Таблица 3.3. Значения приближённых решений, получаемых на последовательных итерациях при решении СЛАУ методом Зейделя

Итерации	x_1	x_2	x_3	$\max_i \left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\|$
0	2	2	−2	
1	0.500	1.700	−1.360	1.500
2	0.895	1.907	−1.082	0.395
.....	.....	.....	.....	.....
6	1.000	2.000	−1.000	0

Решение показывает большую скорость сходимости метода Зейделя. ▲

3.2.2. Нелинейные уравнения

В общем случае уравнение с одним неизвестным имеет вид

$$f(x) = 0 \tag{3.2.57}$$

или

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{3.2.58}$$

где $f(x), f_1(x), f_2(x)$ — заданные функции, определенные на данном отрезке $[a, b]$.

Всякое число ξ (действительное или мнимое) на отрезке $[a, b]$, обращающее любое из этих уравнений в тождество:

$$f(\xi) \equiv 0 \tag{3.2.59}$$

или

$$f_1(\xi) \equiv f_2(\xi), \tag{3.2.60}$$

называется *корнем уравнения* или *его решением.*

Решение задачи приближенного определения корней уравнения состоит из двух этапов:

1) отделение корней, т.е. нахождение подынтервалов $[\alpha, \beta]$ на отрезке $[a, b]$, которые содержат только один корень уравнения;
2) уточнение корней, т.е. непосредственное вычисление значений корней на найденных подынтервалах $[\alpha, \beta]$ с заданной точностью ε.

Понятие об отделении корней

Графический способ отделения корней заключается в построении графика функции $f(x)$ (3.2.57) либо графиков двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (3.2.58) на отрезке $[a, b]$. В первом случае точка пересечения графика функции с осью абсцисс, а во втором — абсцисса точки пересечения двух функций дают приближенное значение корня уравнения (3.2.57) или соответственно (3.2.58). Найденные таким образом приближенные значения корней позволяют выделить отрезки $[\alpha, \beta]$ (на рис. 3.9, *а* их три, на рис. 3.9, *б* — два), в которых при необходимости можно выполнить уточнение корней.

При *отделении действительных корней* расчетным путем для непрерывных функций $f(x)$ можно руководствоваться следующими соображениями:

- *если на концах отрезка* $[a,b]$ *функция имеет разные знаки* $f(a)f(b) < 0$, *то между точками a и b на оси абсцисс имеется нечетное число корней; если же* $f(a)f(b) > 0$, *то между a и b имеется четное число корней или их совсем нет;*

- *если $f(a)f(b)<0$ и либо $f'(x)$, либо $f''(x)$ не меняет знака на этом отрезке, то уравнение имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$.*

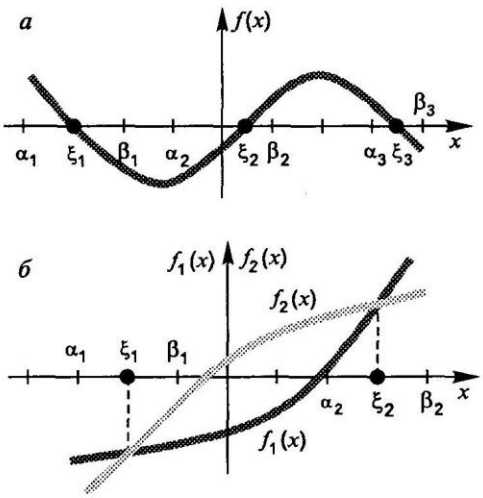

Рис. 3.9. Графический способ отделения корней: *а* — график построен для одной функции; *б* — график построен для двух функций

Пример. Отделить все действительные корни уравнения $x^5-4x-2=0$ на отрезке $[-2, 2]$.

▼ Находим значения функции $f(x)$ на концах отрезка: $f(-2)=-26$; $f(2)=22$. Так как функции имеют разные знаки, то на отрезке $[-2, 2]$ имеется нечетное число корней.

Первая и вторая производные от функции $f(x)$,

$$f'(x)=5x^4-4 \text{ и } f''(x)=20x^3,$$

меняют знак на отрезке $[-2, 2]$, поэтому корней будет несколько и отрезок надо разделить пополам.

Рассмотрим два отрезка $[-2, 0]$ и $[0, 2]$ отдельно; так как $f(0)=-2$, то $f(-2)\cdot f(0)>0$, а $f(0)\cdot f(+2)<0$. На первом отрезке $[-2, 0]$ либо не содержится корней, либо их четное число, а на втором $[0, 2]$ — их нечетное число. На втором отрезке первая производная меняет знак, вторая — не меняет, поэтому он содержит единственный корень. Таким образом, отделен один корень уравнения — на отрезке $[0, 2]$.

Первый отрезок делится пополам и получается два отрезка $[-2, -1]$ и $[-1, 0]$. Так как $f(-1)=1$, значения функций на концах каждого из отрезков различны: $f(-2)\cdot f(-1)<0$ и $f(-1)\cdot f(0)<0$; эти отрезки должны содержать нечетное число корней. На отрезке $[-2, -1]$ первая производная не меняет знака, а на отрезке $[-1, 0]$ вторая производная не меняет своего знака. Отсюда можно заключить, что на отрезках $[-2, -1]$ и $[-1, 0]$ имеется по одному корню.

Таким образом, на отрезке $[-2, 2]$ для уравнения $x^5-4x-2=0$ отделено три действительных корня на отрезках $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ и $[0, 2]$. ▲

При решении задач всегда следует руководствоваться физическими соображениями при отделении корней. Это дает возможность существенно сузить диапазон поиска корней, а часто и локализовать их физически допустимые значения.

Уточнение корней

Численный приближённый метод решения задачи, при котором уточняется первоначальное заданное приближение решения, называется *итерационным методом* или *методом последовательных приближений*. Каждый шаг этого метода носит название итерации.

Если при последовательных итерациях $(k=1, 2, 3, \ldots)$ получаемые величины $x^{(k)}$ все ближе приближаются к истинному значению корня ξ, то итерационный процесс будет *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*. При этом различают монотонную или колебательную сходимость (расходимость) в зависимости от того, с одной или с разных сторон осуществляется приближение (удаление) к (от) искомому (-го) решению (-я).

Для реализации итерационного процесса должны быть заданы начальное приближение $x^{(0)}$ и точность ε, с которой требуется найти решение уравнения.

Первоначальное грубое приближение $x^{(0)}$ следует задавать из физических соображений и по результатам отделения корней. Все остальные приближения получаются из итерационной формулы, соответствующей используемому методу решения уравнения.

Условие окончания итерационного процесса (нахождения значения корня с точностью ε) имеет вид:

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \le \varepsilon, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.2.61}$$

При этом согласно тождеству (3.2.59) для приближения $x^{(k+1)}$, принимаемого за решение уравнения (3.2.57), должно также выполняться и неравенство

$$\left|f(x^{(k+1)})\right| \le \varepsilon. \tag{3.2.62}$$

Итерационные методы являются самоисправляющимися, так как отдельные ошибки расчетов не приводят к искажению конечных результатов. Это обусловлено тем, что каждое очередное приближение корня при последовательных итерациях можно рассматривать как новое начальное приближение.

Метод половинного деления

В основе лежит деление отрезка [*a*, *b*], на котором отделен корень уравнения, пополам; итерационная формула для вычисления последовательных приближений имеет вид:

$$x^{(k)} = (a+b)/2, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.2.63}$$

На каждой итерации отрезок [*a*, *b*] уменьшается в два раза и выбирается та его половина, на концах которой функция $f(x)$ имеет разные знаки:

если $f(a)f(x^{(k)}) > 0$, то $a = x^{(k)}$;

если $f(b)f(x^{(k)}) > 0$, то $b = x^{(k)}$;

если $f(x^{(k)}) = 0$, то $x^{(k)} = \xi$, т.е. корню (решению) уравнения.

Процесс деления каждого нового отрезка проводится по аналогии и продолжается до тех пор, пока длина последнего отрезка не станет сравнимой с заданной точностью ε:

$$|a - b| \le 2\varepsilon. \tag{3.2.64}$$

Появление сомножителя 2 в правой части неравенства по сравнению с (3.2.61) объясняется тем, что в качестве решения всегда принимается середина последнего отрезка:

$$\xi \approx (a+b)/2. \tag{3.2.65}$$

Пример. Методом половинного деления найти корень уравнения $x^2 - 0.6 = 0$, локализованный на отрезке [0, 1], с точностью ε = 0.025.

▼ Имеем $f(x) = x^2 - 0.6$; при $a = 0 \to f(a) = a^2 - 0.6 = -0.6$;

и при $b = 1 \to f(b) = b^2 - 0.6 = 0.4$.

Таким образом, на концах отрезка [*a*, *b*] функция $f(x)$ имеет разные знаки. Первое приближение определяется по итерационной формуле (3.2.63):

$x^{(1)} = (0+1)/2 = 0,5$; $f(x^{(1)}) = -0,35$; выбирается правая половина отрезка [0.5, 1.0]. Значения всех приближений представим в табл. 3.4, в которой k — номер итерации.

Таблица 3.4. Значения приближённых решений уравнения $x^2 - 0.6 = 0$, получаемых методом половинного деления

k	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x^{(k)}$	$(x^{(k)})^2$	$f(x^{(k)})$	$[a-b]$
1	0.00	1.00	−0.6	0.4	0.5	0.25	−0.35	1.00>2ε
2	0.50	1.00	−0.35	0.4	0.75	0.563	−0.037	0.50>2ε
3	0.75	1.00	−0.037	0.4	0.825	0.681	0.081	0.25>2ε
4	0.75	0.825	−0.037	0.081	0.788	0.620	0.020	0.075>2ε
5	0.75	0.788						0.038<2ε

Искомое приближение корня находим по формуле (3.2.65): $(0.75+0.788)/2 = 0.769$. При этом функция $f(\xi) = 0.59136 - 0.6 = -0.008639$, а точность $\varepsilon = 0.038 / 2 = 0.019 < 0.025$, т.е. выполнено условие завершения итерационного процесса.▲

Для *нахождения количества итераций*, необходимых для обеспечения требуемой точности определения корня, находим выражение для отрезка $[a, b]$ на k-й итерации:

$$b - a = (b-a)_{\text{исх}} / 2^k ,$$

где $(b-a)_{\text{исх}}$ — длина исходного отрезка $[a, b]$. Подстановка этого соотношения в (3.2.64) приводит к неравенству $(b-a)_{\text{исх}} \le 2^{k+1}\varepsilon$ или, после логарифмирования,

$$k \le \frac{1}{\lg 2}\lg\left((b-a)_{\text{исх}}/\varepsilon\right) - 1 \approx 3{,}3 \ \lg\left((b-a)_{\text{исх}}/\varepsilon\right) - 1 .$$

Число итераций в этом методе зависит от предварительно задаваемой точности ε и длины отрезка $[a, b]$ и не зависит от вида функции $f(x)$. При заданной высокой точности ε расчетов метод сходится медленнее, чем другие известные методы.

Метод простой итерации

Уравнение $f(x) = 0$ (3.2.57) должно быть преобразовано к виду:

$$x = \varphi(x), \tag{3.2.66}$$

который является частным случаем уравнения (3.2.58) — см. рис. 3.9, *б*, когда $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \varphi(x)$. Поэтому корень уравнения (3.2.66) ξ при графической интерпретации соответствует абсциссе точки пересечения прямой x с кривой $\varphi(x)$ (рис. 3.10).

Сущность этого метода заключается в следующем. Задается начальное приближение $x^{(0)}$ (один из концов интервала $[a, b]$ либо точка внутри него) и подставляется в правую часть уравнения (3.2.66). В результате получается приближение корня на первой итерации:

$$x^{(1)} = \varphi(x^{(0)}) .$$

На второй итерации полученное значение $x^{(1)}$ опять подставляется в правую часть (3.2.66) и вычисляется второе приближение

$$x^{(2)} = \varphi(x^{(1)}) .$$

Эти соотношения будут справедливы и для всех последующих итераций, включая и произвольную $(k + 1)$-ю:

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{3.2.67}$$

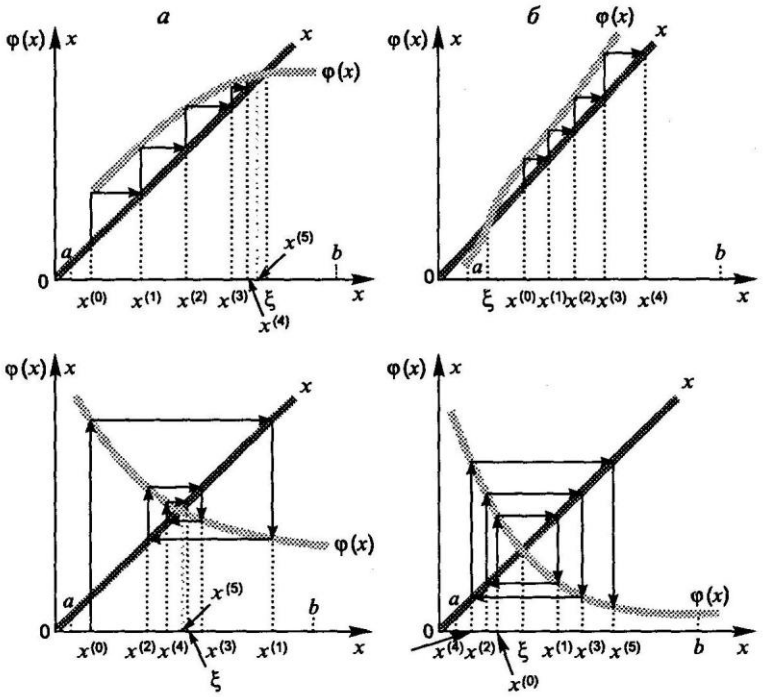

Рис. 3.10. Графическая интерпретация метода простых итераций: *а* — сходящиеся процессы; *б* — расходящиеся процессы

Итерационный процесс завершается, когда будет выполнено условие (3.2.61).

Графическая интерпретация метода представлена на рис. 3.10. Приведены случаи сходимости (см. рис. 3.10, *а*) и расходимости (см. рис. 3.10, *б*), причем оба этих процесса могут происходить как монотонно, так и колебательно. В соответствии с этим сходимость или расходимость метода зависит от того, каким образом располагается кривая $\varphi(x)$ относительной прямой x, т.е. как преобразуется уравнение вида (3.2.57) к виду (3.2.66). Например, из уравнения $\lg x - x^2 + 3 = 0$ можно получить следующие формы уравнения (3.2.66):

$$\text{а) } x = \sqrt{\lg x + 3} = \varphi(x); \quad \text{б) } x = (\lg x + 3)/x = \varphi(x); \quad \text{в) } x = 10^{x^2-3} = \varphi(x).$$

Предпочтение следует отдавать тому виду функции $\varphi(x)$, при реализации которой обеспечивается сходимость, по возможности монотонная.

При выборе вида функции $\varphi(x)$ следует руководствоваться достаточным условием сходимости, которое справедливо для непрерывных функций $\varphi(x)$, имеющих непрерывную производную. Это условие формулируется следующим образом: *итерационный процесс обязательно сходится, если для всех значений x отрезка* $[a, b]$ *выполняется неравенство:*

$$|\varphi'(x)| < 1, \qquad x \in [a, b]. \tag{3.2.68}$$

В соответствии с этим неравенством тангенс угла наклона кривой $\varphi(x)$ в точках $x^{(k)}$ (см. рис. 3.10) не должен превышать величины, равной единице. При этом принято различать три вида сходимости:

$|\varphi'(x)| < 0.1$ — хорошая сходимость;

$0.1 < |\varphi'(x)| < 0.5$ — удовлетворительная сходимость;

$0.5 < |\varphi'(x)| < 1.0$ — плохая сходимость.

Пример. Методом простых итераций решить уравнение $\lg x - x^2 + 3 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0.001$, принимая в качестве начального приближения $x^{(0)} = 2.0$.

▼ Из рассмотренных выше способов выражения функции $\varphi(x)$ выберем следующий:

$$\varphi(b) = \sqrt{\lg x + 3}, \qquad \text{тогда} \qquad \varphi'(x) = \frac{\lg e}{2x\sqrt{\lg x + 3}}.$$

Определим значения $\varphi'(x)$ в различных точках x:

$$\varphi'(2.0) = 0.06; \qquad \varphi'(1.8) = 0.067; \qquad \varphi'(1.6) = 0.076.$$

Здесь $\varphi'(x) < 0.1$, поэтому есть основание ожидать хорошей сходимости.

Итерационная формула будет иметь вид

$$x^{(k+1)} = \sqrt{\lg x^{(k)} + 3}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

На первой итерации имеем:

$$x^{(0)} = 2.0; \qquad x^{(1)} = \sqrt{\lg 2.0 + 3}, \qquad x^{(1)} = 1.817;$$

$$\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| = 0.183; \qquad 0.183 > 0.001.$$

На второй итерации имеем:

$$x^2 = \sqrt{\lg 1.817 + 3}; \qquad x^{(2)} = 1.8052;$$

$$\left|x^{(2)} - x^{(1)}\right| = |1.8052 - 1.817| = 0.0118; \qquad 0.0118 > 0.001.$$

На третьей итерации вычисляется следующее значение:

$$x^{(3)} = \sqrt{\lg 1.8052 + 3}; \qquad x^{(3)} = 1.8046;$$

$$\left|x^{(3)} - x^{(2)}\right| = |1.8046 - 1.8052| = 0.0006; \qquad 0.006 < 0.001.$$

Так как в соответствии с (3.2.61) точность достигнута, то $\xi \approx 1.8046$.▲

В том случае, когда уравнение (3.2.57) не удается привести к виду (3.2.66) таким образом, чтобы в процессе решения выполнялось достаточное условие сходимости (3.2.68), то вместо уравнения $f(x) = 0$ берут равносильное уравнение

$$\lambda f(x) = 0,$$

где λ — некоторое число. К левой и правой частям прибавляют x и получают уравнение в форме (3.2.66):

$$x = x + \lambda f(x) = \varphi(x).$$

Достаточное условие сходимости (3.2.68) для последнего уравнения имеет вид:

$$|1 + \lambda f'(x)| < 1. \tag{3.2.69}$$

В этом случае параметр λ следует подбирать таким образом, чтобы условие (3.2.69) всегда выполнялось.

Точность приближений $x^{(k+1)}$, т.е. близость их к истинному значению корня ξ, оценивается по формуле

$$\left|x^{(k+1)} - \xi\right| \geq (g/(1-g))\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|, \tag{3.2.70}$$

где g определяется как наибольшее значение функции производной $\varphi'(x)$, удовлетворяющей неравенству (3.2.68) на отрезке $[a, b]$:

$$|\varphi'(x)| \leq g < 1. \tag{3.2.71}$$

Из этого условия следует, что если g близко к 1, то $x^{(k+1)}$ далеко от ξ даже тогда, когда $x^{(k)}$ близко к $x^{(k+1)}$, так как $g/(1-g)$ велико. Поэтому получаемое по условию (3.2.61) приближенное значение корня $x^{(k+1)}$ в этом случае будет неточным.

Достоинство метода простых итераций состоит в том, что при удачном выборе вида функции $\varphi(x)$ он обеспечивает быструю и надежную сходимость. Однако для сложных уравнений получение такого вида функции связано с большой предварительной работой, а иногда и вообще не представляется возможным.

Метод Ньютона (касательных)

Итерационная формула этого метода получается, если разложить функцию $f(x)$ уравнения (3.2.57) в окрестности точки $x^{(k)}$ (k-го приближения) в ряд Тейлора, ограничившись линейными членами:

$$f(x^{(k)}+\Delta x^{(k)}) \approx f(x^{(k)})+\Delta x^{(k)} f'(x^{(k)}). \qquad (3.2.72)$$

Окрестность $\Delta x^{(k)}$ выбирается таким образом, чтобы следующее приближение стало корнем, т.е.

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}+\Delta x^{(k)}) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}.$$

Использование этих соотношений и (3.2.73) приводит к итерационной формуле метода Ньютона

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots . \qquad (3.2.73)$$

Геометрическая иллюстрация итерационного процесса этого метода представлена на рис. 3.11 (*а* – сходимость, *б* – расходимость). Значение каждого нового приближения (3.2.73) на графике получается, если к кривой функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$ провести касательную до пересечения с осью абсцисс:

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x^{(k)}) = \frac{f(x^{(k)})}{x^{(k+1)} - x^{(k)}}. \qquad (3.2.74)$$

В качестве начальных приближений обычно принимается либо один из концов отрезка $[a, b]$ (на рис. 3.11, *а* – точка b), либо точка внутри него (рис. 3.11, *б*).

Достаточное условие сходимости процесса расчета определяется для непрерыв-

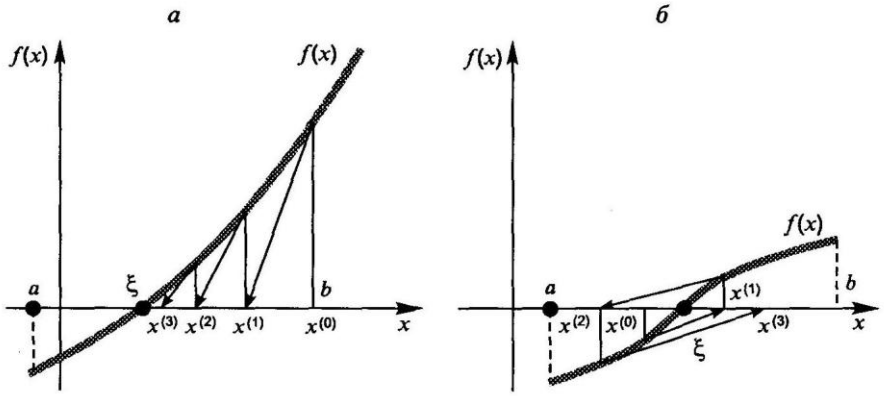

Рис. 3.11. Геометрическая иллюстрация сходимости (*а*) и расходимости (*б*) метода Ньютона (касательных)

ных функций с непрерывными производными при условии, что $f'(x) \neq 0$ и $f''(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$. В этом случае $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$ [см. (3.2.66)], поэтому условие сходимости (3.2.68) имеет вид:

$$|\varphi'(x)| = \left|1 - \frac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2} < 1. \qquad (3.2.75)$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы:

- начальное приближение выбиралось достаточно близко к корню уравнения;
- вторая производная не становилась очень большой;
- первая производная по возможности больше отличалась от нуля.

Отсюда также следует, что если при последовательных итерациях будет выполняться условие:

$$f(x)f''(x) > 0, \qquad (3.2.76)$$

то приближение к значению корня ξ будет происходить с одной стороны. Поэтому в качестве начального приближения в методе касательных рекомендуется использовать тот конец отрезка $[a, b]$, где выполняется условие (3.2.76).

Пример. Найти действительный корень уравнения $\lg x - x^2 + 3 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0.002$ на отрезке [1.5, 2.0].

▼ Определяем производные функции $f(x) = \lg(x) - x^2 + 3$:

$$f'(x) = (\lg e)/x - 2x, \qquad f''(x) = -(\lg e)/x^2 - 2.$$

Находим значения функции и ее производных на концах отрезка:

$$f(1{,}5) = 0.9; \qquad f'(1.5) = -2.71; \qquad f''(1.5) = -2.19;$$
$$f(2) = -0.70; \qquad f'(2) = -3.78; \qquad f''(2) = -2.11.$$

В качестве начального приближения принимается правый конец отрезка, так как $f(2) \cdot f''(2) > 0$, т.е. $x^{(0)} = 2.0$. Далее расчеты выполняются в такой последовательности:

$$f(2.0) = -0.699; \qquad f'(2.0) = -3.783; \qquad x^{(1)} = 2.0 - 0.699/3.483 = 1.815;$$
$$\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| = |1.815 - 2.0| > 0.02;$$
$$f(x^{(1)}) = -0.03535; \qquad f'(x^{(1)}) = -3.391; \qquad x^{(2)} = 1.815 - 0.03535/3.391 = 1.80457;$$
$$\left|x^{(2)} - x^{(1)}\right| = |1.80457 - 1.815| < 0.02.$$

В качестве корня следует принять $x^{(2)} = 1.80457$, так как функция при этом значении аргумента близка к нулю: $f(x^{(2)}) = -0.00723$. Ответ: $\xi \approx 1.80457$. ▲

Скорость сходимости оценивается с помощью разложения функции $f(x)$ в окрестности приближения $x^{(k)}$ в ограниченный ряд Тейлора:

$$f(\xi) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\xi - x^{(k)}) + (1/2)f''(\eta)(\xi - x^{(k)})^2, \qquad (3.2.77)$$

где η заключено между ξ и $x^{(k)}$; так как $f(\xi) \equiv 0$, то

$$f(x^{(k)})/f'(x^{(k)}) = x^{(k)} - \xi - \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x^{(k)})}(\xi - x^{(k)})^2$$

или

$$x^{(k)} - f(x^{(k)})/f'(x^{(k)}) - \xi = \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x^{(k)})}(\xi - x^{(k)})^2. \qquad (3.2.78)$$

Если принять, что $m = \min\limits_{[a,b]}|f'(x)|$, а $M = \max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$, и левую часть равенства (3.2.78) взять с учетом итерационной формулы этого метода (3.2.73), то будет справедливо неравенство:

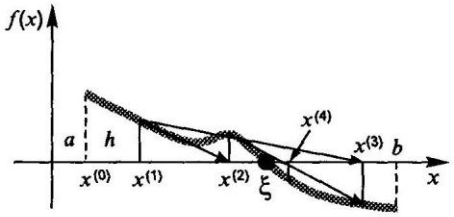

Рис. 3.12. Графическая иллюстрация сходимости модифицированного метода Ньютона (касательных)

$$\left|x^{(k+1)}-\xi\right| \le (M/(2m))\left|x^{(k)}-\xi\right|^2. \qquad (3.2.79)$$

Неравенство (3.2.79) гарантирует быструю сходимость метода Ньютона, если выполняются достаточные условия сходимости (3.2.75) для всех приближений.

Наибольшее распространение получила модификация метода Ньютона, когда производная в формуле (3.2.74) вычисляется приближенно по результатам двух предыдущих итераций

$$f'(x^{(k)}) = \frac{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}{x^{(k)}-x^{(k-1)}},$$

и итерационная формула (3.2.73) принимает вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})\frac{x^{(k)}-x^{(k-1)}}{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})} \qquad (3.2.80)$$

или

$$x^{(k+1)} = \frac{x^{(k-1)}f(x^{(k)})-x^{(k)}f(x^{(k-1)})}{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}. \qquad (3.2.81)$$

Итерационная формула (3.2.80) предполагает задание некоторого начального шага поиска $h=\left|x^{(1)}-x^{(0)}\right|$, т.е. практически в этой модификации метода Ньютона следует задавать два начальных приближения: $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$ (рис. 3.12), а модифицированный метод Ньютона называется *методом секущих*.

Метод хорд

Сущность этого метода заключается в аппроксимации функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ хордой, стягивающей значения функции на концах отрезка (рис. 3.13). Точка пересечения хорды с осью абсцисс представляет собой приближение к искомому корню уравнения.

Итерационная формула метода получается из подобия треугольников $x^{(k+1)}aL$ и $x^{(k+1)}Mb$:

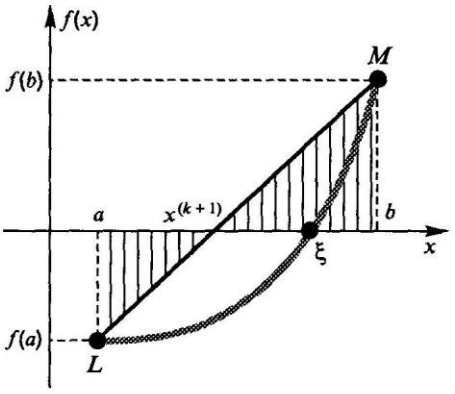

Рис. 3.13. Графическая иллюстрация вывода итерационной формулы метода хорд

$$x^{(k+1)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}, \qquad k=0,1,2,3,\ldots. \qquad (3.2.82)$$

Из сравнения последнего выражения с (3.2.81) следует, что новое приближение в модифицированное методе касательных представляет собой точку пересечения хорды, стягивающей функции, соответствующие значениям приближений на двух последних итерациях, с осью абсцисс (см. рис. 3.12).

После каждой итерации длина отрезка $[a,b]$ уменьшается, причем оставляется та его часть, на концах которой функция имеет разные знаки. При этом изменяется либо a, либо b в формуле (3.2.82) (рис. 3.14):

если $f(a)f(x^{(k+1)})>0$, то $a=x^{(k+1)}$;

если $f(x^{(k+1)})f(b)>0$, то $b=x^{(k+1)}$.

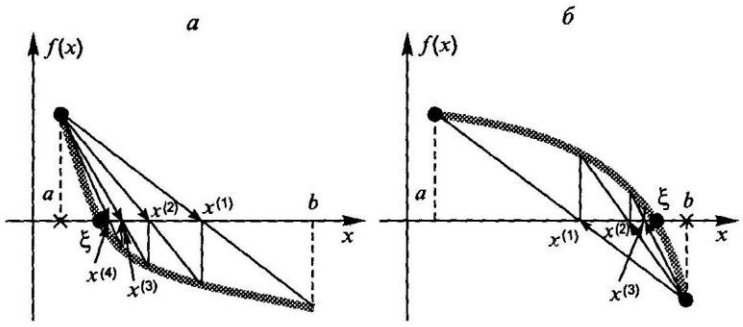

Рис. 3.14. Графическая иллюстрация сходимости метода хорд: *а* — сходимость итерационного процесса при изменении правой границы (*b*) интервала поиска; *б* — сходимость итерационного процесса при изменении левой границы (*a*) интервала поиска

Пример. Найти корень уравнения $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$ на отрезке [1.8, 1.9] с точностью $\varepsilon = 0.005$.

▼ Вычисляем значения функции $f(x)$ на концах интервала: $f(1.8) = -0.248$; $f(1.9) = 0.339$. Далее по формуле (3.2.82) определяем первое приближение:

$$x^{(1)} = (1.8 \cdot 0.339 - 1.9(-0.248))/(0.339 - (-0.248)) = 1.842; \qquad f(1.842) = -0.01009.$$

Отсюда получаем, что $f(a)f(x^{(1)}) > 0$, поэтому $a = 1.842$ и корень следует искать на отрезке [1.842, 1.9]. Второе приближение определяется также по формуле (3.2.82):

$$x^{(2)} = (1.842 \cdot 0.339 - 1.9(-0.01009))/(0.339 + 0.01009) = 1.8437;$$

$$\left|x^{(2)} - x^{(1)}\right| = 0.0017 < 0.005;$$

поэтому $\xi \approx 1.8437$.▲

Условие сходимости метода хорд (3.2.61)–(3.2.62) оценивается для непрерывных функций $f(x)$ (3.2.57) с непрерывными первыми и вторыми производными, которые не меняют знака на отрезке [*a*, *b*] и не равны нулю на нем.

Для таких функций $f(x)$ при реализации итерационного процесса один конец отрезка [*a*, *b*] будет неподвижным, причем тот, где $f(c) \cdot f''(c) > 0$ [$c = a$ (см. рис. 3.14, *а*) либо $c = b$ (рис. 3.14, *б*)]. Итерационная формула для этого случая имеет вид

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})\frac{x^{(k)} - c}{f(x^{(k)}) - f(c)} = \frac{cf(x^{(k)}) - x^{(k)}f(c)}{f(x^{(k)}) - f(c)}, \text{ где } x^{(0)} = \begin{cases} a, \text{если } c = b \\ b, \text{если } c = a \end{cases}.$$

Условия сходимости и его скорости оцениваются так же, как и для метода Ньютона (3.2.73). Если принять в этом случае:

$$f'(x) \approx (f(x) - f(c))/(x - c), \tag{3.2.83}$$

то можно показать, что условия сходимости (3.2.75) в случае непрерывных функций $f(x)$ всегда выполняются, а скорость сходимости оценивается с помощью неравенства

$$|x^{(k+1)} - \xi| \le (M/(2m))|\xi - c||\xi - x^{(k)}|,$$

где M и m определяются с учетом (3.2.79). По сравнению с (3.2.79) здесь $\left|\xi - x^{(k)}\right|$ в первой степени и сомножитель $|\xi - c|$ не уменьшается от итерации к итерации.

Этот метод применять отдельно нецелесообразно, но желательно в комбинации с другими методами.

которых анализ сходимости оказывается значительно сложнее по ср нейными системами, а порой становится практически невозможны следует отметить, что сходимость методов существенно зависит от зада го приближения, т.е. от того, насколько начальное приближение близ решению. Поэтому при выборе начального приближения необходим максимум имеющейся информации об искомом решении.

Метод простых итераций

При использовании этого метода система (3.2.85) приводится к форме вида:

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

для которой используется расчетная формула

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

где выражения для функции $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ получаются из системы (3. ческим решением каждого уравнения относительно соответствующег x_i, $i = 1, ..., n$; $x_i^{(k+1)}$, $x_i^{(k)}$ — значения $(k+1)$-го и k-го приближений i-го н

С использованием матричной формы записи расчетная формула ме

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{\varphi}(\bar{x}^{(k)}), \text{ где } \bar{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}, \qquad \bar{\varphi}(\bar{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\bar{x}^{(k)}) \\ \varphi_2(\bar{x}^{(k)}) \\ \vdots \\ \varphi_n(\bar{x}^{(k)}) \end{bmatrix}.$$

Процесс итераций заканчивается при выполнении на очередной ите

$$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon$$

для $i = 1, 2, ..., n$, где ε — заданная точность решения.

Метод Ньютона—Рафсона

Вывод итерационной формулы метода Ньютона—Рафсона выполн мы двух нелинейных уравнений [сравн. с методом Ньютона (касательн ния одного уравнения (3.2.73)]:

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \qquad f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Допустим, что имеется k-е приближение к решению $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$. Вели $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}$ для получения нового $(k+1)$-го приближения может быть определ что новое приближение будет соответствовать решению — функции (3.2.87) р

$$f_1(x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)}) = 0, \qquad f_2(x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)}) = 0.$$

Полагая, что $\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}$ — величины малые, функции уравнений си можно представить в виде разложения в ряд Тейлора по степени Δx с членов первого порядка малости:

$$f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) + \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \Delta x_2 = 0;$$

$$f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) + \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \Delta x_2 = 0.$$

Перенеся первые слагаемые в уравнениях в правую часть, запиш матричной форме в виде СЛАУ (3.2.9):

которых анализ сходимости оказывается значительно сложнее по сравнению с линейными системами, а порой становится практически невозможным. Кроме того, следует отметить, что сходимость методов существенно зависит от задания начального приближения, т.е. от того, насколько начальное приближение близко к искомому решению. Поэтому при выборе начального приближения необходимо использовать максимум имеющейся информации об искомом решении.

Метод простых итераций

При использовании этого метода система (3.2.85) приводится к итерационной форме вида:

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3.2.86}$$

для которой используется расчетная формула

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

где выражения для функции $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ получаются из системы (3.2.85) аналитическим решением каждого уравнения относительно соответствующего неизвестного x_i, $i = 1, ..., n$; $x_i^{(k+1)}$, $x_i^{(k)}$ — значения $(k+1)$-го и k-го приближений i-го неизвестного.

С использованием матричной формы записи расчетная формула метода имеет вид:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{\varphi}(\bar{x}^{(k)}), \text{ где } \bar{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}, \qquad \bar{\varphi}(\bar{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\bar{x}^{(k)}) \\ \varphi_2(\bar{x}^{(k)}) \\ \vdots \\ \varphi_n(\bar{x}^{(k)}) \end{bmatrix}.$$

Процесс итераций заканчивается при выполнении на очередной итерации условия

$$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon$$

для $i = 1, 2, ..., n$, где ε — заданная точность решения.

Метод Ньютона–Рафсона

Вывод итерационной формулы метода Ньютона–Рафсона выполним для системы двух нелинейных уравнений [сравн. с методом Ньютона (касательных) для решения одного уравнения (3.2.73)]:

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \qquad f_2(x_1, x_2) = 0. \tag{3.2.87}$$

Допустим, что имеется k-е приближение к решению $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$. Величина поправки $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}$ для получения нового $(k+1)$-го приближения может быть определена из условия, что новое приближение будет соответствовать решению — функции (3.2.87) равны нулю:

$$f_1(x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)}) = 0, \qquad f_2(x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)}) = 0. \tag{3.2.88}$$

Полагая, что $\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}$ — величины малые, функции уравнений системы (3.2.88) можно представить в виде разложения в ряд Тейлора по степени Δx с точностью до членов первого порядка малости:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) + \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2 = 0; \\ &f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) + \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.2.89}$$

Перенеся первые слагаемые в уравнениях в правую часть, запишем систему в матричной форме в виде СЛАУ (3.2.9):