

Контрольная работа

Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела при плоском движении

Найти для заданного положения механизма скорости точек B и C , ускорение точки C . Схемы механизмов помещены на рис. 1–3, необходимые для расчёта данные приведены в таблице 1.

Примечание: ω_{OA} и ε_{OA} – угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_1 – угловая скорость колеса 1 (постоянная); V_A и a_A – скорость и ускорение точки A . Качение происходит без скольжения.

Таблица 1

Номер вари- анта, (рис. 1- 3)	Размеры, см				$\omega_{OA},$ $\frac{рад}{с}$	$\omega_I,$ $\frac{рад}{с}$	$\varepsilon_{OA},$ $\frac{рад}{с^2}$	$V_A,$ см/с	$a_A,$ см/с ²
	OA	r	AB	AC					
1	40	15	–	8	2	–	2	–	–
2	30	15	–	8	3	–	2	–	–
3	20	40	–	40	–	–	–	40	100
4	35	–	–	45	4	–	8	–	–
5	25	–	–	20	1	–	1	–	–
6	40	15	–	6	1	1	0	–	–
7	35	–	75	60	5	–	10	–	–
8	25	–	–	40	–	–	–	50	125
9	10	–	–	5	–	–	–	20	50
10	25	–	80	20	1	–	2	–	–
11	15	10	–	20	2	–	3	–	–
12	10	–	40	20	–	–	–	20	50
13	25	–	60	30	2	–	4	–	–
14	45	15	–	8	3	12	0	–	–

15	40	15	–	8	1	–	1	–	–
16	35	20	–	–	2	–	5	–	–
17	20	–	–	0,5AB	2	–	4	–	–
18	10	–	10	5	2	–	6	–	–
19	20	15	–	10	1	2,5	0	–	–
20	40	15	15	5	2	–	4	–	–
21	40	–	15	15	3	–	8	–	–
22	35	–	60	40	4	–	10	–	–
23	40	15	90	45	–	–	–	20	20
24	25	–	35	15	2	–	3	–	–
25	20	–	70	20	1	–	2	–	–
26	20	15	–	10	2	1,2	0	–	–
27	10	–	40	20	2	–	–	–	50
28	20	–	50	25	1	–	1	–	–
29	16	–	–	20	–	–	–	8	5
30	40	–	–	20	5	–	10	–	–

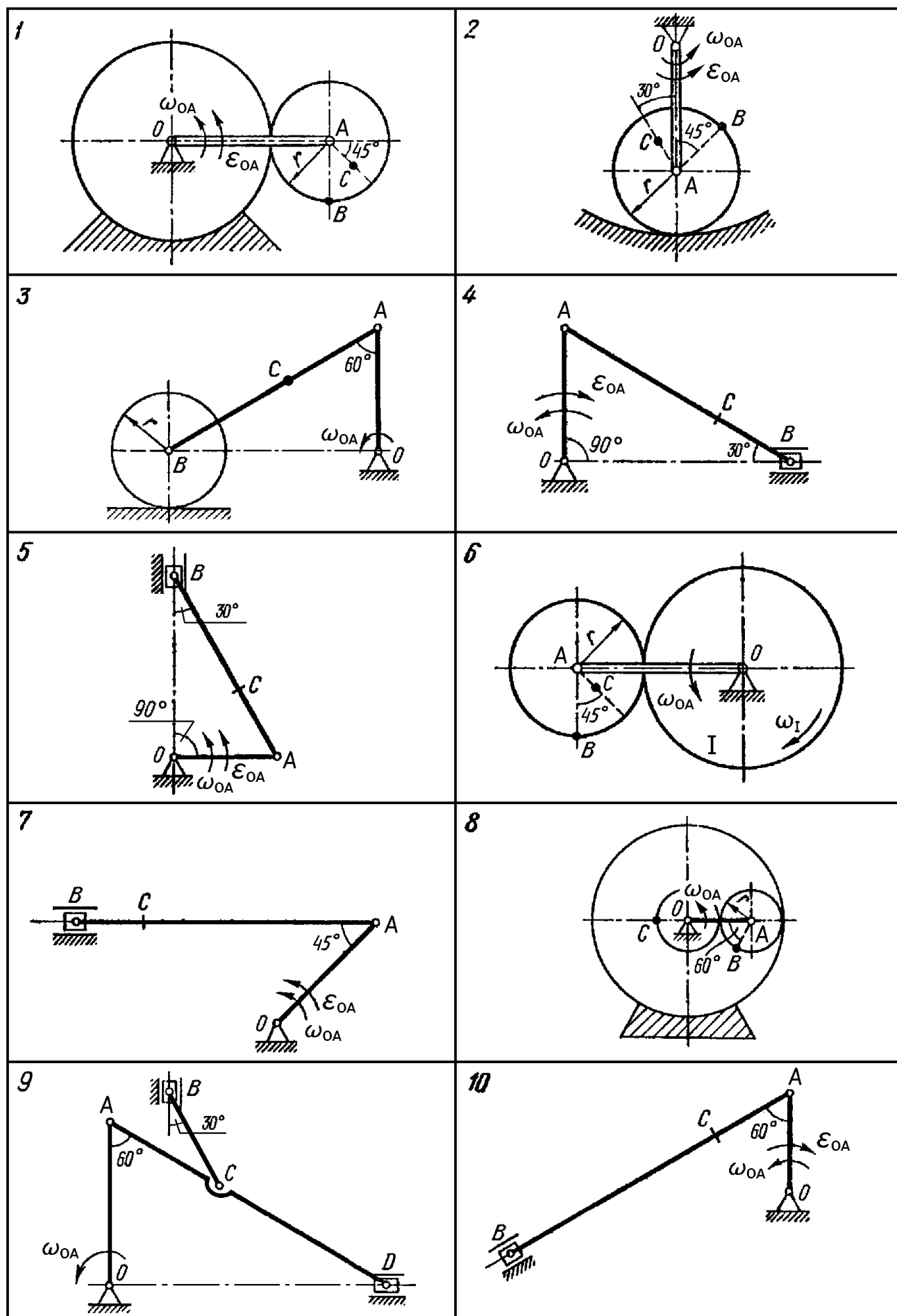


Рис.1

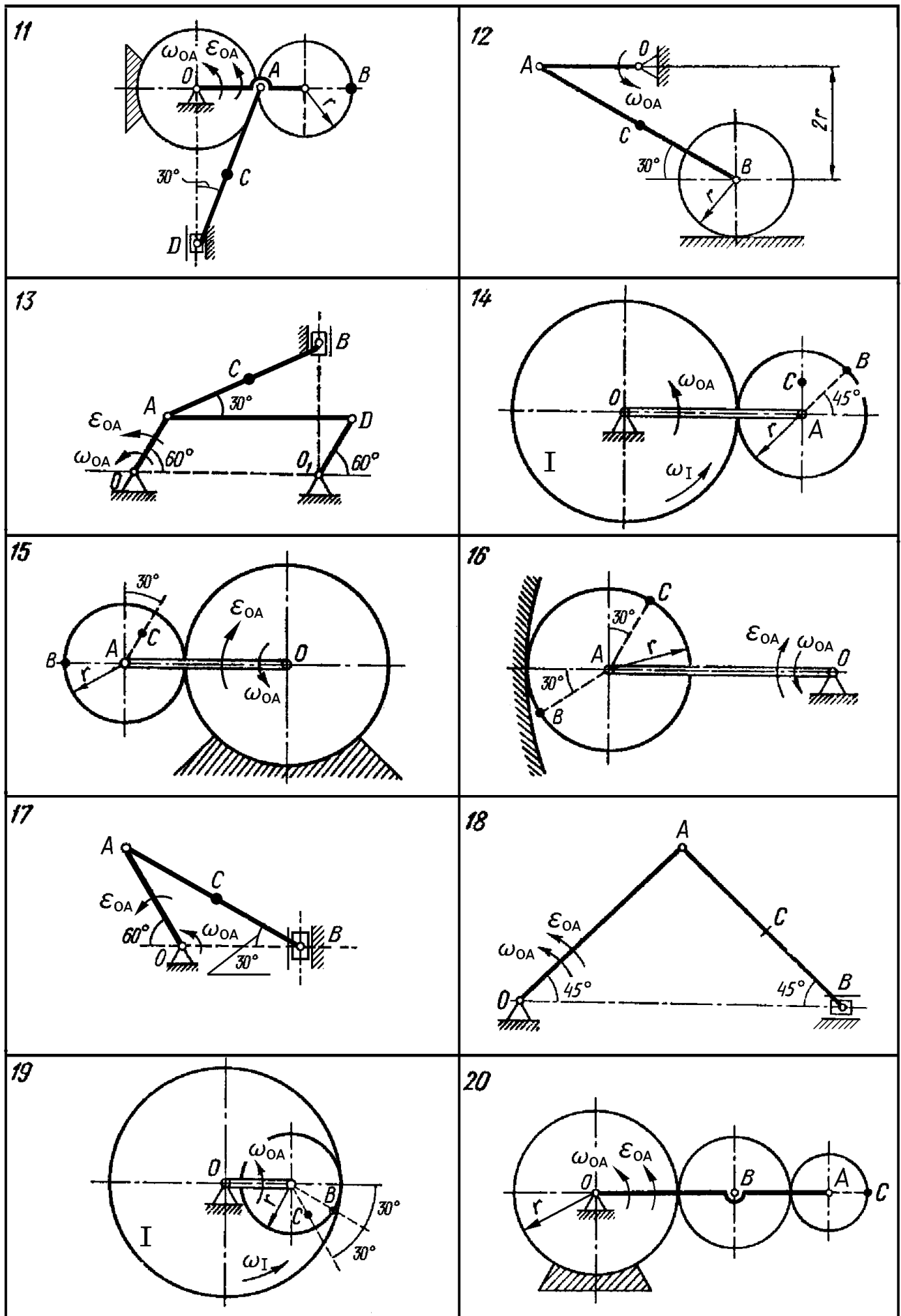


Рис. 2

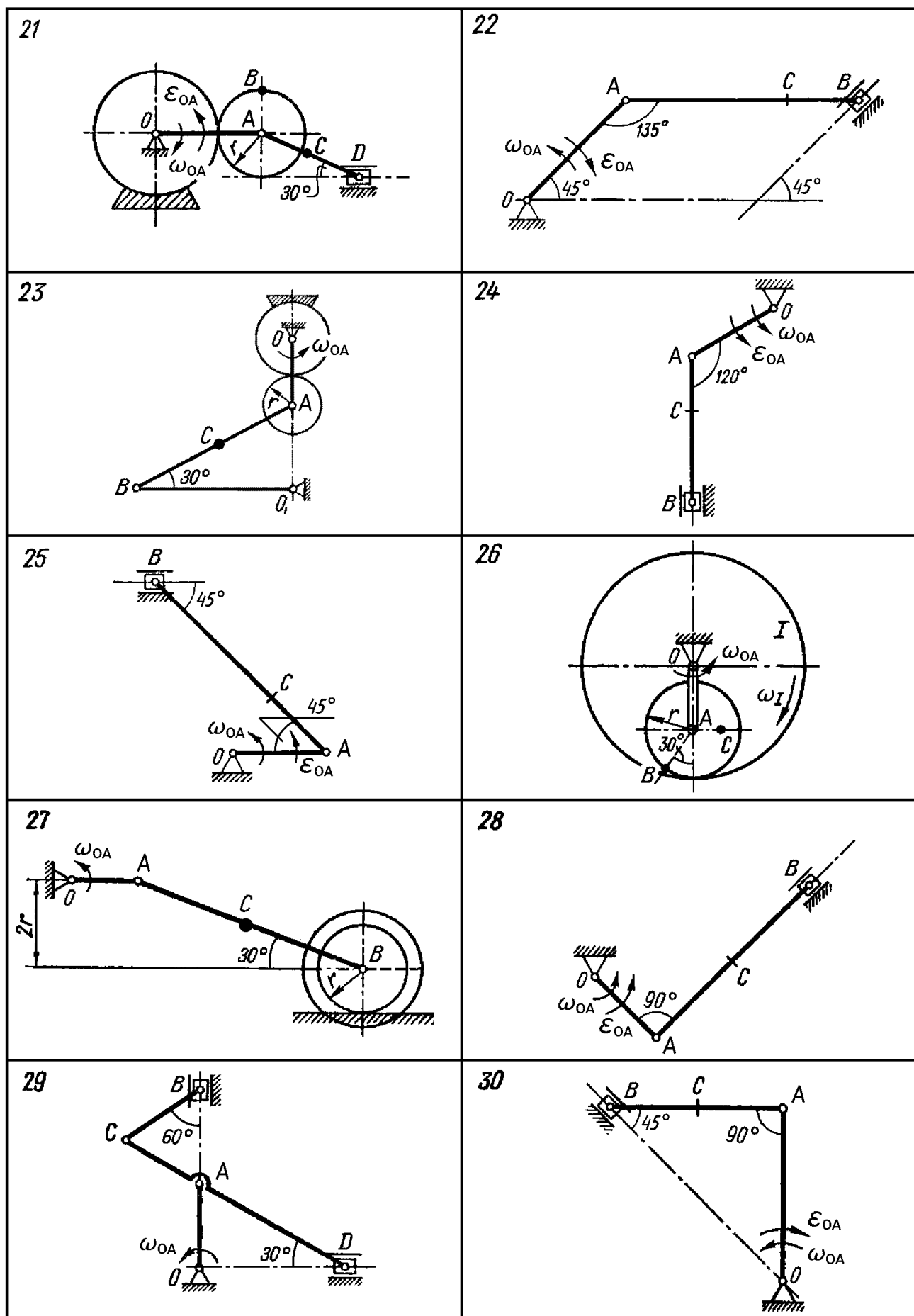


Рис. 3

Пример выполнения задания.

Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 4);

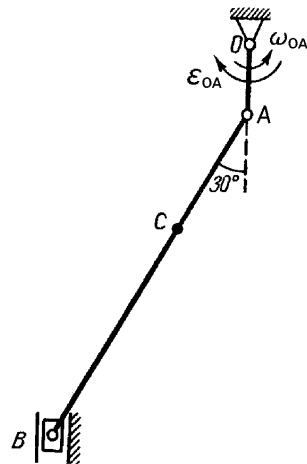


Рис. 4

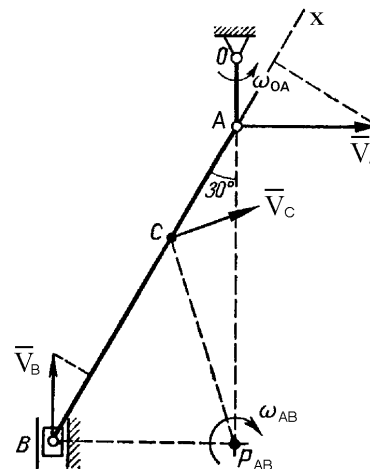


Рис. 5

Исходные данные:

Размеры, см			$\omega_{OA}, \frac{рад}{с}$	$\epsilon_{OA}, \frac{рад}{с^2}$
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Решение.

1. Определение скоростей точек (рис. 5). Вычисляем скорость точки A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,5 \cdot 10 = 15 \text{ см/с.}$$

Скорость точки A перпендикулярна к кривошипу OA. Скорость ползуна B направлена по вертикали.

Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведённых из точек A и B к их скоростям.

Угловая скорость звена AB:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{15}{60 \cos 30^\circ} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,29 \text{ рад/с.}$$

Скорости точек B и C :

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad V_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB},$$

где

$$BP_{AB} = AB \cdot \sin 30^\circ = 60 \cdot 0,5 = 30,0 \text{ см};$$

$$CP_{AB} = \sqrt{BC^2 + BP_{AB}^2 - 2BC \cdot BP_{AB} \cos 60^\circ} =$$

$$\sqrt{40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0,5} = 36,1 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$V_B = 0,29 \cdot 30,0 = 8,7 \text{ см/с}; \quad V_C = 0,29 \cdot 36,1 = 10,5 \text{ см/с}.$$

Вектор $\vec{V}_C$ направлен перпендикулярно к отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB .

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекций скоростей точек на ось, проведённую через эти точки.

Направим ось x из точки B вдоль шатуна BA .
Имеем:

$$V_A \cos(\vec{V}_A, x) = V_B \cos(\vec{V}_B, x).$$

$$\text{Или, как видно из рис. 28} \quad V_A \cos 60^\circ = V_B \cos 30^\circ.$$

Отсюда

$$V_B = V_A \cdot \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = 5\sqrt{3} = 8,7 \text{ см/с}.$$

2. Определение ускорений точек (рис. 6, 7).

Ускорение точки A складывается из касательного и нормального ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n,$$

$$\text{где} \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1,5^2 \cdot 10 = 22,5 \text{ см/с}^2.$$

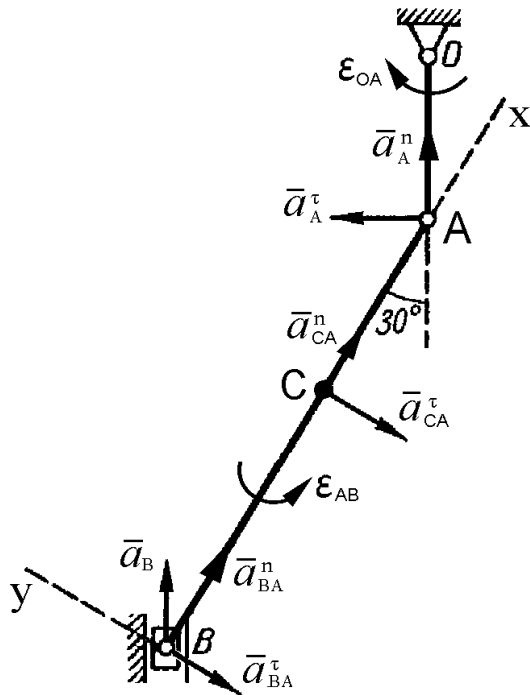


Рис. 6

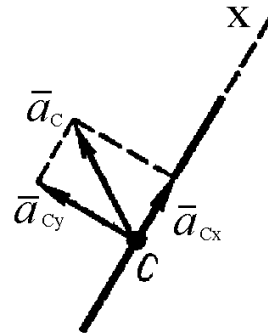


Рис. 7

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен по AO в сторону точки O .

Вектор $\bar{a}_A^\tau$ перпендикулярен вектору $\bar{a}_A^n$ и направлен в соответствии с направлением углового ускорения ε_{OA} .

Ускорение точки B

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n,$$

или

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (1)$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \frac{1}{12} \cdot 60 = 5,00 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{BA}^n$ направлен по BA в сторону точки A , а касательное ускорение $\bar{a}_{BA}^\tau$ точки B перпендикулярно к нему.

Проектируя векторное равенство (1) на оси x и y , получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A^\tau \cos 60^\circ + a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (2)$$

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^\tau \cos 30^\circ + a_A^n \cos 60^\circ - a_{BA}^\tau. \quad (3)$$

Из уравнения (2)

$$a_B = \frac{-a_A^\tau \cos 60^\circ + a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n}{\cos 30^\circ},$$

или
$$a_B = \frac{-20 \cdot 0,5 + 22,5 \cdot 0,866 + 5}{0,866} = 16,7 \text{ см/с}^2.$$

Из уравнения (3)

$$a_{BA}^\tau = a_A^\tau \cos 30^\circ + a_A^n \cos 60^\circ - a_B \cos 60^\circ,$$

или
$$a_{BA}^\tau = 20 \cdot 0,866 + 22,5 \cdot 0,5 - 16,7 \cdot 0,5 = 20,2 \text{ см/с}^2.$$

Но
$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB,$$

отсюда
$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{20,2}{60} = 0,34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление касательного ускорения $\bar{a}_{BA}^\tau$ определяет направление углового ускорения ε_{AB} . В данном случае оно противоположно направлению ω_{AB} .

Определяем ускорение точки C:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^\tau + \bar{a}_{CA}^n,$$

или
$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{CA}^\tau + \bar{a}_{CA}^n. \quad (4)$$

Касательное и нормальное ускорения точки C во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A:

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0,34 \cdot 20 = 6,8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = \frac{1}{12} \cdot 20 = 1,7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{CA}^n$ направлен по CA в сторону точки A,

вектор $\bar{a}_{CA}^\tau$ перпендикулярен к вектору $\bar{a}_{CA}^n$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB} .

Ускорение точки C найдём, проектируя равенство (4) на оси x и y

$$a_{Cx} = a_{CA}^n + a_A^n \cos 30^\circ - a_A^\tau \cos 60^\circ,$$

или
$$a_{Cx} = 1,7 + 22,5 \cdot 0,866 - 20 \cdot 0,5 = 11,2 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{Cy} = a_A^n \cos 60^\circ + a_A^\tau \cos 30^\circ - a_{CA}^\tau,$$

или $a_{Cy} = 22,5 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,866 - 6,8 = 21,8 \text{ см/с}^2;$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{11,2^2 + 21,8^2} = 24,5 \text{ см/с}^2 \quad (\text{рис. 7}).$$