

Индивидуальное задание № 3

*Дробчик В.В., Шумский М.П., Дубовик В.А., Симанкин Ф.
Теоретическая механика. (Динамика)*

Применение уравнений Лагранжа к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система (таблица 19) движется под воздействием постоянных сил и пар сил.

Составить дифференциальные уравнения движения системы в обобщённых координатах. Необходимые данные приведены в таблице 20. Там же указаны обобщённые координаты, которые следует использовать при выполнении задания. Считать, что качение колёс происходит без проскальзывания. Колёса, для которых в таблице радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками. Кривошип рассматривать как тонкие однородные стержни. Принять, что в вариантах 6, 9, 11, 20, 22 и 30 механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Примечания: Радиусы инерции тел 2 и 3 определены относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа. При выполне-

нии варианта 5 следует иметь в виду, что блоки 5 и 6 насажены на общую ось свободно, их массы одинаковы.

Пример выполнения задания.

Дано: Массы тел механической системы (рис. 34): $m_1 = 3m$; $m_2 = 8m$; $m_4 = m_6 = 2m$; $m_3 = 4m$; $M = 3mgr$ – постоянный момент; $b = m\eta$ – коэффициент пропорциональности в выражении силы $\bar{R} = -b\bar{V}_3$ сопротивления движению тела 3 ($\bar{V}_3$ – скорость тела 3); r – радиус однородных дисков 4, 6 и 2.

Составить дифференциальные уравнения движения системы в обобщённых координатах $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$.

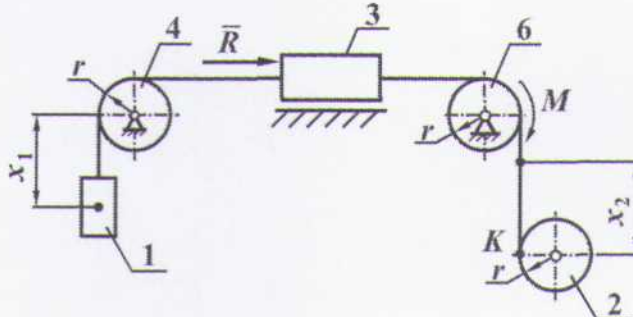


Рис. 34

На рис. 34 система изображена в движении.

Решение.

Для решения задачи применим уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2. \quad (2)$$

Здесь T – кинетическая энергия системы; Q_1 и Q_2 – обобщённые силы.

Для данной системы

$$T = \sum T_i$$

Выразим абсолютные скорости центров масс твёрдых тел системы через обобщённые скорости:

$$V_1 = V_3 = \dot{x}_1, \quad V_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2.$$

Здесь учтено, что для тела 2 $\dot{x}_1$ – переносная скорость при движении вместе с нитью, $\dot{x}_2$ – относительная скорость.

Угловые скорости тел (рис. 34)

$$\left. \begin{aligned} \omega_4 = \omega_6 = \frac{\dot{x}_1}{r}; \\ \omega_2 = \frac{\dot{x}_2}{r}. \end{aligned} \right\}$$

Моменты инерции блоков относительно центральных осей:

$$J_4 = J_6 = \frac{2mr^2}{2} = mr^2.$$

Момент инерции цилиндра 2 относительно центральной оси:

$$J_2 = \frac{8mr^2}{2} = 4mr^2.$$

Кинетическая энергия тел:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{3}{2} m \dot{x}_1^2.$$

$$T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = 4m(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + 2m\dot{x}_2^2; \quad T_4 = \frac{J_4 \omega_4^2}{2} = \frac{m\dot{x}_1^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = 2m\dot{x}_1^2; \quad T_6 = \frac{J_6 \omega_6^2}{2} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2.$$

Получим:

$$T = \frac{9}{2} m \dot{x}_1^2 + 2m\dot{x}_2^2 + 4m(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2. \quad (3)$$

Для вычисления обобщённой силы Q_1 зададим системе виртуальное движение ($\dot{x}_1 > 0; \dot{x}_2 = 0$) и подсчитаем мощность сил

$$N_1 = m_1 g \cdot \dot{x}_1 - R \cdot \dot{x}_1 - M \cdot \omega_6 - m_2 g \cdot \dot{x}_1,$$

или

$$N_1 = \left(3mg - b\dot{x}_1 - \frac{M}{r} - 8mg \right) \cdot \dot{x}_1 = - \left(5mg + b\dot{x}_1 + \frac{M}{r} \right) \cdot \dot{x}_1.$$

Обобщённая сила Q_1 равна коэффициенту при $\dot{x}_1$ в выражении мощности N_1 :

$$Q_1 = - \left(5mg + b\dot{x}_1 + \frac{M}{r} \right). \quad (4)$$

Для вычисления обобщённой силы Q_2 зададим системе виртуальное движение ($\dot{x}_1 = 0; \dot{x}_2 > 0$) и подсчитаем мощность сил

$$N_2 = m_2 g \cdot \dot{x}_2 = 8mg \cdot \dot{x}_2.$$

Обобщённая сила Q_2 равна коэффициенту при $\dot{x}_2$ в выражении мощности N_2 :

$$Q_2 = 8mg. \quad (5)$$

Найдем значения слагаемых уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 9m\dot{x}_1 + 8m(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 17m\dot{x}_1 - 8m\dot{x}_2; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = 4m\dot{x}_2 - 8m(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 12m\dot{x}_2 - 8m\dot{x}_1; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = 17m\ddot{x}_1 - 8m\ddot{x}_2 \quad (9)$$

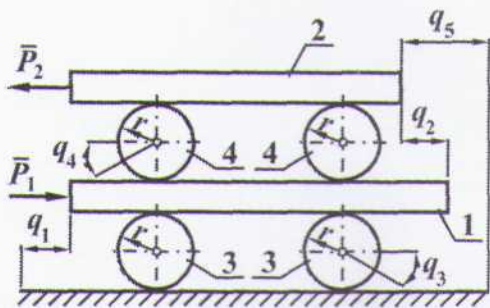
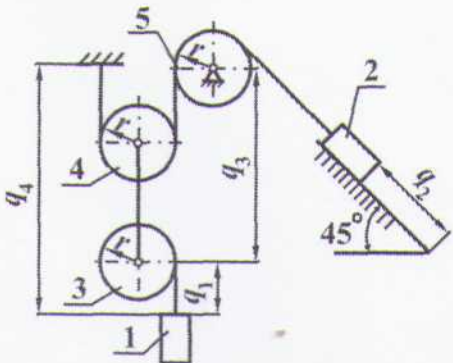
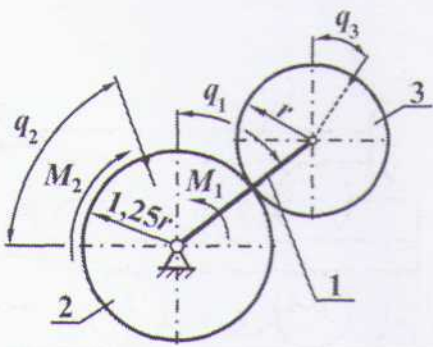
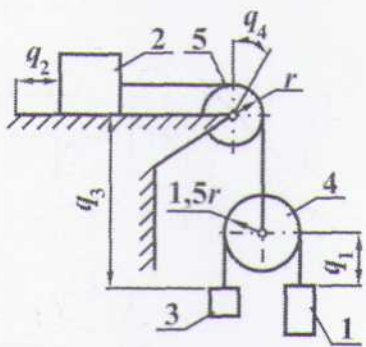
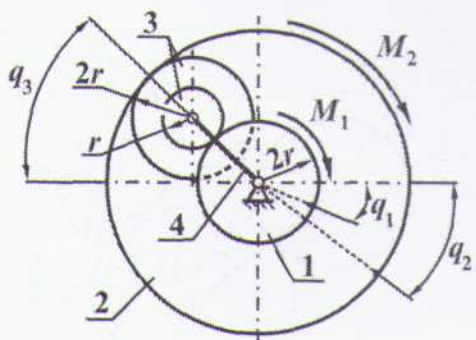
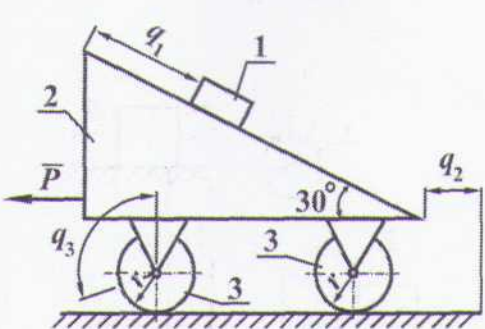
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = 12m\ddot{x}_2 - 8m\ddot{x}_1 \quad (10)$$

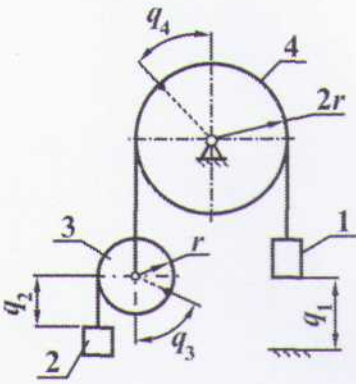
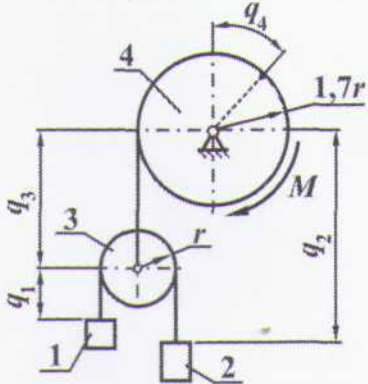
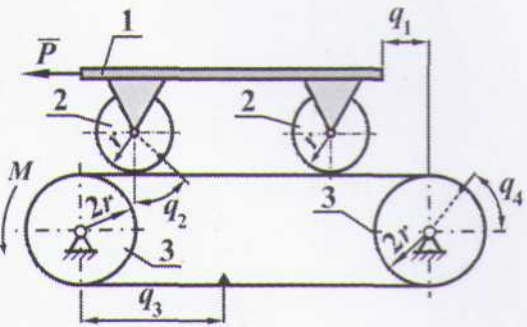
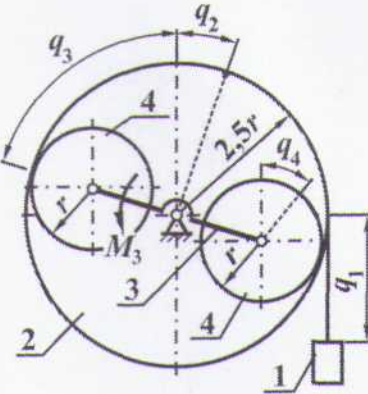
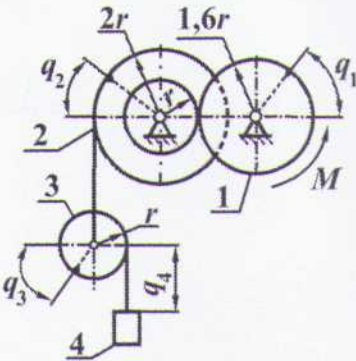
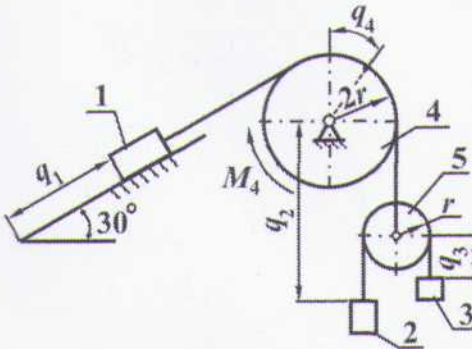
Подставляя в (1) и (2) выражения (4), (5), (8 – 10) и значения M и b , получим дифференциальные уравнения движения системы:

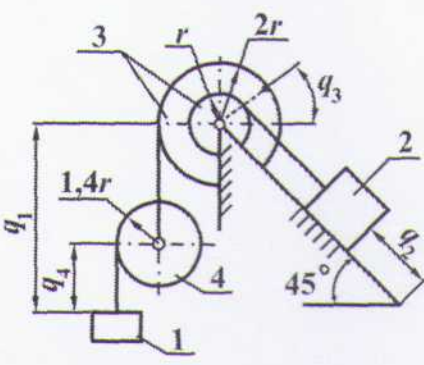
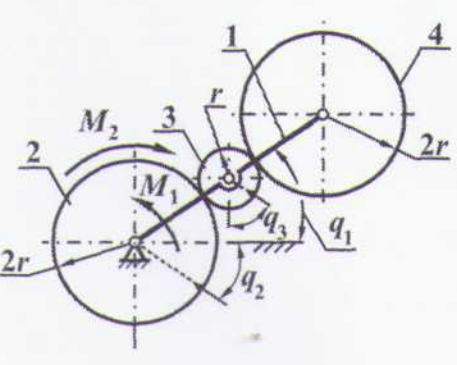
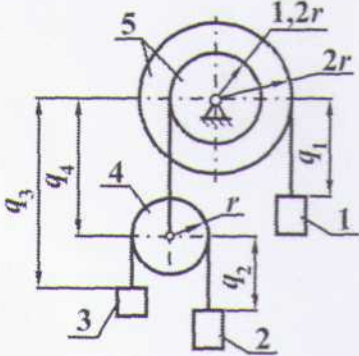
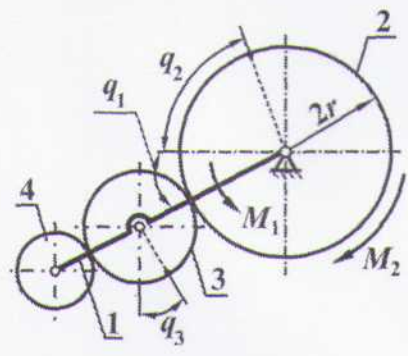
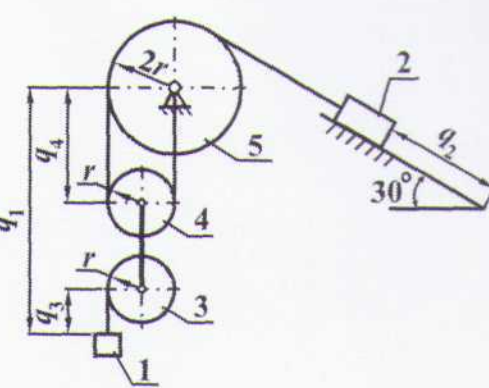
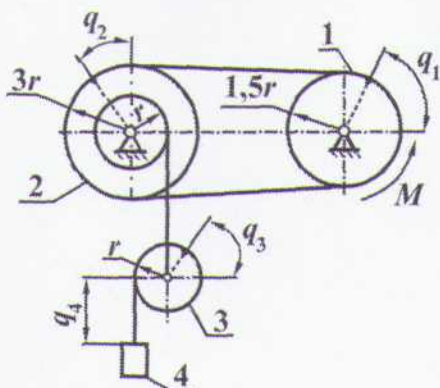
$$\left. \begin{aligned} 17\ddot{x}_1 - 8\ddot{x}_2 + \eta\dot{x}_1 &= -8g, \\ 2\ddot{x}_1 - 3\ddot{x}_2 &= -2g. \end{aligned} \right\}.$$

Схемы механизмов к заданиям №6

задание №1	задание №2
задание №3	задание №4
задание №5	задание №6

задание №7	задание №8
	
задание №9	задание №10
	
задание №11	задание №12
	

задание №13	задание №14
	
задание №15	задание №16
	
задание №17	задание №18
	

задание №19	задание №20
	
задание №21	задание №22
	
задание №23	задание №24
	

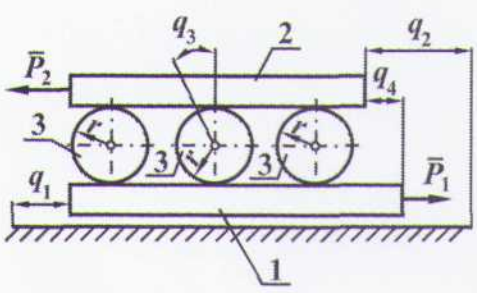
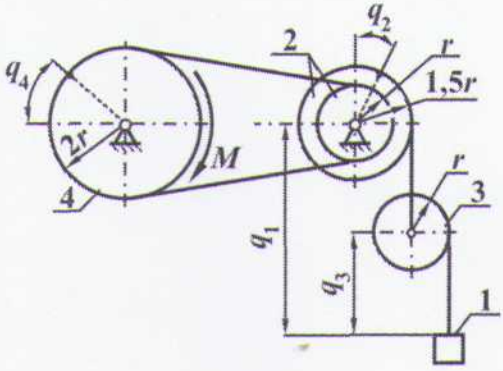
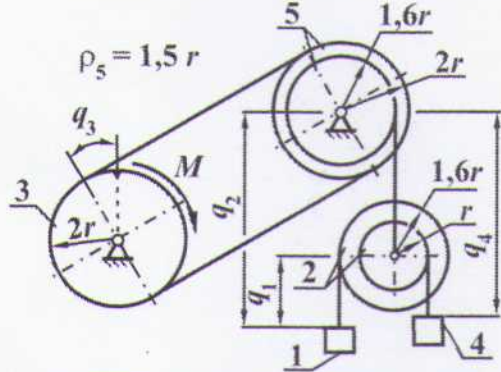
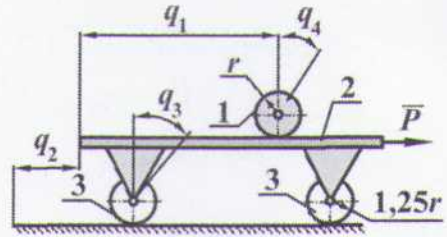
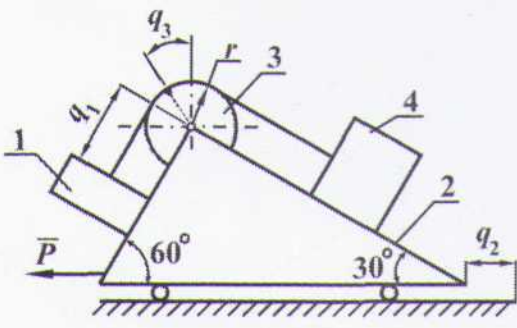
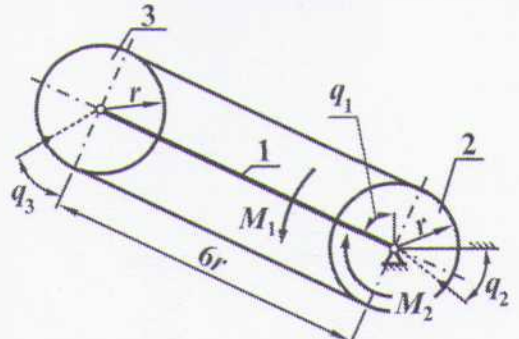
задание №25	задание №26
	
задание №27	задание №28
	
задание №29	задание №30
	

Таблица 20

Данные для индивидуального задания №6

№ варианта	№ задания	массы тел					радиус инерции		нагрузка	f	q_i
		m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	ρ_2	ρ_3	P, M		
1	1	$2m$	$6m$	m	m	-	-	-	-	-	$q_1; q_3$
2	2	m	$3m$	-	-	-	-	-	M	-	$q_1; q_3$
3	3	m	$3m$	$2m$	-	-	$r\sqrt{2}$	-	M_4	-	$q_1; q_4$
4	4	m	$2m$	$2m$	$2m$	-	$r\sqrt{2}$	-	-	f	$q_1; q_3$
5	5	m	$2m$	$4m$	$2m$	$2m$	-	-	-	f	$q_1; q_2$
6	6	m	$2m$	$3m$	-	-	$2r$	-	M_1, M_2	-	$q_1; q_2$
7	7	$3m$	$3m$	m	m	-	-	-	$P_1; P_2$	-	$q_1; q_2$
8	8	m	$2m$	$2m$	$2m$	$2m$	-	-	-	f	$q_1; q_2$
9	9	m	$2m$	$3m$	-	-	-	-	M_1, M_2	-	$q_1; q_2$
10	10	$2m$	$2m$	m	-	m	-	-	-	f	$q_1; q_2$
11	11	m	$3m$	$2m$	m	-	$4r$	$r\sqrt{2}$	M_1, M_2	-	$q_1; q_3$
12	12	$2m$	$5m$	m	-	-	-	-	P	f	$q_1; q_2$
13	13	m	$3m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	-	$q_1; q_2$
14	14	$2m$	m	m	$2m$	-	-	-	M	-	$q_1; q_3$
15	15	$3m$	m	$2m$	-	-	-	-	$P; M$	-	$q_1; q_3$
16	16	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$2r$	-	M	-	$q_2; q_3$
17	17	m	$3m$	$2m$	$2m$	-	$r\sqrt{2}$	-	-	-	$q_1; q_3$
18	18	$2m$	$2m$	m	m	$3m$	-	-	M_4	f	$q_1; q_2$
19	19	$2m$	$2m$	$3m$	m	-	-	$r\sqrt{2}$	-	f	$q_1; q_2$
20	20	$2m$	$3m$	m	$3m$	-	-	-	M_1, M_2	-	$q_1; q_2$
21	21	$2m$	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$\rho_5 = 1,5r$	-	-	$q_1; q_2$
22	22	m	$3m$	$2m$	m	-	-	-	M_1, M_2	-	$q_1; q_2$
23	23	$2m$	m	m	m	$3m$	-	-	-	f	$q_1; q_2$
24	24	m	$3m$	m	$2m$	-	$2r$	-	M	-	$q_2; q_4$
25	25	$2m$	$2m$	m	-	-	-	-	$P_1; P_2$	f	$q_1; q_2$
26	26	m	$3m$	$2m$	$3m$	-	-	r	M	-	$q_1; q_2$
27	27	$2m$	$2m$	$3m$	m	$2m$	$r\sqrt{2}$	-	M	-	$q_1; q_2$
28	28	m	$3m$	m	-	-	-	-	P	-	$q_1; q_2$
29	29	$2m$	$4m$	m	m	-	-	-	P	f	$q_1; q_2$
30	30	$3m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	M_1, M_2	-	$q_1; q_2$