



ЧИСЛЕННАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТА

Практикум



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УЧЕБНЫЙ ЦЕНТР ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗРАБОТКИ
НЕФТЯНЫХ И ГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

В.М. Галкин

ЧИСЛЕННАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТА

Практикум



Опубликовано при финансовой поддержке
ОАО «ТНК-ВР Менеджмент» в рамках
программы «Конкурс грантов профильных
высших учебных заведений Российской
Федерации»

Издательство
Томского политехнического университета
2008

УДК 622.276.5.001.42(076)

ББК 33.361я73

Г16

Галкин В.М.

Г16 Численная гидродинамическая модель пласта: практикум / В.М. Галкин. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 38 с.

ISBN 5-98298-394-2

Практикум содержит математическую постановку задачи, описывающую фильтрацию несжимаемой жидкости в упругом пористом пласте, численный метод, алгоритм и исходные данные. На основе этих составляющих построена простейшая численная гидродинамическая модель месторождения, реализованная в виде программы на языке VBA для Excel 2003, текст которой выложен на сайте <http://www.lib.tpu.ru/fulltext/m/2008/oil01.xls>. Программа демонстрирует нестационарные гидродинамические процессы в пласте, что и позволяет применять ее в учебно-научном моделировании пластовой системы.

Предназначен для студентов, обучающихся по направлению «Нефтегазовое дело». Практикум также можно использовать для овладения приемами численного моделирования и получения навыков программирования на языке VBA.

УДК 622.276.5.001.42(076)

ББК 33.361я73

ISBN 5-98298-394-2

© Галкин В.М., 2008

© Томский политехнический университет, 2008

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА	7
1.1. Основные допущения	7
1.2. Уравнения фильтрации жидкости в упругой пористой среде	7
1.3. Уравнения фильтрации для плоского течения	10
1.4. Начальные и граничные условия	12
Глава 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД	13
2.1. Конечно-разностная аппроксимация	13
2.2. Учет источниковых членов	15
Глава 3. АЛГОРИТМ	19
Глава 4. ПРОГРАММА	22
4.1. Особенности использования программы в Excel	22
4.2. Последовательность действий при создании программы	22
4.3. Особенности программной реализации	24
4.4. Текст программы	27
Глава 5. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ	33
Глава 6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	34
6.1. Вычисление дебита скважины	34
6.2. Использование в расчетах дебита скважины	34
6.3. Влияние неоднородности пласта на перераспределение давления	34
6.4. Моделирование остановки скважины	34
6.5. Нахождение распределения гидропроводности на основе кривой восстановления давления	34
6.6. Определение границы устойчивости явного метода	35
6.7. Использование неявного метода и схемы прогонки	35
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	37
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	37

ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, y, z	координаты, ось z направлена вертикально, [м];
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	орты координатных осей;
h	толщина пласта, [м]
t	время, [с];
μ	динамическая вязкость жидкости, [Па·с];
\vec{v}	вектор скорости фильтрации жидкости, с компонентами v_x, v_y, v_z , [м/с];
K	абсолютная проницаемость пористой среды, [м ²];
f	абсолютная пористость среды;
ρ	плотность, [кг/м ³];
P	давление, [Па];
$\sigma = Kh/\mu$	коэффициент гидропроводности;
Q	массовый расход, [кг/с];
q	интенсивность отбора массы из единицы объема в единицу времени, [ρ/t].

ВВЕДЕНИЕ

Реальные явления, происходящие в пластовой системе при извлечении или закачке флюидов, весьма сложны. Это упругие и вязко-упругие деформации скелета пласта, колебательные явления различной частоты и интенсивности, изменения фазового и химического состава флюидов, изменения температурных и гидродинамических полей пластовой системы, изменение и перераспределение энергии, запасенной в пластовой системе.

Во многих случаях для практических целей наибольший интерес представляет нестационарная гидродинамика пластовой системы. Это связано как с необходимостью предсказания поведения пластовой системы, так и использования данных, накопленных в процессе эксплуатации – дебитов скважин, распределений давления, кривых восстановления давления и т. д. Поэтому во всех современных программных продуктах, предназначенных для создания моделей месторождений, обязательно присутствует гидродинамический расчет.

Гидродинамические процессы, происходящие в пластовой системе, скрыты от стороннего наблюдателя в недрах земли. Поэтому так важно использование в учебном процессе современных программных продуктов, позволяющих рассчитывать и визуализировать нестационарную гидродинамику пластовой системы. Однако широкое использование этих программ в учебном процессе сдерживается рядом проблем, перечисленных далее в порядке убывания их значимости:

- 1) большая стоимость этих программ;
- 2) необходимость предварительного обучения преподавателей, что требует времени и финансов;
- 3) высокие требования, предъявляемые к компьютерам;
- 4) закрытый программный код;
- 5) отсутствие подробного описания численных методов, использованных при написании программ.

При создании данного практикума принималось во внимание не только вышесказанное, но и то, что практически на всех персональных компьютерах, используемых в учебном процессе, установлен Excel, обладающий богатыми графическими средствами отображения числовых данных и имеющий Visual Basic for Application (VBA) в качестве языка программирования.

Программа, текст которой на языке VBA для Excel 2003 приводится ниже, может использоваться в следующих случаях:

1) для демонстрации нестационарных гидродинамических процессов, происходящих при фильтрации несжимаемой жидкости в упругом пористом пласте. Прежде всего это изменение давления и положения линий тока при переводе части добывающих скважин в нагнетательные;

2) при изучении численных методов (в частности, с использованием программы легко продемонстрировать явление численной неустойчивости);

3) для получения практических навыков программирования на языке VBA в Excel 2003;

4) в учебно-научном моделировании пластовой системы;

5) в качестве самостоятельной работы. В процессе ее выполнения рекомендуется изучить влияние неоднородности пласта на перераспределение давления; смоделировать остановку скважины с получением кривой восстановления давления; используя реальные кривые восстановления давления, подобрать распределение гидропроводности; рассмотреть одномерную постановку и реализовать неявный конечно-разностный метод.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

1.1. Основные допущения

Рассматривается изотермическое движение однофазной жидкости, при этом влияние силы тяжести и капиллярных сил не учитывается.

Основные допущения:

- абсолютная проницаемость не зависит от времени;
- вязкость жидкости постоянна;
- толщина пласта везде одинакова;
- для скорости фильтрации выполняется закон Дарси;
- все параметры непрерывные и имеют непрерывные частные производные.

1.2. Уравнения фильтрации жидкости в упругой пористой среде

Выделим в пористой среде, содержащей жидкость, элементарный прямоугольный параллелепипед G (рис. 1) с ребрами Δx , Δy , Δz и центром в точке (x, y, z) .

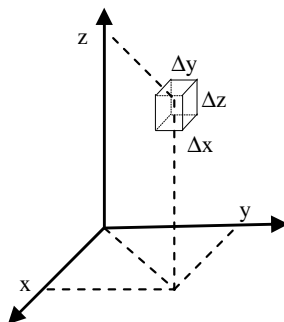


Рис. 1

Согласно закону сохранения вещества, изменение массы в этом объеме связано с оттоком жидкости через границы объема и отбором (наличием внутренних стоков) жидкости непосредственно из объема некоторым способом:

$$\text{изменение массы} + \text{внутренний сток} + \text{поток через границы} = 0.$$

Отметим, что отток и отбор (в механике сплошной среды они обычно называются источниковыми членами) могут иметь как положительное, так и отрицательное значение. В последнем случае они будут являться притоком через границы объема и, соответственно, источником, находящимся внутри объема. Рассмотрим каждую составляющую более подробно.

Первая составляющая. Если в некоторый момент времени в элементе G объемом $\Delta x \Delta y \Delta z$ масса жидкости равна:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \rho f ,$$

то изменение этой массы за единицу времени будет:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho f}{\partial t}. \quad (1)$$

Вторая составляющая. В единицу времени из рассматриваемого объема некоторым способом отбирается жидкость массой:

$$q(\Delta x \Delta y \Delta z). \quad (2)$$

Третья составляющая. Обозначим через S^+ поверхность объема G , ориентированную с помощью выбора внешней нормали. Тогда поток векторного поля $\rho \bar{v}$ через границы объема G будет равен:

$$\iint_{S^+} \rho \bar{v} dS^+.$$

Для определения этой величины воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса [1], согласно которой поток векторного поля через поверхность элемента G равен интегралу по объему от дивергенции этого вектора:

$$\iint_{S^+} \rho \bar{v} dS^+ = \iiint_G \operatorname{div}(\rho \bar{v}) dx dy dz, \quad (3)$$

где $\operatorname{div}(\rho \bar{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$. Применим к правой части уравнения (3) интегральную теорему о среднем [1]:

$$\iiint_G \operatorname{div}(\rho \bar{v}) dx dy dz = \operatorname{div}(\rho \bar{v}(m)) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad m \in G,$$

то есть интеграл по всему объему элемента G будет равен дивергенции в некоторой внутренней точке m , принадлежащей G , умноженной на объем элемента G . Таким образом, для элемента G та часть изменения массы в единицу времени, которая вызывается результирующим потоком жидкости через все его боковые грани, будет равна:

$$\operatorname{div}(\rho \bar{v})(\Delta x \Delta y \Delta z). \quad (4)$$

Окончательный баланс. Объединяя выражения (1), (2) и (4), получим, что уменьшение массы в указанном элементе за единицу времени составит:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho f}{\partial t} = \Delta x \Delta y \Delta z [-\operatorname{div}(\rho \bar{v}) - q].$$

Устремляя размеры элемента G к нулю, получим уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho f}{\partial t} = -\text{div}(\rho \bar{v}) - q, \quad (5)$$

Известно [2], что в диапазоне давлений, характерном для пластовых условий, можно использовать для плотности линеаризованное уравнение:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{жс} (P - P_0)],$$

где $\rho_0 = \text{const}$ – значение плотности, соответствующее давлению $P_0 = \text{const}$; $\beta_{жс} = \text{const}$ – коэффициент упругости жидкости. Кроме того для пластового диапазона изменения давления изменение пористости хорошо описывается зависимостью:

$$f = f_0 + \beta_c (P - P_0),$$

где $f_0 = \text{const}$ – значение пористости, соответствующее давлению $P_0 = \text{const}$; $\beta_c = \text{const}$ – коэффициент упругости скелета пласта. Так как $\beta_{жс}$ и β_c малы, то слагаемым, содержащим произведение $\beta_{жс}\beta_c$ можно пренебречь, и тогда можно записать:

$$\rho f \approx \rho_0 f_0 + \rho_0 (f_0 \beta_{жс} + \beta_c) (P - P_0). \quad (6)$$

Для пластового изменения давления можно предположить, что $\rho \approx \rho_0 = \text{const}$, то есть жидкость несжимаемая. Тогда с учетом (6) уравнение неразрывности (5) примет вид:

$$\beta_* \frac{\partial P}{\partial t} = -\text{div}(\bar{v}) - \frac{q}{\rho_0}, \quad (7)$$

где $\beta_* = f_0 \beta_{жс} + \beta_c$ – упругоемкость пласта. Будем считать, что направления главных осей тензора абсолютной проницаемости совпадают с направлением осей координат и выполняется закон Дарси, определяющий линейную зависимость скорости фильтрации от градиента давления:

$$\bar{v} = -\frac{K}{\mu} \nabla P \quad (8)$$

или

$$v_x = -\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}; v_y = -\frac{K_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}; v_z = -\frac{K_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z},$$

где $\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}$ – градиент давления;

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} - \text{тензор абсолютной проницаемости пористой сре-}$$

ды, причем $K_x = K_x(x,y,z)$, $K_y = K_y(x,y,z)$, $K_z = K_z(x,y,z)$.

Подставляя (8) в (7), получим уравнение, описывающее фильтрацию жидкости в упругой пористой среде:

$$\beta_* \frac{\partial P}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) - \frac{q}{\rho_0}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \beta_* \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{q}{\rho_0}.$$

Упростим вид этого уравнения, считая, что тензор абсолютной проницаемости является шаровым:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix},$$

где $K = K(x,y,z)$. Учитывая это, перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \beta_* \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{q}{\rho_0}. \quad (9)$$

1.3. Уравнения фильтрации для плоского течения

Предположим, что абсолютная проницаемость не меняется по вертикали: $K = K(x,y)$, а перепады давления по координате z равны нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

Тогда уравнение фильтрации (9) упростится и будет описывать плоское течение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \beta_* \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{q}{\rho_0}. \quad (10)$$

Аналогичное по виду уравнение получается, если в исходном трехмерном уравнении (9) перейти к параметрам, осредненным по толщине пласта. Отметим, что для плоскорадиального течения уравнение (9) примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rK}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \beta_* \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{q}{\rho_0},$$

где r – радиальная координата.

Предположим, что источниковый член меняется по следующему закону:

$$q = \begin{cases} 0, & z \notin [Z_1, Z_2] \\ q_h, & z \in [Z_1, Z_2] \end{cases},$$

причем $Z_2 - Z_1 = h$. Этому соответствует ситуация, когда забой вскрыл пласт толщиной h . Проинтегрируем уравнение (10) от Z_1 до Z_2 :

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dz = \int_{Z_1}^{Z_2} \left[\beta_* \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{q_h}{\rho_0} \right] dz.$$

С учетом того, что величины, независимые от z , выносятся за знак интеграла, получим:

$$h \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] = h \beta_* \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \int_{Z_1}^{Z_2} q_h dz$$

или:

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}(P)) = h \beta_* \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \int_{Z_1}^{Z_2} q_h dz, \quad (11)$$

где $\sigma = \frac{Kh}{\mu}$ – коэффициент гидропроводности.

Работа скважины обычно характеризуется массовым расходом Q . Поэтому перейдем от q_h к Q . Для этого воспользуемся соотношением, связывающим q_h и Q :

$$\int_S \left(\int_{Z_1}^{Z_2} q_h dz \right) ds = Q,$$

где S – это поперечная площадь забоя. Применяя к левой части интегральную теорему о среднем [1], получим:

$$\int_S \left(\int_{Z_1}^{Z_2} q_h dz \right) ds = S \int_{Z_1}^{Z_2} q_h(m) dz, \quad m \in S.$$

Будем приближенно считать, что

$$\int_{Z_1}^{Z_2} q_h(m) dz \approx \int_{Z_1}^{Z_2} q_h dz,$$

тогда

$$\int_{z_1}^{z_2} q_h dz = \frac{Q}{S}.$$

С учетом этого уравнение (11) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right) = h\beta_* \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{Q}{S\rho_0} \quad (12)$$

или

$$\operatorname{div} (\sigma \operatorname{grad} (P)) = h\beta_* \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{Q}{S\rho_0},$$

где $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}(P)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right).$

1.4. Начальные и граничные условия

Как известно, уравнения в частных производных могут иметь бесконечное количество решений. Чтобы выбрать среди этих решений единственное, необходимо определить рассматриваемую область и в зависимости от типа уравнений задать граничные и начальные условия. Уравнение (12) имеет параболический тип, поэтому необходимы начальные условия в виде распределения параметров в рассматриваемой области в начальный момент времени и граничные условия на границе области.

Расчетная область задается в виде прямоугольника:

$$\begin{aligned} x &\in [x_0, x_k], \\ y &\in [y_0, y_k], \end{aligned}$$

на границе области будут использоваться стационарные граничные условия первого рода:

$$\begin{aligned} P(x_0, y, t) &= \alpha_1(y), & P(x_k, y_0, t) &= \alpha_2(y), & y &\in [y_0, y_k], \\ P(x, y_0, t) &= \alpha_3(x), & P(x, y_k, t) &= \alpha_4(x), & x &\in [x_0, x_k]. \end{aligned}$$

Начальные условия задаются в виде:

$$P(x, y, 0) = \alpha_5(x, y), \quad t = 0.$$

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

2.1. Конечно-разностная аппроксимация

При решении уравнения (12) конечно-разностным методом можно использовать явную или неявную схему. Сведения об этих схемах можно найти в [3]. Уравнение (12) будем решать с использованием явной конечно-разностной схемы, которая проще неявной в реализации, но в отличие от неявной схемы для устойчивости расчета должно выполняться ограничение на шаг интегрирования по времени.

Для перехода к конечным разностям покроем расчетную область равномерной прямоугольной сеткой с числом узлов $N_x * N_y$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_x, \quad \Delta x = (x_k - x_0) / N_x, \\ y &= y_0 + \Delta y \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_y, \quad \Delta y = (y_k - y_0) / N_y, \end{aligned}$$

где Δx и Δy – шаги по x и y . Шаг по времени обозначим через Δt , тогда:

$$t = \sum \Delta t_j.$$

Перейдем к сеточным функциям, используя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P(x, y, t) &= P(i, k, j) = P_{ik}^j, \\ \sigma(x, y) &= \sigma(i, k) = \sigma_{ik}, \\ \alpha_1(y) &= \alpha_1(k) = \alpha_{1k}, \quad \alpha_2(y) = \alpha_2(k) = \alpha_{2k}, \\ \alpha_3(x) &= \alpha_3(i) = \alpha_{3i}, \quad \alpha_4(x) = \alpha_4(i) = \alpha_{4i}, \\ \alpha_5(x, y) &= \alpha_5(i, k) = \alpha_{5ik}. \end{aligned}$$

Источниковые члены задаются в узлах сетки:

$$Q(x, y, t) = Q(i, k, j) = Q_{ik}^j.$$

Переход к конечным разностям осуществляем по формулам:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{ik}^{j+1} &= \frac{P_{ik}^{j+1} - P_{ik}^j}{\Delta t} + O(\Delta t), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{ik}^j &= \frac{\left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}k}^j - \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}k}^j}{\Delta x} = \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}k} \frac{P_{i+1k}^j - P_{ik}^j}{\Delta x} - \sigma_{i-\frac{1}{2}k} \frac{P_{ik}^j - P_{i-1k}^j}{\Delta x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}k} P_{i+1k}^j - \sigma_{i+\frac{1}{2}k} P_{ik}^j - \sigma_{i-\frac{1}{2}k} P_{ik}^j + \sigma_{i-\frac{1}{2}k} P_{i-1k}^j}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik}^j &= \frac{\left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik+\frac{1}{2}}^j - \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik-\frac{1}{2}}^j}{\Delta y} = \frac{\sigma_{ik+\frac{1}{2}} \cdot \frac{P_{ik+1}^j - P_{ik}^j}{\Delta y} - \sigma_{ik-\frac{1}{2}} \cdot \frac{P_{ik}^j - P_{ik-1}^j}{\Delta y}}{\Delta y} = \\ &= \frac{\sigma_{ik+\frac{1}{2}} P_{ik+1}^j - \sigma_{ik+\frac{1}{2}} P_{ik}^j - \sigma_{ik-\frac{1}{2}} P_{ik}^j + \sigma_{ik-\frac{1}{2}} P_{ik-1}^j}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2), \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{i\pm\frac{1}{2}k} = \frac{\sigma_{ik} + \sigma_{i\pm 1k}}{2}, \quad \sigma_{ik\pm\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_{ik} + \sigma_{ik\pm 1}}{2}.$$

Конечно-разностный аналог уравнения (12) примет вид:

$$\begin{aligned} h\beta_* \frac{(P_{ik}^{j+1} - P_{ik}^j)}{\Delta t} + \frac{Q_{ik}^j}{Sp_0} &= \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}k} P_{i+1k}^j - \sigma_{i+\frac{1}{2}k} P_{ik}^j - \sigma_{i-\frac{1}{2}k} P_{ik}^j + \sigma_{i-\frac{1}{2}k} P_{i-1k}^j}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{\sigma_{ik+\frac{1}{2}} P_{ik+1}^j - \sigma_{ik+\frac{1}{2}} P_{ik}^j - \sigma_{ik-\frac{1}{2}} P_{ik}^j + \sigma_{ik-\frac{1}{2}} P_{ik-1}^j}{\Delta y^2} + O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2), \end{aligned}$$

где $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$ – ошибка аппроксимации за счет дискретизации, то есть точность решения уравнения (12) по времени будет иметь первую степень, а по пространству – вторую степень. Окончательная расчетная формула:

$$\begin{aligned} P_{ik}^{j+1} = P_{ik}^j + \frac{\Delta t}{h\beta_*} \left[\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}k} P_{i+1k}^j - \sigma_{i+\frac{1}{2}k} P_{ik}^j - \sigma_{i-\frac{1}{2}k} P_{ik}^j + \sigma_{i-\frac{1}{2}k} P_{i-1k}^j}{\Delta x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{ik+\frac{1}{2}} P_{ik+1}^j - \sigma_{ik+\frac{1}{2}} P_{ik}^j - \sigma_{ik-\frac{1}{2}} P_{ik}^j + \sigma_{ik-\frac{1}{2}} P_{ik-1}^j}{\Delta y^2} - \frac{Q_{ik}^j}{Sp_0} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Вид этой явной конечно-разностной схемы с разностями **Вперед** по **Времени** и **Центральными** по **Пространству** (ВВЦП) изображен на рис. 2.

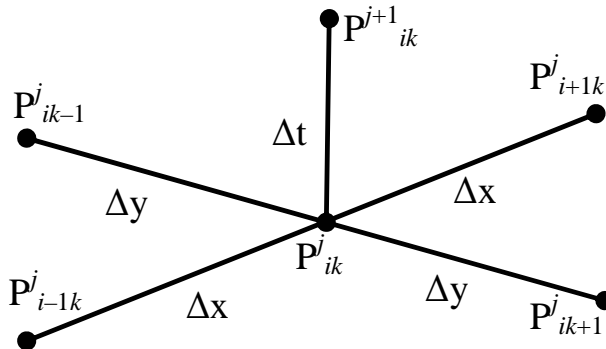


Рис. 2. Схема ВВЦП

Критерий устойчивости для схемы ВВЦП имеет вид [4]:

$$\Delta t \leq \frac{\delta \Delta x^2 \Delta y^2 h \beta_*}{2 \max(\sigma_{ik}) (\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad i = 0, \dots, Nx, \quad k = 0, \dots, Ny, \quad (14)$$

где коэффициент $\delta \leq 1$ обеспечивает запас по устойчивости.

Используя закон Дарси (8) по найденному полю давления в узлах сетки, можно найти поле скоростей. Для этого во внутренних узлах сетки используется конечно-разностное представление уравнения (8) центральными разностями:

$$V_{xik} = -\frac{\sigma_{ik}}{h} \frac{P_{i+1k} - P_{i-1k}}{2\Delta x}, \quad V_{yik} = -\frac{\sigma_{ik}}{h} \frac{P_{ik+1} - P_{ik-1}}{2\Delta y},$$

а на границах используются направленные разности [5, с. 713]:

$$V_{x0k} = -\frac{\sigma_{0k}}{h} \frac{-3P_{0k} + 4P_{1k} - P_{2k}}{2\Delta x}, \quad V_{xNk} = -\frac{\sigma_{Nk}}{h} \frac{3P_{Nk} - 4P_{N-1k} + P_{N-2k}}{2\Delta x},$$

$$V_{yi0} = -\frac{\sigma_{i0}}{h} \frac{-3P_{i0} + 4P_{i1} - P_{i2}}{2\Delta y}, \quad V_{yiNy} = -\frac{\sigma_{iNy}}{h} \frac{3P_{iNy} - 4P_{iNy-1} + P_{iNy-2}}{2\Delta y}.$$

Известно, что в любой момент времени в каждой точке вектор скорости направлен по касательной к линии тока, поэтому с использованием поля скоростей можно схематично показать положение линий тока. Для этого используется простейший алгоритм, согласно которому из каждого узла сетки выстраивается отрезок, направление которого совпадает с вектором скорости, а его длина l_{ik}^j на каждом временном шаге j вычисляется по формуле:

$$l_{ik}^j = \frac{\sqrt{(V_{xik}^j)^2 + (V_{yik}^j)^2}}{\max_{ik}(l_{ik}^j)} \Delta t_j.$$

2.2. Учет источниковых членов

При численной реализации уравнения (12) для упрощения алгоритма вместо источниковых членов, которые располагаются в определенных узлах сетки, можно задавать в этих узлах изменение давления по некоторому закону. Этому изменению давления будет соответствовать некоторый дебит. Для нахождения этого дебита рассмотрим узел сетки с индексом ik (рис. 3), в котором есть источниковый член. Роль источника будет выполнять нагнетательная или добывающая скважина, находящаяся в точке ik . Естественно, что скважина имеет определенный размер и в точку поместиться не может,

однако диаметр скважины значительно меньше размеров расчетной сетки и такое допущение оправдано.

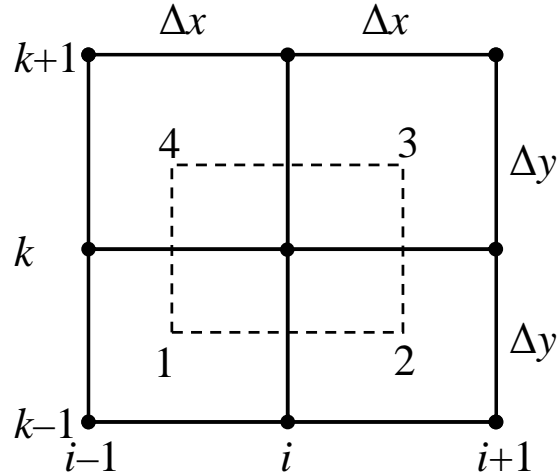


Рис. 3

Проинтегрируем уравнение (12) по площадке 1234 (рис. 3), проходящей через середины сторон сетки:

$$\iint_{1234} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}(P)) dx dy = \iint_{1234} h \beta_* \frac{\partial P}{\partial t} dx dy + \iint_{1234} \frac{Q}{S \rho_0} dx dy. \quad (15)$$

Для правой части уравнения (15) можно приближенно записать:

$$\iint_{1234} h \beta_* \frac{\partial P}{\partial t} dx dy + \iint_{1234} \frac{Q}{S \rho_0} dx dy \approx h \beta_* \frac{P_{ik}^{j+1} - P_{ik}^j}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \frac{Q_{ik}^{j+1}}{S \rho_0} \Delta x \Delta y, \quad (16)$$

где Q_{ik}^{j+1} – дебит скважины, находящейся в узле сетки с индексом ik в момент времени $j+1$.

Напомним теорему Остроградского–Гаусса [1]:

$$\iint_G \operatorname{div}(\vec{a}) dx dy = \oint_{L^+} \vec{a} \cdot \vec{n} dl = \oint_{L^+} (a_x \cos(\vec{i}, \vec{n}) + a_y \cos(\vec{j}, \vec{n})) dl,$$

где G – площадь; L^+ – ее замкнутая граница, с направленной наружу нормалью \vec{n} ; dl – элемент границы; $\cos(\vec{i}, \vec{n})$ и $\cos(\vec{j}, \vec{n})$ – направляющие косинусы между осями координат и нормалью. Применяя эту теорему к левой части уравнения (15), получим:

$$\begin{aligned} \iint_{1234} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}(P)) dx dy &= \oint_{1234} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \cos(\vec{i}, \vec{n}) + \sigma \frac{\partial P}{\partial y} \cos(\vec{j}, \vec{n}) \right) dl = \\ &= \int_1^2 \dots dl + \int_2^3 \dots dl + \int_3^4 \dots dl + \int_4^1 \dots dl, \end{aligned}$$

где многоточие обозначает выражение, аналогичное предыдущему интегралу. Из рис. 3 видно, что для каждого из отрезков 12, 23, 34, 41 будут выполняться соотношения:

отрезок 12 – $\cos(\vec{i}, \vec{n}) = \cos(270^\circ) = 0$, $\cos(\vec{j}, \vec{n}) = \cos(180^\circ) = -1$, $dl = dx$;

отрезок 23 – $\cos(\vec{i}, \vec{n}) = \cos(0^\circ) = 1$, $\cos(\vec{j}, \vec{n}) = \cos(90^\circ) = 0$, $dl = dy$;

отрезок 34 – $\cos(\vec{i}, \vec{n}) = \cos(90^\circ) = 0$, $\cos(\vec{j}, \vec{n}) = \cos(0^\circ) = 1$, $dl = -dx$;

отрезок 41 – $\cos(\vec{i}, \vec{n}) = \cos(180^\circ) = -1$, $\cos(\vec{j}, \vec{n}) = \cos(90^\circ) = 0$, $dl = -dy$.

Тогда предыдущее выражение примет вид:

$$\begin{aligned} & \oint_{1234} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \cos(\vec{i}, \vec{n}) + \sigma \frac{\partial P}{\partial y} \cos(\vec{j}, \vec{n}) \right) dl = \\ & = - \int_1^2 \sigma \frac{\partial P}{\partial y} dx + \int_2^3 \sigma \frac{\partial P}{\partial x} dy - \int_3^4 \sigma \frac{\partial P}{\partial y} dx + \int_4^1 \sigma \frac{\partial P}{\partial x} dy = \\ & = - \int_1^2 \sigma \frac{\partial P}{\partial y} dx + \int_2^3 \sigma \frac{\partial P}{\partial x} dy + \int_4^3 \sigma \frac{\partial P}{\partial y} dx - \int_1^4 \sigma \frac{\partial P}{\partial x} dy. \end{aligned}$$

Переходя к численному интегрированию получим:

$$\begin{aligned} & - \int_1^2 \sigma \frac{\partial P}{\partial y} dx + \int_2^3 \sigma \frac{\partial P}{\partial x} dy + \int_4^3 \sigma \frac{\partial P}{\partial y} dx - \int_1^4 \sigma \frac{\partial P}{\partial x} dy \approx \\ & - \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik-\frac{1}{2}}^{j+1} \Delta x + \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}k}^{j+1} \Delta y + \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik+\frac{1}{2}}^{j+1} \Delta x - \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}k}^{j+1} \Delta y, \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik-\frac{1}{2}}^{j+1} &= \sigma_{ik-\frac{1}{2}} \frac{P_{ik}^{j+1} - P_{ik-1}^{j+1}}{\Delta y}, & \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}k}^{j+1} &= \sigma_{i+\frac{1}{2}k} \frac{P_{i+1k}^{j+1} - P_{ik}^{j+1}}{\Delta x}, \\ \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik+\frac{1}{2}}^{j+1} &= \sigma_{ik+\frac{1}{2}} \frac{P_{ik+1}^{j+1} - P_{ik}^{j+1}}{\Delta y}, & \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}k}^{j+1} &= \sigma_{i-\frac{1}{2}k} \frac{P_{ik}^{j+1} - P_{i-1k}^{j+1}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Таким образом, объединяя (16) и (17), получим уравнение (15) в виде:

$$\begin{aligned} & h\beta_* \frac{P_{ik}^{j+1} - P_{ik}^j}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \frac{Q_{ik}}{S\rho_0} \Delta x \Delta y = \\ & = - \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik-\frac{1}{2}}^{j+1} \Delta x + \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}k}^{j+1} \Delta y + \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik+\frac{1}{2}}^{j+1} \Delta x - \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}k}^{j+1} \Delta y, \end{aligned}$$

откуда можно найти дебит:

$$Q_{ik} = S\rho_0 \left[-h\beta_* \frac{P_{ik}^{j+1} - P_{ik}^j}{\Delta t} - \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik-\frac{1}{2}}^{j+1} \frac{1}{\Delta y} + \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}k}^{j+1} \frac{1}{\Delta x} + \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{ik+\frac{1}{2}}^{j+1} \frac{1}{\Delta y} - \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}k}^{j+1} \frac{1}{\Delta x} \right]. \quad (18)$$

В программе, которая приведена далее, для каждой скважины задается изменение давления в зависимости от времени. Очевидно, что используя формулу (18), можно найти дебит этих скважин, что предлагается в качестве самостоятельной работы для студентов.

Отметим, что в [2] и [4] учет дебита скважины производится по другой формуле, в основу которой положена формула Дюпюи для радиального течения в окрестности скважины.

ГЛАВА 3. АЛГОРИТМ

В процессе отладки алгоритма выяснилось, что расчетная часть VBA программы, связанная с вычислением и отображением на диаграммах давлений и скоростей, выполняется значительно быстрее, чем создание и размещение диаграмм на листе Excel. Поэтому программа разделена на две не связанные между собой части – первая часть создает, масштабирует, размещает диаграммы и указывает расположение данных для них, а вторая часть рассчитывает искомые величины и выводит их на диаграммы (см. рис. 4). Каждая из этих частей запускается нажатием соответствующей кнопки, о чем пойдет речь ниже.



Рис. 4

Для упрощения алгоритма контроль за последовательностью действий возлагается на пользователя. Расчет параметров и вывод их на диаграммы без предварительного создания диаграмм может привести к ошибке в VBA.

Последовательность действий при создании диаграмм отражена на рис. 5. При размещении 3D диаграммы для давления выполняются следующие действия:

- 1) указывается, что диаграмма помещается на лист Excel, указывается имя этого листа;
- 2) диаграмма сдвигается на 3000 единиц влево и на 200 единиц вверх;
- 3) указывается диапазон данных, которые будут использоваться для построения диаграммы;
- 4) указывается тип диаграммы «поверхность»;
- 5) удаляется «легенда»;
- 6) указывается название диаграммы и шрифт;
- 7) название диаграммы перемещается на 325 единиц вправо;
- 8) указывается максимальное значение «Рнагнет»;
- 9) указывается минимальное значение «Рдобыв»;
- 10) удаляются оси «X», «Y» и горизонтальные линии.

При размещении диаграммы для линий тока выполняются следующие действия:

- 1) находятся минимальные и максимальные значения координат узлов сетки, общее количество графиков;
- 2) указывается, что диаграмма помещается на лист Excel, указывается имя этого листа;
- 3) диаграмма сдвигается на 3000 единиц влево и на 135 единиц вниз;

- 4) указывается начало данных и что данные находятся в строках;
- 5) указывается тип диаграммы «линейный без маркеров»;
- 6) удаляется «легенда»;
- 7) указывается название диаграммы и шрифт;
- 8) название диаграммы перемещается на 325 единиц вправо;
- 9) указывается минимальное и максимальное значение по оси «X»;
- 10) указывается минимальное и максимальное значение по оси «Y»;



Рис. 5. Создание диаграмм

- 11) удаляются оси «X», «Y», горизонтальные линии и границы области построения;
- 12) закрашка внутренней области устанавливается белой;
- 13) для первого графика указываются данные «Xi», «Yi», которые будут использоваться для построения рамки, ограничивающей рассматриваемую область;
- 14) для первого графика назначается синий цвет;
- 15) толщина графика – средняя;
- 16) линия – сплошная;
- 17) далее, NGR раз в пп. 18–20 стоят линии, выходящие из узлов сетки, с длиной пропорциональной скорости и направлением, совпадающим с направлением скорости. Число линий (графиков) равно числу узлов сетки NGR;

- 18) создается очередной линейный график;
- 19) для него на листе **lin** указывается положение данных – начало графика (x_1, y_1) и конец (x_2, y_2) ;
- 20) указывается, что график рисуется сплошной, средней толщины, красной линией;
- 21) после окончания построения диаграммы с нее снимается выделение.

Алгоритм расчета параметров и вывод их на диаграммы состоит из следующих шагов:

- 1) задаются исходные данные, начальные и граничные условия;
- 2) далее, N_t раз выполняются пп. 3–10;
- 3) по формуле (13) рассчитывается поле давления во вспомогательном массиве;
- 4) пересылка из вспомогательного массива в основной массив;
- 5) вычисляется время;
- 6) задается давление на забое скважин;
- 7) по найденному полю давления с использованием центральных разностей вычисляется поле скоростей. По полю скоростей строятся отрезки, выходящие из узлов сетки и совпадающие по направлению с линиями тока, а по длине пропорциональные скорости в этой точке;
- 8) координаты начала и конца каждого отрезка заносятся на лист **lin**, найденное давление заносится на лист **pres**, номер расчетного шага и рассчитанное время заносятся на лист **all**;
- 9) опрашивается кнопка, ответственная за остановку расчета: если кнопка нажата, то выводится сообщение с предложением или продолжить расчет, или закончить его;
- 10) если выбирается продолжение расчета, то выполняется пункт 3, если окончание расчета, то расчет прекращается.

ГЛАВА 4. ПРОГРАММА

Для решения уравнения (12) с использованием явной конечно-разностной схемы (13) воспользуемся программой, написанной на Visual Basic for Application (VBA) для Microsoft Excel 2003. Файл *oil01.xls* с программой выложен в открытый доступ на сайте научно-технической библиотеки Томского политехнического университета по адресу: <http://www.lib.tpu.ru/fulltext/m/2008/oil01.xls>.

Отметим, что при создании этой программы широко использовался режим записи макросов с последующим редактированием полученного VBA текста. Первичные сведения по VBA можно найти в [6], [7], [8] или в другой литературе, посвященной использованию VBA в Excel.

4.1. Особенности использования программы в Excel

Перед открытием файла необходимо в Excel установить возможность работы с макросами: **сервис** → **макрос** → **безопасность** → закладка «**Уровень безопасности**» → **средняя**. После этого, при открытии файла *oil01.xls* указать: **не отключать макросы**.

При самостоятельной модификации программы возможно появление в ней ошибок, из-за которых программа заикликает. Чтобы остановить ее, необходимо нажать одновременно две клавиши **Ctrl** и **Pause**. Далее, в открывшемся окне нажать кнопку **End**. Таким же способом можно в любой момент времени остановить программу.

Если нет возможности скачать файл, то в этом случае необходимо выполнить пошаговые инструкции, которые приводятся далее.

4.2. Последовательность действий при создании программы

После запуска Excel установить, как указано выше, **средний уровень безопасности**.

Убедиться, что в открытой книге Excel имеется три листа. Если меньше, то добавить: поставить указатель мыши (далее просто указатель) на ярлык листа, нажать правую кнопку мыши и в контекстном меню выбрать **добавить** (далее правой кнопкой выбрать...).

Переименовать названия листов в **all**, **lin**, **pres**: поставить указатель на ярлык листа, правой кнопкой выбрать **переименовать**, набрать **all**, нажать **Enter**. Так же переименовать другие два листа в **lin** и **pres**.

Перейти в редактор VBA и создать модуль для набора текста программы: нажать **Alt + F11**, строка меню → **Insert** → **Module**.

Набрать текст программы, который приведен в разделе «Текст программы».

Убедиться в отсутствии грубых ошибок: строка меню → **Debug** → **Compile**. Если сообщения нет, то грубые ошибки отсутствуют, если сообщение есть, то необходимо исправить ошибку и повторить **Debug** → **Compile**.

Заметим, что далее слова **процедура** и **макрос** являются синонимами.

Перейти в Excel: **Alt + F11**.

Перейти на лист **all**.

Указатель мыши поставить в строку меню, правой кнопкой вызвать контекстное меню, выбрать **Формы**, в появившемся меню нажать изображение кнопки (рис. 6).

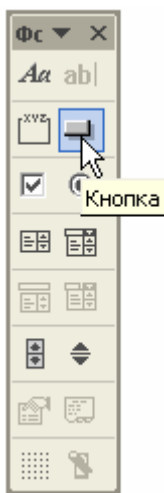


Рис. 6

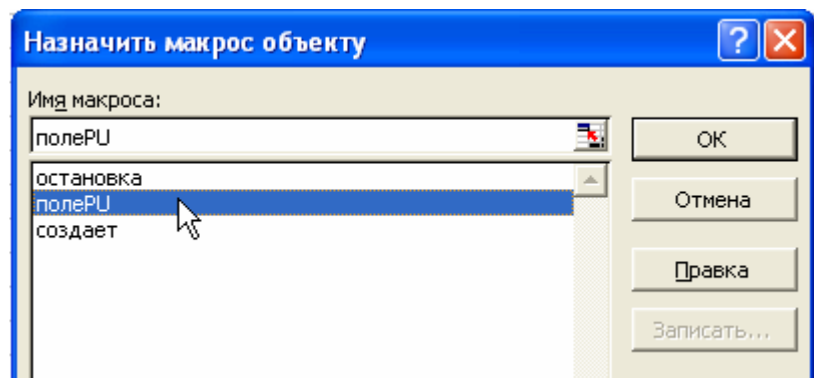


Рис. 7

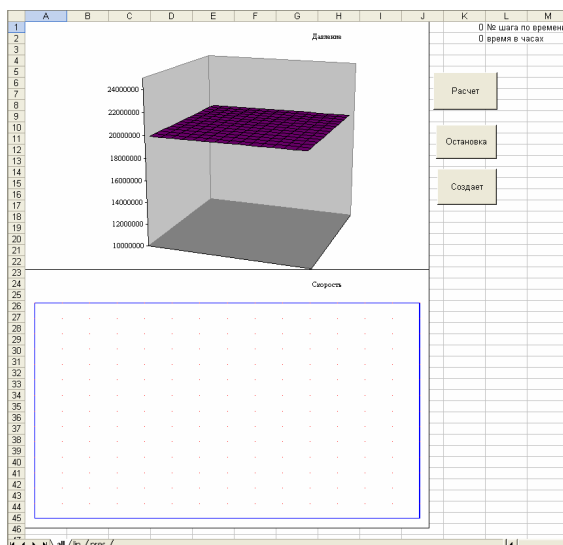


Рис. 8

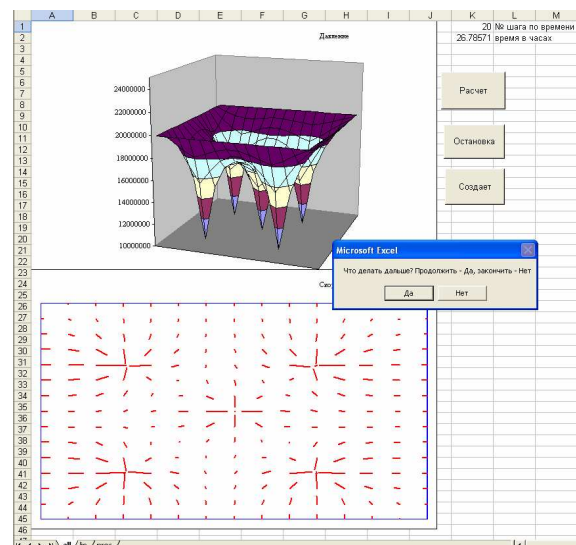


Рис. 9

При нажатой правой кнопке мыши нарисовать кнопку левее столбца *O* и ниже строки 4. После того, как правая кнопка мыши отпущена, возникнет меню **Назначить макрос объекту** (рис. 7), в котором перечислены все доступные для Excel процедуры VBA. Необходимо выбрать процедуру **полеPU** и нажать **ОК**. Далее необходимо поместить указатель мыши внутри созданной кнопки и изменить имеющийся текст на слово **Расчет**.

Повторяя последние два раздела аналогичным образом создать кнопку **Остановка**, назначить ей макрос **остановка**; создать кнопку **Создает**, назначить ей макрос **создает**.

Снять выделение с созданной кнопки, щелкнув по любой ячейке.

Перед началом работы нажать кнопку **Создает** для создания диаграмм на листе **all**, отображающих процесс расчета (рис. 8). Эту же кнопку необходимо нажимать перед началом расчета, если изменились какие-либо параметры в программе.

Расчет запускается нажатием кнопки **Расчет**. При этом на листе **lin** будут создаваться данные для построения линий тока, а на листе **pres** – данные для построения поля давления. Результаты будут отображаться на диаграммах на листе **all**.

Приостановка расчета происходит при нажатии кнопки **Остановка**. После чего необходимо выбрать или завершение расчета – кнопка **ДА** или продолжение расчета – кнопка **НЕТ** (рис. 9).

4.3. Особенности программной реализации

Укажем некоторые особенности используемых конструкций VBA.

В программе используется инструкция **Option Explicit**, поэтому все переменные должны быть описаны.

Для продолжения текста программы на следующую строку необходимо набрать два символа: **пробел** и **подчерк**.

Далее знак **:** разделяет операторы на одной строке

a = b + 1 : d = c + d

При описании переменных следующие две конструкции эквивалентны между собой:

Dim a%, b#, c\$, d

Dim a As Integer, b As Double, c As String, d As Variant

Эквивалентная предыдущим строкам форма записи:

Dim a As Integer

Dim b As Double

Dim c As String

Dim d

Если тип не указан, считается, что тип **As Variant**.

Необходимо помнить, что следующие две строки неэквивалентны:

Dim x%, y%, z%

Dim x, y, z%

Так как некоторые функции есть в Excel, но отсутствуют в VBA, то используются следующие конструкции:

Application.Min(x1,x2...) – возвращает минимальное значение из x1,x2...

Application.Max(x1,x2...) – возвращает максимальное значение из x1,x2...

Application.Pi() – возвращает число π .

Функция **MsgBox** используется в двух вариантах:

MsgBox(“Text”) – выводит Text и кнопку ОК,

i=MsgBox(“Text”, vbYesNo) – выводит Text и две кнопки ДА, НЕТ. $i=6$ при нажатой кнопке ДА, $i=7$ при нажатой кнопке НЕТ.

После апострофа идет комментарий, то есть текст, не влияющий на работу программы. Комментарии можно опустить, поэтому далее две строки эквивалентны:

a(i, k) = 1

a(i, k) = 1 ' это коэффициент

В программе используются три процедуры (макросы), которые доступны в Excel:

Public Sub создает – удаляет предыдущие диаграммы, создает начальные заготовки диаграмм для линий тока и давления, задает начальные и граничные условия в начальный момент времени. Эту процедуру необходимо выполнять, если в программе изменились какие-либо данные, а также при первом запуске программы.

Public Sub полеPU – выполняются шаги по времени, при этом производится расчет давления и вывод результатов на лист **pres**, расчет скорости и вывод результатов на лист **lin**, вывод результатов на готовые диаграммы на листе **all**, изменение режима работы скважин, вывод рассчитанного времени.

Public Sub остановка – приостанавливает работу и выводит сообщение с двумя кнопками ДА и НЕТ. При нажатии кнопки ДА работа программы продолжается, при нажатии кнопки НЕТ работа программы заканчивается.

Отметим, что служебное слово **Public** может быть опущено.

Кроме того в программе описаны 7 процедур со служебным словом **Private**, которые не доступны в Excel, а используются в указанных выше процедурах:

Private Sub нач_дан – подготавливает данные для работы программы: коэффициент гидропроводности (в программе постоянная величина), площадь сечения забоя, дебит скважин, длина шагов dx и dy . Производит очистку листов **lin**, **pres** и записывает на них данные, находит шаг по времени из условия устойчивости (14).

Private Sub нач_усл – задает начальное распределение давления.

Private Sub гр_усл – задает граничные условия.

Private Sub скважины – задает положение скважин, давление на забое и в зависимости от времени переводит добывающие скважины в нагнетательные.

Private Sub полеU – расчет компонент вектора скорости, масштабирование и рассылка данных для диаграмм.

Private Sub диагр_давл – создает 3D диаграмму для давления.

Private Sub диагр_лин_тока – создает плоскую диаграмму для линий тока.

Для уменьшения длины текста программы в двух последних процедурах используются переменные **As Variant**. Поэтому выражения:

Dim m2

Set m2=ActiveSheet

m2.Shapes(N).IncrementLeft-3000

m2.Shapes(N).IncrementTop 135

эквивалентны конструкциям:

ActiveSheet.Shapes(N).IncrementLeft-3000

ActiveSheet.Shapes(N).IncrementTop 135.

Кроме того, используются операторы **With ... End With**. Поэтому инструкции:

With m1.SeriesCollection(i+1)

.XValues=Range(m3.Cells(Lx,1),m3.Cells(Lx,2))

.Values=Range(m3.Cells(Ly,1),m3.Cells(Ly,2))

.Border.ColorIndex=3

.Border.Weight=xlMedium

.Border.LineStyle=xlContinuous.

End With

эквивалентны следующим инструкциям:

m1.SeriesCollection(i+1).XValues=Range(m3.Cells(Lx,1),m3.Cells(Lx,2))

m1.SeriesCollection(i+1).Values=Range(m3.Cells(Ly,1),m3.Cells(Ly,2))

m1.SeriesCollection(i+1).Border.ColorIndex=3

m1.SeriesCollection(i+1).Border.Weight=xlMedium

m1.SeriesCollection(i+1).Border.LineStyle=xlContinuous.

Глобальные переменные и константы, используемые в программе, находятся между строкой **Option Explicit** и первой процедурой. Они имеют следующее назначение:

Nt – число шагов по времени, которое ограничивает расчет;

Lx, Ly – размеры рассчитываемой области;

Nx, Ny – количество узлов сетки по каждой координате;

Рнач, Рнагнет, Рдобыв – пластовое давление, давление на забое нагнетательной и добывающей скважины;

h, betta, d, po – толщина пласта, упругость пласта, диаметр забоя, плотность жидкости;

dt, dx, dy, tt, S – шаги по времени, по координатам, рассчитанное время, площадь забоя.

Глобальные массивы имеют следующее назначение:
P1 – давление в узлах сетки на текущем временном слое;
a – гидропроводность в узлах сетки;
X – абсциссы узлов сетки;
Y – ординаты узлов сетки;
Q – дебиты скважин в узлах сетки.

В процессе расчета на лист **all** в ячейки **K1** и **K2** выводятся соответственно число шагов по времени и расчетное время в часах. Поле давлений отображается на объемной диаграмме, а для демонстрации линий тока используется точечная диаграмма со значениями, соединенными отрезками без маркеров. Из-за ограниченного числа графиков на одной точечной диаграмме в программе имеется ограничение на число точек сетки: $N_x * N_y < 210$.

4.4. Текст программы

Option Explicit

```
Const Nt% = 100, Lx# = 2000, Ly# = Lx, Nx% = 14, Ny% = 14, Pнач# = 200e5
Const Pнагнет# = 250e5, Pдобыв# = 100e5, h# = 10, betta# = 1e-9, d# = 0.15, ро# = 900
Dim dt#, dx#, dy#, tt#, S#, P1#(0 To Nx, 0 To Ny), a#(0 To Nx, 0 To Ny)
Dim X#(0 To Nx, 0 To Ny), Y#(0 To Nx, 0 To Ny), Q#(0 To Nx, 0 To Ny)
```

```
Public Sub создает( ) ' создает нач. заготовки диаграмм для линий тока и давления
Dim i% ' описание целой переменной
i = ActiveSheet.ChartObjects.Count ' i=количество диагр. на листе
If (i > 0) Then ActiveSheet.ChartObjects.Delete ' если i>0 то все диагр. удаляются
If (Nx * Ny > 210) Then ' если число узлов сетки NX * NY > 210 то
MsgBox ("Nx*Ny>210 !!!") ' вывод сообщения
End ' останов расчета
End If
Call исх_дан ' исходные данные
Call нач_усл ' исходные условия P
Call гр_усл ' граничные условия P
Call полеU(0, 0) ' расчет, рассылка данных для диаграмм
Call диагр_дав ' создает 3D диаграмму для давления
Call диагр_лин_тока ' создает диаграмму для линий тока
End Sub 'создает( )
```

```
Public Sub полеPU( ) 'расчет P + U, вывод результатов на готовые графики
Dim t%, i%, k%, sx1#, sx2#, sy1#, sy2#, P2#(1 To Nx - 1, 1 To Ny - 1)
Call исх_дан ' исходные данные
Call нач_усл ' начальные условия P
Call гр_усл ' граничные условия
For t = 0 To Nt ' шаги по времени
For i = 1 To Nx - 1
```

```

For k = 1 To Ny - 1 ' расчет поля давления во вспомогательном массиве P2
  sx1 = (a(i + 1, k) + a(i, k)) / 2: sx2 = (a(i, k) + a(i - 1, k)) / 2
  sy1 = (a(i, k + 1) + a(i, k)) / 2: sy2 = (a(i, k) + a(i, k - 1)) / 2
  P2(i, k) = P1(i, k) + dt / h / betta * ( _
    (P1(i + 1, k) * sx1 - P1(i, k) * (sx2 + sx1) + P1(i - 1, k) * sx2) / dx ^ 2 + _
    (P1(i, k + 1) * sy1 - P1(i, k) * (sy2 + sy1) + P1(i, k - 1) * sy2) / dy ^ 2 + _
    Q(i, k) / S / po)
Next k
Next i
For i = 1 To Nx - 1 ' P2 -> P1
  For k = 1 To Ny - 1
    P1(i, k) = P2(i, k)
  Next k
Next i
tt = tt + dt ' рассчитанное время
Call скважины(t) ' давление на скважинах
Call полеU(t, tt) ' расчет, рассылка данных для рисунков
DoEvents ' ждет окончания отрисовки и нажатия кнопок
Next t ' конец шагов по времени
End Sub ' полеPU( )

```

```

Private Sub исх_дан( ) ' нач. парам. + исходные данные
Dim i%, k%, L%, b# ' описание переменных
S = Application.Pi( ) * (d / 2) ^ 2 ' площадь сеч. забоя
tt = 0 ' текущее время
dx = Lx / Nx: dy = Ly / Ny: ' длина шагов по X и Y
Sheets("lin").Range("a:aw") = Empty ' очистка листа lin
Sheets("pres").Range("a:aw") = Empty ' очистка листа pres
Sheets("all").Cells(1, 12) = "№ шага по времени" ' вывод текста
Sheets("all").Cells(2, 12) = "время в часах" ' вывод текста
Sheets("all").Cells(1, 11) = 0 ' № временного шага
Sheets("all").Cells(2, 11) = tt ' время в часах
L = 1
For k = 0 To Ny
  For i = 0 To Nx
    a(i, k) = 1e-8 ' коэфф гидропров.
    Q(i, k) = 0 ' дебит скважин
    X(i, k) = dx * i ' X узлов сетки
    Y(i, k) = dy * k ' Y узлов сетки
    Sheets("lin").Cells(L, 1) = X(i, k) 'сетка для графика "скорость"
    Sheets("lin").Cells(L + 1, 1) = Y(i, k) 'сетка для графика "скорость"
    L = L + 2
  Next i
Next k
For i = 0 To Nx ' сетка для графика "давление"
  Sheets("pres").Cells(1, i + 2) = X(i, 0)

```

```

Next i
For k = 0 To Ny
  Sheets("pres").Cells(k + 2, 1) = Y(0, k)
Next k
b = a(0, 0) 'находим шаг по времени из усл. уст.
For i = 0 To Nx
  For k = 0 To Ny
    b = Application.max(a(i, k), b) ' максимальный коэф. гидропров.
  Next k
Next i
dt = 0.9 * h * betta / (2 * b * (1 / dx ^ 2 + 1 / dy ^ 2)) 'шаг по времени
End Sub 'исх_дан( )

```

```

Private Sub скважины(t%) 'перевод из добыв. в нагнет. зависит от времени
Dim i%, k%, i1%, k1%, i2%, k2%, i3%, k3%, i4%, k4%, t0%
t0 = Nt / 2 'время перевода из добывающих в нагнетательные
i = Fix(Nx / 2): k = Fix(Ny / 2) 'коорд. добыв №0
i1 = Fix(Nx / 4): k1 = Fix(Ny / 4) 'коорд. добыв – нагнет №1
i2 = Fix(3 * Nx / 4): k2 = Fix(Ny / 4) 'коорд. добыв – нагнет №2
i3 = Fix(3 * Nx / 4): k3 = Fix(3 * Ny / 4) 'коорд. добыв – нагнет №3
i4 = Fix(Nx / 4): k4 = Fix(3 * Ny / 4) 'коорд. добыв – нагнет №4
If t < t0 Then 't <= t0
  P1(i1, k1) = Рдобыв ' добыв
  P1(i2, k2) = Рдобыв ' добыв
  P1(i3, k3) = Рдобыв ' добыв
  P1(i4, k4) = Рдобыв ' добыв
  P1(i, k) = Рдобыв ' добыв
Else 't >= t0
  P1(i1, k1) = Рнагнет ' нагнет
  P1(i2, k2) = Рнагнет ' нагнет
  P1(i3, k3) = Рнагнет ' нагнет
  P1(i4, k4) = Рнагнет ' нагнет
  P1(i, k) = Рдобыв ' добыв
End If
End Sub 'скважины( )

```

```

Private Sub нач_усл( ) ' начальные условия Р
Dim i%, k%
For i = 0 To Nx
  For k = 0 To Ny
    P1(i, k) = Рнач
  Next k
Next i
End Sub 'нач_усл( )

```

```

Private Sub гр_усл( ) 'граничные условия P
Dim i%, k%
For i = 0 To Nx
    P1(i, 0) = Pнач: P1(i, Ny) = Pнач
Next i
For k = 0 To Ny
    P1(0, k) = Pнач: P1(Nx, k) = Pнач
Next k
End Sub 'гр_усл( )

Private Sub полеU(t%, tt#) ' расчет Ux,Uy, масштабирование. рассылка Ux,Uy,P
Dim i%, k%, L%, b#
Dim Ux#(0 To Nx, 0 To Ny), Uy#(0 To Nx, 0 To Ny) ' UX, UY
For i = 1 To Nx - 1 'расчет числителя для Ux,Uy. центральные разности
    For k = 1 To Ny - 1
        Ux(i, k) = P1(i + 1, k) - P1(i - 1, k)
        Uy(i, k) = P1(i, k + 1) - P1(i, k - 1)
    Next k
    Ux(i, 0) = P1(i + 1, 0) - P1(i - 1, 0) ' на границе
    Ux(i, Ny) = P1(i + 1, Ny) - P1(i - 1, Ny) ' на границе
Next i
For k = 1 To Ny - 1 ' на границах
    Uy(0, k) = P1(0, k + 1) - P1(0, k - 1)
    Uy(Nx, k) = P1(Nx, k + 1) - P1(Nx, k - 1)
Next k
For k = 0 To Ny 'на границах, направленные разн.
    Ux(0, k) = -3# * P1(0, k) + 4# * P1(1, k) - P1(2, k)
    Ux(Nx, k) = 3# * P1(Nx, k) - 4# * P1(Nx - 1, k) + P1(Nx - 2, k)
Next k
For i = 0 To Nx ' на границах, направленные разн.
    Uy(i, 0) = -3# * P1(i, 0) + 4# * P1(i, 1) - P1(i, 2)
    Uy(i, Ny) = 3# * P1(i, Ny) - 4# * P1(i, Ny - 1) + P1(i, Ny - 2)
Next i
b = 0
For i = 0 To Nx ' расчет Ux*dt, Uy*dt, max
    For k = 0 To Ny
        Ux(i, k) = -Ux(i, k) * a(i, k) / (2 * dx) * dt
        Uy(i, k) = -Uy(i, k) * a(i, k) / (2 * dy) * dt
        b = Application.max(Sqr(Ux(i, k) ^ 2 + Uy(i, k) ^ 2), b) ' max
    Next k
Next i
If b = 0 Then b = 1
L = 1 ' рассылка давл. и проекций вект. скор. для рисунков
For k = 0 To Ny
    For i = 0 To Nx
        Sheets("lin").Cells(L, 2) = X(i, k) + Ux(i, k) * dx / b
    
```

```

    Sheets("lin").Cells(L + 1, 2) = Y(i, k) + Uy(i, k) * dy / b
    Sheets("pres").Cells(k + 2, i + 2) = P1(i, k)
    L = L + 2
    Next i
    Next k
    Sheets("all").Cells(1, 11) = t          ' вывод № шага по времени
    Sheets("all").Cells(2, 11) = tt / 60 / 60 ' вывод рассчитанного времени в часах
End Sub 'полеU( )

Private Sub диагр_давл( ) ' создает 3D диаграмму для давления
Dim i%, L%, N$, m1, m2, m3
Sheets("all").Activate ' положение диаграммы
Set m2 = ActiveSheet ' текущий лист
Set m3 = Sheets("pres") ' лист с данными для давления
Charts.Add.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:=m2.Name ' диагр. на лист
N = m2.ChartObjects(1).Name ' имя диаграммы
Set m1 = ActiveChart ' активная диаграмма
m2.Shapes(N).IncrementLeft -3000 ' сдвиг диагр. влево
m2.Shapes(N).IncrementTop -200 ' сдвиг диагр. вверх
m1.SetSourceData Source:=Range(m3.Cells(1, 1), m3.Cells(Ny + 2, Nx + 2)) ' данные
m1.ChartType = xlSurface ' график "поверхность"
m1.HasLegend = False ' нет легенды
m1.HasTitle = True ' есть названия диагр
m1.ChartTitle.Characters.Text = "Давление" ' название диагр
Selection.Font.Name = "Times New Roman" ' шрифт
Selection.Font.Size = 8 ' размер шрифта
m1.ChartTitle.Left = 325 ' перемещает название
m1.Axes(xlValue).MaximumScale = Pнагнет ' масштаб max по вертикали
m1.Axes(xlValue).MinimumScale = Pдобыв ' масштаб min по вертикали
m1.Axes(xlCategory).Delete ' удаляет ось X
m1.Axes(xlSeries).Delete ' удаляет ось Y
m1.Axes(xlValue).MajorGridlines.Delete ' удаляет горизонтальные линии
End Sub 'диагр_давл( )

Private Sub диагр_лин_тока( ) ' создает диаграмму для линий тока
Dim i%, k%, NGR%, Lx%, Ly%, N$, m1, m2, m3
Dim Xmax#, Xmin#, Ymax#, Ymin# ' min,max для диаграммы
Xmax = X(Nx, Ny): Xmin = X(0, 0)
Ymax = Y(Nx, Ny): Ymin = Y(0, 0)
NGR% = (Nx + 1) * (Ny + 1) ' общее кол-во графиков
Sheets("all").Activate ' положение диагр
Set m2 = ActiveSheet ' текущий лист
Set m3 = Sheets("Lin") ' лист с данными для линий тока
Charts.Add.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:=m2.Name ' диагр на лист
N = m2.ChartObjects(2).Name ' имя диаграммы
Set m1 = ActiveChart ' активная диаграмма
m2.Shapes(N).IncrementLeft -3000 ' сдвиг диагр. влево

```



```

m2.Shapes(N).IncrementTop 135 ' сдвиг диагр. вниз
m1.SetSourceData Source:=m3.Cells(1, 1), PlotBy:=xlRows ' данные X – в строках
m1.ChartType = xlXYScatterLinesNoMarkers ' график "линейный без маркеров"
m1.HasLegend = False ' нет легенды
m1.HasTitle = True ' есть названия диагр
m1.ChartTitle.Characters.Text = "Скорость" ' название диагр
Selection.Font.Name = "Times New Roman" ' шрифт
Selection.Font.Size = 8 ' размер шрифта
m1.ChartTitle.Left = 325 ' перемещает название
m1.Axes(xlCategory).MinimumScale = Xmin ' масштаб min X
m1.Axes(xlCategory).MaximumScale = Xmax ' масштаб max X
m1.Axes(xlValue).MinimumScale = Ymin ' масштаб min Y
m1.Axes(xlValue).MaximumScale = Ymax ' масштаб max Y
m1.Axes(xlCategory).Delete ' удаляет ось X
m1.Axes(xlValue).Delete ' удаляет ось Y
m1.Axes(xlValue).MajorGridlines.Delete ' удаляет горизонтальные линии
m1.PlotArea.Border.LineStyle = xlNone ' удаляет границы внутр.области
m1.PlotArea.Interior.ColorIndex = 2 ' внутр.область белая
With m1.SeriesCollection(1) ' график номер 1
.XValues = Array(Xmin, Xmax, Xmax, Xmin, Xmin) ' Xi рамка
.Values = Array(Ymin, Ymin, Ymax, Ymax, Ymin) ' Yi рамка
.Border.ColorIndex = 5 ' 5 – синий цвет
.Border.Weight = xlMedium 'xlThin ' толщина
.Border.LineStyle = xlContinuous ' сплошной
End With
For i = 1 To NGR ' место, где будут данные для графиков 2,3,...NGR
Lx = 2 * i - 1 ' строка, где находятся x1,x2
Ly = Lx + 1 ' строка, где находятся y1,y2
m1.SeriesCollection.NewSeries ' создание заготовок для графиков
With m1.SeriesCollection(i + 1) ' график номер i+1
.XValues = Range(m3.Cells(Lx, 1), m3.Cells(Lx, 2)) ' x1,x2
.Values = Range(m3.Cells(Ly, 1), m3.Cells(Ly, 2)) ' y1,y2
.Border.ColorIndex = 3 ' 3 – красный цвет графиков
.Border.Weight = xlMedium ' толщина графика
.Border.LineStyle = xlContinuous ' сплошной график
End With
Next i
m2.Cells(1, 1).Select ' снимает выделение с диаграммы
End Sub ' диагр_лин_тока( )

Public Sub остановка( ) ' вывод сообщения с двумя кнопками
Dim i% 'продолж.или оконч.работы
i = MsgBox("Что делать дальше? Продолжить – Да, закончить – Нет", vbYesNo)
If (i = 7) Then End ' нажали кнопку "Нет" – окончание работы
End Sub

```

ГЛАВА 5. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

В программе использовались следующие исходные данные, которые являются характерными для нефтяных месторождений:

пластовое давление – $P_{нач} = 200e5$ Па,

давление на забое нагнетательной скважины – $P_{нагнет} = 250e5$ Па,

давление на забое добывающей скважины – $P_{добыв} = 100e5$ Па,

длина участка – $L_x = 2000$ м,

ширина участка – $L_y = 2000$ м,

толщина пласта – $h = 10$ м,

диаметр скважин – $d = 0.15$ м,

плотность жидкости – $\rho_0 = 900$ кг/м³,

упругость пласта – $\beta = 1e-9$ 1/Па⁻¹,

абсолютная проницаемость – $K = 1e-12$ м²,

динамическая вязкость жидкости – $\mu = 1e-3$ Па*с,

так как $\sigma = \frac{Kh}{\mu}$, то гидропроводность $a = 1e-8$,

максимальное число шагов по времени – $Nt = 100$,

перевод добывающих скважин в нагнетательные при $t > Nt/2$,

число узлов сетки по координате X – $N_x = 14$,

число узлов сетки по координате Y – $N_y = 14$,

координаты скважин – $(1/2 N_x, 1/2 N_y)$, $(1/4 N_x, 1/4 N_y)$,

$(3/4 N_x, 1/4 N_y)$, $(3/4 N_x, 3/4 N_y)$, $(1/4 N_x, 3/4 N_y)$.

ГЛАВА 6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

6.1. Вычисление дебита скважины

Используя формулу (18) вычислить дебит центральной скважины. Вынести дебит и текущее время на свободное место на листе **lin**. Создать еще одну диаграмму и организовать вывод на нее полученных значений дебита в зависимости от времени.

6.2. Использование в расчетах дебита скважины

В программе на каждом шаге задается давление на забое скважины. На основе формулы (13) и массива **Q** внести изменения в программу для использования дебита скважины вместо давления на забое скважины.

6.3. Влияние неоднородности пласта на перераспределение давления

Используя массив **a**, содержащий гидропроводность, показать влияние неоднородности пласта на перераспределение давления по сравнению с однородным пластом.

6.4. Моделирование остановки скважины

Выводя на лист Excel значения давления на забое скважины в зависимости от времени и внося соответствующие изменения в текст программы, смоделировать остановку скважины с получением кривой восстановления давления.

6.5. Нахождение распределения гидропроводности на основе кривой восстановления давления

Эта работа использует метод наименьших квадратов [9] и поиск минимума функции многих переменных на основе **Поиска решения (Solver)** в Excel. Предлагается следующая последовательность шагов:

1) сделать необходимые изменения в программе, в частности, для ускорения расчетов удалить построение диаграмм;

2) подобрать формулу, описывающую пространственное распределение гидропроводности и использующую независимые параметры c_1, c_2, \dots, c_k . Например, формула $\sigma(c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 r + c_3 r^2$, где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, x_0 и y_0 – координаты скважины, использует параметры c_1, c_2, c_3 ;

3) для кривой восстановления давления, заданной в виде табличной зависимости $P_{10}(t_1), P_{20}(t_2), \dots, P_{n0}(t_n)$, рассчитать давление на скважине в аналогичные моменты времени $P_1(t_1), P_2(t_2), \dots, P_n(t_n)$ при некоторых значе-

ниях c_1, c_2, \dots, c_k . Для упрощения, вместо табличных значений можно использовать формулу Дюпюи;

4) вычислить сумму квадратов невязок:

$$J(c_1, c_2, \dots, c_k) = \sum_{i=1}^n (P_{i0}(t_i) - P_i(t_i))^2 ;$$

5) используя **Поиск решения (Solver)** в Excel найти минимум функции многих переменных $J(c_1, c_2, \dots, c_k)$, задавая в качестве переменных c_1, c_2, \dots, c_k .

6.6. Определение границы устойчивости явного метода

Наблюдая поведение графика найти границы устойчивости явной конечно-разностной схемы. Для этого можно использовать простейшее одномерное уравнение, которое получается из (12), если считать, что $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$

и $Q = 0$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (19)$$

здесь $a > 0$ – коэффициент, который можно положить равным единице. Явная конечно-разностная схема для решения уравнения (19) примет вид:

$$\frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\Delta t} = a \frac{P_{i+1}^j - 2P_i^j + P_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \quad (20)$$

И, соответственно, условие устойчивости будет:

$$\Delta t \leq \frac{\delta \Delta x^2}{2a}, \quad (21)$$

где коэффициент δ обеспечивает запас по устойчивости.

Внести соответствующие изменения в программу и с точностью 10^{-2} найти максимальное значение коэффициента δ в формуле (21), обеспечивающее устойчивый расчет по явной схеме (20).

6.7. Использование неявного метода и схемы прогонки

При освоении численных методов полезно изучить метод прогонки [9], который используется при решении систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов. Применительно к уравнению (19) такая система линейных уравнений получается при использовании неявной схемы, которая имеет вид:

$$\frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\Delta t} = a \frac{P_{i+1}^{j+1} - 2P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2}. \quad (22)$$

Записывая уравнение (22) для каждой точки $i = 0, 1, \dots, N$, получим систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0^{j+1} = \alpha \\ \dots \\ -r * P_{i-1}^{j+1} + (1 + 2r) * P_i^{j+1} - r * P_{i+1}^{j+1} = P_i^j, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ \dots \\ P_N^{j+1} u_{Nj+1} = \beta \end{array} \right. , \quad (23)$$

где α и β – стационарные граничные условия на левой и правой границах,

$r = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2}$. Запишем систему (23) в матричной форме $A\vec{P} = \vec{d}$:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_0 & b_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & c_{N-2} & a_{N-2} & b_{N-2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & c_N & a_N \\ \hline \end{array} \quad \vec{P} = \begin{array}{|c|} \hline P_0^{j+1} \\ \hline P_1^{j+1} \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline P_{N-1}^{j+1} \\ \hline P_N^{j+1} \\ \hline \end{array} \quad \vec{d} = \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline P_1^j \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline P_{N-1}^j \\ \hline \beta \\ \hline \end{array} ,$$

где $a_0=1, b_0=0, c_N=0, a_N=1, c_i = -r, a_i=1+2r, b_i = -r, i = 1, \dots, N-1$. Видно, что трехдиагональная матрица имеет строгое диагональное преобладание $|a_i| > |c_i| + |b_i|$. Это позволяет для решения системы линейных уравнений использовать метод прогонки, который будет устойчив вне зависимости от величины шага интегрирования по времени [3].

Предлагаемый далее алгоритм метода прогонки не использует дополнительные переменные, но изменяет содержимое a_i и d_i . Он имеет прямой ход:

$$a_i = a_i - c_i b_{i-1} / a_{i-1}, \quad d_i = d_i - c_i d_{i-1} / a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

и обратный ход:

$$P_N^{j+1} = d_N / a_N,$$

$$P_i^{j+1} = (d_i - b_i P_{i+1}^{j+1}) / a_i; \quad i = N-1, N-2, \dots, 0.$$

Отметим, что явная схема (20) и неявная схема (22) имеют точность $O(\Delta t, \Delta x^2)$, поэтому при увеличении шага по времени в неявном методе точность будет снижаться по сравнению с явным методом.

Дополнительно рекомендуется использовать аналогичный подход для решения уравнения, описывающего плоскорадиальное течение (см. раздел 1.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ.– М.: Высшая школа, 1970. – Т. 2. – 420 с.
2. Булыгин В.Я. Гидромеханика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1974. – 232 с.
3. Дьяченко В.В. Основные понятия вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 128 с.
4. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 140 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 833 с.
6. Вильям Орвис. Excel для ученых, инженеров и студентов. – Киев: Юниор, 1999. – 528 с.
7. Хамухин А.А. Введение в информатику для инженеров нефтегазового дела. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 284 с.
8. Кузьменко В.Г. VBA 2002. Самоучитель. – 2-е изд. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2004. – 416 с.
9. Миньков С.Л., Миньков Л.Л. Основы численных методов: учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 260 с.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

10. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 640 с.
11. Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 172 с.
12. Молкович Ю.М. Неравновесная фильтрация и ее применение в нефтепромысловой практике. – М.Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 214 с.
13. Гильманова Р.Х., Владимиров И.В., Нафиков А.З., Султанов А.С. Определение остаточных нефтенасыщенных толщин с учетом взаимодействия пластов в зонах слияния // Нефтяное хозяйство. – 2001. – №8. – С. 20–22.
14. Квеско Б.Б. Подземная гидродинамика. учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2001. – 106 с.
15. Болотник Д.Н., Макарова Е.С., Рыбников А.В., Саркисов Г.Г. Постоянно действующие геолого-математические модели месторождений. Задачи, возможности, технологии // Нефтяное хозяйство. – 2001. – №3. – С. 7–10.
16. Методические указания по созданию постоянно действующих геолого-технологических моделей нефтяных и газонефтяных месторождений (Часть 2. Фильтрационные модели). – М.: ОАО «ВНИИОЭНГ». – 2003. – 228 с.
17. Йодан Э. Структурное проектирование и конструирование программ. М.: Мир, 1979. – 415 с.
18. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т. / пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – Т. 1. – 504 с.

Учебное издание

ГАЛКИН Владислав Михайлович

ЧИСЛЕННАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТА

Практикум

Научный редактор
доктор технических наук,
профессор

А.Т. Росляк

Редактор

Е.О. Фукалова

Верстка

В.П. Аршинова

Дизайн обложки


Т.А. Фатеева

Подписано к печати 08.12.2008. Формат 60×84/8. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 4.42. Уч.-изд.л. 4. 0.
Заказ 1057. Тираж 100 экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.