87	0,06
16	С	–	3	–	–	–	3	4	2	3,4	1,84	0,32
17	А	0	4	10	50	20	–	–	–	–	–	–
18	В	–	4	–	–	–	0,1	1	1	0,06	0,001	$6 \cdot 10^{-6}$
19	С	–	3	–	–	–	0,5	1	5	0,45	0,013	$1 \cdot 10^{-4}$
20	А	0	2	10	50	80	–	–	–	–	–	–

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

(к практическому занятию № 3)

Вывод уравнений диаграммы Ольденбурга и Сарториуса

Рассмотрим нормированную переходную характеристику $h(t) = y(t)/k$:

$$h(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Найдем точку перегиба

$$h'(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}};$$

$$h''(t) = -\frac{1}{T_1(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{T_2(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_2}}$$

в точке перегиба $h''(t_n) = 0$, т.е.

$$\frac{1}{T_1(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t_n}{T_1}} = \frac{1}{T_2(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t_n}{T_2}}.$$

С учетом последнего выражения

$$h(t_n) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_n}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_n}{T_2}} = 1 - \frac{T_1 + T_2}{T_1} e^{-\frac{t_n}{T_1}}; \quad (\text{П.1})$$

$$h'(t_n) = \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_n}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t_n}{T_1}} = \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t_n}{T_1}}.$$

С учетом (П.1) $h'(t_n) = \frac{1 - h(t_n)}{T_1 + T_2}$,

т.е. касательная к точке перегиба отсекает на прямой $h = 1$ ($y = k$) отрезок T_c , равный сумме постоянных времени ($T_1 + T_2$) (рис.1.3).

Выражение (П.1) можно представить в другом виде, выразив через вторую экспоненту $h(t_n)$ (см. вывод уравнения (П.1)):

$$h(t_n) = 1 - \frac{T_1 + T_2}{T_2} e^{-\frac{t_n}{T_2}}.$$

Приравняв правые части последнего уравнения и уравнения (П.1), получим:

$$\frac{1}{T_2} e^{-\frac{t_n}{T_2}} = \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t_n}{T_1}};$$

после преобразований вида

$$-\ln T_2 - \frac{t_n}{T_2} = -\ln T_1 - \frac{t_n}{T_1}; \quad \ln T_1 - \ln T_2 = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \cdot t_n; \quad \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{T_1 - T_2}{T_1 \cdot T_2} \cdot t_n$$

и ввода новой переменной $\chi = T_2/T_1$, ($0 < \chi < 1$):

$$\ln\left(\frac{1}{\chi}\right) = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{1-\chi}{\chi} \cdot t_n$$

найдем $t_n = T_1 \cdot \frac{\chi}{1-\chi} \cdot \ln\left(\frac{1}{\chi}\right)$.

Определим величину T_A (рис 1.3): $T_A = \frac{1}{h'(t_n)}$.

Подставляя $h'(t_n)$,

$$T_A = \frac{1}{\frac{1}{T_1} \cdot e^{-\frac{t_n}{T_1}}} = T_1 \cdot e^{\frac{t_n}{T_1}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{t_n}{T_1} = \frac{\chi}{1-\chi} \cdot \ln\left(\frac{1}{\chi}\right), \quad e^{\frac{t_n}{T_1}} = e^{\frac{\chi}{1-\chi} \cdot \ln\left(\frac{1}{\chi}\right)} = \left(e^{\ln\left(\frac{1}{\chi}\right)} \right)^{\frac{\chi}{1-\chi}} = \left(\frac{1}{\chi} \right)^{\frac{\chi}{1-\chi}}$$

определим $T_A = T_1 \cdot \left(\frac{1}{\chi} \right)^{\frac{\chi}{1-\chi}}$

и, наконец, найдем необходимые для составления диаграммы уравнения

$$\frac{T_1}{T_A} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\chi} \right)^{\frac{\chi}{1-\chi}}}; \quad \frac{T_2}{T_A} = \frac{T_2}{T_1 \cdot \left(\frac{1}{\chi} \right)^{\frac{\chi}{1-\chi}}} = \frac{\chi}{\left(\frac{1}{\chi} \right)^{\frac{\chi}{1-\chi}}}.$$

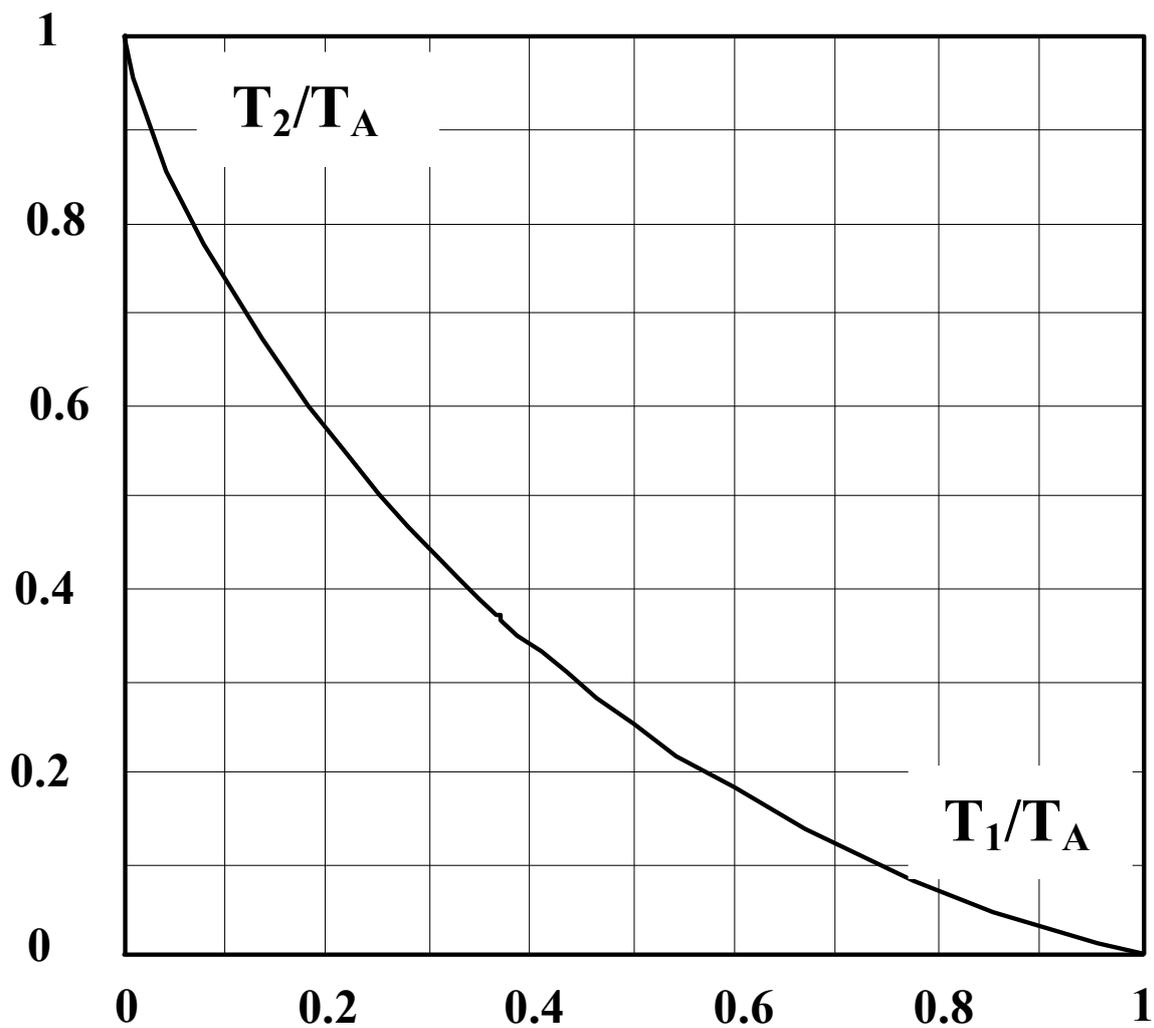
Решение этих уравнений в координатах T_1/T_A и T_2/T_A при $0 < \chi < 1$ дает на графике диаграмму Ольденбурга и Сарториуса (приложение 2). Уравнение входа в диаграмму:

$$\frac{T_C}{T_A} = \frac{T_1}{T_A} + \frac{T_2}{T_A}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

(к практическому занятию № 3)

Диаграмма Ольденбурга и Сарториуса



ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Таблица h_{χ} -функций

χ τ	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,138	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231	0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314	0,314
1,0	0,310	0,326	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447	0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,593	0,603	0,603
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646	0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844	0,844
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,681	0,761	0,786	0,810	0,833	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,986	1,003	1,020	1,020
2,5	0,674	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943	0,967	0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,105	1,120	1,133	1,133
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038	1,061	1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,172	1,176	1,178	1,178
3,5	0,783	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095	1,115	1,132	1,145	1,158	1,161	1,166	1,171	1,174	1,175	1,175	1,175	1,175
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060	1,090	1,107	1,124	1,142	1,152	1,158	1,159	1,160	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118	1,118
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,080	1,100	1,115	1,129	1,134	1,138	1,138	1,134	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053	1,053
5,0	0,896	0,936	0,978	1,012	1,042	1,067	1,087	1,103	1,112	1,117	1,118	1,115	1,107	1,098	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,001	0,986	0,986
5,5	0,900	0,940	0,986	1,019	1,046	1,067	1,083	1,093	1,095	1,097	1,092	1,083	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932	0,932
6,0	0,904	0,942	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062	1,051	1,037	1,021	1,003	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,920	0,906	0,906
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033	1,018	1,001	0,982	0,946	0,948	0,936	0,920	0,910	0,903	0,903	0,905	0,905
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009	0,993	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925	0,925
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,025	1,025	1,017	1,005	0,989	0,974	0,958	0,944	0,926	0,922	0,911	0,920	0,927	0,934	0,946	0,958	0,958
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,995	0,981	0,966	0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004	1,004
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,977	0,966	0,949	0,944	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041	1,041
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978	0,970	0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	1,061	1,061
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982	0,975	0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066	1,066
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987	0,982	0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056	1,056
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	1,005	0,993	0,991	0,987	0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033	1,033
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,993	0,991	0,993	1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005	1,005
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989	0,997	1,006	1,017	1,029	1,037	1,043	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977	0,977
12,0	0,950	0,988	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,987	0,997	1,006	1,019	1,026	1,027	1,025	1,015	1,000	0,984	0,969	0,958	0,958
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,986	0,997	1,006	1,018	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949	0,949
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994	0,986	0,985	0,987	0,997	1,006	1,014	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955	0,955
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,988	0,993	1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970	0,970

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Продолжение. Таблица **h_χ**-функций

χ τ	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988	0,983	0,985	0,991	1,000	1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990
14,5	0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987	0,985	0,988	0,996	1,002	1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988	0,987	0,991	1,000	1,005	1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030
15,5	0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004	1,008	1,007	1,001	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007	1,011	1,008	1,000	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,995	1,002	1,009	1,011	1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010	1,012	1,007	0,999	0,997	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,027	1,012
17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,006	1,010	1,009	1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988
18,0	0,966	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,995	1,001	1,008	1,010	1,008	1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,979
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009	1,006	0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,933	0,978	0,969
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006	1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	1,007	0,981	0,969	0,956
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004	0,998	0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002	0,996	0,991	0,992	0,995	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001	0,995	0,991	0,994	0,996	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001	0,995	0,993	0,997	0,996	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,000	0,996	0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,986	0,988	0,997	1,013	1,024
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	0,999	0,996	0,996	1,000	0,997	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029
22,5	0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999	0,997	1,000	1,004	1,000	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026
23,0	0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,996	1,004	1,007	1,003	0,998	0,998	1,001	1,006	1,001	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016
23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998	0,999	1,002	1,007	1,002	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002
24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,002	0,997	1,000	1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	1,012	0,988
24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,006	1,001	0,997	1,000	1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979
25,0	0,975	1,005	1,008	1,000	0,995	0,999	1,005	1,004	1,000	0,996	1,000	1,002	1,004	1,003	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975
25,5	0,975	1,005	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	0,998	0,996	1,000	1,002	1,002	1,002	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977
26,0	0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996	1,000	1,002	1,000	1,001	1,002	1,004	1,002	0,987	0,984	0,977	0,983

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица преобразований функций по Лапласу и z-преобразований

Оригинал	Изображение по Лапласу	z-изображение
$x(t)$	$X(P)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	1 или z^{-0}
$\delta(t - kT)$	$e^{-k \cdot T \cdot P}$	z^{-k}
1(t)	$\frac{1}{P}$	$\frac{z}{z - 1}$
t	$\frac{1}{P^2}$	$\frac{T \cdot z}{(z - 1)^2}$
$\frac{1}{2!} t^2$	$\frac{1}{P^3}$	$\frac{T^2 \cdot z \cdot (z + 1)}{2 \cdot (z - 1)^3}$
$\frac{1}{3!} t^3$	$\frac{1}{P^4}$	$\frac{T^3 \cdot (z^4 + 4 \cdot z + 1)}{6 \cdot (z - 1)^4}$
$e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{P + a}$	$\frac{z}{z - e^{-a \cdot T}}$
$t \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{(P + a)^2}$	$\frac{T \cdot z \cdot e^{-a \cdot T}}{(z - e^{-a \cdot T})^2}$
$\frac{t^2}{2} e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{(P + a)^3}$	$\frac{T^2 \cdot e^{-a \cdot T} \cdot z}{2 \cdot (z - e^{-a \cdot T})^2} + \frac{T^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot T} \cdot z}{(z - e^{-a \cdot T})^3}$
$1 - e^{-a \cdot t}$	$\frac{a}{P \cdot (P + a)}$	$\frac{(1 - e^{-a \cdot T}) \cdot z}{(z - 1)(z - e^{-a \cdot T})}$
$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{P^2 + \omega^2}$	$\frac{z \cdot \sin(\omega \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega \cdot T) + 1}$
$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{P}{P^2 + \omega^2}$	$\frac{z \cdot (z - \cos(\omega \cdot T))}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega \cdot T) + 1}$
$1 - \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega^2}{P \cdot (P^2 + \omega^2)}$	$\frac{z}{z - 1} \cdot \frac{z \cdot (z - \cos(\omega \cdot T))}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega \cdot T) + 1}$
$e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}$	$\frac{b - a}{(P + a)(P + b)}$	$\frac{z}{z - e^{a \cdot T}} - \frac{z}{z - e^{-b \cdot T}}$
$1 - (1 + a \cdot t) \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{a^2}{P \cdot (P + a)}$	$\frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-a \cdot T}} - \frac{a \cdot T \cdot e^{-a \cdot T}}{(z - e^{-a \cdot T})^2}$

Таблица преобразований функций по Лапласу и z-преобразований
Продолжение

Оригинал	Изображение по Лапласу	z-изображение
$1 + \frac{b}{a-b} e^{-a \cdot t} - \frac{a}{a-b} e^{-b \cdot t}$	$\frac{a \cdot b}{P(P+a)(P+b)}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{b \cdot z}{(a-b)(z-e^{-a \cdot T})} - \frac{a \cdot z}{(a-b)(z-e^{-b \cdot T})}$
$e^{-a \cdot t} \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{(P+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z \cdot e^{-a \cdot T} \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cdot e^{-a \cdot T} \cos(\omega T) + e^{-2 \cdot a \cdot T}}$
$e^{-a \cdot t} \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{P+a}{(P+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - z \cdot e^{-a \cdot T} \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cdot e^{-a \cdot T} \cos(\omega T) + e^{-2 \cdot a \cdot T}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Таблица соответствия корреляционных функций
и спектров мощности сигналов

№ п/п	корреляционная функция $r_{xx}(\tau)$	спектр мощности $G_{xx}(\omega)$
1	$N \cdot \delta(\tau)$ "белый шум"	N
2	$\sigma_x^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot \tau)$	$2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2 / (\alpha^2 + \omega^2)$
3	$\sigma_x^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot \tau) \cdot [\cos(\beta \cdot \tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta \cdot \tau)]$	$\frac{4 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2 \cdot (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2}$
4	$\sigma_x^2 \cdot \cos(\omega_k \cdot \tau)$	$2 \cdot \sigma_x^2 \cdot \delta(\omega - \omega_k)$
5	$\sigma_x^2 \cdot (1 - \tau), \quad \tau < 1$ $0, \quad \tau \geq 1$	$\left[\frac{\sin(\omega / 2)}{\omega / 2} \right]^2$
6	$\sigma_x^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot \tau) \cdot \cos(\beta \cdot \tau)$	$\frac{2 \cdot \alpha \cdot \sigma_x^2 \cdot (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2 \cdot (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2}$
7	$\sigma_x^2 \cdot \exp(-\alpha^2 \cdot \tau^2)$	$\frac{\sigma_x^2 \cdot \sqrt{\pi}}{\alpha} \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2}{4 \cdot \alpha^2}\right)$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Формулы для интегралов от дробно-рациональных функций

$$I_n = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(i\omega)}{M(i\omega) \cdot M(-i\omega)} d\omega,$$

где $M(i\omega) = A_0 \cdot (i\omega)^n + A_1 \cdot (i\omega)^{n-1} + \dots + A_n$;

$$L(i\omega) = B_0 \cdot (i\omega)^{2n-2} + B_1 \cdot (i\omega)^{2n-4} + \dots + B_{n-1}.$$

При $n = 1$

$$I_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_0}{|A_0 \cdot i \cdot \omega + A_1|^2} d\omega = \frac{B_0}{2 \cdot A_0 \cdot A_1};$$

при $n = 2$

$$I_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_0 \cdot (i\omega)^2 + B_1}{|A_0 \cdot (i\omega)^2 + A_1 \cdot i\omega + A_2|^2} d\omega = \frac{-B_0 + \frac{A_0 \cdot B_1}{A_2}}{2 \cdot A_0 \cdot A_1};$$

при $n = 3$

$$I_3 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B_0 \cdot (i\omega)^4 + B_1 \cdot (i\omega)^2 + B_2|}{|A_0 \cdot (i\omega)^3 + A_1 \cdot (i\omega)^2 + A_2 \cdot (i\omega) + A_3|^2} d\omega =$$

$$= \frac{-A_2 \cdot B_0 + A_0 \cdot B_1 - \frac{A_0 \cdot A_1 \cdot B_2}{A_3}}{2 \cdot A_0 \cdot (A_0 \cdot A_3 - A_1 \cdot A_2)}.$$

Общая формула
$$I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot A_0} \cdot \frac{N_n}{D_n},$$

где

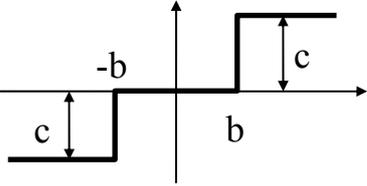
$$D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}; \quad d_{mr} = A_{2m-r}; \quad d_{mr} = 0 \quad (n < 2 \cdot m - r < 0),$$

а N_n – определитель, полученный из D_n заменой элементов первого столбца величинами B_0, B_1, \dots, B_{n-1} .

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

КОЭФФИЦИЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

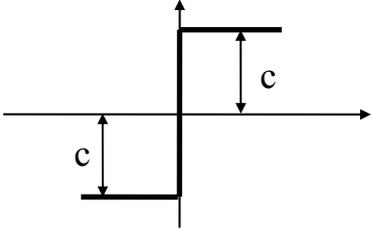
NEL 1



при $A \geq b$ $W_H(iA) = \frac{4c}{3.14 \cdot A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}};$

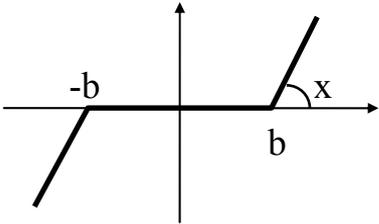
при $A < b$ $W_H(iA) = 0$

NEL 2



$W_H(iA) = \frac{4 \cdot c}{3.14 \cdot A}$

NEL 3



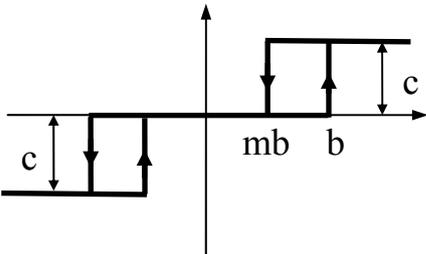
при $A \geq b$

$W_H(iA) = K - \frac{2K}{3.14} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right);$

при $A < b$ $W_H(iA) = 0$

$K = \text{tg } x$

NEL 4



при $A < b$ $W_H(iA) = 0;$

при $A \geq b$

$W_H(iA) = \frac{2c}{3.14A} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \right) + i \cdot \left(-\frac{2bc}{3.14A^2} (1 - m) \right)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ротач В.Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования.– М.: Энергия, 1973, – 440 с.
2. Стефани Е.П. и др. Сборник задач по основам автоматического регулирования теплоэнергетических процессов.: Учебн. пособие для вузов. – М.: Энергия.– 1973, 336 с.
3. Андык В.С. Теория автоматического управления. Учебное пособие к практическим занятиям.– Томск: Изд. ТПУ, 2005.– 108 с.
4. Андык В.С. Библиотека программ по расчету систем автоматического регулирования на программируемых микрокалькуляторах. Методические указания и программы к выполнению курсовых работ, курсовых и дипломных проектов для студентов специальности 210200.– Томск: Изд. ТПИ, 1991.
5. Андык В.С., Татарников А.А. Автоматизированные системы управления технологическими процессами объектов ТЭС: Учебное пособие по курсовому проектированию. – Томск. Изд. ТПИ, 1986.– 95 с.
6. Теория автоматического управления. Ч.1.,Ч.2 / Под ред. А.А. Воронова: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1977 .
7. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем: Учебник для вузов. Изд. 4-е перераб. и доп.– М.: Машиностроение, 1987.– 736 с.

Учебное издание

АНДЫК Владимир Сергеевич

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *кандидат технических наук,
доцент В.В. Медведев*

Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати 17.12.2013. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 6,34. Уч.-изд. л. 5,73.
Заказ 1445-13. Тираж 100 экз.

ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru