

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Г.В. Ерофеева, Ю.Ю. Крючков,
Е.А. Склярова, И.П. Чернов**

**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ
ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ
НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

*Допущено Научно-методическим советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по техническим направлениям подготовки
и специальностям*

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 53:004(075.8)
ББК 22.3:32.973.02я73
Е78

Ерофеева Г.В.

Е78 Практические занятия по общему курсу физики на основе применения информационных технологий: учебник / Г.В. Ерофеева, Ю.Ю. Крючков, Е.А. Складорова, И.П. Чернов; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 493 с.

ISBN 978-5-4387-0427-0

Учебник содержит теоретическую часть, тестовые задания и задачи по разделам курса общей физики «Механика», «Молекулярная физика. Термодинамика», «Электричество», «Электромагнетизм», «Колебания. Волновая оптика», «Атомная и ядерная физика. Элементы квантовой механики».

Предназначен для практических занятий по физике, индивидуальной и самостоятельной работы студентов элитного технического образования, бакалавров и магистров технических специальностей всех видов обучения.

УДК 53:004(075.8)
ББК 22.3:32.973.02я73

Рецензенты

Доктор педагогических наук,
профессор кафедры общей физики ТГПУ

З.А. Скрипко

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теоретической физики ТГУ

О.Н. Улеников

ISBN 978-5-4387-0427-0

© ФГАОУ ВО НИ ТПУ, 2014
© Ерофеева Г.В., Крючков Ю.Ю.,
Складорова Е.А., Чернов И.П., 2014
© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последнее десятилетие произошли значительные изменения в сфере образования, появились государственные образовательные стандарты, в которых приведен перечень требований к знаниям выпускников вузов. Большинство требований к знаниям выпускников технических вузов имеют прямое или косвенное отношение к курсу физики.

Понятие технологии, применяемое ранее к изготовлению какого-либо рода продукции, прочно вошло как термин образовательной технологии, например педагогические технологии, компьютерные технологии и т. д. Компьютерные технологии как инновационные технологии позволяют внедрять новые виды обучения (например, дистанционное образование). Именно они дают возможность выпускнику получить знания, умения и навыки, диктуемые государственными образовательными стандартами, благодаря самостоятельной и индивидуальной работе, обеспечиваемой ими. Кроме того, потребность в разработке компьютерных обучающих систем возникла еще и в связи с неуклонным сокращением числа часов аудиторных занятий.

В 1995 г. в Томском политехническом университете была начата разработка интерактивной обучающей системы по физике, а в 1996 г. было введено в учебный процесс первое занятие по теме «Кинематика». Всего было разработано и введено в учебный процесс 25 занятий по всему университетскому курсу общей физики. По мере апробирования системы вносились изменения и коррективы.

Успешное функционирование интерактивной обучающей системы стало возможным благодаря самоотверженной работе талантливого коллектива в составе: В.М. Малютина, Е.А. Скляровой, В.Н. Стройновой, Т.В. Смекалиной (программирование, введение в учебный процесс, анализ применения в учебном процессе, набор текста, проверка, корректировка).

На программный продукт учебника получены свидетельства о государственной регистрации программ в отраслевом фонде алгоритмов и программ: 1. Интерактивная обучающая система по физике (ИОС) Инв. № 10412. (Инв. номер ВНТИЦ 50200800830 от 12.05.2008). 2. Программный комплекс тестового контроля знаний. Инв. № 12261. (Инв. номер ВНТИЦ 502003002217 от 05.02.2009).

ВВЕДЕНИЕ

Любая обучающая система не может быть создана без анализа предшествующего опыта создания подобных систем, без учета методических и дидактических аспектов и требований, предъявляемых к новым информационным технологиям.

Обстоятельный обзор и анализ существующих технологий, их научных основ проведен в работе Г.К. Селевко [1]. Понятие технологии сравнительно недавно стало применяться в системе образования. В работе [1] дано также понятие педагогической технологии.

Технология – это совокупность приемов, применяемых в каком-либо деле, мастерстве, искусстве.

Понятие «педагогическая технология» может быть представлено тремя аспектами:

1) *научным*: это часть педагогической науки, изучающая и разрабатывающая цели, содержание и методы обучения, проектирующая педагогические процессы;

2) *процессуально-описательным*: описание (алгоритм) процесса, совокупность целей, содержания, методов и средств для достижения планируемых результатов обучения;

3) *процессуально-действенным*: осуществление технологического (педагогического) процесса, функционирование всех личностных, инструментальных и методологических педагогических средств.

Таким образом, педагогическая технология функционирует и в качестве науки, исследующей наиболее рациональные пути обучения, и в качестве системы способов, принципов и регуляторов, применяемых в обучении, и в качестве реального процесса обучения.

Основные качества современных педагогических технологий.

Структура педагогической технологии

В структуру педагогической технологии входят:

- а) концептуальная основа;
- б) содержательная часть обучения:
 - цели обучения – общие и конкретные;
 - содержание учебного материала;
- в) процессуальная часть – технологический процесс:
 - организация учебного процесса;
 - диагностика учебного процесса.

Критерии технологичности

Любая педагогическая технология должна удовлетворять некоторым основным методологическим требованиям (критериям технологичности).

Концептуальность. Каждой педагогической технологии должна быть присуща опора на определенную научную концепцию, включающую философское, психологическое, дидактическое и социально-педагогическое обоснование достижения образовательных целей.

Системность. Педагогическая технология должна обладать всеми признаками системы: логикой процесса, взаимосвязью всех его частей, целостностью.

Управляемость предполагает возможность диагностического целеполагания, планирования, проектирования процесса обучения, поэтапной диагностики, варьирования средствами и методами с целью коррекции результатов.

Эффективность. Современные педагогические технологии существуют в конкурентных условиях и должны быть эффективными по результатам и оптимальными по затратам, гарантировать достижение определенного стандарта обучения.

Воспроизводимость подразумевает возможность применения (повторения, воспроизведения) педагогической технологии в других однотипных образовательных учреждениях, другими субъектами.

Классификация педагогических технологий

Многие технологии по своим целям, содержанию, применяемым методам и средствам имеют достаточно много сходства и по этим общим признакам могут быть классифицированы в несколько обобщенных групп.

По направлению модернизации традиционной системы можно выделить следующие группы технологий:

1. *Педагогические технологии на основе гуманизации и демократизации педагогических отношений.* Это технологии с процессуальной ориентацией, приоритетом личностных отношений, индивидуального подхода, нежестким демократическим управлением и яркой гуманистической направленностью содержания. К ним относятся педагогика сотрудничества, гуманно-личностная технология Ш.А. Амонашвили, система преподавания литературы как предмета, формирующего человека, Е.Н. Ильина и др.

2. *Педагогические технологии на основе активизации и интенсификации деятельности учащихся.* Примеры: игровые технологии, про-

блемное обучение, технология обучения на основе конспектов опорных сигналов В.Ф. Шаталова, коммуникативное обучение Е.И. Пассова и др.

3. *Педагогические технологии на основе эффективности организации и управления процессом обучения.* Примеры: программированное обучение, технологии дифференцированного обучения (В.В. Фирсов, Н.П. Гузик), технологии индивидуализации обучения (А.С. Границкая, Инге Унт, В.Д. Шадриков), перспективно-опережающее обучение с использованием опорных схем при комментируемом управлении (С.Н. Лысенкова), групповые и коллективные способы обучения (И.Д. Первин, В.К. Дьяченко), компьютерные (информационные) технологии и др.

4. *Педагогические технологии на основе методического усовершенствования и дидактического реконструирования учебного материала:* укрупнение дидактических единиц (УДЕ) П.М. Эрдниева, технология «Диалог культур» В.С. Библера и С.Ю. Курганова, система «Экология и диалектика» Л.В. Тарасова, технология реализации теории поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича и др.

5. *Природосообразные, использующие методы народной педагогики,* опирающиеся на естественные процессы развития ребенка; обучение по Л.Н. Толстому, воспитание грамотности по А. Кушниру, технология М. Монтессори и др.

6. *Альтернативные:* вальдорфская педагогика Р. Штейнера, технология свободного труда С. Френе, технология вероятностного образования А.М. Лобка.

7. Наконец, примерами комплексных политехнологий являются многие из действующих систем авторских школ (из наиболее известных – «Школа самоопределения» А.Н. Тубельского, «Русская школа» И.Ф. Гончарова, «Школа для всех» Е.А. Ямбурга, «Школа-парк» М. Балабана и др.).

В труде «Великая дидактика» Ян Амос Коменский (1592–1670) первым попытался отыскать и привести в систему объективные закономерности воспитания и обучения, которые он изложил в десяти основоположениях, составляющих основу педагогики и дидактики. Он обосновал и принцип природосообразности, который исходит из природного равенства людей. В десятом основоположении Я.А. Коменский писал [2]: «Природа сама себя оплодотворяет постоянным движением... Обучение нельзя довести до основательности без возможно более частых и особенно искусно поставленных повторений и упражнений». В главе X «Новейший метод языков» («Аналитическая дидактика») Я.А. Коменский призывал: «...все то, с чем мы хотим как следует познакомить и что они должны мастерски делать, надо шлифовать контролем и закреп-

пять при помощи частых упражнений. И так, CLXXXV. Надо все время повторять и экзаменовать» [3]. Таким образом, еще на ранних стадиях формирования педагогики как науки контролю знаний отводится существенная роль.

Широкое распространение получают технологии программированного обучения. Программированное обучение возникло в начале 50-х годов XX в., когда американский психолог Б. Скиннер предложил повысить эффективность управления усвоением материала, построив его как последовательную программу подачи порций информации и их контроля. Впоследствии Н. Краудер разработал разветвленные программы, которые в зависимости от результатов контроля предлагали ученику различный материал для самостоятельной работы. Дальнейшее развитие технологии и программированного обучения будет зависеть от разработки путей управления внутренней психической деятельностью человека.

Принципы программированного обучения были разработаны В.П. Беспалько [4]. Первым принципом является определенная иерархия управляющих устройств.

Термин «иерархия» означает ступенчатую соподчиненность частей в каком-то целостном организме (или системе) при относительной самостоятельности этих частей. Поэтому говорят, что управление таким организмом или системой построено по иерархическому принципу. Уже структура технологии программированного обучения свидетельствует об иерархическом характере построения ее управляющих устройств, образующих, однако, целостную систему. В этой иерархии выступает в первую очередь педагог, управляющий системой в наиболее ответственных ситуациях: создание предварительной общей ориентировки в предмете, отношение к нему, индивидуальная помощь и коррекция в сложных нестандартных ситуациях обучения.

Сущность второго принципа – принципа обратной связи – вытекает из кибернетической теории построения преобразований информации (управляющих систем) и требует циклической организации системы управления учебным процессом по каждой операции учебной деятельности. При этом имеется в виду не только передача информации о необходимом образе действия от управляющего объекта к управляемому (прямая связь), но и передача информации о состоянии управляемого объекта управляющему (обратная связь).

Обратная связь необходима не только педагогу, но и обучаемому: одному – для понимания учебного материала, другому – для коррекции. Поэтому говорят об оперативной обратной связи. Обратная связь, которая служит для самостоятельной коррекции учащимся результатов и характера его умственной деятельности, называется внутренней. Если же

это воздействие осуществляется посредством тех же управляющих устройств, которые ведут процесс обучения (или педагогом), то такая обратная связь называется внешней. Таким образом, при внутренней обратной связи учащиеся сами анализируют итоги своей учебной работы, а при внешней это делают педагоги или управляющие устройства.

Третий принцип программированного обучения состоит в осуществлении шагового технологического процесса при раскрытии и подаче учебного материала. Выполнение этого требования позволяет достичь общепонятности обучающей программы.

Шаговая учебная процедура – это технологический прием, означающий, что учебный материал в программе состоит из отдельных, самостоятельных, но взаимосвязанных, оптимальных по величине порций информации и учебных заданий (отражающих определенную теорию усвоения знаний учащимися и способствующих эффективному усвоению знаний и умений). Совокупность информации для прямой и обратной связи и правил выполнения познавательных действий образует шаг обучающей программы.

В состав шага включаются три взаимосвязанных звена (кадра): информация, операция с обратной связью и контроль.

Последовательность шаговых учебных процедур образует обучающую программу – основу технологии программированного обучения.

Четвертый принцип программированного обучения исходит из того, что работа учащихся по программе является строго индивидуальной, возникает естественное требование вести направленный информационный процесс и предоставлять каждому учащемуся возможность продвигаться в учении со скоростью, которая для его познавательных сил наиболее благоприятна, а в соответствии с этим – возможность приспособивать и подачу управляющей информации.

Изучение целей реформирования и информатизации педагогического образования, дидактических принципов построения обучающих педагогических систем, требований к выпускнику технического вуза (согласно ГОС) позволяет сформулировать концепцию компьютеризированного занятия.

1. Теоретическая часть, структурированная до необходимого минимума, содержащая (тем не менее!):

а) федеральную, вузовскую и региональную составляющую ГОС и ОС вуза (по данной теме);

б) связи изучаемых физических величин и закономерностей с такими предыдущих и последующих занятий, а также межпредметные связи с другими дисциплинами, содержащимися в учебном плане данного специалиста;

в) применение изучаемых закономерностей в науке и технике и связь с будущей специальностью;

г) современные достижения в данной области знаний;

д) проблемные вопросы, парадоксальные ситуации, противоречия, появляющиеся как бы случайно при рассмотрении теоретической части, и ответы на них.

2. Наличие обратной связи или коммуникации, обеспечивающей организацию диалога между компьютером и учащимися.

3. Контрольные вопросы для проверки I и II уровня, содержащие нестандартные вопросы и ответы различных видов (у каждого обучающегося похожий на соседний, но свой вариант) – продуктивная деятельность.

4. Решенные задачи (типовые, для формирования умений составления алгоритмов решений задач и запоминания соотношений теоретического материала и соответствующий индивидуальный вариант для самостоятельного решения).

5. Решенные интегративные задачи (нестандартные, нестереотипные, оригинальные) для формирования у учащегося креативного мышления и соответствующий индивидуальный вариант для самостоятельного решения.

6. Контрольные задачи с широким спектром формирования умений, в том числе формирование умений III и IV уровня усвоения (составление задач по данной тематике) – продуктивная деятельность.

7. Различные траектории обучения, соответствующие подготовленности обучаемого и его пожеланиям и возможностям.

8. Рейтинговая система оценки результата работы студента на всех этапах занятия.

9. Возможность моделирования изучаемого физического явления и постановки простейшего исследовательского эксперимента, а также опытные и видеодемонстрации.

10. Историческая справка (поучительный и занимательный рассказ об ученых и их открытиях) и соответствующий демонстрационный материал.

11. Справочный материал – таблица производных и интегралов, тригонометрических функций, физических постоянных и т. д.

12. Комфортная среда обучения и коммуникативное взаимодействие со студентом.

13. Широкий спектр возможностей индивидуальной и самостоятельной работы.

Главные системообразующие факторы педагогических систем: целевой, коммуникативный, содержательно-организационный и аналити-

ко-результативный – здесь проявляются в полной мере. Основой для оценивания успеваемости учащегося являются итоги контроля. Учитываются при этом как качественные, так и количественные показатели работы обучающихся [4].

Конечной целью всех научно-методических изысканий педагогики и дидактики высшей школы является удовлетворение требований к уровню знаний выпускников, предъявляемых государственными образовательными стандартами и стандартами вузов.

Создать такое идеализированное занятие очень трудно, но также как и в поиске истины, к нему можно бесконечно приближаться. Понятно, что обеспечить хотя бы большую часть из перечисленного можно лишь с помощью компьютера и соответствующего обучающего программного обеспечения.

Обучающая система, реализующая большинство требований к занятию по физике, была создана в Томском политехническом университете в 1996 г. на базе компьютеров Macintosh [5–7]. Интерактивная обучающая система предназначена для проведения практических занятий, самостоятельной, индивидуальной работы студентов и дистанционного обучения. В настоящее время полностью разработаны, апробированы и введены в учебный процесс четыре части интерактивной обучающей системы по физике, посвященные разделам «Механика. Молекулярная физика. Термодинамика» – часть I, «Электричество. Электромагнетизм» – часть II, «Колебания. Волновая оптика» – часть III, «Атомная физика. Элементы квантовой механики» – часть IV. Обучающая система апробирована на занятиях со студентами различных факультетов дневного и заочного обучения в течение пяти лет (свыше 7000 часов аудиторных занятий, более 4000 студентов). Издано четыре учебных пособия по указанным разделам.

В данном учебном пособии содержатся занятия по следующим темам разделов физики:

1. Кинематика материальной точки.
2. Кинематика твердого тела.
3. Динамика твердого тела.
4. Законы сохранения.
5. Законы идеального газа.
6. Первое начало термодинамики. Теплоемкость. Энтропия. Тепловые двигатели.
7. Специальная теория относительности (СТО).
8. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Теорема Гаусса.

9. Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Потенциал. Связь напряженности и потенциала. Емкость.
10. Законы постоянного тока.
11. Электромагнетизм. Сила Ампера. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц.
12. Закон Био – Савара – Лапласа и его применение к расчету магнитной индукции и напряженности магнитного поля. Магнитные свойства веществ.
13. Эффект Холла. Закон электромагнитной индукции. Уравнения Максвелла.
14. Механические колебания и волны.
15. Электромагнитные колебания и волны.
16. Геометрическая оптика.
17. Интерференция.
18. Дифракция.
19. Поляризация.
20. Тепловое излучение.
21. Фотоэффект. Эффект Комптона.
22. Атом водорода по Бору. Линейчатые спектры.
23. Элементы квантовой механики. Волновые свойства вещества.
24. Уравнение Шредингера. Частица в потенциальной яме.
25. Физика атомного ядра и элементарных частиц.

Каждое занятие содержит следующие структурные элементы:

1. Информационная часть (теория), то есть структурированный теоретический материал с выделением элементов знаний. Дискуссия «ведущего» и «оппонента» углубляет знания теоретического материала.
2. Контрольные вопросы (тест) первого уровня для проверки усвоения теоретического материала. При этом на каждом рабочем месте имеется свой вариант вопросов.
3. Примеры решения типовых задач (подсказка) для выработки у студентов навыков по практическому применению информационной части. Некоторые задачи также являются оригинальной разработкой авторов.
4. Контрольные задачи второго уровня для проверки навыков в решении задач, отличающихся от рассмотренных в подсказке только цифровыми данными. На каждом рабочем месте предусмотрены свои цифровые данные и, соответственно, свой численный ответ.
5. Контрольные задачи третьего уровня для проверки степени усвоения материала данного раздела. Студент должен самостоятельно получить расчетную формулу и числовой ответ. На каждом рабочем месте реализован свой вариант.

6. Справочник содержит таблицы производных и интегралов элементарных функций и физические формулы, не вошедшие в раздел теории, но необходимые для решения задач.

7. Для некоторых занятий имеется историческая справка о занимательных фактах из жизни ученых и их открытиях.

8. Компьютерный эксперимент.

В начале первого занятия студент проходит простой и короткий тест, при выполнении которого он обучается работать с компьютером Макинтош и ориентироваться в обучающей системе. На последующих занятиях вводный тест не повторяется. Затем выбирается тема занятия из общего меню по усмотрению преподавателя. После этого студент переходит к теории, а затем – к тесту. Имеется возможность изменить траекторию обучения, минуя теорию и сразу приступив к выполнению теста. Это может сделать любой студент по своему усмотрению.

Вопросы и задачи теста распределены с помощью датчика случайных чисел, так что в данный момент на разных компьютерах различные задания. Это способствует самостоятельной работе студентов и полностью исключает списывание. Все задания теста подразделены на три (иногда на два) уровня сложности. Соответственно, цена ответа в баллах на каждом уровне разная. Обычно на первом уровне находятся вопросы, к каждому из которых нужно выбрать один правильный ответ из нескольких приведенных. На втором уровне помещаются задачи первого типа. Решив такую задачу на бумаге, студент должен ввести числовой ответ в специальное поле. Программа распознает ответ и выдает диагностику, правильно ли решена задача. Причем вводимый ответ может отличаться от реального на 5 %, что игнорирует незначительную ошибку в вычислениях. Обычно на втором уровне помещается задача второго типа с одинаковым условием, но разными числовыми данными, которые распределяются в заданном диапазоне с заданным шагом с помощью датчика случайных чисел. В этом случае программа решает задачу и сравнивает ответ с введенным ответом студента.

На третьем уровне находятся задачи первого типа, но более сложные. Задачи любого типа могут иметь иллюстрацию в виде компьютерного эксперимента, реализованного как мультипликация в среде Interactive Physics. Компьютерный эксперимент позволяет студенту участвовать в процессе, описанном в условии задачи, поскольку студент должен ввести параметры, заданные характеристиками. Использование компьютерных экспериментов позволяет развить у студентов навыки самостоятельной исследовательской работы. Обычно в одном занятии имеется около 40 вопросов, 40 задач первого уровня и столько же второго. Программа выбирает для каждого студента 6–9 вопросов, две за-

дачи первого уровня и одну второго уровня. В процессе работы над тестом студент может посмотреть, сколько баллов он набрал. Для этого нужно вызвать специальный контролирующий стек, где реализована рейтинговая система оценки знаний и происходит подсчет суммарного балла. В конце занятия набранное число баллов вместе с фамилией студента распечатывается на принтере и отдается преподавателю.

Перечисленные занятия, имеющие одинаковую структуру и логическое построение, различаются по содержанию и форме. Содержание определяется темой данного занятия, а форму можно варьировать по усмотрению преподавателя.

Контроль знаний

В 2002 г. разработана версия интерактивной обучающей системы на компьютерах IBM PC. Каждая технология предусматривает свою систему контроля знаний или систему тестирования. Впервые термин «тест» ввел основатель научного изучения индивидуальных различий английский ученый Ф. Гальтон. Тестирование в те времена применялось для проверки профессиональной пригодности, обработка результатов которой была очень трудоемкой. Ф. Гальтон разработал также идеи регрессивного и корреляционного анализа и ввел идею валидности (обоснованности теста), что было чрезвычайно важно при определении профессиональной пригодности [8]. В настоящее время тестирование – широко распространенная система контроля знаний. Обучающая система на каждом занятии позволяет провести тестирование студентов по каждому элементу знаний. При этом испытуемый может обращаться к теоретической части занятия на любой стадии прохождения теста, тем самым повторяя информационный материал в полном соответствии с рекомендациями Я.А. Коменского. Датчик случайных чисел для разброса числовых данных задач или вопросов теста обеспечивает самостоятельную одновременную работу студентов по разным вариантам и исключает списывание. Система тестирования включает тесты для текущего контроля (текущая аттестация) и тесты для промежуточного контроля (промежуточная аттестация).

Разработанное программное обеспечение позволяет изменить траекторию обучения студента, если изучение теоретической части или решение задач для него необязательно. Реализована рейтинговая система оценки знаний.

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКА»

Часть I. Основы классической механики. Молекулярная физика. Термодинамика

Программа составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по соответствующим направлениям:

550000 «Технические науки»;

540500 «Технологическое образование».

© Министерство образования Российской Федерации

© ГНИИ ИТТ «Информика» (Интернет-публикация)

Москва 2000

Пояснительная записка

Данная программа по дисциплине «Физика» предназначена для подготовки бакалавров по указанным направлениям. Это накладывает на ее цели и содержание требования, обусловленные спецификой государственных образовательных стандартов по направлениям подготовки бакалавров, содействовать получению фундаментального образования, способствующего дальнейшему развитию личности. При изучении дисциплины не следует делать излишний акцент на будущей профессионализации выпускника. Необходимо дать панораму наиболее универсальных методов, законов и моделей современной физики, продемонстрировать специфику рационального метода познания окружающего мира, сосредоточить усилия на формировании у студентов общего физического мировоззрения и развитии физического мышления.

В отличие от традиционных курсов дисциплина «Физика» в бакалавриате должна представлять собой целостный и фундаментальный курс, единый в своих частях и демонстрирующий роль физики как основы всего современного естествознания. Необходимо преодолеть распространенное расчленение физики на классическую и современную и дать изложение всей дисциплины с точки зрения логики физики как науки. При этом следует иметь в виду, что физика как наука и физика как учебная дисциплина отнюдь не тождественные понятия.

Данная программа рассчитана в полном объеме на 550 часов аудиторных занятий продолжительностью четыре семестра; общая трудоемкость при этом составляет 800 часов. Если курс физики в вузе начинается-

ся с I семестра, то целесообразно чтение пропедевтического курса математики, в объеме и по содержанию достаточного для изучения начальной части курса физики.

В соответствии с Требованиями (федеральный компонент) к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки бакалавра и дипломированного специалиста по циклу «Общие математические и естественнонаучные дисциплины», утвержденными 21.02.2000 Минобразованием России (п. 4.6), при подготовке специалистов, обучающихся на соответствующих специальностях высшего профессионального образования, вуз (факультет) имеет право использовать данную программу, вводя отличия по глубине проработки отдельных разделов, что может повлечь за собой изменение соотношения между количеством лекций, семинаров и лабораторных занятий, изменение их характера и направленности.

В основании современной естественно-научной картины мира лежат физические принципы и концепции. Физика составляет фундамент естествознания. Ее роль здесь трудно переоценить. С другой стороны, она является теоретической базой, без которой невозможна успешная деятельность выпускника вуза в области знаний «Технические науки».

Курс физики представляет собой единое целое. Всякого рода попытки разделить его на части, некоторые из которых изучаются на других кафедрах, не имеют под собой ни методических, ни научных, ни дидактических оснований. Они в корне противоречат идее бакалавриата. Изучение целостного курса физики совместно с другими дисциплинами цикла способствует формированию у студентов современного естественно-научного мировоззрения, освоению ими современного стиля физического мышления. Целостность курса физики является одной из фундаментальных предпосылок для воспитания образованного члена общества.

Данная программа отражает современное состояние физики и ее приложений. В ней естественным образом сочетаются макро- и микроскопические подходы. В ее разделах вскрыты внутренние логические связи. Порядок расположения материала соответствует современной структуре физики как науки и отражает мировой педагогический опыт. Программа носит комплексный характер: в ней приведен минимальный перечень рекомендуемых теоретических семинаров, лабораторных работ, практических занятий, лекционных демонстраций, учебных кинофильмов, а также примерные темы курсовых работ и занятий в дисплейном классе.

Приоритетами курса являются:

- изучение основных физических явлений; овладение фундаментальными понятиями, законами и теориями классической и современной физики, а также методами физического исследования;
- овладение приемами и методами решения конкретных задач из различных областей физики;
- ознакомление с современной научной аппаратурой, формирование навыков проведения физического эксперимента, умение выделить конкретное физическое содержание в прикладных задачах будущей деятельности.

На основе представленной программы в каждом вузе разрабатываются конкретные рабочие программы. Рабочая программа должна включать в себя материал всех разделов данной программы. Однако степень углубленного изучения отдельных подразделов, содержание лекций, практических занятий, самостоятельной аудиторной работы под руководством преподавателя определяется кафедрой физики с учетом числа часов, отводимых на изучение физики, специфики направления бакалавриата, опыта и особенностей кафедры.

Существенно при этом, что на изучение первых трех разделов программы должно затрачиваться не более половины времени, отводимого на курс физики в целом. Элементы профессиональной направленности будущей деятельности выпускника могут быть отражены в практических и лабораторных занятиях и в тематике курсовых работ.

Одним из принципиальных отличий программы дисциплины «Физика» для бакалавров от традиционных курсов является новый подход к организации самостоятельной работы студентов. Его основу составляет самостоятельная аудиторная работа студентов над теоретическим курсом под руководством преподавателя, осуществляемая в рамках теоретических семинаров. Учебное время, отводимое на эти занятия, должно быть сравнимо с временем для проведения практических занятий. Кроме того, в самостоятельную работу студентов входит подготовка к практическим и лабораторным занятиям, работа практикумов, защит лабораторных работ, работ в дисплейном классе, курсовых работ и рефератов, сдачи домашних заданий.

Наилучшей гарантией глубокого и прочного усвоения физики является заинтересованность студентов в приобретении знаний. Для поддержания интереса студентов к физике следует использовать богатый и разнообразный материал ее специальных приложений, лекционные демонстрации и аудиовизуальные средства. В курсе должны найти отражение основные этапы сложного исторического развития физики как научной дисциплины. Это означает, что все атрибуты процесса научно-

го познания (анализ и синтез, абстрагирование, идеализация, обобщения и ограничения; аналогия, моделирование, формализация; историческое и логическое; индукция и дедукция) должны быть использованы преподавателями.

Содержание программы

Введение

Физика как наука. Наиболее общие понятия и теории. Методы физического исследования: опыт, гипотеза, эксперимент, теория. Математика и физика. Физика и естествознание. Философия и физика. Важнейшие этапы истории физики. Роль физики в развитии техники и влияние техники на развитие физики. Физика как культура моделирования. Физические модели. Компьютеры в современной физике. Роль физики в образовании. Общая структура и задачи курса физики. Роль измерения в физике. Единицы измерения и системы единиц. Основные единицы СИ.

I. Физические основы механики

Предмет механики. Классическая и квантовая механика. Нерелятивистская и релятивистская классическая механика. Кинематика и динамика. Основные физические модели: частица (материальная точка), система частиц, абсолютно твердое тело, сплошная среда.

Элементы кинематики

Пространственно-временные отношения. Система отчета. Скалярные и векторные физические величины. Основные кинематические характеристики движения частиц. О смысле производной и интеграла в приложении к физическим задачам. Скорость и ускорение частицы при криволинейном движении. Движение частицы по окружности. Угловая скорость и угловое ускорение. Поступательное и вращательное движения абсолютно твердого тела.

Элементы динамики частиц

Понятие состояния частицы в классической механике. Основная задача динамики. Первый закон Ньютона. Понятие инерциальной системы отсчета. Масса. Уравнение движения. Третий закон Ньютона. Современная трактовка законов Ньютона. Границы применимости классического способа описания движения частиц.

Законы сохранения в механике

Закон сохранения импульса. Центр инерции. Закон движения центра инерции. Реактивное движение. Момент импульса. Момент силы. Закон сохранения момента импульса. Уравнение моментов. Движение в

центрального поле. Законы Кеплера. Работа. Мощность. Кинетическая энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия и энергия взаимодействия. Внутренняя энергия. Закон сохранения энергии в механике. Общефизический закон сохранения энергии. Законы сохранения и симметрия пространства и времени.

Принцип относительности в механике

Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Инварианты преобразования. Описание движения в неинерциальных системах отчета. Силы инерции. Гравитационная масса. Эквивалентность инертной и гравитационной массы.

Элементы релятивистской динамики

Принцип относительности в релятивистской механике. Преобразования Лоренца для координат и времени и их следствия. Релятивистский импульс. Инвариантность уравнений движения относительно преобразований Лоренца. Полная энергия частицы. Четырехмерный вектор энергии-импульса частицы. Закон сохранения четырехмерного вектора энергии-импульса. Столкновения релятивистских частиц.

Элементы механики твердого тела

Уравнения движения и равновесия твердого тела. Понятие статически неопределенных систем. Кинетическая энергия твердого тела, совершающего поступательное и вращательное движения. Уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Момент инерции твердого тела относительно оси. Вращательный момент. Гироскоп.

Элементы механики сплошных сред

Общие свойства газов и жидкостей. Кинематическое описание движения жидкости. Векторные поля. Поток и циркуляция векторного поля. Уравнения движения и равновесия жидкости. Идеальная жидкость. Стационарное течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли.

Вязкая жидкость. Силы внутреннего трения. Стационарное течение вязкой жидкости. Законы гидродинамического подобия. Гидродинамическая неустойчивость. Понятие турбулентности.

Идеально упругое тело. Упругие деформации и напряжения. Закон Гука. Пластические деформации. Предел прочности.

II. Статистическая физика и термодинамика

Динамические и статистические закономерности в физике. Термодинамический и статистический методы.

Элементы молекулярно-кинетической теории

Макроскопическое состояние. Физические величины и состояния физических систем. Макроскопические параметры как средние значе-

ния. Тепловое равновесие. Модель идеального газа. Уравнение состояния идеального газа. Понятие температуры.

Явления переноса. Диффузия. Теплопроводность. Коэффициент диффузии. Коэффициент теплопроводности. Температуропроводность. Диффузия в газах, жидкостях и твердых телах. Вязкость. Коэффициенты вязкости газов и жидкостей.

Элементы термодинамики

Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия. Интенсивные и экстенсивные параметры. Обратимые и необратимые процессы. Энтропия. Второе начало термодинамики. Термодинамические потенциалы и условия равновесия. Химический потенциал. Условия химического равновесия. Ионизационное равновесие. Цикл Карно. Максимальный КПД тепловой машины.

Фазы и условия равновесия фаз. Термодинамика поверхности раздела двух фаз. Поверхностные энергия и натяжение. Капиллярные явления. Фазовые превращения. Фазовые диаграммы. Уравнение Клапейрона – Клаузиуса. Критическая точка. Изотермы Ван-дер-Ваальса.

Функции распределения

Микроскопические параметры. Вероятность и флуктуации. Распределение Максвелла. Средняя кинетическая энергия частицы. Распределение Больцмана. Теплоемкость многоатомных газов. Ограниченность классической теории теплоемкости.

III. Электричество и магнетизм

Электростатика

Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции. Электрический диполь. Основные уравнения электростатики в вакууме. Поток и циркуляция электростатического поля. Работа электростатического поля. Потенциал электростатического поля и его связь с напряженностью.

Идеальный проводник в электростатическом поле. Поверхностные заряды. Граничные условия на поверхности раздела «идеальный проводник вакуум». Электростатическое поле в полости идеального проводника. Электростатическая защита. Коэффициенты емкости и взаимной емкости проводников. Конденсаторы. Емкость конденсаторов.

Энергия взаимодействия электрических зарядов. Энергия системы заряженных проводников. Энергия заряженного конденсатора. Плотность энергии электростатического поля.

Постоянный электрический ток

Условия существования тока. Проводники и изоляторы. Разрядка конденсатора. Законы Ома и Джоуля – Ленца в локальной форме. Сто-

ронные силы. ЭДС. Источники ЭДС. Закон Ома для замкнутой цепи и участка цепи, содержащего источник ЭДС. Закон сохранения энергии для замкнутой цепи. Правила Кирхгофа.

Магнитное поле

Сила Лоренца. Сила Ампера. Магнитная индукция. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Основные уравнения магнитостатики в вакууме. Поток и циркуляция магнитного поля. Принцип суперпозиции для магнитного поля. Магнитное поле прямолинейного проводника с током. Закон Био – Савара. Виток с током в магнитном поле. Момент сил, действующий на виток с током в магнитном поле. Магнитный момент. Энергия витка с током во внешнем магнитном поле.

Магнитное поле длинного соленоида. Коэффициенты индуктивности и взаимной индуктивности. Магнитное поле и магнитный момент кругового тока. Электромагнитная индукция. Правило Ленца. Явления самоиндукции при замыкании и размыкании электрической цепи. Флюксметр. Магнитная энергия тока. Плотность энергии магнитного поля.

Статические поля в веществе

Плоский конденсатор с диэлектриком. Энергия диполя во внешнем электростатическом поле. Поляризация диэлектрика. Поляризационные заряды. Поляризованность. Электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость. Основные уравнения электростатики диэлектриков. Граничные условия на поверхности раздела «диэлектрик–диэлектрик» и «проводник–диэлектрик». Плотность энергии электростатического поля в диэлектрике.

Намагничивание вещества. Молекулярные токи. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость. Основные уравнения магнитостатики в веществе.

Уравнения Максвелла

Фарадеевская и максвелловская трактовки явления электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Плотность энергии электромагнитного поля. Плотность потока энергии электромагнитного поля. Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Скорость распространения электромагнитных волн.

Квазистационарное электромагнитное поле

Условия малости тока смещения. Токи Фуко.

IV. Колебания. Волны. Волновая оптика

Колебания

Периодические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение. Пружинный маятник. Физический и математический маятники.

Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение.

Вынужденные колебания. Общее дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Резонансная кривая. Резонансная частота. Амплитуда вынужденных колебаний резонансной частоты.

Волны в упругих средах. Продольные и поперечные волны. Звуковые волны в газе. Вывод уравнения для волн в газе. Скорость звука в газе. Упругие волны в твердом теле. Скорость продольных волн в твердом теле. Энергия волны сжатия. Эффект Доплера.

Электромагнитные волны

Волновое уравнение и его решение. Плоская волна. Сферическая волна. Лучи и волновые поверхности. Волновой вектор. Интерференция волн. Стоячая волна. Плотность энергии. Вектор Умова.

Электромагнитные колебания

Гармонические колебания. Колебательный контур. Энергия колебательного контура.

Затухающие электромагнитные колебания. Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний и его решение. Добротность контура. Критическое сопротивление. Аперодический режим.

Вынужденные электромагнитные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение. Резонанс напряжения и токов. Ширина резонансной кривой. Автоколебания.

Последовательное и параллельное соединения участков цепи. Активное и реактивное сопротивления.

Геометрическая оптика

Законы отражения и преломления. Полное внутреннее отражение. Преломление на сферических поверхностях. Линзы.

Интерференция

Сложение волн и колебаний. Когерентность. Временная и пространственная когерентность. Интерференция света от двух точечных источников. Распределение интенсивности света на экране. Интерференция света в тонких пленках. Интерферометры.

Дифракция

Принцип Гюйгенса – Френеля и принцип суперпозиции. Графический метод сложения гармонических колебаний. Векторные диаграммы. Зоны Френеля. Дифракция света на диске и круглом отверстии. Дифракция Фраунгофера. Дифракция света на щели. Дифракционная решетка. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Дифракция на пространственных структурах.

Поляризация света

Эллиптическая и линейная поляризация электромагнитной волны. Волна, поляризованная по кругу. Естественный, поляризованный и частично поляризованный свет. Степень поляризации. Поляризация света при отражении и преломлении. Угол Брюстера. Поляризация света при двойном лучепреломлении. Закон Малюса. Интерференция поляризованных лучей. Искусственная оптическая анизотропия.

V. Атомная и ядерная физика. Элементы квантовой механики

Тепловое излучение

Законы равновесного теплового излучения. Закон Кирхгофа. Формула Планка. Закон Стефана – Больцмана. Закон смещения Вина. Вывод формулы Релея – Джинса и формулы Планка.

Фотоны

Фотоны. Импульс и энергия фотона. Законы фотоэффекта. Тормозное рентгеновское излучение. Эффект Комптона. Вывод формулы Комптона. Давление света. опыты Лебедева.

Атомная физика. Элементы квантовой механики

Спектр излучения атома водорода. Формула Бальмера. Спектральные серии. Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Теория водородоподобного иона. Спектр энергий электрона. Испускание и поглощение света атомом.

Корпускулярно-волновой дуализм. Гипотеза де Бройля. Дифракция электронов и нейтронов в кристаллах. Волновая функция и ее смысл. Вероятность. Плотность вероятности. Операторы в квантовой механике. Среднее значение физической величины. Уравнение Шредингера. Волна де Бройля как решение уравнение Шредингера для свободной частицы. Соотношение неопределенностей. Собственные функции и собственные значения. Стационарные состояния. Уравнение Шредингера для стационарных состояний. Спектр энергий.

Уравнение Шредингера для свободной частицы и его решения. Частица в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Падение частицы на односторонний прямоугольный потенциальный барьер.

Коэффициенты отражения и прохождения. Гармонический осциллятор. Волновая функция осциллятора в основном состоянии.

Квантовые числа. Сравнение с теорией Бора. Гиромагнитное отношение. Спин электрона. Многоэлектронные атомы. Состояния электрона в атоме и их характеристики. Электронные оболочки и слои. Принцип Паули. Число состояний.

Стационарные состояния электронов и квантовые переходы. Формула Планка.

Физика атомного ядра и элементарных частиц

Состав и характеристики атомных ядер. Самопроизвольный распад частицы. Условие самопроизвольного распада. Энергия связи. Удельная энергия связи. Капельная модель ядра. Зависимость удельной энергии связи от массового числа. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Ядерные реакции. Энергия реакции. Деление тяжелых ядер. Синтез легких ядер. Реакции термоядерного синтеза. Виды взаимодействий. Классы элементарных частиц. Фермионы и бозоны. Частицы и античастицы. Единая теория взаимодействий.

ЗАНЯТИЕ 1

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Теория

Для изучения этого и последующих разделов необходимо повторить дифференциальное, интегральное и векторное исчисления.

Мир вокруг нас материален. Материя – объективная реальность, данная нам в ощущениях. Способ существования материи – движение. Простейший вид движения – механическое движение. Поскольку покой и движение тел относительны, то чтобы наблюдать движение тел, необходима система отсчета. На рис. 1.1 изображена система отсчета, куда входят система координат, тело отсчета и часы, синхронизованные сигналом, движущимся со скоростью света.

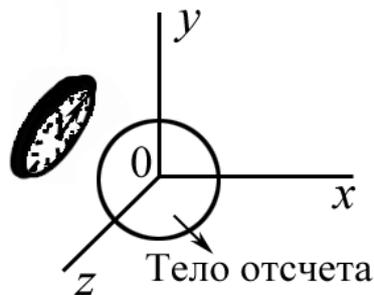


Рис. 1.1. Система отсчета

Способы описания движения

1. Координатный способ (рис. 1.2).

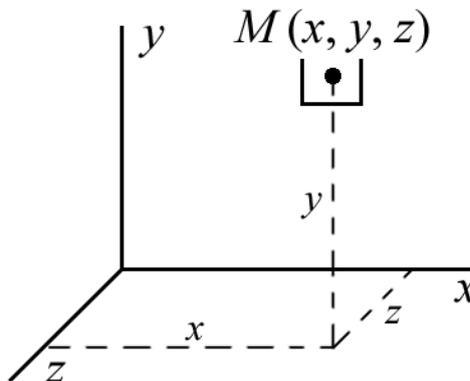


Рис. 1.2. Координатный способ описания движения:
заданы уравнения движения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

2. Векторный способ (рис. 1.3)

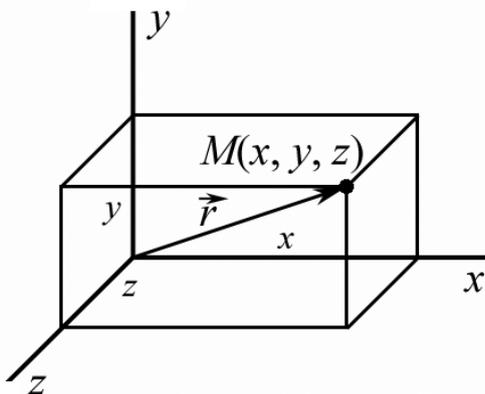


Рис. 1.3. Векторный способ описания движения:
задана зависимость радиуса вектора точки от времени $\vec{r}(t)$

Связь радиус-вектора и координат

Как следует из рис. 1.3, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты осей координат. Модуль радиуса вектора $|\vec{r}|$: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Траекторный, или естественный, способ (рис. 1.4)

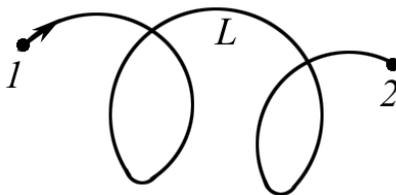


Рис. 1.4. Траекторный, или естественный, способ описания движения

Движение точки определено, если известны ее траектория, начало отсчета O , положительное направление отсчета дуговой координаты L и зависимость $L(t)$.

Основные понятия

Путь, перемещение (рис. 1.5).

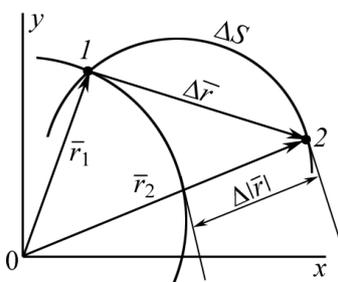


Рис. 1.5. Перемещение – $\Delta\vec{r}$; путь – ΔS ;
приращение модуля радиуса вектора \vec{r} – $\Delta|\vec{r}|$

Путь S – сумма длин отрезков по траектории движения. Перемещение $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – это вектор, соединяющий начальную и конечную точки движения.

Модели реальных тел в механике

1. Материальная точка – тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.
2. Абсолютно твердое тело – тело, которое не изменяет свои размеры при движении (деформации).

Примеры:

- 1) если рассматривать движение Земли вокруг Солнца, то Земля может быть принята за материальную точку;
- 2) если рассматривать движение спутника вокруг Земли, то материальная точка – спутник;
- 3) если рассматривать движение автомобилей на достаточно большом участке местности, то автомобили можно считать материальными точками.

Характеристики движения

Скорость

1. Средняя путевая скорость $v_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

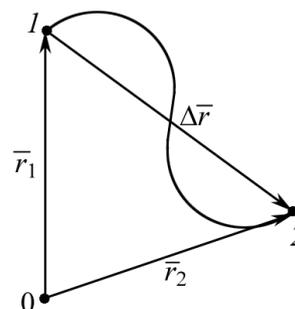


2. Среднее значение вектора скорости

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

3. Вектор мгновенной скорости

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



Ускорение

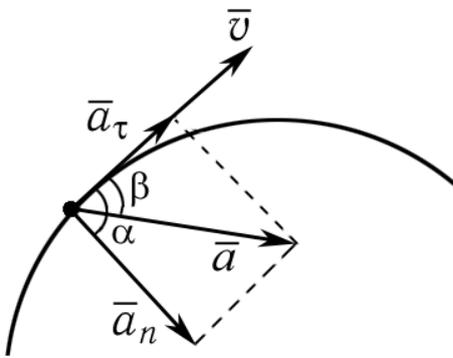
Для изучения движений, скорость которых изменяется со временем ($v(t) \neq \text{const}$), необходимо ввести еще одну кинематическую характеристику – ускорение.

1. Вектор среднего ускорения $\vec{a}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

2. Вектор мгновенного ускорения $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Криволинейное движение

При криволинейном движении полное ускорение точки (или тела) является геометрической суммой тангенциальной (касательной) и нормальной (центростремительной) составляющих.



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|\vec{a}_\tau|}{|\vec{a}_n|}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|}.$$

Модуль тангенциальной составляющей ускорения $|\vec{a}_\tau| = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$.

Модуль нормальной составляющей ускорения $|\vec{a}_n| = \frac{\mathbf{v}^2}{r}$, где r – радиус кривизны траектории в данной точке.

Уравнение траектории движения

Чтобы найти уравнение траектории, необходимо из уравнения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ исключить время, т. е. найти, например, $y(x, z)$.

Подсказка

Чтобы уверенно решать задачи, прочитайте классификацию движений по их кинематическим характеристикам – скорости и ускорению.

1. $\vec{a} = 0$, $\vec{v} = \text{const}$ – *прямолинейное равномерное движение*:

$$\mathbf{v}_s = \frac{ds}{dt}; \quad ds = \mathbf{v}_s dt.$$

2. $\vec{a} = \text{const}$ – *равнопеременное движение*

$$d\vec{v} = \vec{a} dt; \quad \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a} t; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t; \quad ; \quad ;$$

$$s = \int |\vec{v}| dt = \mathbf{v}_0 t \pm \frac{at^2}{2}; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

$$x = x_0 + \mathbf{v}_{0x} t \pm \frac{a_x t^2}{2}; \quad y = y_0 + \mathbf{v}_{0y} t \pm \frac{a_y t^2}{2}; \quad z = z_0 + \mathbf{v}_{0z} t \pm \frac{a_z t^2}{2};$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_x &= \mathbf{v}_{0x} t \pm a_x t \\ \mathbf{v}_y &= \mathbf{v}_{0y} t \pm a_y t \\ \mathbf{v}_z &= \mathbf{v}_{0z} t \pm a_z t \end{aligned} \right\} \text{ – проекции вектора скорости на оси координат;}$$

$$\vec{v} = \mathbf{v}_x \vec{i} + \mathbf{v}_y \vec{j} + \mathbf{v}_z \vec{k} \text{ – вектор скорости.}$$

3. $\vec{a} \neq \text{const}$ – *неравномерное движение*.

При этом $\vec{v} = f(t)$, $s = f(t)$, $\vec{r} = f(t)$ – любые функции времени.

Вектор средней скорости $\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. Вектор мгновенной скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Средняя путевая скорость (скалярная величина) $v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Δs и Δt рассматриваются как

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \dots; \quad \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \dots$$

В результате получаем
$$v_{\text{cp}} = \frac{(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \dots)}{(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \dots)}$$

4. При криволинейном движении вектор полного ускорения \vec{a} имеет две составляющих – \vec{a}_τ, \vec{a}_n . Вектор \vec{a}_τ совпадает по направлению с вектором скорости \vec{v} , а вектор \vec{a}_n перпендикулярен вектору \vec{v} . Из этого следует, что при прямолинейном движении $\vec{v} \parallel \vec{a}$, $\vec{a}_n = 0$.

Рассмотрим конкретный пример.

1. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = (t^3 + 1)\vec{i} + 3t^4\vec{j} + 4\vec{k}$. Найти зависимости $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$.

Найти уравнение траектории и определить вид движения.

Решение

Согласно проведенной выше классификации движений, мы легко определим вид движения, если будут известны $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$. Найти эти зависимости тоже нетрудно:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3t^2\vec{i} + 12t^3\vec{j}; \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6t\vec{i} + 36t^2\vec{j}.$$

По классификации это неравномерное движение. Если вы помните, уравнение траектории можно найти из кинематических уравнений движения $x(t), y(t), z(t)$, если исключить из них время. Для этого надо вспомнить, как связаны координаты x, y, z и радиус-вектор r : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Запишем теперь заданное нам уравнение: $\vec{r} = (t^3 + 1)\vec{i} + 3t^4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Сравнив уравнения, получим $x = (t^3 + 1)$, $y = 3t^4$, $z = 4$.

Исключив из последних уравнений время $t = \sqrt[3]{x-1}$, получим уравнение траектории $y = 3(x-1)^{\frac{4}{3}}$, $z = 4$.

Мы решали простую задачу кинематики, т. е. определяли характеристики по известным уравнениям движения. Обратная задача кинематики заключается в нахождении уравнений движения по известным начальным условиям (x_0, s_0, v_0) и характеристикам движения, т. е.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt, \text{ (если } s_0 = 0 \text{)}; \quad \Delta \vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt; \quad \vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt, \text{ (если } \vec{v}_0 = 0 \text{)}.$$

ТЕСТ

Вопросы

1.1. Какое уравнение материальной точки соответствует равноускоренному движению?

1. $x = 4 + 2t - 6t^3$. 2. $x = 4t + 8t^2 + 16t^3$. 3. $x = 20t + 2t^3 - 4t^2$.
4. $x = 2 + t^3 + 0,5t^2$. 5. $x = t + 8t^2$.

1.2. Движение материальной точки в плоскости x y описывается законом: $x = At^2$, $y = At + Bt^2$. Найти уравнение траектории.

1. $y = A \cdot \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{B}{A}x$. 2. $y = \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{A}{B}x$.
3. $y = \left(\frac{A}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{A}{B}x$. 4. $y = \left(\frac{A}{x}\right)^2 + \frac{A}{B}x$.

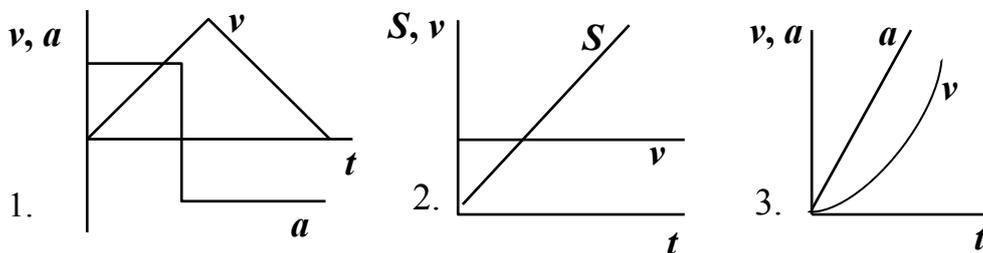
1.3. Какое соотношение соответствует равномерному движению?

1. $s = 20t^3$. 2. $s = 2\sqrt{t}$. 3. $s = 5t^2$. 4. $s = Ct$, $C = \text{const}$.

1.4. Точка движется в плоскости x y с координатами $x_0 = y_0 = 0$ со скоростью $\vec{v} = c^2\vec{i} + bx^2\vec{j}$, где c и b – положительные постоянные; \vec{i} и \vec{j} – орты осей x и y . Найти уравнение траектории

1. $y = \frac{3c^2}{b}x^2$. 2. $y = \frac{3c^2}{b}x$. 3. $y = \frac{b}{3c^2}x$.
4. $y = \frac{b}{3c^2}x^3$. 5. $y = \frac{b}{c^2}x^3$.

1.5. Укажите график, соответствующий равнопеременному движению.



1.6. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t\vec{j}$. Определить уравнение траектории.

1. $y = \frac{3\sqrt{x}}{4}$. 2. $y = \frac{3\sqrt{x}}{2}$. 3. $y = \frac{3x}{2}$. 4. $y = \frac{3x^2}{2}$.

1.7. Точка движется в плоскости x y с координатами $x_0 = y_0 = 0$ со скоростью $\vec{v} = a\vec{i} + bx\vec{j}$ (a и b – постоянные, \vec{i} и \vec{j} – орты осей x и y). Определить уравнение траектории точки.

1. $y = \frac{2a}{b}x^2$. 2. $y = \frac{b}{2ax}$. 3. $y = \frac{b}{2a}x^2$. 4. $y = \frac{2a}{bx}$.

1.8. Точка движется вдоль оси x со скоростью, проекция которой v_x как функция времени описывается графиком (рис. 1.6). Имея ввиду, что в момент $t=0$ координата точки $x_0=0$, найдите примерные графики зависимостей от времени ускорения a_x , координаты x и пройденного пути s .

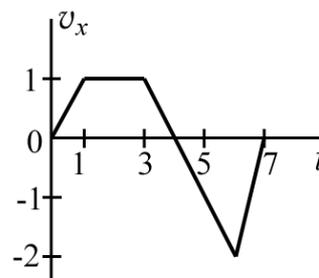
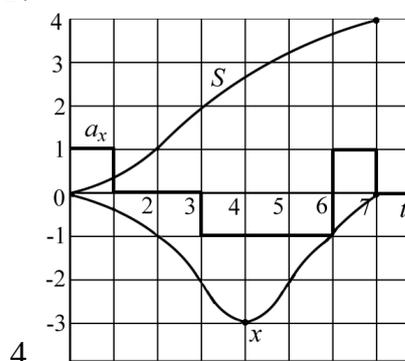
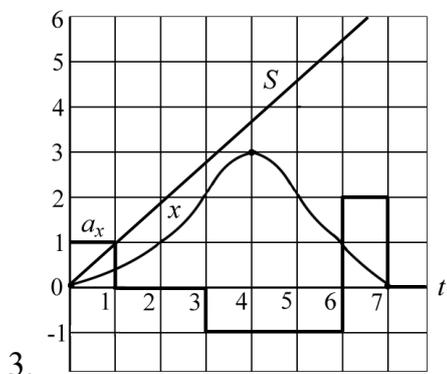
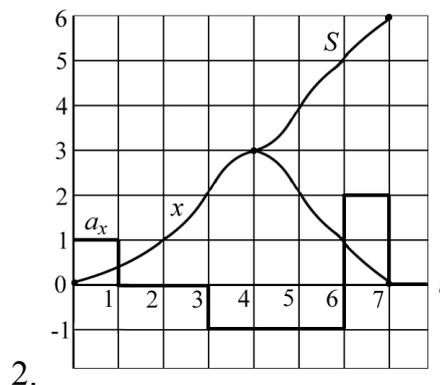
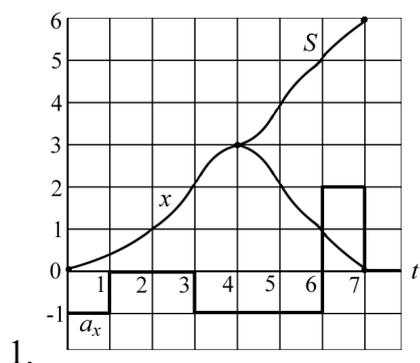


Рис. 1.6



1.9. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону: $\vec{r} = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где \vec{i} и \vec{j} – орты осей x и y . Найти уравнение траектории.

1. $y = 3\sqrt[3]{x^2}$. 2. $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$. 3. $y = 3\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.
 4. $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$. 5. $y = 3x^{\frac{3}{2}}$.

1.10. Укажите, какая зависимость характеризует равнопеременное движение ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты осей x, y, z).

1. $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t^4\vec{j} + 2\vec{k}$. 2. $\vec{r} = t^3\vec{j} + 3t^2\vec{j}$.
 3. $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. 4. $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t^3\vec{j} + \vec{k}$.

1.11. Движение материальной точки в плоскости x, y описывается законом $x = At, y = At(1 + Bt)$, где A, B – положительные постоянные. Найти уравнение траектории $y(x)$.

1. $y = A(1 + B)$. 2. $y = Ax + \frac{B}{A}x^3$. 3. $y = x^2 + \frac{Bx}{A}$.
 4. $y = Bx + Ax^2$. 5. $y = x + \frac{Bx^2}{A}$.

1.12. Какая зависимость соответствует неравномерному движению?

1. $s = 15t + 4t^2$. 2. $s = t - 10t^2$. 3. $s = 10t^2$. 4. $s = 10 + 20t^3$.
 5. $s = 5t - 20t^2$.

1.13. На графике зависимости скорости от времени (рис. 1.7) укажите точку, в которой ускорение равно нулю.

1. 1. 2. 2. 3. 3.

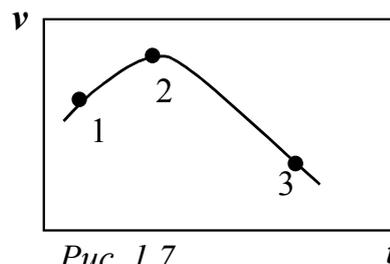


Рис. 1.7

1.14. На графике зависимости скорости от времени (рис. 1.7) укажите точку, в которой ускорение максимально по абсолютной величине.

1. 1. 2. 2. 3. 3.

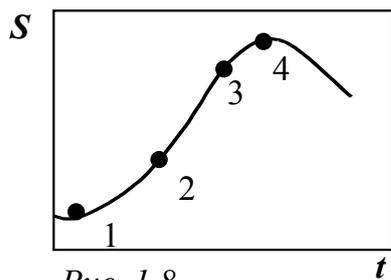


Рис. 1.8.

1.15. На графике зависимости пути от времени (рис. 1.8) укажите точку, в которой скорость максимальна по абсолютной величине.

1. 1. 2. 2. 3. 3. 4. 4.

1.16. На графике зависимости пути от времени (рис. 1.8) укажите точку, в которой скорость равна нулю.

1. 1. 2. 2. 3. 3. 4. 4.

1.17. Какая зависимость соответствует неравномерному движению?

1. $S = vt; v = \text{const}, a = 0$. 2. $S = v_0t \pm \frac{at^2}{2}; v = v_0 \pm at, a = \text{const}$.
 3. $S = v_0t \pm \frac{at^3}{2}; v = v_0 \pm \frac{3t^2}{2}, a = \pm 3t$. 4. $S = vt; v = \text{const}, a = dv/dt$.

1.18. Как движется точка, если скорость $\vec{v} = 1\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$?

1. *Равномерно.*
2. *Неравномерно.*
3. *Равноускоренно.*
4. *Равнозамедленно.*

1.19. Как движется частица, если скорость $\vec{v} = t(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$?

1. *Неравномерно.*
2. *Равноускоренно по прямой.*
3. *Замедленно по прямой.*
4. *Равноускоренно по кривой.*

1.20. Какой вид движения, если $a_\tau = f(t), a_n \neq 0$?

1. *Криволинейное движение с переменным ускорением.*
2. *Криволинейное равномерное движение.*
3. *Криволинейное равнопеременное движение.*
4. *Равномерное движение по окружности.*

1.21. Какой вид движения, если $a_\tau = 0, a_n \neq 0$?

1. *Равномерное движение по окружности.*
2. *Равномерное криволинейное движение.*
3. *Прямолинейное равномерное движение.*
4. *Криволинейное равнопеременное движение.*

1.22. Какой вид движения, если $a_\tau = 0, a_n = 0$?

1. *Прямолинейное равномерное движение.*
2. *Прямолинейное равнопеременное движение.*
3. *Криволинейное движение.*
4. *Прямолинейное равноускоренное.*

1.23. Какой вид движения, если a_τ – положительная константа, $a_n = 0$?

1. *Прямолинейное замедленное движение.*
2. *Неравномерное движение.*
3. *Прямолинейное равномерное движение.*
4. *Прямолинейное равноускоренное движение.*

1.24. Какой вид движения, если $a_\tau = \text{const}, a_n \neq 0$?

1. *Криволинейное равнопеременное движение.*
2. *Равномерное движение по окружности.*
3. *Прямолинейное равнопеременное движение.*
4. *Криволинейное равномерное движение.*

1.25. Какой вид движения, если $a_\tau = 0, a_n = \text{const}$?

1. *Прямолинейное равномерное движение.*
2. *Равномерное движение по окружности.*
3. *Прямолинейное равнопеременное движение.*
4. *Неравномерное движение.*

1.26. Точка движется прямолинейно и равномерно. Чему равны $\vec{v}, \vec{a}_\tau, \vec{a}_n$?

1. $\vec{v} = \text{const}, \vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n = 0.$
2. $\vec{v} = \text{const}, \vec{a}_\tau = \text{const}, \vec{a}_n = 0.$
3. $\vec{v} = \text{const}, \vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n = \text{const}.$
4. $\vec{v} = 0, \vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n = 0.$

1.27. Тело движется так, что зависимость пройденного пути S от времени выражается уравнением $S = b \sin \omega t$, где b и ω – некоторые постоянные. Найти выражение для скорости и ускорения движущегося тела.

1. $\mathbf{v} = b\omega \cos \omega t, \quad a = -b \omega \sin \omega t.$
2. $\mathbf{v} = -b\omega \cos \omega t, \quad a = b \omega^2 \sin \omega t.$
3. $\mathbf{v} = b\omega \cos \omega t, \quad a = -b \omega^2 \sin \omega t.$
4. $\mathbf{v} = b\omega^2 \cos \omega t, \quad a = -b \omega \sin \omega t.$

1.28. Скалярное произведение скорости и ускорения в случае равномерного движения по окружности равно:

1. 0. 2. $\mathbf{v}^2 / R.$ 3. $\mathbf{v}^3 / R.$ 4. $\mathbf{v} / R.$ 5. $\mathbf{v} \cdot R.$

1.29. Ускорение точки и его модуль, если компоненты скорости точки $\mathbf{v}_x = 2t; \mathbf{v}_y = 2t; \mathbf{v}_z = t$ (м/с²), равны:

- 1) $\vec{a} = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z; 4;$ 2) $\vec{a} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z; 3;$
- 3) $\vec{a} = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z; 4;$ 4) $\vec{a} = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z; 2;$
- 5) $\vec{a} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 3\vec{e}_z; 6.$

Задачи

1.1. Дана зависимость $\vec{r} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$. Чему равен угол, который радиус-вектор \vec{r} составляет с осью x ?

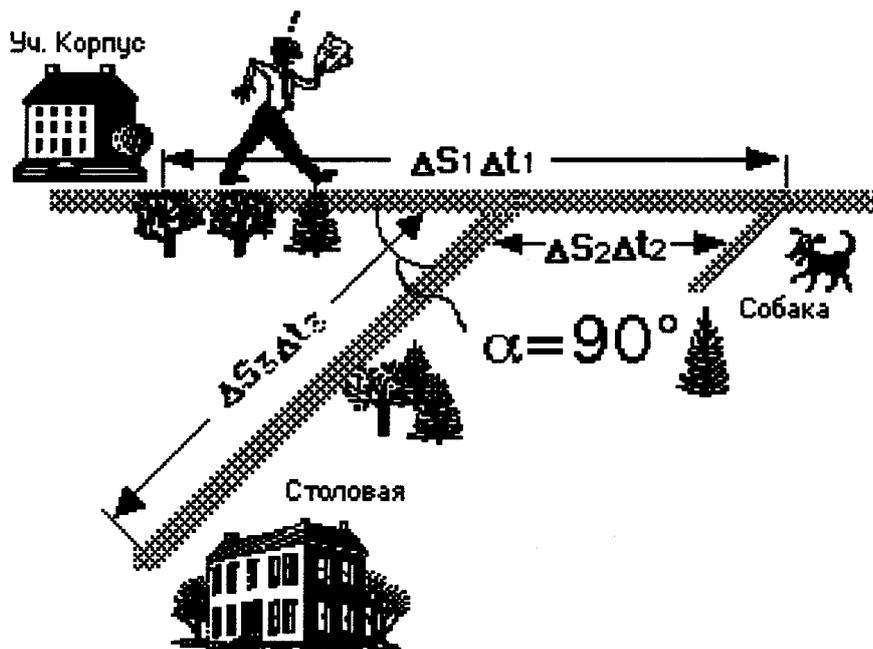
1.2. Точка движется так, что ее радиус-вектор изменяется со временем: $\vec{r} = t\vec{i} - 4t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$. Найдите модуль вектора скорости $|\vec{v}|$ через 1 с после начала движения. Ответ округлить до целого числа.

1.3. Точка движется так, что ее радиус-вектор изменяется со временем: $\vec{r} = t\vec{i} - 4t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$. Найдите модуль вектора скорости $|\vec{a}|$ через 1 с после начала движения. Ответ округлить до десятых долей.

1.4. Точка движется так, что ее радиус-вектор изменяется со временем: $\vec{r} = 4t\vec{i} + t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$. Чему равен модуль вектора мгновенной скорости $|\vec{v}|$ через 1 с после начала движения?

1.5. Точка движется так, что ее радиус-вектор изменяется со временем: $\vec{r} = 4t\vec{i} + t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$. Чему равен модуль вектора ускорения $|\vec{a}|$ через 1 с после начала движения?

1.6. Студент вышел из учебного корпуса, погода была великолепная, поэтому он шел не спеша, прошел 302 м по аллее за 7 мин. Из боковой аллеи на него неожиданно бросилась с лаем собака, и он пробежал 93 м за 7 с в обратную сторону. Отдышавшись, он решил пойти в столовую, до которой было 332 м, на что студенту понадобилось 11 мин. Найдите среднюю путевую скорость и модуль среднего значения вектора скорости студента. Ответ округлить до сотых долей.



1.7. Кинематические уравнения движения материальных точек имеют вид: $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$, $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = -2 \text{ м/с}^2$, $C_2 = 1 \text{ м/с}^2$. Определить: 1) момент времени, для которого скорости этих точек будут равны; 2) ускорения a_1 и a_2 для этого момента.

1.8. Зависимость пройденного пути от времени задается уравнением $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($A = 6 \text{ м}$, $B = 3 \text{ м/с}$, $C = 2 \text{ м/с}^2$, $D = 1 \text{ м/с}^3$). Определить для тела в интервале времени от $t_1 = 1 \text{ с}$ до $t_2 = 4 \text{ с}$: 1) среднюю скорость; 2) среднее ускорение.

1.9. Зависимость пройденного пути от времени задается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($C = 0,1 \text{ м/с}^2$, $D = 0,03 \text{ м/с}^3$). Определить: 1) через сколько времени после начала движения ускорение a тела будет равно 2 м/с^2 ; 2) среднее ускорение $\langle a \rangle$ тела за этот промежуток времени.

1.10. Тело движется равноускоренно с начальной скоростью v_0 . Определить ускорение тела, если за время $t = 2 \text{ с}$ оно прошло путь $s = 16 \text{ м}$ и его скорость $v = 3v_0$.

1.11. Материальная точка движется вдоль прямой так, что ее ускорение линейно растет и за первые 10 с достигает значения 5 м/с^2 . Определить в конце десятой секунды: 1) скорость точки; 2) пройденный точкой путь.

1.12. Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид: $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$ и $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где $B_1 = 4 \text{ м/с}^2$, $C_1 = -3 \text{ м/с}^3$, $B_2 = -2 \text{ м/с}^2$, $C_2 = 1 \text{ м/с}^3$. Определить момент времени, для которого ускорения этих точек равны.

1.13. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $r = 4$ м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1$ м/с², $B = 6$ м/с³, $C = 9$ м/с⁴). Определить: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за $t_1 = 5$ с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени $t_2 = 1$ с.

1.14. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом $r = 3$ м задается уравнением $s = At^2 + Bt$ ($A = 0,4$ м/с², $B = 0,1$ м/с). Определить для момента времени $t = 1$ с после начала движения ускорение: 1) нормальное; 2) тангенциальное; 3) полное.

1.15. С башни высотой 25 м горизонтально брошен камень со скоростью 15 м/с. Найти, какой угол составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю. Ответ дать в градусах, округлить до целого числа.

1.16. Свободно падающее тело в последнюю секунду своего движения проходит половину всего пути. Определить время его падения и высоту поднятия. Ответ округлить до десятых.

ЗАНЯТИЕ 2

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Теория

Поступательное движение

Любое движение твердого тела может быть представлено как совокупность двух движений – поступательного и вращательного. Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором прямая, проведенная через любые две точки, принадлежащие телу, перемещается параллельно самой себе.

Примеры:

1. Движение кабин колеса обозрения.
2. Движение корпуса автомобиля.
3. Движение идущего человека.

Характерной особенностью поступательного движения является то, что все точки (любое твердое тело можно представить как систему материальных точек) этого тела движутся совершенно одинаково, то есть имеют равные скорости и ускорения и одинаковые траектории движения. Поэтому изучать поступательное движение тела можно, наблюдая за одной его точкой. В качестве такой точки обычно выбирают центр масс (центр инерции, центр тяжести). Положение центра масс для тел правильной геометрической формы, однородных по составу и плотности, совпадает с их геометрическим центром. Подробнее о центре масс мы расскажем в разделе «Динамика».

Изучив раздел «Кинематика материальной точки», вы уже умеете решать задачи на определение характеристик движения материальной точки по известным уравнениям ее движения (прямая задача кинематики) или находить уравнения движения по известным начальным условиям и характеристикам движения (обратная задача кинематики). Поскольку поступательное движение тела изучается по характеристикам движения принадлежащей ему точки, то все те соотношения, которые вы изучали в разделе «Кинематика материальной точки» и успешно усвоили, можете теперь применить для нахождения характеристик поступательно движущегося тела.

Вращение

Вращательным движением относительно некоторой неподвижной оси (оси вращения) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на

оси вращения, а плоскости вращения перпендикулярны ей. Пусть твердое тело произвольной формы вращается относительно оси AA_1

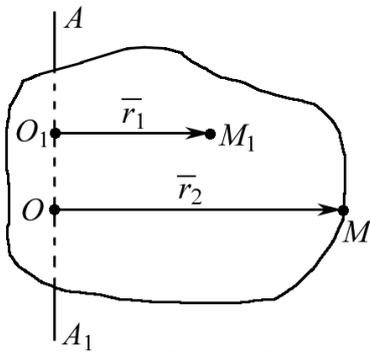


Рис. 2.1

(рис. 2.1). Порассуждаем немного: можно ли, как в случае поступательного движения, понаблюдать за какой-нибудь одной точкой тела и судить в целом о движении тела? Возьмем две точки, M и M_1 , принадлежащие вращающемуся телу. Как следует из рис. 2.2, линейные скорости точек M и M_1 не равны, следовательно, не могут служить характеристикой тела в целом. А какие величины для них одинаковы?

При повороте тела на угол φ радиус-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 его точек тоже повернутся на угол φ . Начало координат для простоты поместим в центр окружностей, по которым движутся точки M и M_1 . Таким образом, надо ввести характеристики, связанные с углом φ , которые называются угловыми.

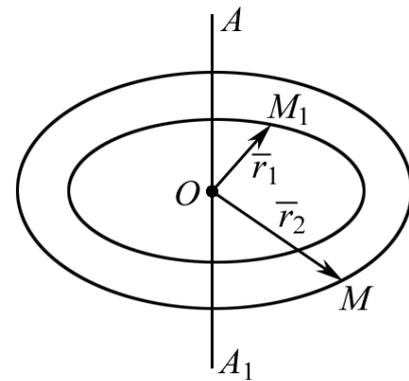


Рис. 2.2

Угловые кинематические характеристики

1. Вектор угловой скорости $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$,

$d\vec{\varphi}$ – бесконечно малый угол поворота. В математике доказывается, что $d\vec{\varphi}$ – вектор, в то время как $\Delta\varphi$ – скалярная величина. Направление $\vec{\omega}$ совпадает с направлением $d\vec{\varphi}$ и связано с направлением вращения правилом правого винта (рис. 2.3).

2. Вектор углового ускорения

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

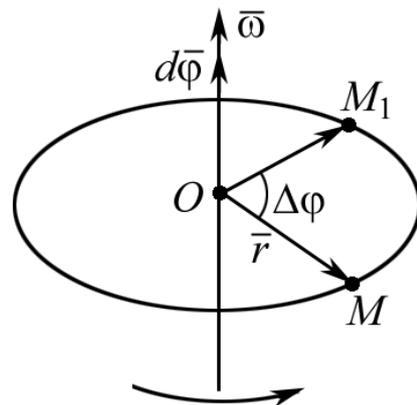


Рис. 2.3

При ускоренном вращении вектор $\vec{\varepsilon}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{\omega}$, при замедленном – направлен в противоположную сторону. Что мы заметили общего для векторов $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$?

1. Направления векторов связаны с направлением вращения (поэтому они называются псевдовекторами, или аксиальными векторами).

2. Векторы $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ направлены по оси вращения и не имеют определенных точек приложения, они могут откладываться из любой точки оси вращения (рис. 2.4).

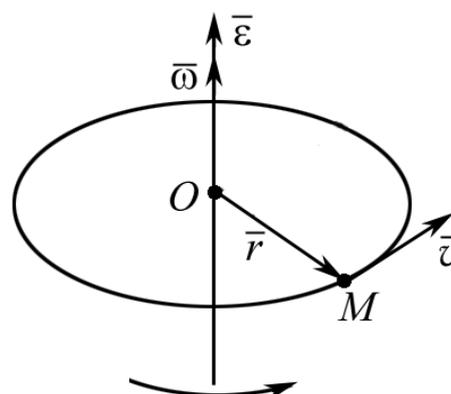


Рис. 2.4

Как связана линейная скорость с угловыми характеристиками?

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]; \quad \vec{v} = \omega r \cdot \sin(\vec{\omega} \vec{r}).$$

Тангенциальная и нормальная составляющие полного ускорения нам также здесь пригодятся, связь их с угловыми характеристиками легко получить:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{rd\omega}{dt} = \varepsilon r; \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Таким образом, связь линейных и угловых характеристик

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]; \quad a_{\tau} = \varepsilon r; \quad a_n = \omega^2 r;$$

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Подсказка

Решение прямой задачи: по заданной зависимости $\varphi(t)$ находим зависимости $\omega(t)$ и $\varepsilon(t)$.

Решение обратной задачи: по заданным зависимостям $\omega(t)$ и $\varepsilon(t)$ и начальным условиям φ_0 и ω_0 находим зависимость $\varphi(t)$ (или число оборотов $N = \frac{\varphi}{2\pi}$).

Например, из равенства $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ следует $d\omega = \varepsilon dr$. При интегрировании обеих частей уравнения $\int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega = \int_{t_0}^t \varepsilon dt$ получим $\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \varepsilon(t) dt$.

Теперь рассмотрим решение конкретных задач.

1. Диск радиусом $R = 10$ см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота от времени задана уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с², $D = 1$ рад/с³). Определить для точек на ободе колеса к концу второй секунды после начала

движения: 1) тангенциальное ускорение a_τ ; 2) нормальное ускорение a_n ; 3) полное ускорение a (рис. 2.5).

Решение

Это прямая задача кинематики вращения, вид движения – неравномерное вращение.

Чтобы найти a_τ и a_n , надо знать линейную скорость (или ее зависимость от времени). Из связи v и ω следует: $v = \omega R \sin \alpha$ (в данном случае $\sin \alpha = 1$),

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2; v = (1 + 2t + 3t^2)R.$$

Теперь легко найти a_τ и a_n :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2R + 6Rt; \quad a_\tau = 1,4 \text{ м/с}; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(1 + 2t + 3t^2)^2 R^2}{R};$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = (1 + 2t + 3t^2)^2 R; \quad a_n = 28,9 \text{ м/с}^2; \quad a = 28,9 \text{ м/с}^2.$$

2. Колесо радиусом $R = 0,1$ м вращается так, что зависимость угловой скорости от времени задана уравнением $\omega = 2At + 5Bt^4$ ($A = 2$ рад/с, $B = 1$ рад/с⁴). Определить полное ускорение точек обода колеса через $t = 1$ с после начала вращения и число оборотов, сделанных колесом за это время.

Решение

А это – обратная задача кинематики вращения, вид движения – неравномерное вращение.

Чтобы найти полное ускорение a , надо найти a_τ и a_n . Это сделать нетрудно:

$$a_\tau = \varepsilon R; \quad a_n = \omega^2 R; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 4 + 20t^3; \quad a_\tau = 4R + 20Rt^3;$$

$$a_n = (4t + 5t^4)^2 R.$$

Поскольку $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$; $a = R\sqrt{(4 + 20t^3)^2 + (4t + 5t^4)^4}$, то $a = 8,5$ м/с².

Число оборотов N : $N = \frac{\varphi}{2\pi}$ при $t_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$.

$$\varphi = \int_0^t \omega dt; \quad \varphi = \int_0^t (4t + 5t^4) dt; \quad \varphi = 3 \text{ рад}, \quad N = 3/6,28 = 0,48 \text{ об.}$$

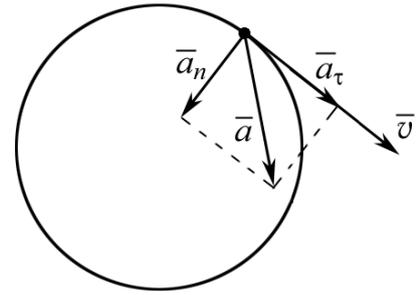


Рис. 2.5

ТЕСТ

Вопросы

2.1. Вы едете на прогулку на подаренном вам за отличную учебу велосипеде. Верные заключения:

1. *Велосипед и велосипедист движутся поступательно.*
2. *Колеса велосипеда вращаются и движутся поступательно.*
3. *Точки на ободке колеса вращаются.*
4. *Центр масс колес вращается.*

2.2. Вы спешите в университет на машине (марку машины выберите сами). Верные заключения:

1. *Колеса автомобиля вращаются и движутся поступательно.*
2. *Машина движется поступательно.*
3. *Машина движется прямолинейно.*
4. *Машина движется по криволинейной траектории.*

2.3. В теплый летний вечер вы стоите на главной аллее горсада, сияющей огнями, и наблюдаете за движением колеса обозрения. Верные заключения:

1. *Колесо обозрения и кабины пассажиров вращаются.*
2. *Кабины пассажиров движутся поступательно.*
3. *Колесо обозрения вращается.*
4. *Пассажиры вращаются.*

2.4. Зимний сад залит лунным светом. Вы любуетесь серебристым диском луны. Если луну в условиях данной задачи принять за материальную точку, то можно ли сказать, что ... – верное заключение?

- 1) *Луна движется по орбите, близкой к окружности, вокруг Земли;*
- 2) *Луна – спутник Земли;*
- 3) *Луна вращается по круговой орбите вокруг Земли;*
- 4) *Луна вращается вокруг своей оси.*

2.5. Можно ли так сказать? Верные высказывания:

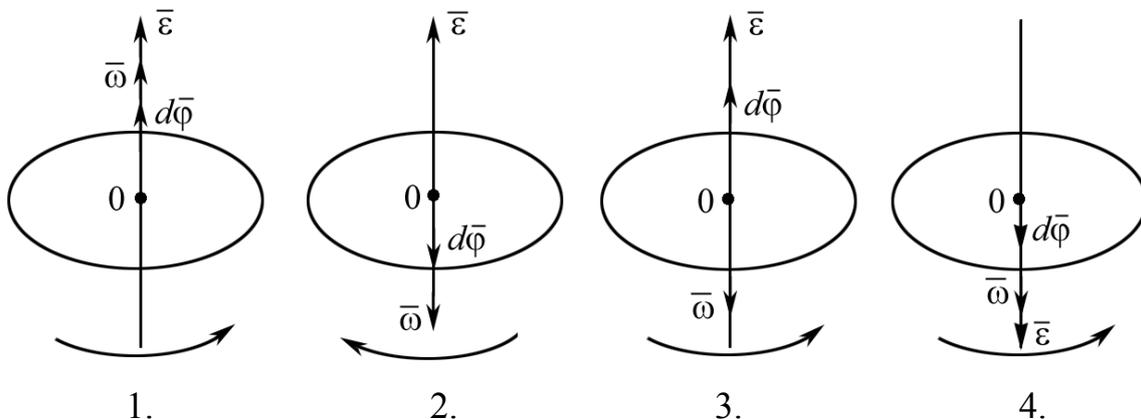
1. *Поезд движется поступательно.*
2. *Материальная точка движется прямолинейно.*
3. *Материальная точка движется поступательно.*
4. *Материальная точка вращается.*

2.6. Можно ли так сказать? Верные высказывания: материальная точка

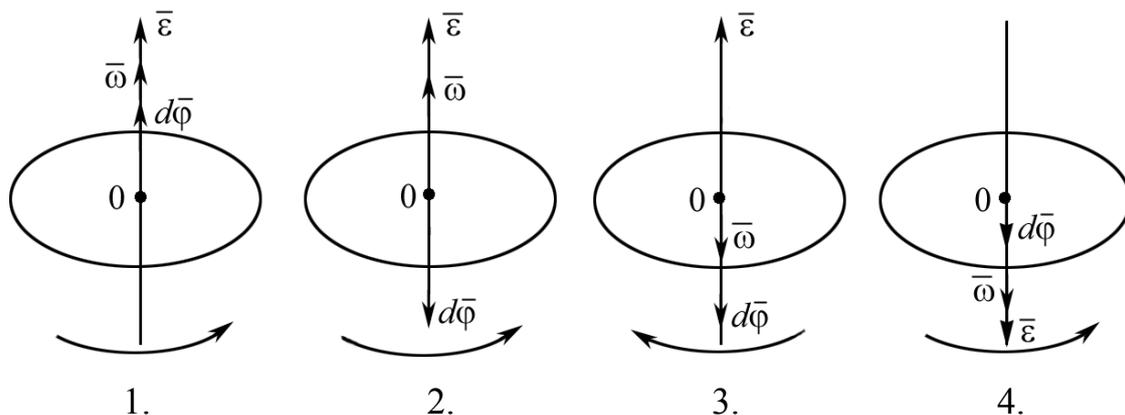
- 1) *вращается;*
- 2) *движется поступательно;*
- 3) *движется по окружности;*
- 4) *движется прямолинейно;*
- 5) *движется по криволинейной траектории.*

- 2.7.** Можно ли так сказать? Верные названия.
1. Вектор средней путевой скорости.
 2. Вектор угловой скорости.
 3. Вектор углового ускорения.
 4. Модуль вектора средней путевой скорости.
- 2.8.** Можно ли так сказать? Верные заключения:
1. Вектор угловой скорости направлен по оси вращения.
 2. Тангенциальное ускорение направлено по оси вращения.
 3. Вектор углового ускорения направлен по оси вращения.
 4. Линейная скорость направлена по оси вращения.
- 2.9.** По оси вращения направлены ... (верные варианты ответа):
1. Вектор линейной скорости.
 2. Вектор перемещения.
 3. Вектор угловой скорости.
 4. Вектор углового ускорения.
- 2.10.** Верные заключения: по касательной к траектории направлены
- 1) угловая скорость; 2) линейная скорость;
 - 3) тангенциальное ускорение; 4) угловое ускорение.
- 2.11.** Верные заключения: по оси вращения направлены
- 1) линейная скорость;
 - 2) нормальное ускорение;
 - 3) угловое ускорение;
 - 4) угловая скорость.
- 2.12.** Верные заключения: по касательной к траектории направлены
- 1) тангенциальное ускорение;
 - 2) угловое ускорение;
 - 3) нормальное ускорение;
 - 4) линейная скорость.
- 2.13.** Верное заключение: если $\vec{\omega} = \text{const}$, то тело вращается
- 1) равноускоренно; 2) равнозамедленно;
 - 3) неравномерно; 4) равномерно.
- 2.14.** Верное заключение: если $\vec{\varepsilon} = \text{const}$, то тело вращается
- 1) равномерно; 2) равнозамедленно;
 - 3) равноускоренно; 4) неравномерно.
- 2.15.** Какая величина является псевдовектором?
1. Угловая скорость. 2. Линейная скорость.
 3. Нормальное ускорение. 4. Тангенциальное ускорение.
- 2.16.** Какие величины являются векторными?
1. Угловой путь.
 2. Средняя путевая скорость.
 3. Бесконечно малый угол поворота.
 4. Угловое ускорение.

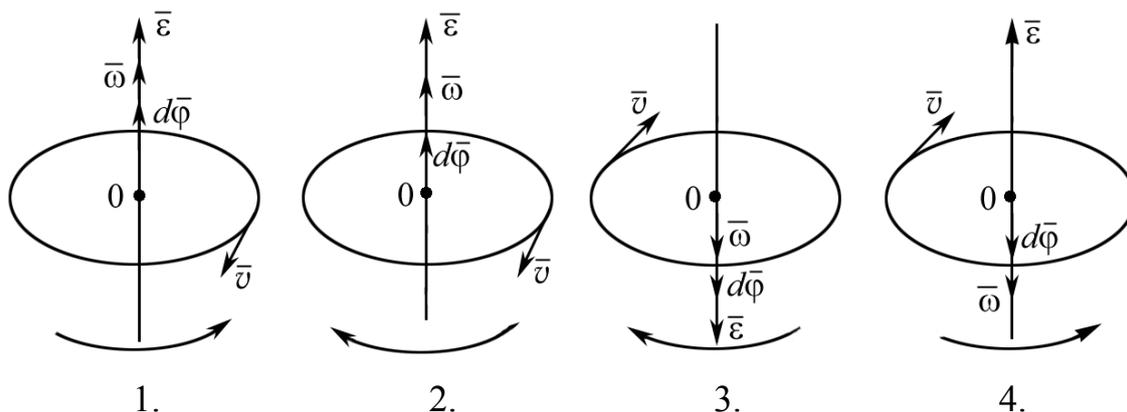
2.17. Верно указаны направления $d\bar{\varphi}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$ при равноускоренном вращении на рисунке:



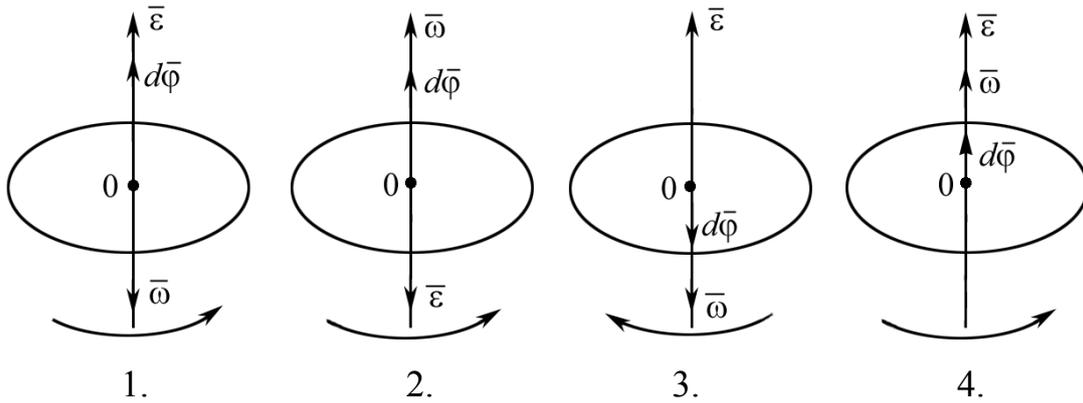
2.18. Верно указаны направления $d\bar{\varphi}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$ при равнозамедленном вращении на рисунке:



2.19. Верно указаны направления $d\bar{\varphi}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$, \bar{v} при равноускоренном вращении на рисунке:

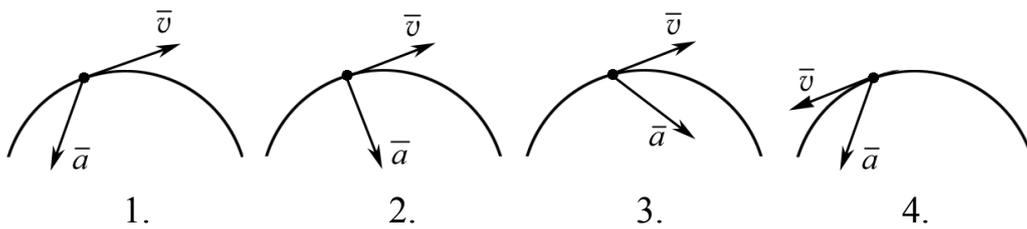


2.20. Верно указаны направления $d\bar{\varphi}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$ при равнозамедленном вращении на рисунках:



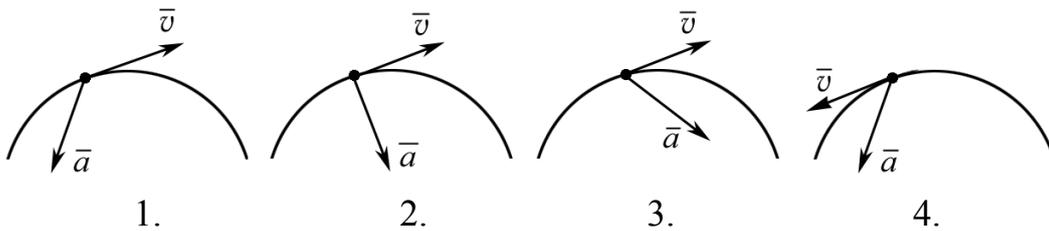
1. 2. 3. 4.

1.21. Рисунок, где правильно показано направление \vec{v} и \vec{a} (полное ускорение) при криволинейном замедленном движении:



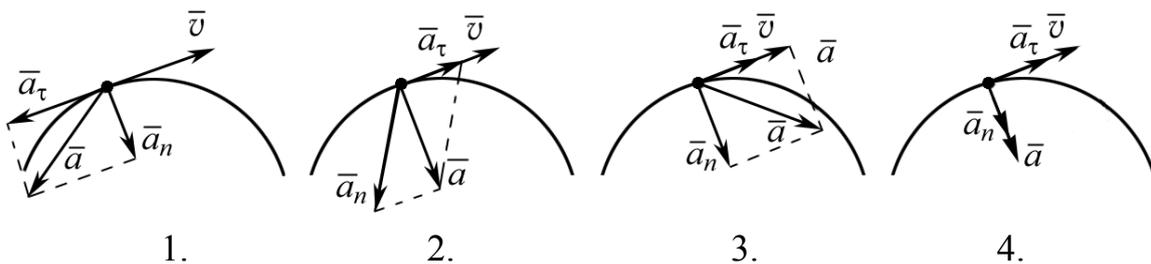
1. 2. 3. 4.

2.22. Рисунки, где правильно показано направление \vec{v} и \vec{a} (полное ускорение) при криволинейном ускоренном движении:



1. 2. 3. 4.

2.23. Рисунок, где правильно показано направление \vec{v} , \vec{a}_τ , \vec{a}_n , \vec{a} при криволинейном ускоренном движении:



2.24. Если $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, $\varepsilon = \text{const}$, тело вращается

- 1) равномерно; 2) равноускоренно;
 3) равнозамедленно; 4) неравномерно.

Задачи

2.1. Частица прошла за некоторое время $1/4$ часть окружности радиуса $R = 4$ м. Чему равен пройденный путь S и модуль вектора перемещения?

2.2. Частица прошла за некоторое время $3/4$ части окружности радиуса $R = 2$ м. Чему равны пройденный путь S и модуль вектора перемещения $|\vec{r}|$?

2.3. Частица движется так, что угловой путь φ изменяется по закону $\varphi = 5t + 4t^2 + 6t^3$ (рад). Найдите угловую скорость и угловое ускорение к моменту времени $t = 1$ с.

2.4. Частица движется так, что угловая скорость изменяется по закону $\omega = 4 + 5t$ (рад/с). Найдите угловой путь и угловое ускорение к моменту времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

2.5. Частица движется так, что угловое ускорение ε изменяется по закону $\varepsilon = 2t + 3t^2$ (рад/с²). Найдите угловую скорость в момент времени $t = 1$ с.

2.6. Диск радиусом $r = 0,2$ м вращается согласно уравнению $\varphi = 3 - t + 0,1t^3$ (рад). Определите тангенциальное ускорение a_τ точек на окружности диска для момента времени $t = 10$ с.

2.7. Диск радиусом $r = 0,2$ м вращается согласно уравнению $\varphi = 3 - t + 0,1t^3$ (рад). Определите нормальное ускорение a_n точек на окружности диска для момента времени $t = 10$ с. Ответ дать в системе СИ.

2.8. Диск вращается согласно уравнению $\varphi = 3 - t + 0,1t^3$ (рад). Определите угловое ускорение ε для момента времени $t = 2$ с.

2.9. Диск радиусом $r = 0,2$ м вращается согласно уравнению $\varphi = 3 - t + 0,1t^3$ (рад). Определите линейную скорость точек на окружности диска для момента времени $t = 3$ с. Ответ дать в системе СИ.

2.10. Диск радиусом $r = 0,2$ м вращается так, что линейная скорость точек на окружности диска изменяется по закону $v = -0,2 + 0,6t^2$ (м/с). Определите угловое ускорение ε для момента времени $t = 1$ с.

2.11. Диск вращается так, что угловая скорость изменяется по закону $\omega = -1 + 0,3t^2$ (рад/с). Найдите число оборотов диска к моменту времени $t = 10$ с, если при $t_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$. Ответ округлить до целого числа.

2.12. Диск радиусом $r = 0,2$ м вращается так, что угловое ускорение изменяется по закону $\varepsilon = 0,6t$ (рад/с²). Найдите линейную скорость точек на окружности диска для момента времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$ $\omega_0 = 0$. Ответ дать в системе СИ.

2.13. На одну из лопастей ветряной мельницы села бабочка. Подул свежий ветер, лопасти пришли во вращение. Определите линейную скорость бабочки и число оборотов лопасти к моменту времени $t = 7$ с после начала вращения, если бабочка находится на расстоянии $r = 0,92$ м от центра вращения, а закон изменения углового ускорения от времени $\varepsilon = Ct$, где $C = 2$ рад/с³.

Примечание: начальные условия задачи разбрасываются в заданных пределах случайным образом.

2.14. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом $r = 12,5$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0,5$ см/с². Определить: 1) момент времени, при котором вектор полного ускорения \vec{a} образует с вектором скорости \vec{v} угол $\alpha = 45^\circ$; 2) путь, пройденный за это время движущейся точкой.

2.15. Линейная скорость v_1 точки, находящейся на ободе вращающегося диска, в три раза больше, чем линейная скорость v_2 точки, находящейся на 6 см ближе к его оси. Определить радиус диска.

2.16. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с². Определить радиус колеса, если через $t = 1$ с после начала движения полное ускорение колеса $a = 7,5$ м/с².

2.17. Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения $n = 50$ с⁻¹, после выключения тока, сделав $N = 628$ оборотов, остановился. Определить угловое ускорение ε якоря.

2.18. Колесо автомашины вращается равнозамедленно. За время $t = 2$ мин оно изменило частоту вращения от 240 до 60 мин⁻¹. Определить: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время.

2.19. Точка движется по окружности радиусом $R = 15$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ . К концу четвертого оборота после начала движения линейная скорость точки $v = 15$ см/с. Определить нормальное ускорение a_n точки через $t = 16$ с после начала движения.

2.20. Колесо вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с². Через время $t = 0,5$ с после начала движения полное ускорение колеса $a = 13,6$ см/с². Найти радиус R колеса.

2.21. Диск радиусом $R = 10$ см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с², $D = 1$ рад/с³). Определить для точек на ободе диска к концу второй секунды после начала движения: 1) тангенциальное ускорение a_τ ; 2) нормальное ускорение a_n ; 3) полное ускорение a .

2.22. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ ($A = 0,5 \text{ рад/с}^2$). Определить к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска; 2) угловое ускорение диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения, полное ускорение a .

2.23. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ ($A = 0,1 \text{ рад/с}^2$). Определить полное ускорение a точки на ободе диска к концу второй секунды после начала движения, если линейная скорость этой точки в этот момент $v = 0,4 \text{ м/с}$.

2.24. Диск радиусом $R = 10 \text{ см}$ вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, задается уравнением $v = At + Bt^2$ ($A = 0,3 \text{ м/с}^2$, $B = 0,1 \text{ м/с}^3$). Определить угол φ , который образует вектор полного ускорения \vec{a} с радиусом колеса через 2 с от начала движения.

2.25. Диск радиусом $R = 10 \text{ см}$ вращается так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt^3$ ($A = 2 \text{ рад}$, $B = 4 \text{ рад/с}^3$). Определить для точек на ободе колеса: 1) нормальное ускорение a_n в момент времени $t = 2 \text{ с}$; 2) тангенциальное ускорение a_τ для этого же момента; 3) угол поворота φ , при котором полное ускорение составляет с радиусом колеса угол $\alpha = 45^\circ$.

2.26. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиуса $r = 4 \text{ м}$, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1 \text{ м/с}^2$, $B = 6 \text{ м/с}^3$, $C = 9 \text{ м/с}^4$). Определить: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5 \text{ с}$ после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени $t_2 = 1 \text{ с}$.

2.27. Частота вращения колеса при равнозамедленном движении за $t = 1 \text{ мин}$ уменьшилась с 300 до 180 мин^{-1} . Определить: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время.

2.28. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где $B = 2 \text{ м/с}$ и $C = 1 \text{ м/с}^2$. Найти линейную скорость v точки и ее полное ускорение a через время $t = 3 \text{ с}$ после начала движения, если известно, что при $t' = 2 \text{ с}$ нормальное ускорение точки равно $0,5 \text{ м/с}^2$.

2.29. Найти угловое ускорение ε колеса, если известно, что через $t = 2 \text{ с}$ после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с вектором ее линейной скорости.

2.30. Колесо вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2$. Через время $t = 0,5 \text{ с}$ после начала движения полное ускорение колеса $a = 13,6 \text{ см/с}^2$. Найти радиус R колеса.

2.31. Колесо радиусом $R = 0,1 \text{ м}$ вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $B = 2 \text{ рад/с}$, $C = 1 \text{ рад/с}^3$. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через время $t = 2 \text{ с}$ после начала движения: 1) угловую скорость ω ; 2) линейную скорость v ; 3) угловое ускорение ε .

2.32. Колесо радиусом $R = 5 \text{ см}$ вращается так, что зависимость угла поворота радиуса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $D = 1 \text{ рад/с}^3$. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти изменение тангенциального ускорения Δa_τ за единицу времени.

2.33. Колесо радиусом $R = 10 \text{ см}$ вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени дается уравнением $v = A + Bt^2$, где $A = 3 \text{ см/с}$ и $B = 1 \text{ см/с}^3$. Найти угол α (град), составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса в моменты времени t , равные: 0; 3 и 5 с после начала движения.

2.34. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1 \text{ рад/с}$, $C = 1 \text{ рад/с}^2$ и $D = 1 \text{ рад/с}^3$. Найти радиус R колеса, если известно, что к концу второй секунды движения для точек, лежащих на ободе колеса, нормальное ускорение $a_n = 3,46 \cdot 10^2 \text{ м/с}^2$.

2.35. Найдите, во сколько раз нормальное ускорение a_n точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее тангенциального ускорения a_τ для того момента, когда вектор полного ускорения точки составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с вектором ее линейной скорости.

2.36. Вал вращается с частотой $n = 180 \text{ об/мин}$. С некоторого времени вал начал вращаться равнозамедленно с угловым ускорением $\varepsilon = 3 \text{ рад/с}^2$. Найдите время t и число оборотов N вала до полной остановки.

2.37. Точка движется по окружности радиусом $R = 10 \text{ см}$ с постоянным тангенциальным ускорением a_τ . Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки $v = 9,2 \text{ см/с}$.

2.38. Автомобилист проехал 300 км за 2 ч, был остановлен сотрудником дорожной службы, следующие 60 км он проехал за 1 час и остаток пути (120 км) проехал за 3 часа. Какова средняя скорость автомобилиста?

ЗАНЯТИЕ 3 ДИНАМИКА

Теория

Динамика означает движение, равно как и кинематика. Но если в кинематике только констатируется, что тело движется согласно такому-то уравнению, то в динамике исследуются также причины изменения этого движения. Действующие на тело силы приводят к изменению в движении тел, то есть к изменению их кинематических характеристик – скорости и ускорения.

Динамические характеристики

1. МАССА. Всякое тело оказывает сопротивление при попытках привести его в движение или изменить модуль или направление его скорости. Это свойство тел называется инертностью. Масса – количественная мера инертности тел при поступательном движении.

2. ИМПУЛЬС, или количество движения, – вектор, равный произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

3. СИЛА – причина изменения импульса (скорости) тела.

Основу динамики, как вам уже известно из курса физики средней школы, составляют три закона Ньютона.

1-й ЗАКОН – закон инерции

Существуют системы отсчета, в которых свободная материальная точка (тело) движется равномерно и прямолинейно или покоится. Такие системы отсчета называют инерциальными. Материальная точка (тело) называется свободной, если внешние воздействия компенсируют друг друга. Инерциальной является гелиоцентрическая система отсчета, связанная с Солнцем и тремя звездами, направления на которые взаимно перпендикулярны (это можно установить опытным путем). Всякая другая система, которая движется равномерно и прямолинейно или покоится относительно гелиоцентрической, тоже инерциальна. Система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной, потому что Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца, но при изучении законов динамики неинерциальностью земной (геоцентрической) системы можно пренебречь.

2-й ЗАКОН – основной закон динамики

В инерциальной системе отсчета производная от импульса (скорость изменения импульса) материальной точки по времени равна суммарной действующей на нее силе:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Если $v \ll c$ (c – скорость света в вакууме), то $m = \text{const}$ и

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Как перейти от 2-го закона Ньютона к уравнению движения? Это возможно, если представить его в другой форме, записав ускорение \vec{a} как вторую производную от радиуса вектора по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \text{ тогда } \vec{F} = \frac{md^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1)$$

Поскольку $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то уравнение (1) связывает действующие на тело силы с координатами, т. е. позволяет определить положение тела в пространстве и является уравнением движения в векторной форме. Этому уравнению соответствуют три скалярных уравнения:

$$F_x = \frac{md^2x}{dt^2}; \quad F_y = \frac{md^2y}{dt^2}; \quad F_z = \frac{md^2z}{dt^2}.$$

Если сила F_i определена независимым способом (то есть не по ускорению или изменению импульса тела), то двойным интегрированием уравнения (1) можно определить координаты тела в любой момент времени. При этом должны быть заданы начальные условия для r_0 и v_0 . Из опыта известно, что силы подчиняются принципу суперпозиции (наложения): каждая сила F_i сообщает телу (точке) одно и то же ускорение a_i независимо от того, действуют на это тело другие силы или нет.

3-й ЗАКОН – закон взаимодействия.

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

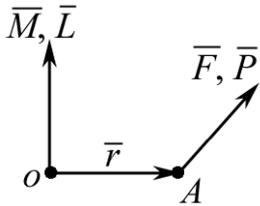
Динамика вращения

Динамическими характеристиками вращения являются три момента:

- момент инерции I ,
- момент силы \vec{M} ,
- момент импульса \vec{L} .

Следует различать моменты векторов силы и импульса относительно точки и относительно оси. Момент вектора относительно точки

сам является вектором. Момент того же вектора относительно оси есть проекция на эту ось его момента относительно точки, лежащей на той же оси. Пусть O – какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы или вектора импульса. Ее называют началом, или полюсом. Обозначим буквой \vec{r} радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы \vec{F} . Моментом силы \vec{F} относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора \vec{r} на силу \vec{F} :



$$\vec{M} = [\vec{r} \ \vec{F}].$$

Аналогично момент импульса \vec{L} относительно точки O – это векторное произведение радиус-вектора \vec{r} на импульс \vec{P} : $\vec{L} = [\vec{r} \ \vec{P}]$. Динамические характеристики связаны между собой законами (или уравнениями) движения. Основной закон динамики вращения (уравнение моментов) относительно точки: производная по времени (скорость изменения) от момента импульса системы материальных точек относительно неподвижного начала равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{вн}}. \quad (2)$$

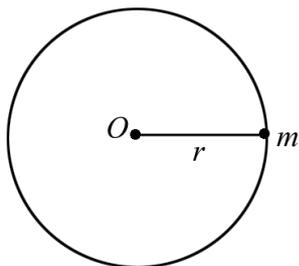
Сравните: при поступательном движении

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Направления векторов \vec{M} и \vec{L} можно найти по правилу правого винта или векторного произведения. Векторное уравнение (2) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (3)$$

Здесь L_x и M_x , L_y и M_y , L_z и M_z – проекции векторов моментов импульса и силы на соответствующие оси (неподвижное начало O лежит на рассматриваемой оси), а уравнения (3) называются уравнениями моментов относительно неподвижных осей x, y, z .



Познакомимся с моментом инерции. Рассмотрим частицу массой m , которая движется по окружности радиуса r . Момент импульса частицы относительно точки O , лежащей на оси вращения, равен $L = mvr$. Пусть ω – угловая скорость, тогда $L = mr^2\omega$. Если вокруг оси движется система частиц с угловой ско-

ростью ω , то $L = \sum m\omega r^2$. Поскольку $\omega = \text{const}$ для всех частиц, то

$$L = I\omega, \quad (4)$$

где $I = \sum mr^2$. Величина I , равная сумме произведений масс частиц на квадраты расстояний их до оси вращения, называется моментом инерции системы частиц (тела) относительно этой оси. Взяв производную по времени от L (4), получим $\frac{d}{dt}(I\omega) = M$. При вращении твердого тела относительно неподвижной оси $I = \text{const}$, тогда $M = I\varepsilon$.

Сравните: $F = ma$. Отсюда можно заключить, что момент инерции – количественная мера инертности тела при вращательном движении.

Теорема Штейнера:

$$I = I_c + md^2,$$

здесь I_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; I – момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии d ; m – масса тела.

В данном разделе, так же как и в предыдущем, потребуется вспомнить такие разделы математики, как дифференциальное и интегральное исчисления, а также элементы векторного исчисления. Скалярными называются величины, значения которых могут быть изображены положительными или отрицательными числами (скалярами), например: масса, температура, работа, путь и т. д. Величины, значения которых определяются как размерами, так и направлением в пространстве и подчиняются правилам действия с векторами, называются векторными. Последнее замечание, несмотря на кажущуюся очевидность, имеет важное значение. Например, электрический ток задается величиной и направлением, но не является вектором, т. е. при нахождении суммарного тока в узле $I = I_1 - I_2 - I_3$ токи складываются как скалярные величины.

Напомним векторное и скалярное произведения векторов. Два вектора \vec{a} и \vec{b} заданы уравнениями

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Скалярное произведение $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Векторное произведение

$$[\vec{a} \ \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a} \ \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\sin x$	$\cos x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$

Таблица основных интегралов

(постоянные интегрирования в таблице опущены)

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x $ $\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x$ $\int e^x dx = e^x$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
---	---

Справка: моменты инерции однородных тел правильной геометрической формы, m – масса тела.

№ п/п	Форма тела	Положение оси вращения	Момент инерции
1	Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	mR^2
2	Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
3	Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}mR^2$
4	Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}mR^2$
	Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

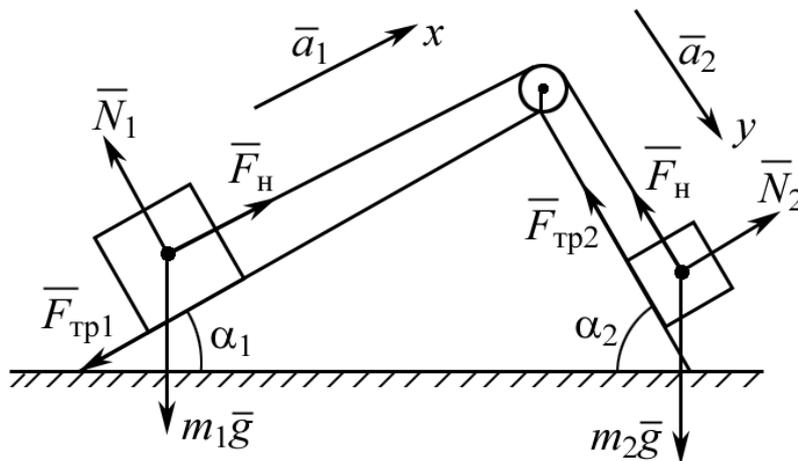
Подсказка

Решение некоторых задач (например, на наклонную плоскость) по теме «Динамика поступательного движения» можно подчинить следующей нежесткой схеме:

1. Выполнить рисунок, где указать действующие на тела силы.
2. Выбрать направление осей координат.
3. Записать 2-й закон Ньютона для каждого тела в векторной форме и в проекциях на оси координат.
4. Посчитать число уравнений и число неизвестных и, в случае необходимости, добавить уравнения из кинематики.

1. На вершине клина расположен невесомый блок. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 10$ кг. Коэффициенты трения грузов m_1 и m_2 о плоскости клина соответственно равны $k_1 = 0,2$ и $k_2 = 0,1$. Углы плоскостей клина с горизонтальной поверхностью соответственно равны $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 60^\circ$. Определить силу натяжения нити.

Решение



Запишем уравнения 2-го закона Ньютона в векторной форме для грузов m_1 и m_2 :

$$m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_H + \vec{F}_{\text{тр}1} = m_1 \vec{a}_1; \quad m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_H + \vec{F}_{\text{тр}2} = m_2 \vec{a}_2.$$

Поскольку нить и блок невесомы, то сила натяжения нити одинакова во всех ее точках. Поэтому на чертеже она одинаково обозначена. Эти же уравнения в проекциях на оси x и y :

$$F_H - m_1 g \sin \alpha_2 - F_{\text{тр}1} = m_1 a_{1x}, \quad m_1 g \cos \alpha_1 - N_1 = 0; \quad (1)$$

$$-F_H - m_2 g \sin \alpha_2 - F_{\text{тр}2} = m_2 a_{2y}, \quad m_2 g \cos \alpha_2 - N_2 = 0. \quad (2)$$

Поскольку нить нерастяжима, то грузы движутся с одинаковым ускорением, то есть $a = a_{1x} = a_{2y}$. Сила трения $F_{\text{тр}} = kN$ (это известно из курса физики средней школы). Поэтому

$$F_{\text{тр}1} = k_1 N_1 = k_1 m_1 g \cos \alpha_1; \quad F_{\text{тр}2} = k_2 N_2 = k_2 m_2 g \cos \alpha_2.$$

Систему уравнений (1) и (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} m_1 a = F_H - k_1 m_1 g \cos \alpha_1 - m_1 g \sin \alpha_1; \\ m_2 a = -F_H - k_2 m_2 g \cos \alpha_2 + m_2 g \sin \alpha_2. \end{cases} \quad (3)$$

Решая полученную систему (3), находим

$$a = \frac{(m_2 \sin \alpha_2 - k_1 m_1 \cos \alpha_1 - k_2 m_2 \cos \alpha_2 - m_1 \sin \alpha_1) g}{m_1 + m_2};$$

$$F_H = \frac{m_1 m_2 (\sin \alpha_1 + k_1 \cos \alpha_1 - k_2 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2) g}{m_1 + m_2}.$$

Отсюда получаем $a = 6,62 \text{ м/с}^2$, $F = 13,2 \text{ Н}$.

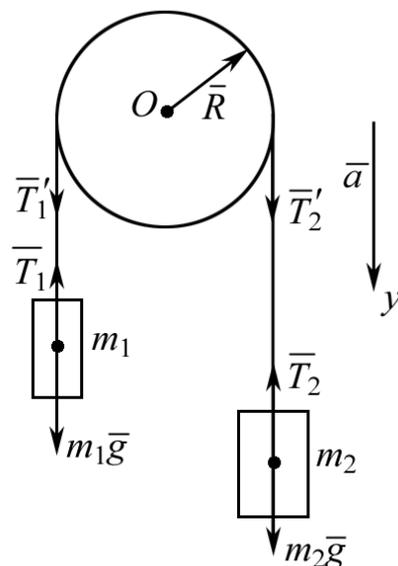
Ускорение от времени не зависит, значит, движение равноускоренное.

2. Через неподвижный блок в виде однородного сплошного цилиндра массой $m = 0,2 \text{ кг}$ перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены тела массами $m_1 = 0,35 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,55 \text{ кг}$. Пренебрегая трением в оси блока, определить: 1) ускорение a грузов; 2) отношение T_1 / T_2 сил натяжения нити.

Решение

Эта задача немного сложнее предыдущей, поскольку блок здесь не является невесомым, для его вращения требуется усилие.

Блок поворачивает сила $P_2 - P_1$, однако разность весов грузов к блоку непосредственно не прикладывается. Помните, мы обсуждали вопрос о том, что только касательная к ободу диска сила создает момент вращения относительно его оси? То есть надо искать касательную силу. По касательной к ободу диска направлены силы натяжения нитей \vec{T}'_1 и \vec{T}'_2 , равные по модулю и противоположные по направлению силам упругости нити \vec{T}_1 и \vec{T}_2 . Иногда эти силы тоже назы-



вают силами натяжения нити. Разность этих сил и создает вращающий момент диска относительно его оси:

$$M_{\text{вр}} = (T_2' - T_1')R = (T_2 - T_1)R.$$

Согласно основному закону вращения тела относительно неподвижной оси $M_{\text{вр}} = I \cdot \varepsilon$, где I – момент инерции диска, ε – его угловое ускорение. Отсюда $(T_2 - T_1)R = I \cdot \varepsilon$. Грузы движутся поступательно, следовательно, для них можно записать основной закон динамики поступательного движения в проекциях на ось Y :

$$T_1 - m_1g = m_1a; \quad (1)$$

$$m_2g - T_2 = m_2a. \quad (2)$$

Из этих уравнений выразим $(T_2 - T_1)$:

$$T_2 - T_1 = g(m_2 - m_1) - a(m_1 + m_2).$$

Учитывая, что $\varepsilon = a/R$, $I = mR^2/2$, получаем

$$g(m_2 - m_1 - a(m_1 + m_2)) = ma/2.$$

$$\text{Отсюда } a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2 + m/2)g}; \quad a = 1,96 \text{ м/с}^2.$$

Из уравнений (1) и (2) находим силы натяжения нитей и их отношение:

$$T_2 / T_1 = 1,05.$$

3. Шар радиусом $R = 10$ см и массой $m = 5$ кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где ($B = 2$ рад/с², $C = -0,5$ рад/с³). Определить момент сил M для момента времени $t = 3$ с.

Решение

Чтобы найти момент силы, вращающей шар, воспользуемся 2-м законом Ньютона для вращательного движения:

$$M = I \cdot \varepsilon, \quad I_{\text{ш}} = \frac{2}{5}mR^2.$$

Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2B + 6C$, то есть

$$M = \frac{(2B + 6Ct) \cdot 2mR^2}{5} = \frac{2mR^2(4 - 3t)}{5};$$

$M = -0,1$ Нм. Шар тормозится.

ТЕСТ

Вопросы

3.1. Какие системы отсчета будут неинерциальными, если в качестве тела отсчета выбрать:

1. Кресло равномерно вращающейся карусели, в котором Вы отдыхаете в воскресный день.
2. Будку кассира, где Вы купили билет на карусель.
3. Равномерно движущийся по детской железной дороге поезд на прямолинейном отрезке пути.
4. Равномерно вращающееся колесо.

3.2. С каким телом следует связать систему координат, чтобы система отсчета была инерциальной?

1. С равномерно движущимся относительно вокзала поездом.
2. С самолетом, идущим на снижение.
3. С человеком, догоняющим уходящий поезд.
4. Со зданием автовокзала.

3.3. Какое из уравнений 2-го закона Ньютона является наиболее общим?

$$1. \vec{F} = m\vec{a}. \quad 2. \vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad 3. \vec{F} = m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad 4. \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

3.4. Какое из уравнений 2-го закона Ньютона справедливо в случае релятивистского движения ($v \sim c$, c – скорость света в вакууме)?

$$1. \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad 2. \vec{F} = m\vec{a}. \quad 3. \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad 4. \vec{F} = m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

3.5. Верные утверждения:

1. 1-й закон Ньютона не имеет самостоятельного значения, т. к. он является следствием 2-го закона: $\vec{F} = m\vec{a}$.

2. 1-й закон Ньютона позволяет выделить инерциальные системы отсчета и дает им определение.

3. 2-й закон Ньютона является основным законом динамики поступательного движения.

4. 1-й закон Ньютона является следствием 3-го закона Ньютона.

3.6. С каким телом следует связать систему координат, чтобы система отсчета была инерциальной?

1. С самолетом, тормозящим на взлетной полосе.
2. Со зданием аэровокзала.
3. С самолетом, разбегающимся по взлетной полосе.
4. С опаздывающим пассажиром, спешащим к самолету.

3.7. С какими телами следует связать систему координат, чтобы система отсчета была инерциальной?

1. С неподвижной платформой.
2. С поездом, который прибывает на станцию (движется замедленно) и везет Вас домой.
3. С отправляющимся от перрона поездом (движется ускоренно).
4. С вагоном поезда, движущимся равномерно.

3.8. Система отсчета будет неинерциальной, если в качестве тела отсчета выбрать:

1. Равномерно вращающееся маховое колесо.
2. Равномерно движущийся на прямолинейном участке пути поезд.
3. Фонарный столб.
4. Здание учебного корпуса.

3.9. Верные заключения: Векторными являются величины

- 1) момент силы относительно неподвижного начала;
- 2) момент импульса относительно неподвижного начала;
- 3) момент силы относительно неподвижной оси вращения;
- 4) момент импульса относительно неподвижной оси вращения.

3.10. Псевдовекторы:

1. Сила, импульс.
2. Момент инерции.
3. Момент силы, момент импульса относительно неподвижного начала.
4. Линейная скорость, угловая скорость.

3.11. Верные заключения: Момент силы относительно оси равен нулю, если

- 1) направление действия силы параллельно оси вращения;
- 2) направление действия силы пересекает ось вращения;
- 3) сила действует перпендикулярно оси вращения;
- 4) сила действует под произвольным углом к оси вращения.

3.12. Диск вращается относительно оси O под действием силы \vec{F} , направленной под углом α к касательной обода диска радиусом r . Чему равен вращающий момент силы относительно оси O ?

1. $\vec{M} = [\vec{r} \ \vec{F}]$.
2. $\vec{M} = [\vec{r} \ \vec{F}_\tau]$ (\vec{F}_τ – тангенциальная составляющая силы).
3. $M = r F_\tau$.
4. $\vec{M} = [\vec{r} \ \vec{F}_n]$ (\vec{F}_n – нормальная составляющая силы).

3.13. Верные заключения: *направление вектора момента силы определяется по правилу ...*

- 1) *правого винта;*
- 2) *левого винта;*
- 3) *векторного произведения $\vec{L} = [\vec{r} \ \vec{p}]$;*
- 4) *скалярного произведения $\vec{L} = (\vec{r} \ \vec{p})$.*

3.14. Какое соотношение соответствует основному закону динамики вращения твердого тела относительно неподвижного начала?

$$1. \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{вн}}. \quad 2. \frac{dL}{dt} = M_{\text{вн}}. \quad 3. M = I\varepsilon. \quad 4. \vec{L} = I\vec{\omega}.$$

3.15. Какое соотношение соответствует основному закону динамики вращения твердого тела относительно неподвижной оси вращения (ось Z)?

$$1. \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{вн}}. \quad 2. \frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_{\text{звн}}. \quad 3. M_z = I\varepsilon. \quad 4. M_z = I\omega.$$

3.16. Тело массой $m = \text{const}$ движется так, что действующая на него сила изменяется во времени по закону $F = At + Bt^2$, A и B – const. Как движется тело?

1. *Равномерно.*
2. *Равноускоренно.*
3. *Равнозамедленно.*
4. *Неравномерно.*

3.17. Частица массой $m = \text{const}$ движется так, что ее импульс изменяется во времени по закону $P = at + bt^2 + ct^3$ (a, b, c – const). Каков закон изменения силы во времени – $F(t)$?

$$1. F = at + bt^2 + ct^3. \quad 2. F = a + bt + ct.$$

$$3. F = a + 3bt^2 + 6ct^3. \quad 4. F = a + 2bt + 3ct^3.$$

3.18. Частица массой $m = \text{const}$ движется так, что ее радиус-вектор изменяется во времени по закону $r = bt^2 + ct^3$ (b, c – const). Каков закон изменения во времени силы, действующей на частицу?

$$1. F = m(bt^2 + ct^3). \quad 2. F = m(2bt + 3ct^2).$$

$$3. F = m(2b + 3ct^2). \quad 4. F = m(2b + 6ct).$$

3.19. Частица массой $m = \text{const}$ движется так, что действующая на нее сила изменяется во времени по закону $F = bt + ct^2$. Как изменяется во времени радиус-вектор частицы (при $t = 0$, $\mathbf{v}_0 = 0$, $r_0 = 0$)?

$$1. r = \frac{1}{m} \left(\frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} \right). \quad 2. r = \frac{1}{m} (bt + ct^2).$$

$$3. r = \frac{1}{m} (bt^2 + ct^3). \quad 4. r = \frac{1}{m} \left(\frac{bt^3}{6} + \frac{ct^4}{12} \right).$$

3.20. Частица массой $m = \text{const}$ движется так, что ее скорость изменяется во времени по закону $\mathbf{v} = ct^3$ ($c = \text{const}$). Как изменяется во времени действующая на нее сила?

1. $F = mct^3$. 2. $F = 3ct^2$. 3. $F = 3mct$. 4. $F = 3mct^2$.

3.21. Частица массой $m = \text{const}$ движется так, что действующая на нее сила изменяется во времени по закону $F = ct^3$. Как изменяется во времени радиус-вектор частицы (при $t = 0$, $\mathbf{v}_0 = 0$, $r_0 = 0$)?

1. $r = \frac{ct^3}{m}$. 2. $r = \frac{ct^4}{4m}$. 3. $r = \frac{ct^5}{m}$. 4. $r = \frac{ct^5}{20m}$.

3.22. Тело массой $m = \text{const}$ движется так, что действующая на него сила изменяется во времени по закону $F = A + Bt + Ct^2$ (A , B и $C - \text{const}$). Как движется тело?

1. *Равноускоренно.* 2. *Равнозамедленно.*
3. *Неравномерно.* 4. *Равномерно.*

3.23. Частица массой $m = \text{const}$ движется так, что ее радиус-вектор изменяется во времени по закону $r = A + Bt + Ct^3 + Dt^4$ (A , B , C и $D - \text{const}$). Каков закон изменения во времени действующей на частицу силы?

1. $F = m(A + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4)$. 2. $F = m(2Bt + 3Ct^2 + 4Dt^3)$.
3. $F = m(6Ct + 12Dt^2)$. 4. $F = m(2B + 6Ct + 12Dt^2)$.

3.24. Частица массой $m = 0,1$ кг вращается вокруг точки O так, что ее скорость изменяется во времени по закону $\vec{v} = \vec{i} + 3t^2\vec{j} + t\vec{k}$, а радиус-вектор $\vec{r} = 2\vec{i} + 4t\vec{j} + t^2\vec{k}$. Каков закон изменения во времени момента импульса \vec{L} частицы относительно O ?

1. $\vec{L} = (0,4t^2 - 0,3t^4)\vec{i} + (0,1t^2 - 0,2t)\vec{j} + (0,6t^2 - 0,4t)\vec{k}$.
2. $\vec{L} = 0,2\vec{i} + 1,2t^3\vec{j} + 0,1t^3\vec{k}$.
3. $\vec{L} = (2\vec{i} + 4t\vec{j} + t^2\vec{k})(0,1\vec{i} + 0,3t^2\vec{j} + 0,1t\vec{k})$.
4. $\vec{L} = (4\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k})(0,1\vec{i} + 0,6t^2\vec{j} + 0,1t\vec{k})$.

3.25. Частица вращается вокруг точки O так, что ее радиус-вектор изменяется во времени по закону $\vec{r} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k}$, а действующая на нее сила $\vec{F} = 2\vec{i} + 4t\vec{j} + t^3\vec{k}$. Каков закон изменения во времени момента силы \vec{M} частицы относительно O ?

1. $\vec{M} = (2t^4 - 4t^3)\vec{i} + (2t^2 - 2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}$.
2. $\vec{M} = (2\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k})(2\vec{i} + 4t\vec{j} + t^3\vec{k})$.
3. $\vec{M} = (2t^4 - 4t^3)\vec{i} - (2t^2 - 2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}$.
4. $\vec{M} = (4\vec{i} + 4t\vec{j} + t^2\vec{k})(2\vec{i} + 8t\vec{j} + t^3\vec{k})$.

3.26. Частица вращается вокруг неподвижного начала O так, что ее импульс задан выражением $\vec{p} = t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, а радиус-вектор, соответственно, $\vec{r} = \vec{i} + 4t\vec{j}$. Какое выражение соответствует моменту импульса частицы относительно O ?

1. $\vec{L} = t\vec{i} + 1,2t^3\vec{j}$. 2. $\vec{L} = 12t^3\vec{i} + t\vec{j}$. 3. $\vec{L} = -t^2\vec{k}$. 4. $\vec{L} = t\vec{i} + 4t^2\vec{j}$.

3.27. Частица вращается вокруг точки O так, что ее радиус-вектор изменяется во времени по закону $\vec{r} = t^2\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, а действующая на нее сила, соответственно, $\vec{F} = t\vec{i} + 2t^3\vec{j}$. Каков закон изменения во времени момента силы \vec{M} частицы относительно O ?

1. $\vec{M} = (2t^5 - 3t^3)\vec{k}$. 2. $\vec{M} = t^3\vec{i} + 6t^5\vec{j}$.
3. $\vec{M} = 2t^5\vec{i} + 3t\vec{j}$. 4. $\vec{M} = 2t^4\vec{i} + 3t\vec{j}$.

3.28. Тело движется так, что зависимость пройденного пути от времени движения дается уравнением $S = a\sin\omega t$, a и ω – постоянные. Найти зависимость силы, действующей на тело от времени. Масса тела равна m .

1. $F = -a\omega^2\sin\omega t$. 2. $F = a\omega^2\sin\omega t$.
3. $F = a\omega\sin\omega t$. 4. $F = a\omega^2\cos\omega t$.

3.29. Одна и та же сила массе m_1 сообщает ускорение a_1 , массе m_2 – ускорение a_2 . Суммарной массе ($m_1 + m_2$) эта сила сообщает ускорение:

1. $2a_1a_2 / (a_1 + a_2)$. 2. $a_1 / (a_1 + a_2)$. 3. $a_1a_2 / (a_1 + a_2)$.
4. $a_1a_2 / 2$. 5. $a_1a_2 / 2(a_1 + a_2)$.

3.30. Сила, действующая на материальную точку массой m , движущуюся по закону $\vec{r} = 5t^3\vec{i} + \vec{j} + 2t\vec{k}$

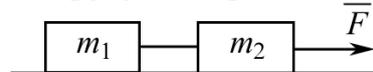
1. $\vec{F} = \text{const}$. 2. $\vec{F} = 30mt\vec{i}$. 3. $\vec{F} = m(15t^2\vec{i} + 2\vec{k})$.
4. $\vec{F} = 15mt\vec{i}$. 5. $\vec{F} = 30mt^2\vec{i}$.

Задачи

3.1. Тело массой $m = 2$ кг движется прямолинейно по закону $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ ($C = 2$ м/с², $D = 0,4$ м/с³). Определите силу, действующую на тело в конце первой секунды движения.

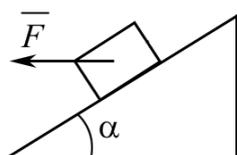
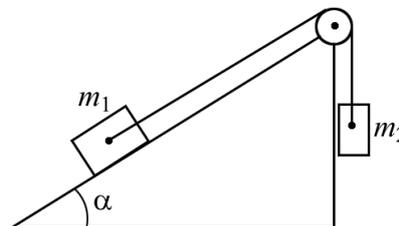
3.2. К нити подвешен груз массой $m = 500$ г. Определите силу натяжения нити, если нить с грузом: 1) поднимать с ускорением 2 м/с²; 2) опускать с ускорением 2 м/с².

3.3. Два груза ($m_1 = 500$ г и $m_2 = 700$ г) связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К грузу m_1 приложена горизонтально направленная сила $F = 10$ Н. Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити.



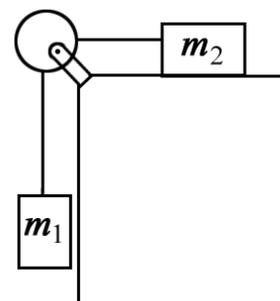
3.4. В установке угол α наклонной плоскости с горизонтом равен 20° , массы тел $m_1 = 200$ г и $m_2 = 150$ г. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определить ускорение, с которым будут двигаться эти тела, если тело m_2 опускается.

3.5. На тело массой $m = 10$ кг, лежащее на наклонной плоскости (угол $\alpha = 20^\circ$), действует горизонтально направленная сила $F = 8$ Н. Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение тела; 2) силу, с которой тело давит на плоскость.

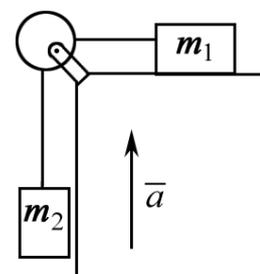


3.6. С вершины клина, длина которого $l = 2$ м и высота $h = 1$ м, начинает скользить небольшое тело. Коэффициент трения между телом и клином $f = 0,15$. Определить: 1) ускорение, с которым движется тело; 2) скорость тела у основания клина.

3.7. Грузы одинаковой массой ($m_1 = m_2 = 0,5$ кг) соединены нитью и перекинуты через невесомый блок, укрепленный на конце стола. Коэффициент трения груза m_2 о стол $f = 0,15$. Пренебрегая трением в блоке, определить: 1) ускорение, с которым движутся грузы; 2) силу натяжения нити.



3.8. Шар и сплошной цилиндр, изготовленные из одного и того же материала, одинаковой массы катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определить, во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии сплошного цилиндра.



3.9. Система грузов массами $m_1 = 0,5$ кг и $m_2 = 0,6$ кг находится в лифте, движущемся вверх с ускорением $a = 4,9$ м/с². Определить силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом массы m_1 и опорой $f = 0,1$.

3.10. Полная кинетическая энергия T диска, катящегося по горизонтальной плоскости, равна 24 Дж. Определить кинетическую энергию T_1 поступательного и T_2 вращательного движения диска.

3.11. К ободу однородного сплошного диска массой $m = 10$ кг, насаженного на ось, приложена постоянная касательная сила $F = 30$ Н. Определить кинетическую энергию диска через время $t = 4$ с после начала действия силы.

3.12. Вентилятор вращается с частотой $n = 600$ об/мин. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 50$ об., ос-

тановился. Работа A сил торможения равна 31,4 Дж. Определить: 1) момент M сил торможения; 2) момент инерции I вентилятора.

3.13. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $I = 150 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, вращается с частотой $n = 240 \text{ об/мин}$. Спустя время $t = 1 \text{ мин}$, как на него стал действовать момент сил торможения, маховик остановился. Определить: 1) момент M сил торможения; 2) число оборотов маховика от начала торможения до полной остановки.

3.14. К ободу однородного сплошного диска радиусом $R = 0,5 \text{ м}$ приложена постоянная касательная сила $F = 100 \text{ Н}$. При вращении диска на него действует момент сил трения $M_{\text{тр}} = 2 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Определить массу m диска, если известно, что его угловое ускорение ε постоянно и равно 16 рад/с^2 .

3.15. Частота вращения n_0 маховика, момент инерции I которого равен $120 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, составляет 240 об/мин . После прекращения действия на него вращающего момента маховик под действием сил трения в подшипниках остановился за время $t = 3,14 \text{ мин}$. Считая трение в подшипниках постоянным, определить момент M сил трения.

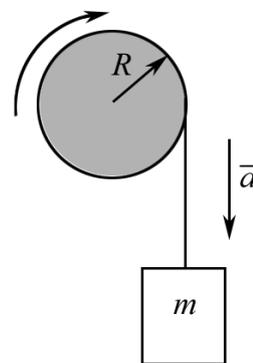
3.16. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $I = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, вращаясь при торможении равномерно, за время $t = 1 \text{ мин}$ уменьшил частоту вращения с $n_1 = 240 \text{ об/мин}$ до $n_2 = 120 \text{ об/мин}$. Определить: 1) угловое ускорение ε маховика; 2) момент M силы торможения.

3.17. Колесо радиусом $R = 30 \text{ см}$ и массой $m = 3 \text{ кг}$ скатывается по наклонной плоскости длиной $l = 5 \text{ м}$ и углом наклона $\alpha = 25^\circ$. Определить момент инерции колеса, если его скорость v в конце движения составляла $4,6 \text{ м/с}$.

3.18. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, скатывается без скольжения шарик. Пренебрегая трением, определить время движения шарика по наклонной плоскости, если известно, что его центр масс при скатывании понизился на 30 см .

3.19. Полый тонкостенный цилиндр катится вдоль горизонтального участка дороги со скоростью $v = 1,5 \text{ м/с}$. Определить путь, который он пройдет в гору за счет кинетической энергии, если уклон горы равен 5 м на каждые 100 м пути.

3.20. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 50 \text{ см}$ намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 6,4 \text{ кг}$. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$. Определить: 1) момент инерции I вала; 2) массу M вала.



3.21. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 5$ см и массой $M = 10$ кг намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 1$ кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением $a = 2$ м/с². Определить: 1) силу натяжения нити T ; 2) угловую скорость ω вала через $t = 1$ с после начала движения.

3.22. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $I = 0,15$ кг·м², намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 0,5$ кг. До начала вращения барабана высота h груза над полом составляла 2,3 м. Определить: 1) время опускания груза до пола; 2) кинетическую энергию груза в момент удара о пол.

3.23. Тонкий стержень длиной $l = 50$ см и массой $m = 400$ г вращается с угловым ускорением $\epsilon = 3$ рад/с² вокруг оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его длине. Определить вращающий момент M .

3.24. На горизонтальную ось засажены маховик и легкий шкив радиусом $R = 5$ см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой $m = 0,4$ кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь $s = 1,8$ м за время $t = 3$ с. Определить момент инерции I маховика. Массой шкива пренебречь.

3.25. Вал массой $m = 100$ кг и радиусом $R = 5$ см вращался с частотой $n = 8$ с⁻¹. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой $F = 40$ Н, под действием которой вал остановился через $t = 10$ с. Определить коэффициент трения.

3.26. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязаны грузики массой $m_1 = 100$ г и $m_2 = 110$ г. С каким ускорением a будут двигаться грузики, если масса блока равна $m = 400$ г? Трением пренебречь.

3.27. Через неподвижный блок массой $m = 0,2$ кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами $m_1 = 0,3$ кг и $m_2 = 0,5$ кг. Определить силы T_1 и T_2 натяжения шнура по обе стороны от блока во время движения, если массу блока можно считать равномерно распределенной по ободу.

3.28. Шар массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = 5 + 4t^2 - t^3$. Каков момент сил M в момент времени $t = 2$ с?

3.29. На какую часть уменьшится вес тела на экваторе вследствие вращения Земли вокруг оси? Угловая скорость вращения Земли равна $7,3 \cdot 10^{-5}$ с⁻¹, радиус Земли принять равным 6400 км. Ответ дать в %.

ЗАНЯТИЕ 4 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Теория

Законы Ньютона применимы для описания движения тел макромира, движущихся в инерциальных системах со скоростью, значительно меньшей скорости света. Например, для изучения небесной механики. Но в квантовой механике (движение частиц микромира) и в релятивистской (движение со скоростью, близкой к скорости света) эти законы неприменимы либо их применение ограничено. Законы сохранения импульса, момента импульса и механической энергии связаны со свойствами пространства – времени и имеют более широкую сферу применения, чем законы Ньютона.

Закон сохранения импульса

Импульс p замкнутой системы материальных точек не изменяется с течением времени. Замкнутой системой тел называется такая система, которая не взаимодействует с телами, не входящими в систему; иначе говоря, на нее не действуют внешние силы. Поскольку внутренние силы системы тел по 3-му закону Ньютона попарно уравновешиваются, то только **внешние силы** могут изменить импульс системы, то есть $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$. Если $p_{\text{внеш}} = 0$, то $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, $\vec{p} = \text{const}$ (не изменяется во времени).

Если система не замкнута, например, действуют силы тяжести, но их проекция на горизонтальное направление x равна нулю, то и проекция импульса на горизонтальное направление не будет изменяться со временем.

То есть если $F_{\text{внеш},x} = 0$, то и $p_x = \text{const}$. Из закона сохранения импульса системы тел (или точек) следует очень важное заключение о движении центра масс (инерции, тяжести) тела. Центром масс системы материальных точек называется точка C , радиус-вектор $r_{\text{ц}}$ которой равен

$$\vec{r}_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{r}_i}{m},$$

где m_i, \vec{r}_i – масса и радиус-вектор i -й материальной точки; n – общее число точек в системе; $m = \sum_{i=1}^n m_i$ – масса всей системы. Импульс сис-

темы равен геометрической сумме импульсов материальных точек системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = m\vec{v}_c.$$

Здесь \vec{v}_c – скорость центра масс, равная $\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i}{m}$.

Если $m = \text{const}$ и $P = \text{const}$, то и $\vec{v}_c = \text{const}$. Таким образом, из закона сохранения импульса следует, что при любых процессах, происходящих в замкнутой системе, скорость ее центра масс не изменяется: $\vec{v}_c = \text{const}$. Или **центр масс** замкнутой системы материальных точек движется **равномерно** и прямолинейно, или **покоится** относительно инерциальной системы отсчета.

Закон сохранения механической энергии

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.

Механическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической и потенциальной энергии системы: $E = E_k + E_{\text{п}}$. Кинетической энергией системы называется энергия механического движения этой системы. Из школьного курса физики известно, что $E_k = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}$.

Потенциальная энергия зависит от положения материальных точек в системе (от конфигурации системы точек) относительно системы отсчета и от положения системы точек в пространстве. Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной, не влияющей на изменение энергии. В конкретной задаче эта произвольная постоянная может быть выбрана равной нулю (иногда говорят о нулевом уровне потенциальной энергии). Например, потенциальную энергию тела массой m , поднятого над Землей на высоту h , мы определяем как $E_{\text{п}} = mgh$, при этом на высоте $h = 0$ энергия $E_{\text{п}} = 0$. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, вводится понятие работы силы. **Механическая работа** связана с действующей на систему (или тело) силой, которая и совершает работу:

$$A = \int (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_0^S F_{\tau} ds,$$

где S – длина пути, отсчитываемая вдоль траектории от начала рассматриваемого участка; F_{τ} – проекция силы на направление перемещения $d\vec{r}$ точки ее приложения. Связь работы и энергии заключается в следую-

щем: работа – количественная мера изменения энергии (кинетической, потенциальной или той и другой). Например, при торможении тела его скорость изменилась от v_1 до v_2 . Изменение кинетической энергии $\Delta E_k = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}$, при этом была совершена работа $A = \Delta E_k$.

Силы:

- 1) работа которых не зависит от пути, по которому частица переходит из одного положения в другое;
- 2) работа которых на любом замкнутом пути равна 0 – называются *консервативными*.

По поводу названия «консервативные силы» американский физик Р. Фейнман сказал, что это название не имеет ничего общего с консервативной партией Англии.

Диссипативными (диссипация – это рассеяние) называются силы, суммарная работа которых при любых перемещениях замкнутой системы всегда отрицательна, например силы трения и силы сопротивления движению в жидкостях и газах. Консервативны силы тяжести, силы упругости, силы электростатического взаимодействия (силы Кулона). Формулировка закона сохранения механической энергии легко запоминается, если понять, что механическая энергия будет сохраняться, когда она не переходит в другие виды энергии, то есть не рассеивается.

Механическая энергия замкнутой системы материальных точек *не изменяется* с течением времени, если все внутренние силы, действующие в этой системе, консервативны или не совершают работы (о таких силах мы поговорим позже). Если система не замкнута, но внешние и внутренние силы консервативны, то механическая энергия такой системы не изменяется со временем. Закон сохранения механической энергии позволяет указать условия равновесия консервативных систем: в состояниях устойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет минимумы, в состояниях неустойчивого равновесия – максимумы. Еще одно важное примечание о связи потенциальной энергии и консервативной силы, и можно переходить к закону сохранения момента импульса.

Консервативные силы называются потенциальными, если они стационарны, то есть могут изменяться во времени только вследствие изменения положения рассматриваемой системы относительно системы отсчета. Поле таких сил называется потенциальным. Сила и потенциальная энергия связаны между собой соотношением

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{п}},$$

а проекции силы выражаются как $F_x = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}$.

Вектор, определяемый выражением $\text{grad } E_{\text{п}} = \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z} \vec{k}$,

называется градиентом скалярной величины $E_{\text{п}}$. И, наконец, последнее замечание о связи энергии и работы. Работа равна изменению кинетической энергии тела

$$A = \frac{m\mathbf{v}_1^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_2^2}{2}$$

либо убыли потенциальной энергии $A = E_{\text{п1}} - E_{\text{п2}}$.

Закон сохранения момента импульса

Момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени, то есть

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \vec{L} = \text{const}.$$

Если система не замкнута, но суммарный момент действующих внешних сил относительно неподвижной точки O равен нулю ($\vec{M}_{\text{вн}} = 0$), то момент импульса относительно этой точки не изменяется со временем: $\vec{L} = \text{const}$. В случае, когда система вращается вокруг неподвижной оси Z , а главный момент внешних сил относительно этой оси $M_{\text{внеш } z} = 0$, то момент импульса системы относительно оси вращения не изменяется с течением времени: $I_z \omega = \text{const}$.

Осталось отметить связь законов сохранения со свойствами пространства–времени, то есть объяснить их фундаментальность. Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства (свойства пространства одинаковы во всех его точках), закон сохранения механической энергии – с однородностью времени, которая проявляется в том, что законы движения замкнутой системы не зависят от выбора начала отсчета времени. Закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства (свойства пространства одинаковы по всем направлениям, то есть не зависят от выбора направления осей координат).

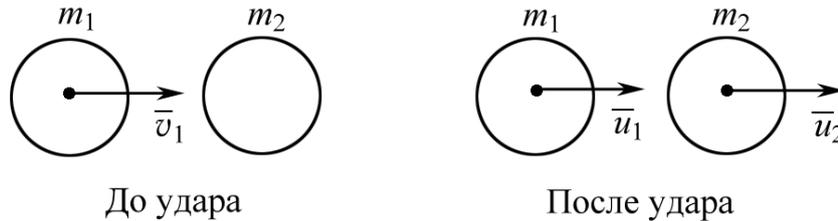
Подсказка

Применение закона сохранения импульса энергии и момента импульса

1. Шар массой $m_1 = 2$ кг налетает на покоящийся шар массой $m_2 = 8$ кг. Импульс p_1 движущегося шара равен 10 кг·м/с. Удар шаров прямой упругий. Определить непосредственно после удара: 1) импульсы p'_1 и p'_2 первого и второго шаров; 2) изменение Δp_1 импульса перво-

го шара; 3) кинетические энергии E'_1 и E'_2 первого и второго шаров; 4) изменение ΔE_1 кинетической энергии первого шара; 5) долю δ кинетической энергии, переданной первым шаром второму.

Решение



Поскольку в условии задачи не указано, как движутся шары после столкновения, то мы можем выбрать направления скоростей шаров u_1 и u_2 после удара произвольно. Пусть положительное направление – движение вправо. Система двух шаров не является замкнутой, но проекции внешних сил (сил тяжести) на ось x равны нулю, поэтому проекция полного импульса на ось x системы шаров сохраняется, то есть можно записать закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (1)$$

Удар шаров упругий, то есть деформация шаров после удара не сохраняется, потерями энергии на деформацию, колебания воздуха и др. можно пренебречь и применить закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (2)$$

Эти два уравнения можно решать любым способом. Если же удар тел неупругий, то деформация шаров после удара сохраняется, а полная механическая энергия системы – нет, но скорости шаров после удара равны, и в уравнении (1) $u_1 = u_2$. Таким образом, при упругом ударе мы можем применить два закона сохранения, при неупругом – только закон сохранения импульса (в момент удара). Решая совместно уравнения (1) и (2) для случая, изображенного на рисунке, получаем:

- скорость второго шара после удара

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}; \quad m_1 v_1 = p_1;$$

- импульс второго шара после удара:

$$p'_2 = m_2 u_2 = \frac{2m_2 p_1}{m_1 + m_2};$$

- импульс первого шара после удара

$$p'_1 = m_1 v_1 - m_2 v_2 = p_1 - m_2 u_2 = p_1 - p'_2.$$

Подставив числа в полученные формулы, вычислим $u_2 = 2$ м/с; $p'_2 = 16$ кг·м/с; $p'_1 = -6$ кг·м/с. Импульс p_1 направлен в противоположную указанной на рисунке сторону, но при таком направлении облегчается совместное решение уравнений (1) и (2).

Изменение импульса первого шара $\Delta p_1 = p'_1 - p_1 = -p'_2 = 16$ кг·м/с. Кинетическая энергия E'_1 первого шара и E'_2 второго шара после удара

$$E'_1 = \frac{m_1 u_1^2}{2}; u_1 = \frac{m_1 v_1 - m_2 u_2}{m_1};$$

$$E'_1 = 9 \text{ Дж}; E'_2 = \frac{m_2 u_2^2}{2} = 16 \text{ Дж}.$$

Изменение кинетической энергии первого шара

$$\Delta E = E_1 - E'_1 = E'_2 = 16 \text{ Дж}.$$

Доля кинетической энергии, переданной первым шаром второму

$$\partial = \frac{\Delta E_1}{E_1} = 0,64.$$

Если Вам встретится задача на упругий удар двух шаров массами m_1 и m_2 , то их скорости после удара

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Здесь v_1 и v_2 – скорости шаров до удара.

2. Молот массой $m_1 = 200$ кг падает на поковку, масса m которой вместе с наковальной равна 2500 кг. Скорость v молота в момент удара $v_1 = 2$ м/с. Найти КПД удара молота о поковку (удар неупругий).

Решение

Чтобы определить η (КПД) удара молота, нужно найти энергию, затраченную на деформацию поковки (полезная работа). Обозначим ее E .

Очевидно, что $E = E_1 - E_2$, где E_1 – энергия молота до удара; E_2 – энергия, переданная фундаменту (поковке). E_1 легко найти: $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$.

Чтобы найти энергию E_2 , надо определить скорость системы молот–поковка (с наковальной) после удара. Применим закон сохранения импульса для неупругого удара, учитывая, что скорость поковки с наковальной до удара $v_2 = 0$:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u,$$

где m_1 , v_1 – масса и скорость молота до удара; u – скорость поковки с наковальной после удара. Отсюда

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

В результате сопротивления фундамента скорость u быстро гасится, а кинетическая энергия системы молот – поковка с наковальной передается фундаменту, таким образом

$$E_2 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}, \text{ или } E_2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 E_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставим численные данные:

$$E_2 = 29,6 \text{ Дж}; E_1 = 400 \text{ Дж}; E = 370 \text{ Дж}; \quad \eta = \frac{E}{E_1} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = 92,6 \%.$$

Примечание: при ударе бойка свайного молота о сваю полезной считается энергия, затраченная на углубление сваи в грунт.

3. В баллистический маятник (мешок с песком) $M = 5$ кг попала пуля массой $m = 10$ г и застряла в нем. Найти скорость u пули, если маятник, отклонившись после удара, поднялся на высоту $h = 10$ см.

Решение

Закон сохранения импульса для системы пуля – маятник:

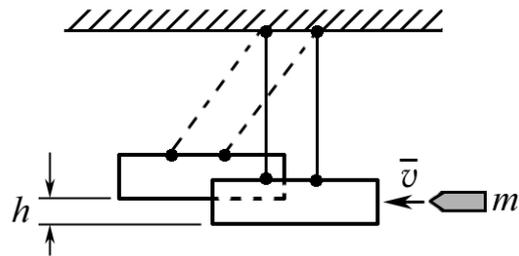
$$m \cdot v = (M + m) \cdot u.$$

После удара потенциальная энергия системы равна $(M + m) \cdot g \cdot h$. Эта энергия получена за счет кинетической энергии маятника и равна ей по закону сохранения энергии:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh.$$

Отсюда получим

$$u^2 = 2gh, \quad v = \frac{(M + m)\sqrt{2gh}}{m} = 701 \text{ м/с}.$$



4. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться вокруг вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой $m_1 = 60$ кг. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную точку? Масса платформы равна $m_2 = 240$ кг. Момент инерции человека рассчитать как $I_{\text{чел}} = m_1 R^2$ (как для материальной точки), где R – радиус платформы.

Решение

Угол поворота платформы при $\omega = \text{const}$ можно найти как

$$\varphi = \omega \cdot t. \quad (1)$$

Угловую скорость платформы $\omega_{\text{пл}}$ найдем из закона сохранения момента импульса. Хотя система платформа – человек не является замкнутой, имеются внешние силы тяжести и реакции оси, но их моменты относительно оси вращения равны нулю. Поэтому момент импульса системы $L = \text{const}$. Отсюда

$$(I_{\text{чел}} + I_{\text{пл}}) \cdot \omega_{\text{пл}} = I_{\text{чел}} \cdot \omega_{\text{чел}}. \quad (2)$$

Здесь $I_{\text{чел}}$, $\omega_{\text{чел}}$ – момент инерции и угловая скорость человека; $I_{\text{пл}}$, $\omega_{\text{пл}}$ – момент инерции и угловая скорость платформы. Последнюю найдем из уравнения (2):

$$\omega_{\text{пл}} = \frac{I_{\text{чел}} \cdot \omega_{\text{чел}}}{I_{\text{чел}} + I_{\text{пл}}}; \quad I_{\text{пл}} = m_2 \cdot R_2^2 / 2; \quad I_{\text{чел}} = m_1 \cdot R_2^2; \quad \omega_{\text{чел}} = v/R.$$

Время движения человека и платформы $t = \frac{2\pi R}{v}$.

Подставим полученное выражение в (1): $\varphi = \frac{4\pi m_1}{2m_1 + m_2} = \frac{2\pi}{3}$.

ТЕСТ

Вопросы

4.1. Инерциальна ли система отсчета, связанная с центром масс замкнутой системы, движущаяся поступательно?

1. Да.
2. Нет.

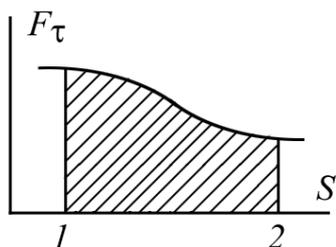


Рис. 4.1

4.2. Чему равна заштрихованная площадь на графике (рис. 4.1)?

1. Работе силы F_τ на участке пути 1–2.
2. Величине силы F_τ .
3. Мощности.
4. Пути S .

4.3. Для работы каких сил можно ввести понятие полного дифференциала dA ?

1. Для консервативных.
2. Для диссипативных.
3. Сил инерции.
4. Сил упругости.
5. Гравитационных сил.

4.4. Замкнутость системы материальных точек является необходимым и достаточным условием для выполнения законов сохранения ...

- 1) импульса и механической энергии;
- 2) момента импульса и механической энергии;
- 3) импульса и момента импульса;
- 4) импульса, момента импульса и механической энергии.

4.5. Для выполнения каких законов сохранения необходимо, чтобы внутри замкнутой системы действовали только консервативные силы?

1. Законов сохранения импульса и механической энергии.
2. Закона сохранения импульса.
3. Закона сохранения момента импульса.
4. Закона сохранения механической энергии.

4.6. Чему равна работа силы, если она действует перпендикулярно перемещению?

1. $A = 0$.
2. $A = \int \vec{F} d\vec{r}$.
3. $A = \infty$.
4. $A = \int [\vec{F} d\vec{r}]$.

4.7. Чему равна работа по перемещению частицы, движущейся равномерно и прямолинейно со скоростью \mathbf{v} ?

1. $A = 0$.
2. $A = F \cdot s$.
3. $A = F \cdot \mathbf{v} \cdot t$.
4. $A = \int [\vec{F} d\vec{r}]$.

4.8. Консервативными называются силы, работа которых ...

1) при любых перемещениях замкнутой системы всегда отрицательна;

- 2) постоянна во времени;
- 3) на любом замкнутом пути равна нулю;
- 4) при любых перемещениях всегда положительна.

4.9. Чему равен импульс p системы частиц в системе их центра масс?

1. $P = 0$.
2. $\vec{P} = m \cdot \vec{v}_c$.
3. $\vec{P} = \infty$.
4. $P = m \frac{ds}{dt}$.

4.10. Как ведет себя центр масс, если суммарный импульс системы частиц равен нулю?

1. Двигается равномерно и прямолинейно.
2. Двигается равноускоренно.
3. Покоится.
4. Двигается неравномерно.

4.11. Система взаимодействующих тел находится в поле сил тяжести вблизи поверхности Земли. Как ведет себя центр масс системы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1. Двигается равномерно.
2. Покоится.
3. Двигается с ускорением g .
4. Двигается с ускорением $-g$.

4.12. Может ли принимать отрицательное значение: а) кинетическая энергия; б) потенциальная энергия?

1. а) нет; б) да.
2. а) да; б) нет.
3. а) да; б) да.
4. а) нет; б) нет.

4.13. На графике зависимости потенциальной энергии E_n от координаты x (рис. 4.2) укажите точки устойчивого равновесия частицы:

1. 2.
2. 3.
3. 1.
4. 1, 3.

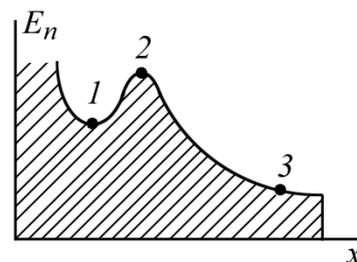


Рис. 4.2

4.14. Во сколько раз изменится угловая скорость замкнутой системы, если ее момент инерции увеличится вдвое?

1. Уменьшится вдвое.
2. Не изменится.
3. Увеличится вдвое.
4. Увеличится в 3 раза.

4.15. Во сколько раз изменится момент инерции замкнутой системы, если ее угловая скорость уменьшится вдвое?

1. Увеличится вдвое.
2. Не изменится.
3. Уменьшится вдвое.
4. Уменьшится в 3 раза.

4.16. Тело брошено под углом к горизонту. Сохраняется ли:
а) импульс тела; б) проекция импульса на какое-либо направление?
(Сопротивлением воздуха пренебречь.)

1. а) импульс сохраняется; б) проекция импульса – нет.

2. а) импульс тела не сохраняется; б) сохраняется проекция импульса на горизонтальное направление.

3. а) импульс тела сохраняется; б) проекция импульса на горизонтальное направление сохраняется.

4. а) импульс тела не сохраняется; б) проекция импульса на горизонтальное направление не сохраняется.

4.17. Потенциальная энергия частицы имеет вид $E_n = ax^3 + bx^2 + cz$, где a , b и c – постоянные. Найти работу A_{12} , совершаемую силами поля над частицей при ее перемещении из начальной точки $P_1(1, 2, 3)$ в конечную $P_2(2, 3, 4)$.

1. $A_{12} = -(7a + 3b + c)$. 2. $A_{12} = 5a + 3b + c$.

3. $A_{12} = a + 2b + c$. 4. $A_{12} = -(a + 2b + c)$.

4.18. Потенциальная энергия частицы имеет вид $E_n = ax^3 + bx^2 + cz$, где a , b и c – положительные константы. Найдите выражение для силы \vec{F} , действующей на частицу.

1. $\vec{F} = -(3ax^2 + 2bx)\vec{i} + c\vec{k}$. 2. $\vec{F} = (3ax^2 + 2bx)\vec{i} + c\vec{k}$.

3. $\vec{F} = (3ax^2 + 2bx)\vec{i} + \vec{k}$. 4. $\vec{F} = (3ax^2 + 2bx)\vec{j} + c\vec{k}$.

4.19. Сила, действующая на частицу, имеет вид $\vec{F} = ax\vec{i} - by\vec{j} + cz\vec{k}$, где a , b и c – положительные константы. Найдите выражение для потенциальной энергии частицы. Консервативна ли сила?

1. $E_n = a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2} - c\frac{z^2}{2}$, нет. 2. $E_n = -a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2} - c\frac{z^2}{2}$, да.

3. $E_n = a\frac{x^2}{2} - b\frac{y^2}{2} + c\frac{z^2}{2}$, да. 4. $E_n = a\frac{x^2}{2} - b\frac{y^2}{2} + c\frac{z^2}{2}$, нет.

4.20. Потенциальная энергия частицы имеет вид: $E_n = x y z$. Найти работу A_{12} , совершаемую силами поля над частицей при ее перемещении из начальной точки $P_1(1, 2, 3)$ в конечную $P_2(2, 3, 4)$.

1. $A_{12} = 18$. 2. $A_{12} = -8$. 3. $A_{12} = 12$. 4. $A_{12} = -10$.

4.21. Потенциальная энергия частицы имеет вид: $E_n = a x y z$, где a – положительная константа. Найдите выражение для силы \vec{F} , действующей на частицу.

1. $\vec{F} = -a(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$. 2. $\vec{F} = a(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$.

3. $\vec{F} = a(xy\vec{i} + yz\vec{j} + yz\vec{k})$. 4. $\vec{F} = -a(xy\vec{i} + yz\vec{j} + yz\vec{k})$.

4.22. Система состоит из трех частиц, массы которых $m_1 = 0,1$ г, $m_2 = 0,2$ г, $m_3 = 0,3$ г. Первая частица находится в точке с координатами

(1, 2, 3) (см), вторая – в точке (2, 3, 1) (см), третья – в точке (3, 1, 2) (см).
 Определить радиус-вектор \vec{r}_c центра масс системы (в см).

$$1. \vec{r}_c = \frac{1,4\vec{i} + 1,1\vec{j} + 1,1\vec{k}}{0,6}; \quad 2. \vec{r}_c = \frac{0,1\vec{i} + 0,1\vec{j} + 0,1\vec{k}}{0,6};$$

$$3. \vec{r}_c = \frac{0,1\vec{i} + 0,2\vec{j} + 0,3\vec{k}}{0,6}; \quad 4. \vec{r}_c = \frac{1,2\vec{i} + 1\vec{j} + 0,2\vec{k}}{0,6}.$$

4.23. Движение тела рассматривается относительно инерциальной системы отсчета. Чтобы изменить импульс тела, надо

- 1) приложить силу;
- 2) изменить массу тела;
- 3) изменить скорость тела;
- 4) изменить положение тела;
- 5) изменить положение центра координат.

4.24. Движение тела рассматривается относительно инерциальной системы отсчета. Чтобы изменить момент импульса тела, надо

- 1) изменить момент инерции;
- 2) изменить угловую скорость;
- 3) изменить момент внешних сил;
- 4) повернуть систему отсчета вправо;
- 5) повернуть систему отсчета влево.

4.25. Движение тела рассматривается относительно инерциальной системы отсчета. Чтобы изменить механическую энергию тела, надо

- 1) изменить массу тела;
- 2) изменить скорость тела;
- 3) изменить начало отсчета времени;
- 4) изменить положение тела в пространстве;
- 5) повернуть систему отсчета.

Задачи

4.1. Шар 1 катится без трения по бильярду со скоростью $v_1 = 9$ м/с, а шар 2 неподвижен. После лобового столкновения шар 1 катится со скоростью $v_2 = 2,2$ м/с. Оба шара имеют массу $m = 0,1$ кг.

- а) Какова скорость шара 2 после столкновения?
- б) В течение столкновения шары нагреваются мгновенно. Сколько джоулей тепловой энергии генерируется во время столкновения?

4.2. Тело 1, которое имеет массу $m_1 = 6$ кг, скользит вниз по наклонной плоскости с высоты $h_1 = 5$ м и под углом θ , как показано на рис. 4.3. Одновременно тело 2 с массой $m_2 = 8$ кг скользит вниз по другой наклонной плоскости под таким же углом θ и с высотой $h_2 = 4$ м. Они находились в покое в верхнем положении, трение отсутствует. Где-то внизу на горизонтальной поверхности они сцепляются. Определите величину их общей скорости v_f после столкновения.



Рис. 4.3

Считайте, что с наклонных плоскостей тела скатываются без «скачка» и замедления.

4.3. Человек массой $m = 60$ кг, стоящий на краю горизонтальной платформы радиусом $R = 1$ м и массой $M = 120$ кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1 = 10 \text{ мин}^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой, определить работу, совершаемую человеком при переходе от края платформы к ее центру.

4.4. Во время abordаж английского судна, перевозившего золото из колонии, главарь пиратов Сандокан (роман Э. Сальгари) метнул топор, который попал в бревно, подвешенное на веревках, при этом веревки отклонились на угол $\alpha = 30^\circ$. Масса топора $m_1 = 0,5$ кг, масса бревна $m_2 = 20$ кг, длина веревки $l = 2$ м. С какой скоростью метнул топор Сандокан?

4.5. Платформа в виде диска радиусом $R = 1$ м вращается по инерции с частотой $n = 6 \text{ мин}^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса m которого равна 80 кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции $I_{\text{пл}}$ платформы равен $120 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Момент инерции человека рассчитать как mR^2 .

4.6. Маховик вращается по закону, выражаемому уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 2$ рад; $B = 16$ рад/с; $C = 2$ рад/с². Момент инерции маховика равен $50 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Найти вращающий момент M в момент времени $t = 3$ с.

4.7. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием $M = 15$ т. Орудие стреляет вверх под углом $\varphi = 60^\circ$ к горизонту в направлении пути. С какой скоростью v_1 покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ кг и он вылетает со скоростью $v_2 = 600$ м/с?

4.8. Снаряд массой $m = 10$ кг обладал скоростью $v = 200$ м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой $m_1 = 3$ кг получила скорость $u_1 = 400$ м/с в прежнем направлении. Найти скорость u_2 второй, большей части после разрыва.

4.9. Два неупругих шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг движутся со скоростями соответственно $v_1 = 8$ м/с и $v_2 = 4$ м/с. Определить увеличение ΔU внутренней энергии шаров при их столкновении в двух случаях: 1) меньший шар нагоняет больший; 2) шары движутся навстречу друг другу.

4.10. Шар массой $m_1 = 2$ кг, летящий со скоростью $v_1 = 5$ м/с, ударяет неподвижный шар массой $m_2 = 8$ кг. Удар прямой, неупругий. Определить скорость u шаров после удара, а также долю ω кинетической энергии летящего шара, израсходованной на увеличение внутренней энергии этих шаров.

4.11. Молот массой $m_1 = 5$ кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса m_2 наковальни равна 100 кг. Массой куса железа пренебречь. Удар неупругий. Определить КПД η удара молота при данных условиях.

4.12. Боек свайного молота массой $m_1 = 500$ кг падает с некоторой высоты на сваю массой $m_2 = 100$ кг. Найти КПД η удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при ее углублении пренебречь.

4.13. Молотком, масса которого $m_1 = 1$ кг, забивают в стену гвоздь массой $m_2 = 75$ г. Определить КПД η удара молотка при данных условиях.

4.14. Шар массой $m_1 = 1,8$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы M . В результате прямого упругого удара шар потерял $\omega = 0,36$ кг своей кинетической энергии $E_{к1}$. Определить массу большего шара.

4.15. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом $R = 2$ м, стоит человек массой $m_1 = 80$ кг. Масса m_2 платформы равна 2 400 000 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найти, с какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $v = 2$ м/с относительно платформы.

4.16. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной $l = 2,4$ м и массой $m = 8$ кг, расположенный вертикально по оси вращения скамейки. Скамья с человеком вращается с частотой $n_1 = 1$ с⁻¹. С какой частотой n_2 будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции I человека и скамьи равен 6 кг·м².

4.17. Кинетическая энергия E_k вращающегося маховика равна 1 кДж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик на-

чал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 80$ оборотов, остановился. Определить момент M силы торможения.

4.18. Маховик, момент инерции которого I равен $40 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, начал вращаться равноускоренно из состояния покоя под действием момента силы $M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Вращение продолжалось в течение $t = 10 \text{ с}$. Определить кинетическую энергию E_k , приобретенную маховиком.

4.19. Шар массой $m_1 = 200 \text{ г}$, движущийся со скоростью $v_1 = 10 \text{ м/с}$, ударяет неподвижный шар массой $m_2 = 800 \text{ г}$. Каковы будут скорости u_1 и u_2 шаров после удара?

4.20. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса человека $M = 60 \text{ кг}$, масса доски $m = 20 \text{ кг}$. С какой скоростью u относительно пола будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль доски со скоростью $v = 1 \text{ м/с}$ относительно доски? Массой колес и трением во втулках пренебречь.

4.21. Шар массой $m_1 = 10 \text{ кг}$, движущийся со скоростью $v_1 = 4 \text{ м/с}$, сталкивается с шаром массой $m_2 = 4 \text{ кг}$, движущимся со скоростью $v_2 = 12 \text{ м/с}$. Считая удар прямым, неупругим, найти скорость u шаров после удара в двух случаях: а) малый шар нагоняет большой, движущийся в том же направлении; б) шары движутся навстречу друг другу.

ЗАНЯТИЕ 5

ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория

Молекулярная физика и термодинамика взаимно дополняют друг друга, образуя единое целое, но отличаясь методами исследования. Объект исследования у них один – идеальный газ. Вам известно, что состояние идеального газа определяют три макропараметра: давление p , объем V и температура T . Эти параметры связаны уравнением состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

здесь $R = 8,31$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная; $\frac{m}{\mu} = \nu$ –

число молей (количество вещества); m – масса газа; μ – масса одного моля вещества. Из этого уравнения легко получить известные вам из школьного курса физики законы идеальных газов: Бойля – Мариотта, Гей-Люссака и Шарля. Если забыли их, обратитесь в «Подсказку». Другое уравнение, которое показывает, от чего зависит давление газа p на стенки сосуда, называется основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов (уравнение МКТ):

$$p = \frac{2}{3}nm_0 \frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2}.$$

Здесь n – концентрация газа; m_0 – масса молекулы газа; $v_{\text{кв}}$ – средняя квадратичная скорость молекул идеального газа. Если левую и правую части этого уравнения умножить на объем газа V , получим

$$pV = \frac{2}{3}Nm_0 \frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3}E.$$

Здесь N – число молекул в объеме V ; E – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа. Из уравнения МКТ можно получить выражение для средней квадратичной скорости:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро.

Распределения Максвелла и Больцмана

Естественно, что молекулы (атомы) сталкиваются друг с другом. При каждом столкновении двух молекул скорость одной из них увеличивается, а скорость другой – уменьшается. Джеймс Максвелл впервые обратил внимание на то, что должно существовать такое состояние, при котором число молекул, скорость которых при столкновениях увеличивается, равно числу молекул, у которых скорость в результате столкновений уменьшается. Такое состояние газа называется равновесным. Параметры газа во всех точках системы оказываются при этом одинаковыми и не изменяются со временем при неизменных внешних условиях. Джеймсу Максвеллу удалось найти закономерность, благодаря которой можно определять, какая часть молекул обладает скоростями, лежащими в некотором интервале вблизи заданной скорости (распределение Максвелла). Эта закономерность называется функцией распределения молекул по скоростям – $F(v)$.

$$\frac{dN}{Nd\mathbf{v}} = F(\mathbf{v}).$$

Здесь N – полное число молекул газа; dN/N – относительная доля молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$ (имеет смысл вероятности).

Функция $F(v)$ имеет вид:

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Здесь m_0 – масса молекулы. Функция $F(v)$ – это функция распределения молекул газа по модулю скорости. Максвелловская функция распределения молекул по компонентам скоростей имеет вид:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}.$$

Соотношение между $F(v)$ и $f(v)$: $F(v) = 4\pi v^2 \cdot f(v)$.

Относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, находится как площадь заштрихованной полоски (рис. 5.1). Площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице. Это означает, что функция $F(v)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_0^{\infty} F(v) dv = 1.$$

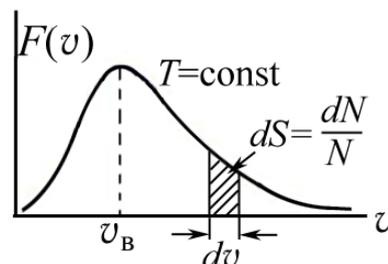


Рис. 5.1. График функции $F(v)$

При решении задач при малом интервале скоростей можно воспользоваться соотношением (для нахождения относительного числа молекул):

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u,$$

здесь $u = \frac{v}{v_{\text{вер}}}$; $v_{\text{вер}} = 4,08 \sqrt{\frac{T}{\mu}}$; $\Delta u = \frac{\Delta v}{v}$.

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется наиболее вероятной скоростью (рис. 5.1):

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Функция $f(v)$ позволяет найти еще одну скорость – среднюю арифметическую:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv; \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}.$$

Максвелловское распределение молекул по скоростям позволяет дать определение хаотичности тепловых движений: движение молекул полностью беспорядочно (хаотично), если скорости молекул распределены по закону Максвелла.

Максвелловское распределение не является единственным. Как распределяется кинетическая энергия молекул по степеням свободы, позволяет определить закон распределения энергии (закон распределения Больцмана). Но сначала о степенях свободы: их число определяется числом независимых координат, определяющих положение молекулы в пространстве, а также числом движений. Одноатомная жесткая молекула имеет 3 степени свободы, двухатомная – 5 степеней (3 – на поступательное движение, 2 – на вращательное), трехатомная жесткая молекула – 6 степеней свободы (3 – на поступательное движение, 3 – на вращение). Естественно было предположить, что средняя кинетическая энергия жесткой молекулы (колебания атомов в молекуле не могут возникнуть) равномерно распределена по ее степеням свободы. В условиях равновесия на каждую степень свободы приходится энергия, равная $1/2(kT)$. Это и есть закон распределения Больцмана.

Подсказка

Уравнения газовых законов легко найти из уравнения состояния идеального газа, но при этом нужно помнить, какие величины остаются постоянными.

Закон Бойля – Мариотта: $m = \text{const}, T = \text{const}$.

Запишем уравнение Клапейрона для двух состояний:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT; \quad (1)$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT. \quad (2)$$

Разделим (1) на (2) и получим: $p_1 V_1 = p_2 V_2$, то есть $pV = \text{const}$ – уравнение изотермы.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

– закон Бойля – Мариотта описывает изотермический процесс.

Закон Гей-Люссака: $m = \text{const}, p = \text{const}$.

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1; \quad (3)$$

$$pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2. \quad (4)$$

Разделим (3) на (4) и получим:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

– закон Гей-Люссака описывает изобарический процесс.

Или иначе: $V = V_0(1 + \alpha_v t) = \alpha_v V_0 T$, $\alpha_v = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273,16} \text{град}^{-1}$ – термический коэффициент объемного расширения. Отсюда следует, что $\alpha_v = \frac{V}{V_0 T}$.

Закон Шарля: $m = \text{const}, V = \text{const}$,

$$p_1 V = \frac{m}{\mu} RT_1;$$

$$p_2 V = \frac{m}{\mu} RT_2$$

Отсюда $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ – изохорический процесс.

Или иначе: $p = p_0(1 + \alpha_p t) = \alpha_p p_0 T$, $\alpha_p = \frac{p}{p_0 T}$ – термический коэффициент давления.

Если вам встретится смесь газов, то число молей смеси $\nu_{\text{см}}$ находится как

$$\nu_{\text{см}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}.$$

Если в условии задачи объем указан в литрах, то $1 \text{ л} = 10^{-3} \text{ м}^3$.

Нормальные условия: $p = 105 \text{ кПа}$, $T = 273 \text{ К}$.

Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений p_1, p_2, \dots входящих в него газов: $p = p_1 + p_2 + \dots$.

Адиабатический процесс – термодинамический процесс, в котором система не обменивается энергией, теплотой с окружающей средой. Первый закон термодинамики для элементарного процесса:

$$\delta A = -dU,$$

т. е. система совершает работу за счет внутренней энергии.

1. В сосуде 1 объемом $V = 1 \text{ л}$ находится газ под давлением $P = 0,2 \text{ МПа}$. В сосуде 2 объемом $V = 4 \text{ л}$ находится тот же газ под давлением $p = 0,1 \text{ МПа}$. Температуры газа в обоих сосудах одинаковы. Под каким давлением p будет находиться газ, если соединить сосуды 1 и 2 трубкой (рис. 5.2)?

Решение

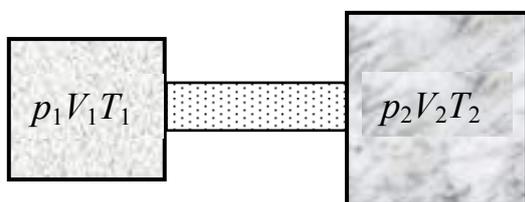


Рис. 5.2

По закону Дальтона давление смеси газов $p = p'_1 + p'_2$, где p'_1 и p'_2 – парциальные давления газа после соединения сосудов.

Так как $T = \text{const}$, то $pV = \text{const}$ для каждого газа:

$$p'_1(V_1 + V_2) = p_1V_1; \quad p'_2(V_1 + V_2) = p_2V_2.$$

Отсюда $p'_1 = \frac{p_1V_1}{V_1 + V_2}; \quad p'_2 = \frac{p_2V_2}{V_1 + V_2};$

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 140 \cdot 10^3 \text{ Па} = 140 \text{ кПа}.$$

2. Энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне объемом $V = 20 \text{ л}$, равна 5 кДж , а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$. Найти массу m азота в баллоне и давление P , под которым он находится.

Решение

Давление газа на стенки сосуда

$$P = \frac{1}{3} n m_0 \langle \mathbf{v}_{\text{KB}} \rangle^2. \quad (1)$$

Если подставить в (1) $\langle \mathbf{v}_{\text{KB}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$, получим $p = n \cdot k \cdot T$, или

$$k \cdot T = p/n. \quad (2)$$

Энергия поступательного движения N молекул азота: $3 \frac{kT}{2} N = W$.

Подставив сюда (2) и учитывая, что $n = \frac{N}{V}$, получим $\frac{3p}{2} = \frac{W}{V}$, отсюда

$p = \frac{2W}{3V} = 167 \text{ кПа}$. Чтобы найти массу m азота, запишем

$$W = m_0 \langle \mathbf{v}_{\text{KB}} \rangle^2 \frac{N}{2}. \quad (3)$$

Масса одной молекулы $m_0 = m / N$. Подставив в (3), получим $W = \frac{m \langle \mathbf{v}_{\text{KB}} \rangle^2}{2}$. Таким образом, $m = \frac{2W}{\langle \mathbf{v}_{\text{KB}} \rangle^2} = 2,5 \text{ г}$.

3. Концентрация молекул идеального газа n_0 , температура газа T , масса молекул m_0 . Газ находится в тепловом равновесии. Определить число молекул газа, ударяющихся в единицу времени об единицу поверхности сосуда.

Решение

Достигнут поверхности сосуда те молекулы, проекции скорости которых на направление, перпендикулярное к поверхности, не равны нулю. Пусть ось x перпендикулярна к рассматриваемой поверхности.

Воспользовавшись функцией распределения молекул по компонентам скоростей и учитывая, что рассматривается одна компонента скорости \mathbf{v}_x , запишем выражение для числа молекул dn_x в единице объема, проекция скорости которых заключена в интервале между \mathbf{v}_x и $\mathbf{v}_x + d\mathbf{v}_x$:

$$dn_x = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\mathbf{v}_x^2}{2kT}} \cdot d\mathbf{v}_x.$$

Из этого числа молекул за единицу времени достигнут поверхности сосуда только те молекулы, которые расположены от нее не далее расстояния, численно равного \mathbf{v}_x . То есть, число этих молекул

$$dn'_x = \mathbf{v}_x n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\mathbf{v}_x^2}{2kT}} \cdot d\mathbf{v}_x.$$

Полное число молекул, которые за единицу времени достигнут единицы поверхности сосуда, равно

$$N = \int_0^{\infty} \mathbf{v}_x n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} d\mathbf{v}_x. \quad (4)$$

Введем обозначение: $\frac{m}{2kT} = a$, тогда выражение (4) примет вид

$$N = \frac{n_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{a} \cdot \mathbf{v}_x \cdot e^{-av_x^2} d\mathbf{v}_x = \frac{n_0}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{-2\sqrt{a}} \right) d(e^{-av_x^2}) = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Учтем, что средняя арифметическая скорость молекул $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$,

получим
$$N = \frac{n_0 \cdot \langle v \rangle}{4}.$$

ТЕСТ

Вопросы

5.1. Правильное заключение о графике и соотношении параметров (рис. 5.3): на графике изображены

- 1) *изобары* ($P_1 > P_2$);
- 2) *изохоры* ($P_1 > P_2$);
- 3) *изотермы* ($P_1 < P_2$);
- 4) *изобары* ($P_1 < P_2$).

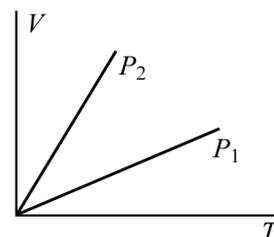


Рис. 5.3

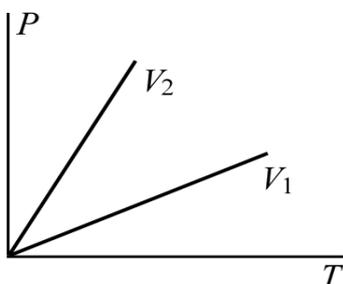


Рис. 5.4

5.2. Правильное заключение о графике и соотношении параметров (рис. 5.4): на графике изображены

- 1) *изохоры* ($V_1 > V_2$);
- 2) *изобары* ($V_1 > V_2$);
- 3) *изотермы* ($V_1 < V_2$);
- 4) *изохоры* ($V_1 < V_2$).

5.3. Правильное заключение о графике и соотношении параметров (рис. 5.5): на графике изображены

- 1) *изотермы* ($T_2 > T_1$);
- 2) *изобары* ($T_2 < T_1$);
- 3) *изохоры* ($T_2 > T_1$);
- 4) *изотермы* ($T_2 < T_1$).

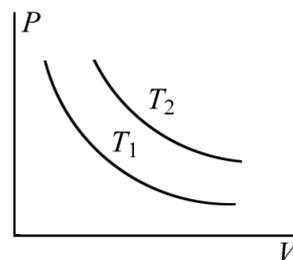


Рис. 5.5

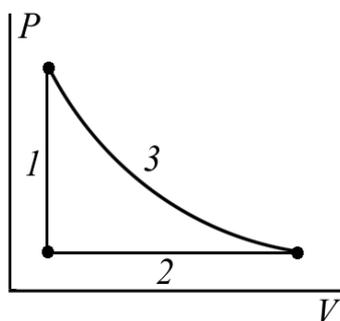


Рис. 5.6

5.4. Правильное заключение о графике (рис. 5.6):

1. 1 – *изохора*; 2 – *изобара*; 3 – *изотерма*.
2. 1 – *изобара*; 2 – *изохора*; 3 – *изотерма*.
3. 1 – *изотерма*; 2 – *изохора*; 3 – *изобара*.
4. 1 – *изохора*; 2 – *изотерма*; 3 – *изобара*.

5.5. Правильное заключение о графике (рис. 5.7):

1. 1 – изобара; 2 – изохора; 3 – изотерма.
2. 1 – изотерма; 2 – изохора; 3 – изобара.
3. 1 – изохора; 2 – изотерма; 3 – изобара.
4. 1 – изотерма; 2 – изобара; 3 – изохора.

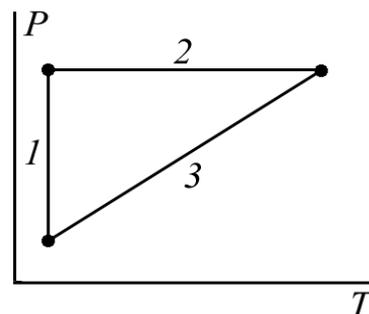


Рис. 5.7

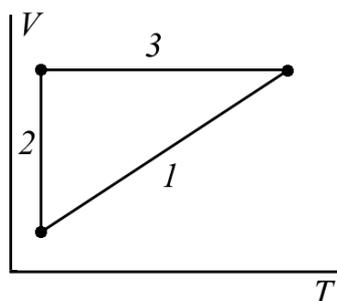


Рис. 5.8

5.6. Правильное заключение о графике (рис. 5.8):

1. 1 – изобара; 2 – изотерма; 3 – изохора.
2. 1 – изотерма; 2 – изохора; 3 – изобара.
3. 1 – изохора; 2 – изотерма; 3 – изобара.
4. 1 – изохора; 2 – изобара; 3 – изотерма.

5.7. Правильные заключения:

1. $pV = \text{const}$ – уравнение изотермы.
2. $p = p_0 \cdot \alpha_p \cdot T$ (α_p – термический коэффициент давления) – уравнение изобары.
3. $V = V_0 \cdot \alpha_V \cdot t$ (α_V – коэффициент объемного расширения) – уравнение изохоры.
4. $p = p_1 + p_2 + p_3$ – закон Дальтона.

5.8. Правильное заключение:

1. Основное уравнение состояния (ОУС) идеального газа связывает макропараметры системы, а уравнение МКТ – микро- и макропараметры.
2. ОУС идеального газа связывает микро- и макропараметры системы, а уравнение МКТ – макропараметры.
3. Оба уравнения связывают микро- и макропараметры системы.
4. Оба уравнения связывают макропараметры системы.

5.9. Правильное продолжение фразы: средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа прямо пропорциональна ...

- 1) его абсолютной температуре;
- 2) концентрации газа;
- 3) объему газа;
- 4) давлению газа.

5.10. Как соотносятся давления молекул азота (P_{N_2}) и водорода (P_{H_2}) на стенки сосуда при прочих равных условиях?

1. $p_{N_2} = p_{H_2}$.
2. $p_{N_2} = 2p_{H_2}$.
3. $p_{N_2} = 3p_{H_2}$.
4. $p_{N_2} = 4p_{H_2}$.

5.11. От каких параметров зависит давление газа на стенки сосуда?

1. От массы молекул и температуры газа.
2. От плотности газа и массы молекул.
3. От температуры газа, массы молекул и их концентрации.
4. От концентрации молекул и температуры газа.

5.12. Верное заключение (рис. 5.9):

1. v_1 – наиболее вероятная скорость молекул, v_2 – средняя арифметическая, v_3 – средняя квадратичная.

2. v_1 – средняя квадратичная скорость, v_2 – наиболее вероятная, v_3 – средняя арифметическая.

3. v_1 – средняя арифметическая скорость, v_2 – средняя квадратичная, v_3 – наиболее вероятная.

4. v_1 – наиболее вероятная, v_2 – средняя квадратичная, v_3 – средняя арифметическая скорость.

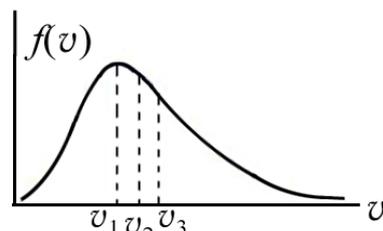


Рис. 5.9

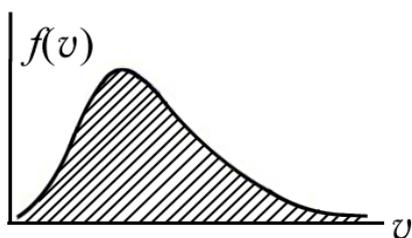


Рис.

5.13. Площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс (рис. 5.10), равна

1) полному числу молекул газа N ;

2) относительному числу молекул газа, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$;

3) единице;

4) числу молекул, скорости которых равны v .

5.14. Площадь dS (рис. 5.11) равна

1) единице;

2) числу молекул dN , скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$;

3) относительному числу молекул dN/N , скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$;

4) числу молекул, скорости которых равны v .

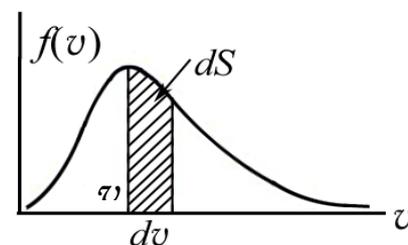


Рис. 5.11

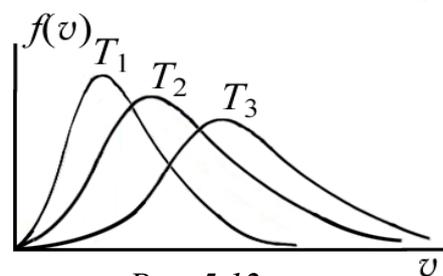


Рис. 5.12

5.15. Как соотносятся температуры T_1 , T_2 и T_3 (рис. 5.12)?

1. $T_1 = T_2 = T_3$.

2. $T_1 > T_2 > T_3$.

3. $T_1 < T_2 < T_3$.

4. $T_1 = T_2 > T_3$.

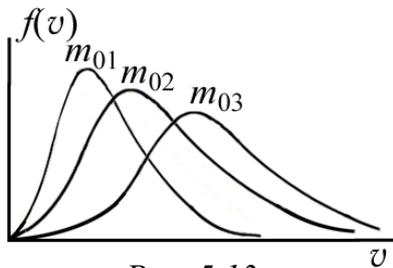


Рис. 5.13

5.16. Как соотносятся массы молекул идеальных газов, для которых получены кривые распределения для одной и той же температуры ($T = \text{const}$) (рис. 5.13)?

1. $m_{01} = m_{02} = m_{03}$.
2. $m_{01} < m_{02} < m_{03}$.
3. $m_{01} > m_{02} > m_{03}$.
4. $m_{01} = m_{02} < m_{03}$.

5.17. Как изменяется температура воздуха, приводимого в движение пропеллером вертолета?

1. Не изменяется.
2. Увеличивается.
3. Уменьшается.
4. Зависит от скорости вращения.

5.18. Известно, что в вихре молекулы воздуха закручиваются с большой скоростью. Отличается ли температура T_1 молекул воздуха, захваченных вихрем, от температуры молекул T_2 , не попавших в него? Если отличается, то как?

1. Не отличается.
2. $T_1 > T_2$.
3. $T_1 < T_2$.
4. Зависит от скорости вихря.

5.19. Чему равна кинетическая энергия поступательного движения:

а) молекулы водорода; б) атома водорода?

1. а) $3/2 kT$; б) $3/2 kT$.
2. а) $5/2 kT$; б) $3/2 kT$.
3. а) $3/2 kT$; б) $5/2 kT$.
4. а) $5/2 kT$; б) $5/2 kT$.

5.20. Чему равна кинетическая энергия вращения: а) молекулы азота; б) атома азота?

1. а) kT ; б) нулю.
2. а) $3/2 kT$; б) kT .
3. а) kT ; б) kT .
4. а) нулю; б) kT .

5.21. Чему равна кинетическая энергия вращения молекулы гелия?

1. Нулю.
2. kT .
3. $1/2 kT$.
4. $3/2 kT$.

5.22. Чему равна кинетическая энергия: а) поступательного движения; б) вращательного движения молекулы водорода?

1. а) $3/2 kT$; б) kT .
2. а) kT ; б) $3/2 kT$.
3. а) нулю; б) kT .
4. а) kT ; б) нулю.

5.23. Чему равна кинетическая энергия: а) поступательного движения; б) вращательного движения молекулы водяного пара?

1. а) $3/2 kT$; б) $3/2 kT$.
2. а) kT ; б) $3/2 kT$.
3. а) $3/2 kT$; б) kT .
4. а) kT ; б) kT .

5.24. Термометр показывает 20°C . При ветре 5 м/с показание термометра ...

- 1) не изменится;
- 2) увеличится на 2°C ;
- 3) уменьшится на 2°C ;
- 4) увеличится на 4°C ;
- 5) уменьшится на 4°C .

Задачи

5.1. Определить число N атомов в 1 кг водорода и массу одного атома водорода.

5.2. В закрытом сосуде объемом 20 л находится водород массой 6 г и гелий массой 12 г. Определить: 1) давление; 2) молярную массу газовой смеси в сосуде, если температура смеси $T = 300$ К.

5.3. Определить плотность смеси газов водорода массой $m = 8$ г и кислорода массой $m = 64$ г при температуре $T = 290$ К и при давлении $p = 0,1$ МПа. Газы считать идеальными.

5.4. В баллоне объемом 15 л находится азот под давлением 100 кПа и при температуре $t_1 = 27$ °С. После того как из баллона выпустили азот массой 14 г, температура газа стала равной $t_2 = 17$ °С. Определить давление азота, оставшегося в баллоне.

5.5. Баллон объемом $V = 20$ л содержит смесь водорода и азота при температуре 290 К и давлении 1 МПа. Определить массу водорода, если масса смеси равна 150 г.

5.6. Азот массой 7 г находится под давлением $p = 0,1$ МПа и температуре $T_1 = 290$ К. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем $V_2 = 10$ л. Определить: 1) объем газа V_1 до расширения; 2) температуру газа T_2 после расширения.

5.7. В сосуде объемом 1 л находится кислород массой 1 г. Определить концентрацию молекул кислорода в сосуде.

5.8. В сосуде объемом 5 л при нормальных условиях находится азот. Определить: 1) количество вещества ν ; 2) массу азота.

5.9. Средняя квадратичная скорость некоторого газа при нормальных условиях равна 480 м/с. Сколько молекул содержит 1 г этого газа?

5.10. Определить давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность равна $0,01$ кг/м³, а средняя квадратичная скорость молекул газа составляет 480 м/с.

5.11. Определить наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет $0,35$ кг/м³.

5.12. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle E_0 \rangle$ поступательного движения молекул газа, находящегося под давлением 0,1 Па. Концентрация молекул газа равна 10^{13} см⁻³.

5.13. Найти число молекул n в 1 см³ и плотность ρ азота при давлении 2,0 нПа и температуре 15 °С.

5.14. Плотность газа, состоящего из смеси гелия и аргона, при давлении 152 кПа и температуре 27 °С равна $\rho = 2,00$ кг/м³. Сколько атомов гелия содержится в 1 см³ газовой смеси?

5.15. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ и среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon \rangle$ поступательного движения молекулы кислорода при температуре 20 °С.

5.16. Вычислить, исходя из классических представлений, среднюю энергию $\langle \epsilon \rangle$ поступательного, вращательного и колебательного движений двухатомной упругой молекулы при температуре 4500 К.

Примечание: для упругой молекулы общее число степеней свободы жесткой молекулы увеличивается на две колебательных степени свободы.

5.17. Вычислить, исходя из классических представлений, угловую скорость вращения молекулы кислорода при температуре $t = 27$ °С. Диаметр молекулы $d = 0,35$ нм.

5.18. Какая часть молекул воздуха при температуре 17 °С обладает скоростями, не больше чем на 0,5 м/с отличающимися от скорости, равной: а) $v = v_{\text{вер}}$; б) $v = 0,1 v_{\text{вер}}$?

5.19. Какая часть молекул кислорода при 0 °С обладает скоростью от 100 до 110 м/с?

5.20. Какая часть молекул азота при 150 °С обладает скоростями от 300 до 325 м/с?

5.21. Какая часть молекул водорода при 0 °С обладает скоростями от 2000 до 2100 м/с?

5.22. Какая часть молекул азота, находящихся при температуре $T = 400$ К, имеет скорости, лежащие в интервале $v_{\text{в}} + \Delta v$, где $\Delta v = 20$ м/с?

5.23. Какая часть молекул азота, находящихся при температуре $T = 900$ К, имеет скорости, лежащие в интервале $v_{\text{в}} + \Delta v$, где $\Delta v = 20$ м/с?

5.24. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа равна 450 м/с. Давление газа равно 0,5 бара (1 бар = 10^5 Па). Найти плотность газа при этих условиях.

5.25. Чему равна энергия теплового движения молекул 20 г кислорода при температуре 10 °С?

5.26. Какая часть энергии теплового движения 20 г кислорода при температуре 10 °С приходится на долю поступательного движения?

5.27. Какая часть энергии теплового движения 20 г кислорода при температуре 10 °С приходится на долю вращательного движения?

ЗАНЯТИЕ 6

ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ТЕПЛОЕМКОСТЬ. ЭНТРОПИЯ. ТЕПЛОВЫЕ ДВИГАТЕЛИ. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Теория

Первое начало термодинамики имеет непосредственное отношение к закону сохранения энергии. Термин «начало» пришел к нам из глубины веков. Труд Исаака Ньютона, составляющий основу классической механики, назывался «Математические начала натуральной философии» (опубликован в 1687 г.). Первое начало термодинамики указывает, как расходуется энергия (теплота) Q , сообщаемая термодинамической системе извне. Она идет на изменение ее внутренней энергии ΔU и на совершение ею работы A против внешних сил (над внешними телами): $Q = \Delta U + A$ (закон сохранения энергии в термодинамике), или в дифференциальной форме: $\delta Q = \delta U + \delta A$. Здесь δQ и δA не являются полными дифференциалами, так как зависят не только от состояния системы, но и от вида процесса, с помощью которого система перешла в это состояние. Внутренняя энергия системы равна сумме кинетических энергий молекул:

$$U = \frac{m i}{\mu 2} RT.$$

Здесь m – масса газа. Изменение внутренней энергии: $\Delta U = \frac{m i}{\mu 2} R \Delta T$. Работа, совершаемая газом: $A = \int p dV$.

Используя понятие теплоемкости, можно записать I начало термодинамики в другом виде (при решении задач это будет очень полезно). Удельная теплоемкость равна количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}.$$

Единица измерения $[C] = \text{Дж/кг}\cdot\text{К}$. Молярная теплоемкость равна количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К. Очевидно, что

$$C_{\mu} = c \mu,$$

отсюда $C_{\mu} = \frac{\mu}{m} \frac{\delta Q}{dT}$.

Если при нагревании тела объем или давление газа остаются постоянными, то теплоемкости будут обозначаться соответственно C_V и C_p . Записав выражение первого начала термодинамики для 1 моля газа, можно получить выражение для C_V :

$$C_\mu dT = dU_\mu + p dV_\mu.$$

При постоянном объеме $\delta A = 0$

$$C_V = \frac{dU_\mu}{dT} = \frac{iRdT}{2dT} = \frac{i}{2}R.$$

Учитывая, что $C_p = \frac{\mu}{m} \frac{\delta Q}{dT}$, можно получить выражение для первого

начала термодинамики при изобарическом процессе:

$$\frac{\mu}{m} C_p dT = \frac{\mu}{m} \frac{i}{2} R dT + p dV.$$

Для изобарического процесса

$$p dV = \frac{\mu}{m} R dT. \quad (1)$$

Подставив (1) в выражение для первого начала и сократив, найдем связь между C_V и C_p : $C_p = C_V + R$.

Не забывайте, что C_V и C_p – молярные теплоемкости. Если применить первое начало термодинамики к изопротессам, то несложно получить выражение для работы, совершаемой системой при переходе из одного состояния в другое. Имеются в виду изохорический, изобарический и изотермический процессы. Выражения для работы получены в подсказке. Сложнее обстоит дело с адиабатическим процессом. **Адиабатическим** называется процесс, протекающий без теплообмена системы с окружающей средой, то есть $\delta Q = 0$. Это быстропротекающий процесс. Из первого начала термодинамики для адиабатического процесса следует: $\delta A = -dU$.

Изменение внутренней энергии не зависит от вида процесса:

$$dU = \frac{\mu}{m} \frac{i}{2} R dT.$$

Тогда $dA = -\frac{\mu}{m} \frac{i}{2} R dT$.

После интегрирования по температуре получим работу:

$$A = -\frac{\mu}{m} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{\mu}{m} C_V (T_1 - T_2).$$

Уравнение адиабаты $pV^\gamma = \text{const}$, где показатель адиабаты $\gamma = C_p / C_V$.

Сравните с уравнением изотермы: $pV = \text{const}$.

Поскольку показатель адиабаты $\gamma > 1$, на графике адиабата идет круче изотермы.

Энтропия является самым таинственным понятием в термодинамике. Функция состояния, дифференциал которой $dS = \delta Q/T$ (в обратимом процессе), называется **энтропией**. Обратимым называется процесс, который может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, и система возвращается в исходное состояние без изменений как в самой системе, так и в окружающей среде.

Известно, что в обратимом круговом процессе $\oint \delta Q/T = 0$, отсюда $\Delta S_{\text{обр}} = 0$ (в замкнутой системе).

Круговым процессом (циклом) называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное состояние. Если в замкнутой системе (она не обменивается теплотой) совершается необратимый цикл, то энтропия системы растет и $\Delta S > 0$. Таким образом, энтропия замкнутой системы может либо возрастать (в необратимом процессе), либо оставаться постоянной (в обратимом процессе), т. е. $\Delta S \geq 0$ (в замкнутой системе).

Это одна из формулировок **ВТОРОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ**. В статистической физике энтропия связывается с вероятностью состояния системы: ее возрастание в замкнутой системе при необратимых процессах означает переход системы из менее вероятных в более вероятные состояния (равновесные состояния). Физический смысл имеет не сама энтропия, которая определяется с точностью до постоянной интегрирования, а разность энтропий. Разность энтропии при равновесном переходе системы из состояния 1 в состояние 2 найдем из соотношения

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}.$$

Сделав замену $\delta A = pdV = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}$; $dU = \frac{m}{\mu} C_V dT$, получим

$$\Delta S_{12} = \frac{m}{\mu} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Таким образом, изменение энтропии не зависит от вида процесса перехода из состояния 1 в состояние 2.

Более глубокий смысл энтропии вскрывается в статистической физике: энтропия связывается с термодинамической вероятностью состояния системы.

Статистический вес, или термодинамическая вероятность, W есть число способов, которыми может быть реализовано данное макросостояние

$$W(n, N - n) = \frac{N!}{n!(N - n)!}. \quad \text{Здесь } N - \text{ число молекул.}$$

При равномерном распределении числа частиц (n), например, в двух половинках сосуда $n = \frac{N}{2}$.

Термодинамическая вероятность и энтропия системы связаны между собой, согласно закону Больцмана, следующим образом:

$$S = k \ln W, \quad \text{где } k - \text{ постоянная Больцмана.}$$

А теперь поговорим о глобальных катастрофах, например, о тепловой смерти Вселенной. Немецкий физик Клаузиус (тот, который ввел понятие энтропии), рассматривая Вселенную как замкнутую систему, пришел к выводу, что энтропия Вселенной должна достигнуть максимума. А это означает, что наступит полное тепловое равновесие, и все процессы во Вселенной прекратятся. То есть наступит тепловая смерть Вселенной! Однако, как дружно утверждают все учебники физики,

смерть отменяется, так как бесконечно развивающаяся Вселенная вряд ли может быть признана замкнутой системой. Следовательно, энтропия Вселенной может не только возрастать, но и убывать.

Со смертью Вселенной, а также с теоретической частью занятия мы почти закончили. Осталось рассмотреть тепловой двигатель.

Из курса средней школы нам известно, что **тепловой двигатель** состоит из трех частей: нагреватель, рабочее тело (идеальный газ), холодильник. Принцип действия теплового двигателя ясен из рис. 6.1. От нагревателя к рабочему телу

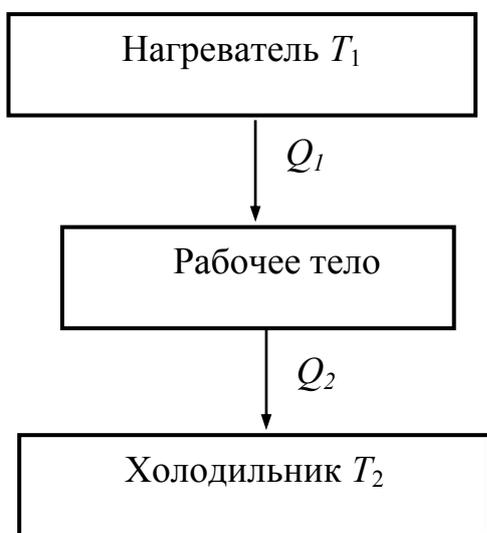


Рис. 6.1

за цикл передается изотермически количество теплоты Q_1 , а холодильнику (тоже изотермически) от рабочего тела – количество теплоты Q_2 . При этом совершается работа $A = Q_1 - Q_2$. Поскольку полное количество теплоты, переданное рабочему телу, равно Q_1 , то коэффициент полезного действия (КПД) равен:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}.$$

Наиболее экономичным является обратимый цикл Карно, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 6.2). На рис. 6.2 следующие обозначения: 1, 2 и 3, 4 – изотермы; 2, 3 и 4, 1 – адиабаты. Работа A равна закрашенной площади на рис. 6.2. Коэффициент полезного действия цикла Карно $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$. Холодильная машина работает по обратному циклу Карно.

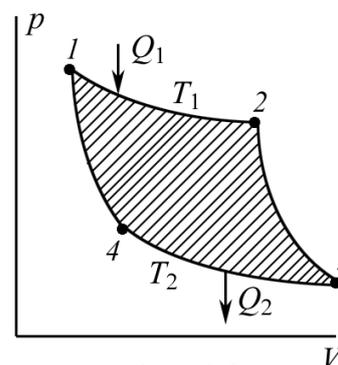


Рис. 6.2

Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Ранее мы изучали модель реального газа – идеальный газ. Чем же эта модель газа отличается от реального газа? Как это рассматривалось в занятии «Законы идеального газа», понятию «идеальный газ» удовлетворяют разреженные газы, молекулы которых практически не взаимодействуют друг с другом. Пренебrecь взаимодействием молекул и суммарным объемом молекул можно, если давление и температура отвечают обычным условиям (т. е. при атмосферном давлении и комнатной температуре). При увеличении давления (и плотности) газов все возрастающую роль играют объем молекул и взаимодействие между ними на расстоянии. Поэтому модель идеального газа и уравнение состояния

$$PV_M = RT \quad (*)$$

становятся неприменимыми.

Для описания поведения реальных газов нидерландский физик Ян Дидерик Ван-дер-Ваальс предложил внести поправки в уравнение (*), учитывающие силы взаимодействия молекул и их объем:

$$\left(P + \frac{a}{V_M^2} \right) \cdot (V_M - b) = RT.$$

Поправка b в этом уравнении для 1 моля газа учитывает силы взаимного отталкивания (возникают на малых расстояниях за счет перекрытия электронных оболочек молекул). Из-за сил взаимного отталкивания молекулы в сосуде движутся менее свободно, чем молекулы (в виде шариков) идеального газа. Ван-дер-Ваальс учел собственный объем молекул газа путем замены в уравнении Менделеева – Клапейрона (*) полного объема V_M сосуда, занимаемого молем газа, на «свободный» объем:

$$V'_M = V_M - b.$$

Несложно доказать, что поправка Ван-дер-Ваальса b в четыре раза больше собственного объема всех N_A молекул одного моля газа. Попробуйте это доказать!

Поправка a/V_M^2 характеризует добавку к внешнему давлению, обусловленную силами притяжения между молекулами.

Если пренебречь влиянием частиц стенок сосуда, то можно сказать, что внутри газа силы притяжения молекул уравновешены, притяжение же молекул в пограничном со стенкой слое нескомпенсированы, и газ как бы сжимает себя сам.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы m газа:

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \cdot \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT.$$

Сравнение изотерм реальных газов и изотерм Ван-дер-Ваальса

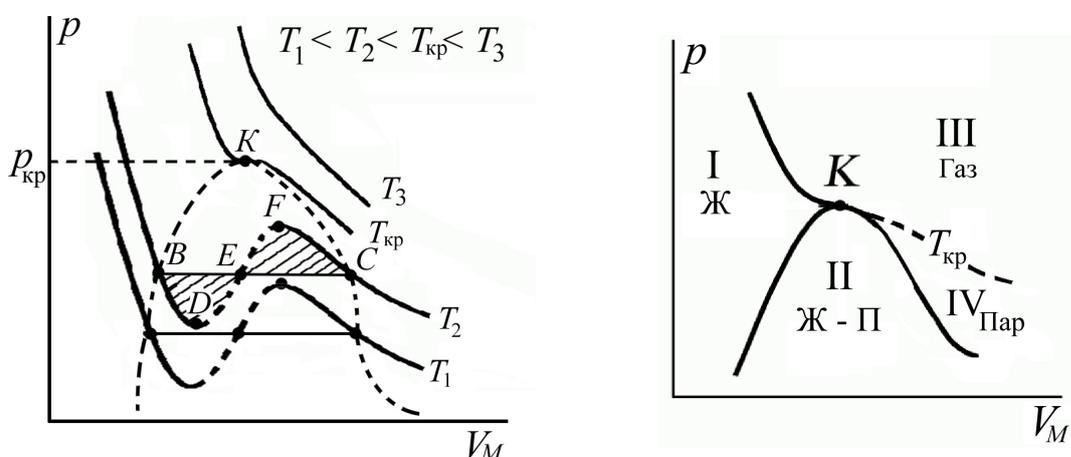


Рис. 6.3. Изотермы Ван-дер-Ваальса и экспериментальные изотермы

Рис. 6.4. Области равновесных состояний вещества на диаграмме p, V

Сравнение изотерм Ван-дер-Ваальса с экспериментальными изотермами реальных газов показывает (рис. 6.3), что изотермы Ван-дер-Ваальса имеют волнообразные участки $BDEFC$, в отличие от соответствующих горизонтальных участков экспериментальных изотерм (прямая BC). При этом площади $BDEB$ и $EFCE$ равны друг другу (правило Максвелла). опыты показывают, что некоторые участки изотерм Ван-дер-Ваальса практически осуществимы. При этом на участке BD получают перегретую жидкость, а на участке CF – пересыщенный пар.

Изотерма $T = T_{кр}$ является критической, при $T > T_{кр}$ нельзя получить из газообразного состояния жидкое (рис. 6.4).

Фазовые превращения

Фазой называют совокупность всех частей системы, обладающих одинаковым химическим составом, находящихся в одинаковом состоянии и ограниченных поверхностями раздела.

Три фазы одного и того же вещества (твердая, жидкая и газообразная, или жидкая и две твердые, или, наконец, три твердые) могут находиться в равновесии только при

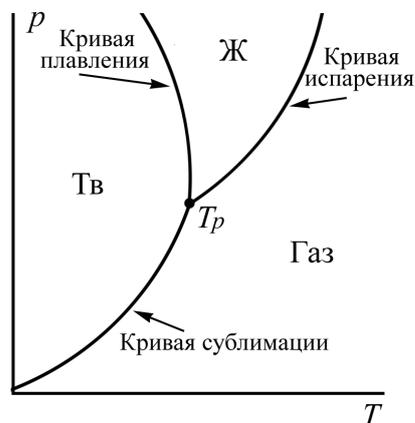


Рис. 6.5. Диаграмма состояния

единственным значениям температуры и давления, которым на диаграмме p, V соответствует точка, называемая тройной (рис. 6.5). В термодинамике доказывается, что равновесие более чем трех фаз одного и того же вещества невозможно.

Диаграмма состояния (рис. 6.5) позволяет определить, какие превращения будет претерпевать вещество при различных процессах.

Подсказка

Применим I начало термодинамики к изопроцессам:

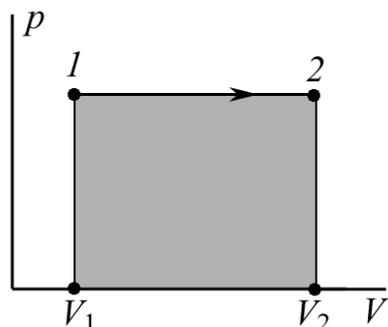


Рис. 6.6

1. Изобарический процесс

Диаграмма процесса дана на рис. 6.6.

Работа A при этом процессе определяется площадью заштрихованного прямоугольника:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1).$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона только для изобарического процесса:

$$p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Отсюда $A = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$. Таким образом, для I начала получим

выражение $Q = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + P\Delta V$.

Так как $\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R\Delta T$, то $Q = \frac{m}{\mu} R\Delta T \left(\frac{i}{2} + 1 \right)$.

2. Изохорический процесс

Диаграмма процесса дана на рис. 6.7. Ясно, что $A = 0$, то есть $Q = \Delta U$. В случае изохорического процесса вся теплота, сообщенная газу, идет на увеличение его внутренней энергии, то есть

$$Q = \Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

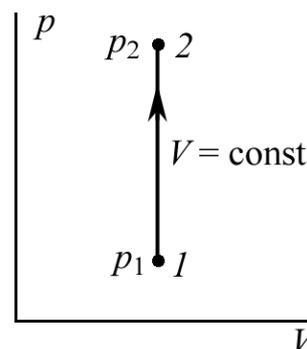


Рис. 6.7

3. Изотермический процесс

Диаграмма процесса дана на рис. 6.8. Поскольку $T = \text{const}$, то $\Delta U = 0$ и $Q = A$, то есть все количество теплоты, сообщаемое газу, идет на совершение им работы против внешних сил. Из уравнения изотермы $p_2 V_1 = p V$ получим

$p = \frac{p_1 V_1}{V}$. Работа в изотермическом процессе:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V} dV = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

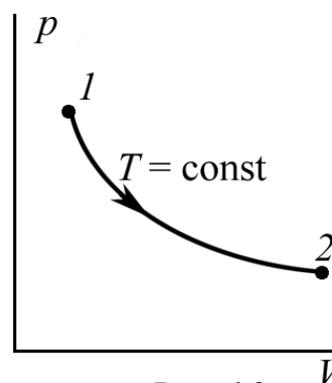


Рис. 6.8

4. Адиабатический процесс

Уравнение адиабаты можно получить в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Здесь γ – показатель адиабаты, $\gamma = C_p / C_V$.

Если вы затрудняетесь при решении задач на нахождение энтропии, то это, скорее всего, связано с тем, что вы забыли, как найти количество теплоты при нагревании, испарении и т. д. Приведем такой пример.

1. Найти изменение энтропии при нагревании 100 г воды от 0 до 100 °С с последующим превращением воды в пар той же температуры.

Решение

Изменение энтропии определяется как

$$\Delta S = S_1 - S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (1)$$

При бесконечно малом изменении температуры dT нагреваемого тела затрачивается теплота

$$\delta Q = mcdT. \quad (2)$$

Здесь m – масса; c – удельная теплоемкость. Подставив (2) в (1), получим

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T} = mc \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Подставив числовые данные, получим

$$\Delta S = 0,1 \cdot 4,19 \cdot 10^3 \cdot \ln (373/273) = 132 \text{ Дж/К}.$$

Во время превращения воды в пар температура не изменяется, поэтому в расчетной формуле она выносится за знак интеграла.

Таким образом, $\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T}$; $Q_2 = \lambda m$. Здесь λ – удельная теплота парообразования; Q – теплота, переданная при превращении нагретой воды в пар той же температуры. Отсюда

$$\Delta S_2 = \frac{\lambda m}{T}.$$

После подстановки числовых данных получим $\Delta S_2 = 605 \text{ Дж/К}$. Полное изменение энтропии процесса $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 737 \text{ Дж/К}$.

5. Политропический процесс

Политропический процесс происходит при постоянной теплоемкости. Учитывая, что в данном случае $C = \text{const}$, найдем уравнение политроны.

Первое начало термодинамики в виде

$$\frac{m}{\mu} C dT = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV.$$

Преобразуем это соотношение следующим образом:

$$\frac{m}{\mu} (C - C_V) RdT = RpdV \text{ (умножили обе части на } R).$$

Учитывая, что $\frac{m}{\mu} RdT = pdV + Vdp$, запишем

$$(C - C_V)(pdV + Vdp) = RpdV,$$

отсюда

$$(C - C_V - R)pdV + (C - C_V)Vdp = 0.$$

Разделим это уравнение на pdV и учтем, что $C_V + R = C_p$, получим

$$(C - C_p) \frac{dV}{V} + (C - C_V) \frac{dp}{p} = 0. \quad (*)$$

Введем величину $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$ – показатель политроны.

Тогда уравнение (*) будет иметь вид $n \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$.

Решение этого уравнения $pV^n = \text{const}$ есть уравнение политроны идеального газа.

Уравнение политроны в переменных T и V имеет вид $T^{n-1}V = \text{const}$.

При $C = 0$, $n = \gamma$ получим уравнение адиабаты;

при $C = \pm\infty$, $n = 1$ – уравнение изотермы;

при $C = C_p$, $n = 0$ – уравнение изобары;

при $C = C_V$, $n = \pm\infty$ – уравнение изохоры.

Таблица значений n и C :

Процесс	n	C
Изобарический	0	C_p
Изотермический	1	∞
Адиабатический	γ	0
Изохорический	∞	C_V

ТЕСТ

Вопросы

6.1. Выражение, полученное из I начала термодинамики и отвечающее изобарическому процессу:

$$1. Q = \frac{m}{\mu} R \Delta T \left(\frac{i}{2} + 1 \right). \quad 2. Q = P \Delta V. \quad 3. Q = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad 4. A = -\Delta U.$$

6.2. Выражение, полученное из I начала термодинамики и соответствующее изохорическому процессу:

$$1. Q = \frac{m}{\mu} R \Delta T \left(\frac{i}{2} + 1 \right). \quad 2. Q = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad 3. Q = -A. \quad 4. A = -\Delta U.$$

6.3. Выражение, полученное из I начала термодинамики и соответствующее изотермическому процессу:

$$1. Q = p \Delta V. \quad 2. Q = \frac{m}{\mu} R \Delta T \left(\frac{i}{2} + 1 \right). \quad 3. A = -\Delta U. \quad 4. Q = \Delta U.$$

6.4. Выражение, полученное из I начала термодинамики и соответствующее адиабатическому процессу:

$$1. Q = -A. \quad 2. Q = \frac{m}{\mu} R \Delta T \left(\frac{i}{2} + 1 \right). \quad 3. A = -\frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

$$4. Q = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

6.5. Выражение для нахождения работы в изотермическом процессе:

$$1. A = \frac{m}{\mu} R T \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad 2. A = \frac{m}{\mu} R \Delta T \left(\frac{i}{2} + 1 \right). \quad 3. A = \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad 4. A = 0.$$

6.6. Выражение для нахождения работы в изобарическом процессе:

$$1. A = \frac{m}{\mu} R T \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad 2. A = \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad 3. A = 0. \quad 4. A = -\frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

6.7. Выражение для нахождения работы в адиабатическом процессе:

$$1. A = \frac{m}{\mu} R T \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad 2. A = -\frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad 3. A = \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad 4. A = p \int_{V_1}^{V_2} dV.$$

6.8. Чему равна работа в изохорическом процессе?

1. $A = 0$. 2. $A = -\frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T$. 3. $A = \frac{m}{\mu} R \Delta T$. 4. $A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

6.9. Для какого изопроцесса $\delta Q = \frac{m}{\mu} C_p dT$?

1. *Изобарического.* 2. *Изотермического.*
3. *Адиабатического.* 4. *Изохорического.*

6.10. Какому изопроцессу соответствует выражение $dU = \frac{m}{\mu} C_V dT$?

1. *Любому.* 2. *Изотермическому.*
3. *Адиабатическому.* 4. *Изохорическому.*

6.11. В каком изопроцессе все подведенное к системе количество теплоты идет на совершение газом работы?

1. *Изохорическом.* 2. *Адиабатическом.*
3. *Изобарическом.* 4. *Изотермическом.*

6.12. В каком изопроцессе все подведенное к системе количество теплоты идет на увеличение внутренней энергии газа?

1. *Изохорическом.* 2. *Адиабатическом.*
3. *Изобарическом.* 4. *Изотермическом.*

6.13. В каком изопроцессе все подведенное к системе количество теплоты идет на изменение внутренней энергии газа и на совершение газом работы?

1. *Изохорическом.* 2. *Адиабатическом.*
3. *Изобарическом.* 4. *Изотермическом.*

6.14. В каком изопроцессе теплота к системе не подводится?

1. *Изохорическом.* 2. *Адиабатическом.*
3. *Изобарическом.* 4. *Изотермическом.*

6.15. Какие величины зависят только от состояния системы и не зависят от вида перехода (процесса)?

1. *Работа и теплота.*
2. *Работа и внутренняя энергия.*
3. *Работа, теплота и энтропия.*
4. *Энтропия и внутренняя энергия.*

6.16. Какая величина, которую вы изучали в разделе «Механика», так же как и энтропия, определяется с точностью до произвольной постоянной?

1. *Работа.* 2. *Кинетическая энергия.*
3. *Импульс.* 4. *Потенциальная энергия.*

6.17. Какой из перечисленных изопроцессов может быть назван изоэнтропийным процессом ($S = \text{const}$)?

1. *Изохорический.*
2. *Адиабатический.*
3. *Изобарический.*
4. *Изотермический.*

6.18. Энтропия замкнутой системы в обратимом процессе

- 1) *убывает;*
- 2) *остаётся постоянной;*
- 3) *возрастает;*
- 4) *зависит от параметров системы.*

6.19. Энтропия замкнутой системы в необратимом процессе

- 1) *убывает;*
- 2) *остаётся постоянной;*
- 3) *возрастает;*
- 4) *зависит от параметров системы.*

6.20. Для увеличения КПД теплового двигателя надо

- 1) *увеличить разность температур нагревателя и холодильника;*
- 2) *увеличить температуры нагревателя и холодильника;*
- 3) *уменьшить температуры нагревателя и холодильника;*
- 4) *увеличить температуру нагревателя и уменьшить температуру холодильника.*

6.21. Верные заключения:

1. *КПД тепловых машин не зависят от природы рабочего тела.*
2. *КПД тепловых машин зависят от природы рабочего тела.*
3. *Тепловые машины, работающие по обратимому циклу Карно, имеют наибольший КПД.*
4. *КПД тепловых машин зависит от разности $T_1 - T_2$.*

6.22. В наиболее экономичной тепловой машине обмен теплом должен происходить

- 1) *адиабатически;*
- 2) *изохорически;*
- 3) *изотермически;*
- 4) *изобарически.*

6.23. Как на графике (в координатах P, V) отличить изотерму от адиабаты?

1. *Изотерма идет круче адиабаты.*
2. *Адиабата идет круче изотермы.*
3. *График адиабаты – прямая линия, график изотермы – кривая.*
4. *График адиабаты – кривая линия, график изотермы – прямая.*

6.24. Правильные ответы (рис. 6.9):

1. *1–2 – изотермический процесс;*
2–3 – адиабатический процесс.
2. *1–2 – изотермический процесс;*
2–3 – изоэнтропийный процесс.
3. *1–2 – изотермический процесс;*
2–3 – изохорический процесс.
4. *1–3 – изотермический процесс;*
3–2 – адиабатический процесс.

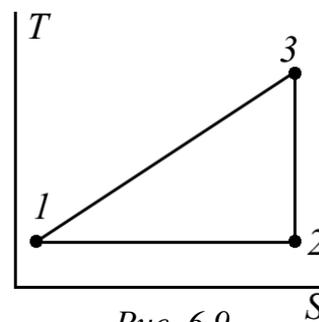


Рис. 6.9

6.25. Процесс, где теплоемкость постоянна, называется

- 1) политропическим;
- 2) адиабатическим;
- 3) изохорическим;
- 4) изобарическим;
- 5) изотермическим.

6.26. Установить соответствие между показателем политропы n и процессом:

изобарический	1
изотермический	∞
адиабатический	0
изохорический	C_p / C_V
политропический	

6.27. Для молярных теплоемкостей идеального газа верно соотношение:

1. $C_p = C_V$.
2. $C_p > C_V$.
3. $C_p < C_V$.
4. $C_p = 0$.
5. $C_V = 0$.

6.28. ... не зависит от вида процесса.

1. Энтропия.
2. Внутренняя энергия.
3. Работа при $p = const$.
4. Работа при $T = const$.
5. Работа при $V = const$.
6. Работа при $Q = const$.

6.29. Функция состояния – это

- 1) внутренняя энергия;
- 2) энтропия;
- 3) давление;
- 4) температура;
- 5) объем.

6.30. Поправка на объем газа в уравнении Ван-дер-Ваальса превосходит объем всех молекул в моле газа в ... раза.

6.31. Как соотносятся заштрихованные площади S_1 и S_2 (рис. 6.10)?

1. $S_1 = S_2$.
2. $S_1 = 0,5 S_2$.
3. $S_1 = 1,5 S_2$.
4. $S_1 = 1,1 S_2$.

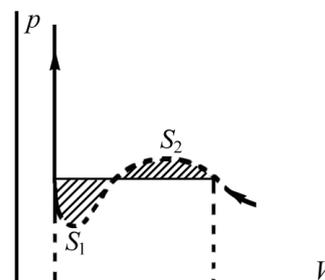


Рис. 6.10

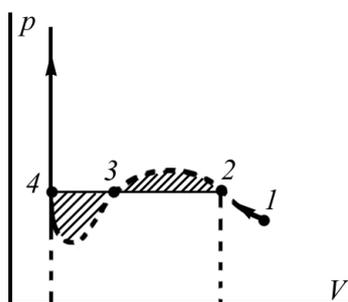


Рис. 6.11

6.32. Появлению однородной жидкости при уменьшении объема соответствует точка (рис. 6.11)

6.33. Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа:

$$1. \left(p + \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M - b) = R \cdot T .$$

$$2. \left(p - \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M + b) = R \cdot T .$$

$$3. \left(p + \frac{b}{V_M^2} \right) (V_M - a) = RT .$$

$$4. (p+b) \left(V_M - \frac{q}{V_m^2} \right) = \frac{m}{\mu} RT .$$

$$5. \left[\left(p + \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right) \right] \left(V - \frac{m}{\mu} - b \right) = \frac{m}{\mu} RT .$$

6.34. Область IV характерна равновесному состоянию вещества (рис. 6.12):

1. Жидкость – пар.
2. Жидкость.
3. Пар.
4. Газ.
5. Газ – пар.

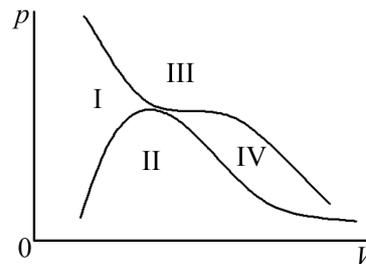


Рис. 6.12

6.35. Область III – это термодинамическая фаза вещества (рис. 6.13):

1. Жидкая.
2. Твердая.
3. Газообразная.
4. Твердая + жидкая.
5. Жидкая + газообразная.

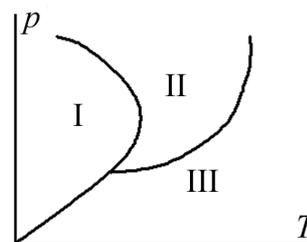


Рис. 6.13

6.36. Выражение для энтропии моля ван-дер-ваальсовского газа (в зависимости от T и V):

1. $S = C_V \cdot \ln T + R \ln (V - b) + \text{const.}$
2. $S = C_p \cdot \ln T + R (V - b) + \text{const.}$
3. $S = C_V \cdot \ln T + R \ln (V + a) + \text{const.}$
4. $S = C_V \cdot T + R(V - b) + \text{const.}$

6.37. Постоянная b в уравнении Ван-дер-Ваальса для 1 моля газа измеряется:

1. Па·м⁶/моль².
2. м³/моль.
3. м⁵/моль².
4. м⁵/моль.
5. Па·м⁴/моль².

6.38. Верные характеристики поправок a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса:

1. « b » представляет собой «запрещенный» объем, приходящийся на N_A молекул моля газа; « a » учитывает добавочное давление, которое производит на газ слой его молекул, граничащих со стенками.

2. «*b*» учитывает добавочное давление; «*a*» – собственный объем молекул.

3. «*b*» учитывает собственный объем молекул; «*a*» – увеличение давления у стенок сосуда, обусловленное силами притяжения молекул.

4. «*b*» учитывает собственный объем молекул; «*a*» – уменьшение давления у стенок сосуда, обусловленное силами отталкивания между молекулами.

6.39. Область II характерна равновесному состоянию вещества (рис. 6.14):

1. Жидкость – пар.
2. Жидкость.
3. Пар.
4. Газ.
5. Газ – пар.

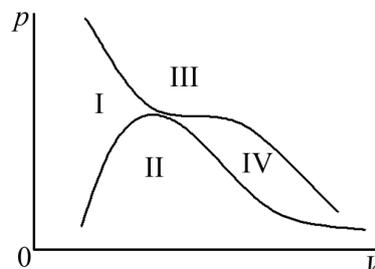


Рис. 6.14

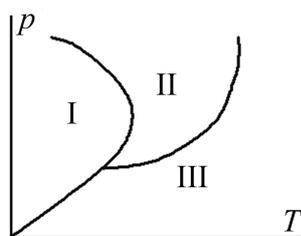


Рис. 6.15

6.40. Область II – это термодинамическая фаза вещества (рис. 6.15):

1. Жидкая.
2. Твердая.
3. Газообразная.
4. Твердая + жидкая.
5. Жидкая + газообразная.

6.41. Участки изотермы Ван-дер-Ваальса соответствуют (рис. 6.16):

1. 3–2 – перегретая жидкость.
2. 4–3 – пересыщенный пар.
3. 1–4 – перегретая жидкость.
4. 1–4 – пересыщенный пар.
5. 4–3 – перегретая жидкость.

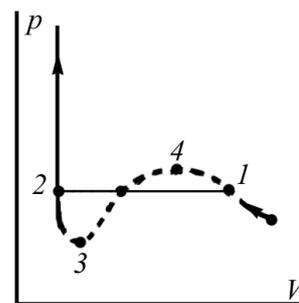


Рис. 6.16

6.42. Правильны характеристики поправок *a* и *b* в уравнении Ван-дер-Ваальса:

1. «*a*» учитывает силу притяжения молекул.
2. «*b*» учитывает силу отталкивания молекул.
3. «*a*» учитывает силу отталкивания молекул.
4. «*b*» учитывает силу притяжения молекул.
5. «*a*» и «*b*» учитывают собственный объем молекул.

6.43. Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа:

$$1. \left(p + \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M - b) = R \cdot T .$$

$$2. \left(p + \frac{b}{V_M^2} \right) (V_M - a) = RT .$$

$$3. \left(p - \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M + b) = R \cdot T .$$

$$4. (p + b) \left(V_M - \frac{q}{V_m^2} \right) = \frac{m}{\mu} RT .$$

$$5. \left[\left(p + \left(\frac{M}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right) \right] \left(V - \frac{m}{\mu} - b \right) = \frac{m}{\mu} RT .$$

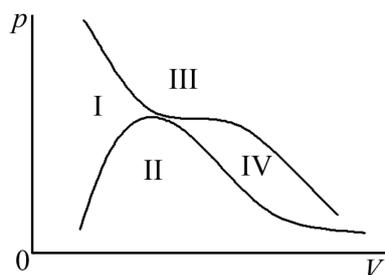


Рис. 6.17

6.44. Область III характерна для равновесного состояния вещества (рис. 6.17):

1. Жидкость – пар.
2. Жидкость.
3. Пар.
4. Газ.
5. Газ – пар.

6.45. Область I – это термодинамическая фаза вещества (рис. 6.18):

1. Жидкая.
2. Твердая.
3. Газообразная.
4. Твердая + жидкая.
5. Жидкая + газообразная.

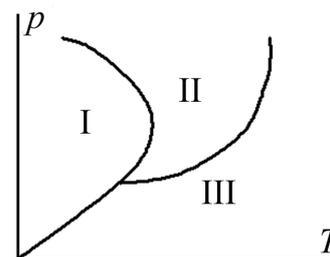


Рис. 6.18

6.46. Постоянная «b» в уравнении Ван-дер-Ваальса для 1 моля газа измеряется:

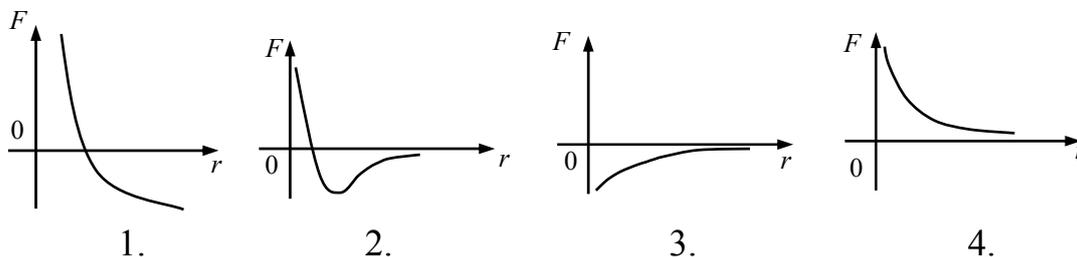
1. Па·м⁴/моль².
2. м⁵/моль.
3. Па·м⁶/моль².
4. м³/моль.
5. м⁵/моль².

6.47. Модель идеального газа отличается от модели газа Ван-дер-Ваальса тем, что учтены:

1. Собственный объем молекул.
2. Силы притяжения молекул.
3. Внутренняя энергия молекул.
4. Кинетическая энергия молекул.

5. Потенциальная энергия молекул.

6.48. Зависимость силы взаимодействия между молекулами от расстояния r между ними указана на рисунке:



6.49. Углекислота при атмосферном давлении не превращается в жидкость, потому что

- 1) давление в тройной точке для нее $p_{тр} = 5,11$ атм;
- 2) температура в этом случае меньше критической;
- 3) температура в этом случае больше критической;
- 4) температура в этом случае равна критической.

Задачи

6.1. Определить удельные теплоемкости C_V и C_p некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях равна $1,43$ кг/м³.

6.2. Водород массой $m = 20$ г был нагрет на $\Delta T = 100$ К при постоянном давлении. Определить: 1) количество теплоты Q , переданное газу; 2) приращение ΔU внутренней энергии газа; 3) работу A газа при расширении.

6.3. Некоторый газ массой 2 кг находится при температуре 300 К и под давлением 0,5 МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в три раза. Работа, затраченная на сжатие, $A = -1,37$ кДж. Определить первоначальный объем газа.

6.4. Идеальный газ с количеством вещества $\nu = 2$ моль сначала изобарно нагрели так, что его объем увеличился в $n = 2$ раза, а затем изохорно охладили так, что давление газа уменьшилось в $n = 2$ раза. Определить приращение энтропии в ходе указанных процессов.

6.5. Тепловая машина, совершая обратимый цикл Карно, за 1 цикл совершает работу 1 кДж. Температура нагревателя 400 К, температура холодильника 300 К. Определить: 1) КПД машины; 2) количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за один цикл; 3) количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл.

6.6. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого равен 0,3. Определить работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 300 Дж.

6.7. В результате изохорического нагревания водорода массой $m = 1$ г давление газа увеличилось в два раза. Определить изменение ΔS энтропии газа.

6.8. Смешали воду массой $m_1 = 5$ кг при температуре $t_1 = 280$ К с водой массой $m_2 = 8$ кг при температуре $t_2 = 350$ К. Найти: 1) температуру смеси; 2) изменение ΔS энтропии, происходящее при смешивании. Удельная теплоемкость воды $c = 4190$ Дж/(кг·К).

6.9. Газ, совершающий цикл Карно, за счет каждой килокалории теплоты, полученной от нагревателя, совершает работу 598 Дж. Каков КПД η этого цикла в %? Во сколько раз абсолютная температура T_1 нагревателя больше абсолютной температуры T_2 холодильника? (1 кал = 4,2 Дж). **Примечание:** начальные условия задачи разбрасываются в заданных пределах случайным образом.

6.10. Известны удельные теплоемкости газа $C_V = 649$ Дж/(кг·К) и $C_p = 912$ Дж/(кг·К). Определить молекулярную массу m газа и число степеней свободы n его молекул.

6.11. Определить удельные теплоемкости C_V и C_p для газа, состоящего по весу из 85 % кислорода (O_2) и 15 % озона (O_3). Молекулы O_2 и O_3 считать жесткими.

6.12. Чему равны удельные теплоемкости C_V и C_p некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях равна $1,43$ кг/м³.

6.13. Найти удельные теплоемкости C_V и C_p некоторого газа, если известно, что масса одного киломоля этого газа равна $\mu = 30$ кг/кмоль и отношение $C_V / C_p = 1,4$.

6.14. Найти удельную теплоемкость при постоянном давлении газовой смеси, состоящей из 3 кмоль аргона и 2 кмоль азота.

6.15. Найти отношение C_V / C_p для газовой смеси, состоящей из 8 г гелия и 16 г кислорода.

6.16. Удельная теплоемкость при постоянном объеме газовой смеси, состоящей из одного киломоля кислорода и нескольких киломолей аргона, равна $0,430$ Дж/(кг·К). Какова масса аргона в газовой смеси?

6.17. 10 г кислорода находятся под давлением $3 \cdot 10^5$ Па при температуре 10 °С. После нагревания при постоянном давлении газ занял объем в 10 л. Найти: 1) количество тепла, полученного газом; 2) энергию теплового движения газа до и после нагревания.

6.18. Двухатомному газу сообщено 500 кал тепла. При этом газ расширяется при постоянном давлении. Найти работу расширения газа (1 кал = 4,19 Дж).

6.19. При изобарическом расширении двухатомного газа была совершена работа в 16 кГм. Какое количество тепла было сообщено газу? 1 кГм = 9,8 Дж.

6.20. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Определить КПД цикла, если известно, что за один цикл была произведена работа, равная 300 кГм и холодильнику было передано 3,2 ккал (1 кал = 4,19 Дж).

6.21. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % тепла, получаемого от нагревателя, передается холодильнику. Количество тепла, получаемое от нагревателя, равно 1,5 ккал. Найти: 1) КПД цикла; 2) работу, совершенную при полном цикле. 1 кал = 4,19 Дж.

6.22. Найти прирост энтропии при превращении 1 г воды при 0 °С в пар при 100 °С.

6.23. Найти изменение энтропии при плавлении 1 кг льда, находящегося при 0 °С.

6.24. 6,6 г водорода расширяются изобарически до удвоенного объема. Найти изменение энтропии при этом расширении.

6.25. Найти изменение энтропии при изобарическом расширении 8 г гелия от объема $V_1 = 10$ л до объема $V_2 = 25$ л.

6.26. Найти изменение энтропии при изотермическом расширении 6 г водорода от 10^5 до $0,5 \cdot 10^5$ Н/м².

6.27. 10,5 г азота изотермически расширяются от объема $V_1 = 2$ л до объема $V_2 = 5$ л. Найти прирост энтропии при этом процессе.

6.28. Водород совершает цикл Карно. При адиабатическом расширении объем газа увеличивается в 2 раза. Определить КПД цикла.

6.29. При изобарном нагревании газа ($\nu = 2$ моль) объем увеличился в 2 раза, при изохорном охлаждении давление уменьшилось в 2 раза. Определить приращение энтропии.

ЗАНЯТИЕ 7

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

Теория

Элементы релятивистской кинематики

Теорию относительности с трудом принимали сразу после создания, с трудом принимают и сейчас. Говорят, что в мире существует не более ста человек, по-настоящему понимающих теорию относительности. Хотите увеличить их число?

Специальная теория относительности (СТО) разработана в начале XX века усилиями А. Лоренца, А. Пуанкаре и А. Эйнштейна. Вопрос приоритета в создании СТО имеет дискуссионный характер: основные положения и полный математический аппарат, включая групповые свойства преобразований Лоренца, в абстрактной форме были впервые сформулированы А. Пуанкаре в работе «О динамике электронов».

Постулаты специальной теории относительности были сформулированы А. Эйнштейном в практически одновременной работе «К электродинамике движущихся сред» (1905).

Поскольку всякое движение относительно, т. к. рассматривается относительно системы отсчета (отсюда название теории), в классической механике для перехода от координат и времени одной (неподвижной K) системы отсчета к координатам и времени другой (подвижной K') Галилей вывел четыре уравнения:

$$x = x' + vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'.$$

Они были названы преобразованиями Галилея. Эти уравнения очевидны при выборе осей, показанных на рис. 7.1.

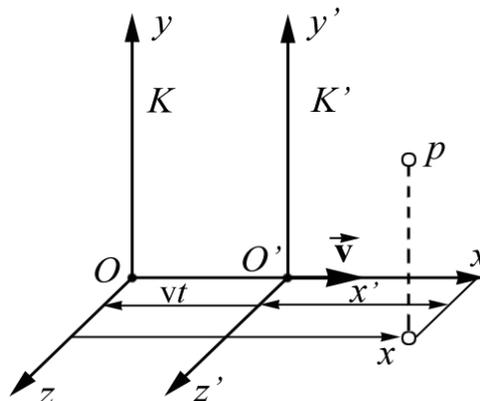


Рис. 7.1. Инерциальная система K' движется с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы K

При этом в механике Ньютона предполагается, что время во всех системах отсчета течет одинаково, поэтому $t = t'$.

Продифференцировав уравнения по времени, получим формулу преобразования скорости частицы от системы K' к системе K (или закон сложения скоростей) $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}$, где \vec{v}' – скорость частицы относительно K' .

Дифференцирование этого уравнения приводит к равенству $\vec{a} = \vec{a}'$, т. е. ускорения частицы относительно систем K и K' одинаковы.

Кроме этого, одинаковое значение имеют: масса $m = m'$, сила $F = F'$ и уравнение II закона имеет тот же вид: $F' = ma'$.

Полученный результат означает, что законы механики одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета. Это утверждение называется **принципом относительности Галилея**.

Воспользовавшись понятием инвариантности (*invariantis* – «неизменяющийся»), принцип относительности Галилея можно сформулировать следующим образом: уравнения механики инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея.

Постулаты специальной теории относительности

Основу специальной теории относительности составляют два постулата: принцип относительности Эйнштейна и принцип постоянства скорости света.

Эйнштейн распространил механический принцип относительности Галилея на все без исключения физические явления:

1. Все законы природы одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета.

2. Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета (справедливость этого утверждения была доказана в 1887 г. опытом Майкельсона и Морли).

Кроме того, Эйнштейн показал, что преобразования Галилея должны быть заменены более общими преобразованиями Лоренца (при аналогичном представленному на рис. 1 выборе осей координат).

Переход из системы K' к системе K :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Переход из системы K к системе K' :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

здесь $\beta = v / c$.

Как видим, преобразования Лоренца существенно отличаются от преобразований Галилея. Например, время t в системе K определяется не только временем t' в системе K' , но также и координатой x' . В этом проявляется взаимосвязь пространства и времени.

При скоростях, много меньших скорости света ($v \ll c$), преобразования Лоренца практически не отличаются от преобразований Галилея. Следовательно, преобразования Галилея сохраняют значения для скоростей, малых по сравнению со скоростью света.

При $v > c$ выражения для x , t , x' и t' становятся мнимыми, т. е. движение со скоростью большей c , невозможно (абсолютность скорости света и невозможность ее превысить вызывает критику противников СТО: в теории относительности один параметр (скорость света) принят за **абсолютный**).

Следствия из преобразований Лоренца

1. Относительность понятия одновременности

Причинно не связанные друг с другом события в движущихся системах оказываются неодновременными.

2. Длина тел в разных системах отсчета

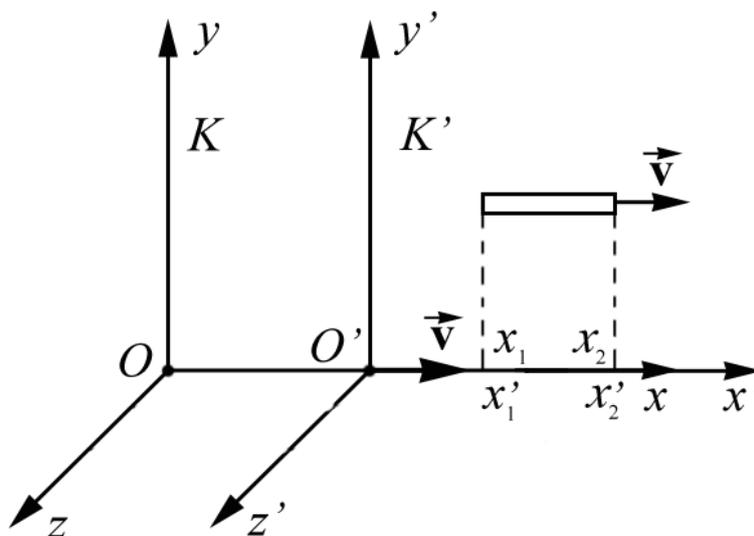


Рис. 7.2. Длина стержня в системах K и K'

Стержень покоится в системе K' . Относительно K он движется со скоростью \vec{v} . Длина стержня в системе K' : $l_0 = x'_2 - x'_1$; в системе K : $l = x_2 - x_1$.

Воспользуемся преобразованиями Лоренца

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

$$\text{Отсюда } x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}}, \text{ или } l = l_0 \sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}.$$

Длина движущегося стержня оказывается меньше той, которой обладает стержень в системе отсчета, относительно которой он покоится. Обратите внимание, что сокращение размеров (оно называется Лоренцовым, или Фицджеральдовым) происходит в направлении движения, поперечные размеры не изменяются. Однако зрительно это изменение размеров незаметно.

3. Промежуток времени между событиями

Анализируя преобразования Лоренца, можно заключить также, что промежуток времени между событиями в системе K и K' будет неодинаков.

Выразив промежутки Δt (система K) и $\Delta t'$ (система K') как $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ и $\Delta t = t_2 - t_1$ и используя преобразования Лоренца для t_1 и t_2 , получим

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}}, \text{ или } \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}}.$$

Отсюда следует, что промежуток времени между событиями в системе, относительно которой часы движутся со скоростью \vec{v} (вместе с системой K'), больше промежутка времени между событиями в системе, относительно которой они покоятся (движущиеся часы идут медленнее).

Промежуток времени в системе, относительно которой часы покоятся, называется собственным временем.

Экспериментальным подтверждением этого служит наблюдение мюонов вблизи земной поверхности. Это оказывается возможным в связи с тем, что время их жизни, отсчитанное по часам, неподвижным относительно Земли, оказывается значительно большим, чем собственное время жизни этих частиц.

Возникает вопрос: есть ли еще абсолютные величины в теории относительности, кроме скорости света?

Такая величина есть – это интервал (или расстояние) между двумя мировыми точками в четырехмерном пространстве – времени, определяемый выражением

$$\Delta s = \sqrt{c^2 t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}.$$

Величина Δs является аналогом расстояния Δl между точками в обычном пространстве.

Закон сложения скоростей имеет вид

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{v}}{1 + \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{v}'}{c^2}},$$

здесь \mathbf{v} – скорость частицы относительно системы K ; \mathbf{v}' – скорость частицы относительно системы K' ; \mathbf{v} – скорость движения системы K' относительно K .

Элементы релятивистской динамики

Еще из курса физики средней школы вам известно, что масса релятивистской частицы определяется как $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}}$, где m_0 – масса неподвижной частицы. Учитывая, что импульс $p = mv$, релятивистский импульс равен

$$p = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}}.$$

Поскольку законы сохранения инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца, полная энергия релятивистской частицы определяется как

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}}.$$

В релятивистской механике под полной энергией подразумевается сумма кинетической энергии и энергии покоя частицы (под полной энергией в классической механике понимается сумма кинетической и потенциальной энергий частицы).

Неподвижная частица обладает энергией $E_0 = m_0 c^2$, эта энергия называется энергией покоя частицы.

Отсюда кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}} - 1 \right).$$

Релятивистская связь энергии и импульса тела $E = E_0^2 + p^2 c^2$.

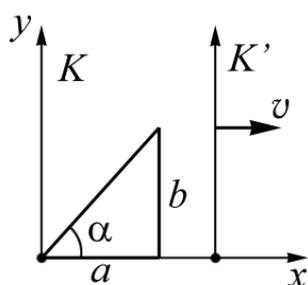
В релятивистской динамике всякое изменение массы тела Δm сопровождается изменением энергии, причем эти изменения пропорциональны друг другу: $\Delta E = c^2 \Delta m$. Это утверждение носит название закона взаимосвязи релятивистской массы и энергии.

Подводя итог вышесказанному, можно констатировать, что классическая механика может считаться практически строгой в повседневной жизни и технике (скорость очень мала по сравнению со скоростью c).

Подсказка

Задача 1. Катет прямоугольного треугольника $a = 5$ м, угол между этим катетом и гипотенузой $\alpha = 30^\circ$. Найти в системе отсчета K' , движущейся относительно этого треугольника со скоростью $v = 0,866$ с вдоль катета a : а) значение угла α' ; б) длину l' гипотенузы и ее отношение к собственной длине l/l .

Решение



Согласно СТО длина катета a в системе K' равна: $a' = a\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. Длина катета b остается неизменной, т. е. $b' = b$ и $b = a \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Из этого следует, что угол α' между катетом a' и гипотенузой l' в системе K' определяется равенством

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{b'}{a'} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Длина гипотенузы l' треугольника в системе K' (по теореме Пифагора) равна

$$l' = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha - (v^2/c^2)}.$$

Собственная длина гипотенузы в системе K равна $l = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Отсюда отношение $\frac{l'}{l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}}$.

Подставив численные значения, получим: $\alpha' = 49^\circ$; $l' = 3,8$ м; $l'/l = 0,66$.

Задача 2. Относительно неподвижной K системы отсчета мюон, движущийся со скоростью $v = 0,99$ с, пролетел от места своего рождения до точки распада $l = 3$ км. Определить: а) собственное время жизни этого мюона (в системе K' , относительно которой он покоится); б) расстояние, которое пролетел мюон в K' системе, связанной с мюоном.

Решение

Время жизни мюона в системе K , относительно которой он движется со скоростью v , равно $\Delta t = \frac{l}{v}$. Собственное время жизни мюона $\Delta t'$

(в системе K' , относительно которой мюон покоится) определим как

$$\Delta t' = \frac{l}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

В системе K' точка системы отсчета K , в которой родился мюон, движется со скоростью \mathbf{v} и удаляется от него за время $\Delta t'$ на расстояние

$$l' = \mathbf{v}\Delta t' = l\sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}.$$

Ответ: $\Delta t' = 1,4$ мкс; $l' = 420$ м.

Задача 3. Собственное время жизни некоторой частицы оказалось равным $\Delta t' = 1 \cdot 10^{-6}$ с. Определить интервал Δs между рождением и распадом этой частицы.

Решение

Согласно СТО интервал Δs между событиями равен

$$\Delta s = \sqrt{c^2 t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}.$$

Учитывая, что $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$, выражение для Δs можно записать как $\Delta s = \sqrt{c^2 t^2 - \Delta l^2}$. Вынесем из-под корня $c \cdot \Delta t$, получим $\Delta s = c \Delta t \sqrt{1 - (\Delta l / c \Delta t)^2}$. Отношение $\Delta l / \Delta t$ равно скорости частицы, с учетом этого

$$\Delta s = c \Delta t \sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)}, \text{ но } \Delta t \sqrt{1 - (\mathbf{v}^2 / c^2)} = \Delta t'.$$

Отсюда $\Delta s = c \cdot \Delta t'$, где $\Delta t'$ – собственное время жизни частицы. Таким образом, $\Delta s = 3 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 300$ м.

Задача 4. Над частицей массы $m = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг, двигавшейся первоначально со скоростью $\mathbf{v}_1 = 0,1c$, была совершена работа $A = 8,24 \cdot 10^{-14}$ Дж. Как изменились в результате этого скорость, импульс и кинетическая энергия частицы?

Решение

Учитывая, что законы сохранения выполняются в СТО, работа, совершенная над частицей, равна ее кинетической энергии, т. е. $A = E_K$.

$$\text{Кинетическая энергия равна } E_K = \frac{m_0 c^2}{1 - (\mathbf{v}_2^2 / c^2)} - m_0 c^2.$$

Представим это выражение в виде $E_K + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{1 - (\mathbf{v}_2^2 / c^2)}$, но $E_K + m_0 c^2 = E$ – полная энергия частицы, а $m_0 c^2 = E_0$ – энергия покоя.

$$\text{В новых обозначениях } E = \frac{E_0}{1 - (\mathbf{v}_2^2 / c^2)}, \text{ отсюда } E^2 \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{v}_2^2}{c^2}\right) = E_0^2;$$

$$E^2 - E^2 \frac{\mathbf{v}_2^2}{c^2} = E_0^2, \text{ или } E^2 \mathbf{v}_2^2 (E^2 - E_0^2) c^2, \text{ отсюда}$$

$$v = \sqrt{\frac{(E^2 - E_0^2)c^2}{E^2}} = c\sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{E^2}}.$$

Энергия покоя частицы равна $E_0 = 0,911 \cdot 10^{-30} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 8,199 \cdot 10^{-14}$ Дж.

Полная энергия частицы:

$$E_2 = E_K + E_0 = 8,24 \cdot 10^{-14} + 8,199 \cdot 10^{-14} = 16,439 \cdot 10^{-14} \text{ Дж.}$$

Таким образом,

$$v_2 = c\sqrt{\frac{16,439^2 - 8,199^2}{16,439^2}} = c\sqrt{\frac{269,9449 - 67,0761}{269,9449}} = c\sqrt{\frac{202,8688}{269,9449}}.$$

После округления до сотых получим $v_2 = 0,87c$.

Изменение скорости $\Delta v = v_2 - v_1 = 0,77c$.

Изменение импульса найдем, определив p_1 (импульс частицы до совершения работы) и p_2 (импульс частицы после совершения работы).

Изменение импульса $\Delta p = p_2 - p_1$.

Из СТО следует связь полной энергии и импульса $p = \frac{E}{c^2} v$, отсюда

$$p_1 = \frac{E_1 \cdot v_1}{c^2}; \quad p_2 = \frac{E_2 \cdot v_2}{c^2}.$$

Полная энергия E_1 равна $E_1 = \frac{m_0 c^2}{1 - (v_1^2 / c^2)}$;

$$p_1 = \frac{m_0 c^2 \cdot v_1}{\sqrt{1 - (v_1^2 / c^2)} \cdot c^2} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v_1^2 / c^2)}}.$$

Подставив числовые данные, получим

$$p_1 = \frac{0,911 \cdot 10^{-30} \cdot 0,1 \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - 0,01}} = 0,274 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{ м/с.}$$

Поскольку E_2 нам известна, то

$$p_2 = \frac{E_2}{c^2} \cdot v = \frac{16,439 \cdot 10^{-14} \cdot 0,87c}{c^2} = \frac{16,439 \cdot 10^{-14} \cdot 0,87}{3 \cdot 10^8} = 4,767 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{ м/с.}$$

Изменение импульса составит

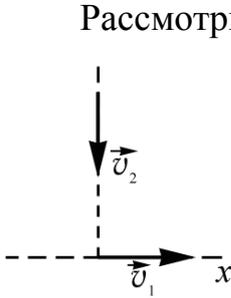
$$\Delta p = (4,767 \cdot 10^{-22} - 0,274 \cdot 10^{-22}) = 4,463 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{ м/с.}$$

Ответ: $\Delta v = 0,77c$; $\Delta p = 4,5 \cdot 10^{-22}$ кг· м/с; $\Delta E_K = 8,24 \cdot 10^{-14}$ Дж.

Задача 5. Две релятивистские частицы движутся под прямым углом друг к другу в неподвижной системе отсчета K , причем одна со скоростью $v_1 = 0,1c$, другая – со скоростью $v_2 = 0,4c$ (где c – скорость света). Найти их относительную скорость.

Решение

Пусть первая частица движется в системе K вдоль оси x , т. е. $v_{1x} = v_1$, $v_{1y} = 0$, а вторая частица в этой системе – вдоль оси y , т. е. $v_{2y} = v_2$, $v_{1x} = 0$.



Рассмотрим систему отсчета K' , относительно которой первая частица покоится. Будем предполагать, что ось x' системы K' совпадает с осью x системы K , а ось y' параллельна оси y . Найдем скорость второй частицы v'_2 в системе K' (эта скорость является искомой относительной скоростью движения второй частицы $v_{\text{отн}} = v'_2$ по отношению к первой частице).

При выбранном направлении осей координат компоненты скорости v_x , v_y , v_z связаны с компонентами скорости частицы v'_x , v'_y , v'_z соотношениями:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + v v'_x / c^2}; \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + v v'_y / c^2}; \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + v v'_z / c^2}.$$

Учитывая эти соотношения, компоненты второй частицы в системе K' найдем по формулам: $v'_{2x} = -v_1$; $v'_{2y} = v_2 \sqrt{1 - (v_1/c)^2}$.

В результате для модуля относительной скорости получаем выражение

$$v_{\text{отн}} = v'_2 = \sqrt{v'^2_{2x} + v'^2_{2y}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - (v_1 v_2 / c)^2}.$$

Подставив числовые значения, получим $v_{\text{отн}} = 0,412c$.

ТЕСТ

Вопросы

7.1. Системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной по величине и направлению скоростью, называются ... системами отсчета.

7.2. В классической механике закон сложения скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$, где ... – скорость ...

(установить соответствие)

\mathbf{v}	тела относительно неподвижной системы
\mathbf{v}	тела относительно подвижной системы
\mathbf{v}'	подвижной системы относительно неподвижной
	тела относительно инерциальной системы отсчета (ИОС)
	тела относительно неинерциальной системы отсчета (НИСО)

7.3. Релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25 %, его скорость ...

1) $2 \cdot 10^8$ м/с; 2) $200 \cdot 10^6$ м/с; 3) 0,2 Гм/с; 4) $2 \cdot 10^6$ км/с; 5) $20 \cdot 10^{10}$ мм/с.

7.4. При движении тела с релятивистской скоростью его продольный размер ... в $\sqrt{1 - (v^2 / c^2)}$ раза.

7.5. При уменьшении продольных размеров движущегося тела в 2 раза его масса увеличивается в ... раз(а).

7.6. Кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя при скорости ... $\cdot 10^8$ м/с.

1) 2,60; 2) 1,16; 3) 3,48; 4) 3,00; 5) 2,00.

7.7. Энергия покоя частицы $E_0 = m_0 \cdot \dots^2$.

7.8. Тело движется со скоростью 0,8с, его плотность при этом ... раза.

1) увеличивается в 2,8; 2) уменьшается в 2,8;

3) увеличивается в 1,7; 4) изменяется в 0,6;

5) изменяется в 0,4.

7.9. Принцип относительности Галилея справедлив для ... явлений.

1) физических; 2) механических;

3) электродинамических; 4) оптических;

5) гравитационных.

7.10. При плавлении 1 кг льда его масса изменяется на ... $\cdot 10^{-12}$ кг ($\lambda_{\text{льда}} = 330$ кДж/кг).

1) 0,3; 2) 3,7; 3) 11,0; 4) 36,7; 5) 0,1.

7.11. В классической механике одинаковы во всех инерциальных системах ...

1) масса; 2) ускорение; 3) сила;
4) время; 5) скорость; 6) координаты.

7.12. В классической механике ускорение материальной точки ... инерциальной системы отсчета.

1) не зависит от выбора; 2) зависит от выбора;
3) зависит от скорости; 4) зависит от ускорения.

7.13. Согласно принципу относительности Галилея ускорение материальной точки ...

1) зависит от выбора ИСО; 2) одинаково во всех ИСО;
3) одинаково во всех НИСО; 4) зависит от скорости ИСО;
5) зависит от массы точки.

7.14. Относительные величины классической механики:

1. Координата. 2. Скорость. 3. Ускорение.
4. Масса. 5. Время.

7.15. Абсолютные величины релятивистской механики:

1. Скорость света. 2. Интервал. 3. Масса. 4. Время. 5. Размеры тел.

7.16. Релятивистская связь энергии и импульса тела: $E = E_0^2 + p^2 c^2$, где E_0 – энергия ...

7.17. Длина метрового стержня, движущегося со скоростью 0,6с, равна ... метров.

7.18. Выражение для плотности тела, движущегося со скоростью v , сравнимой со скоростью света c ($\beta = v / c$):

$$1. \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad 2. \rho = \rho_0 \cdot \sqrt{1-\beta^2};$$

$$3. \rho = \frac{\rho_0}{1-\beta^2}; \quad 4. \rho = \rho_0 \cdot (1-\beta^2).$$

7.19. Электрон проходит разность потенциалов 1 МВ, его масса увеличивается в ... раза ($m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг).

7.20. Согласуется ли с принципом СТО движение шара радиусом $R = 1$ м, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 3,3 \cdot 10^8$ рад/с.

1. Не согласуется, т. к. линейная скорость точек шара $v \ll c$.
2. Не согласуется, т. к. линейная скорость экваториальных точек шара ($v = 3,3 \cdot 10^8$ м/с) превышает скорость света.
3. Согласуется, т. к. линейная скорость точек шара равна скорости света.

4. *Согласуется, т. к. линейная скорость точек шара приближается к скорости света.*

5. *Согласуется, т. к. линейная скорость экваториальных точек превышает скорость света.*

7.21. *Согласуется ли с принципом СТО представление об электро-не, движущемся вокруг своей оси однородном шарике ($R = 2,82 \cdot 10^{-15}$ м), обладающем собственным моментом импульса $L = 0,913 \cdot 10^{-34}$ кг·м²/с?*

1. *Не согласуется, т. к. скорость на «экваторе» шарика превышала бы скорость света почти в 300 раз.*

2. *Согласуется, т. к. скорость на «экваторе» шарика приближается к скорости света.*

3. *Не согласуется, т. к. скорость на «экваторе» шарика $v \ll c$.*

4. *Не согласуется, т. к. скорость на «экваторе» шарика была бы равна $0,89 \cdot 10^{11}$ м/с.*

5. *Согласуется, т. к. скорость шарика на экваторе превышает скорость света.*

7.22. *Установить последовательность скоростей релятивистской частицы в порядке убывания промежутка времени между событиями:*

1. $2,8 \cdot 10^8$ м/с. 2. $2,1 \cdot 10^8$ м/с. 3. $0,8c$. 4. $0,4c$. 5. $0,5c$.

7.23. *Установить последовательность скоростей релятивистской частицы в порядке возрастания масс:*

1. $2,8 \cdot 10^8$ м/с. 2. $2,2 \cdot 10^8$ м/с. 3. $0,85c$. 4. $0,4c$. 5. $0,5c$.

7.24. *Согласно специальной теории относительности, равноправны ... системы отсчета.*

7.25. *Разность между полной энергией и энергией покоя релятивистской частицы – это ... энергия.*

7.26. *Физические величины в релятивистской механике, зависящие от скорости движения, это*

1) *координата тела;* 2) *скорость света;* 3) *импульс тела;*

4) *интервал;* 5) *размер тела;* 6) *масса тела.*

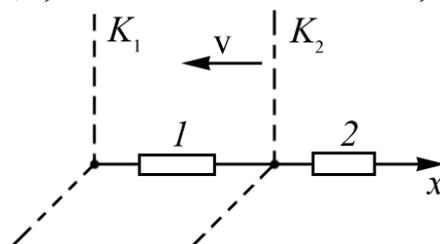
7.27. *Масса неподвижного протона составляет ... от его релятивистской массы при скорости движения $2,4 \cdot 10^8$ м/с.*

1) 1,67; 2) 0,46; 3) 0,6; 4) 0,67; 5) 0,7

7.28. *Время жизни релятивистской частицы, отсчитанное по часам, движущимся вместе с ней, называется ...*

7.29. *Стержень 1 покоится в системе отсчета K_1 , стержень 2 – в системе K_2 . Системы движутся друг относительно друга. Какой стержень короче: а) в системе K_1 ; б) в системе K_2 ?*

1. а) 2; б) 1. 2. а) 1; б) 1. 3. а) 2; б) 2. 4. а) 1; б) 2.



Задачи

7.1. При какой относительной скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25 %?

7.2. Какую скорость должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в два раза?

7.3. Мезоны космических лучей достигают поверхности Земли с самыми разнообразными скоростями. Найти релятивистское сокращение размеров мезона, имеющего скорость, равную 95 % скорости света.

7.4. Во сколько раз увеличивается продолжительность существования нестабильной частицы, если она начинает двигаться со скоростью, составляющей 99 % скорости света?

7.5. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95 % скорости света. Какой промежуток времени по часам земного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

7.6. На сколько увеличится масса α -частицы при ускорении ее от начальной скорости, равной нулю, до скорости, равной 0,9 скорости света?

7.7. При какой скорости масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя?

7.8. До какой энергии можно ускорить частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы не должно превышать 5 %? Задачу решить: 1) для электронов; 2) протонов; 3) дейтронов.

7.9. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его скорость составляла 95 % скорости света?

7.10. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его продольные размеры стали меньше в два раза?

7.11. Найти скорость мезона, если его полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.

7.12. Какую долю скорости света должна составлять скорость частицы, чтобы ее кинетическая энергия была равна ее энергии покоя?

7.13. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией в 10 000 МэВ ($1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$). Какую долю скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

7.14. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией в 10 000 МэВ. Чему равно релятивистское сокращение размеров протона?

7.15. Электроны, вылетающие из циклотрона, обладают кинетической энергией 0,67 МэВ. Какую долю скорости света составляет скорость этих электронов?

7.16. Масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя. Найти кинетическую энергию этого электрона.

7.17. Какому изменению массы соответствует изменение энергии на одну калорию (1 кал = 4,16 Дж)?

7.18. Найти изменение энергии, соответствующее изменению массы на одну атомную единицу.

7.19. Найти изменение энергии, соответствующее изменению массы на величину массы покоя электрона.

7.20. При делении ядра урана ${}_{92}\text{U}^{235}$ освобождается энергия, равная приблизительно 200 МэВ. Найти изменение массы при делении одного киломоля урана.

7.21. Солнце излучает ежеминутно энергию, равную $6,5 \cdot 10^{21}$ кВт·ч. Считая излучение Солнца постоянным, найти, за какое время масса Солнца уменьшится в два раза.

7.22. Определить импульс p и кинетическую энергию E_K электрона, движущегося со скоростью $v = 0,9c$.

7.23. Определить импульс электрона, обладающего кинетической энергией $E_K = 5$ МэВ.

7.24. С какой скоростью должна двигаться частица, чтобы ее масса утроилась?

7.25. Найти собственное время жизни частицы, если ее скорость отличается от скорости света в вакууме на 0,2 %, а расстояние, пролетаемое до распада, равно примерно 300 км.

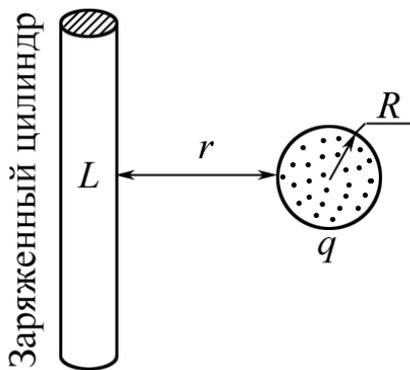
ЗАНЯТИЕ 8

ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ГАУССА

Теория

В физике изучаются не реальные тела, а их модели. В механике, например, изучали законы движения материальной точки и твердого тела. В электростатике (физике неподвижных зарядов) изучаются точечные и распределенные заряды.

Точечным зарядом называют заряженное тело, форма и размеры которого несущественны в данной задаче. Если размерами заряженного тела нельзя пренебречь (они сравнимы с расстоянием между заряженными телами), то такой заряд называется **распределенным**.



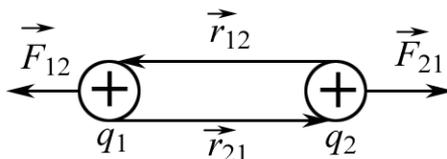
Например, если длина заряженного цилиндра $L = 1$ м, а расстояние до заряда q $r = 50$ см, то такой заряд называют распределенным, а заряд шарика q , радиус которого $R = 5$ мм, точечным.

Два точечных неподвижных заряда взаимодействуют с силой, которая по закону Кулона равна

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12},$$

(в вакууме, система СИ).

Направлена сила \vec{F}_{12} по линии, соединяющей центры зарядов.



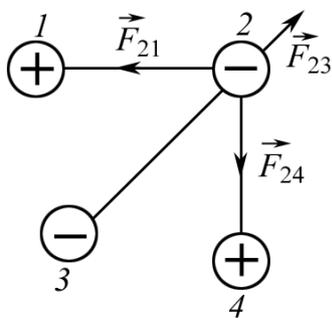
Модуль силы

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

здесь r – расстояние между центрами зарядов; ϵ_0 – электрическая постоянная; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/Н·м², $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Если взаимодействуют не два, а три и более зарядов, то результирующую силу, действующую на каждый заряд, находим как геометрическую сумму сил, действующих на него со стороны других зарядов (принцип суперпозиции).

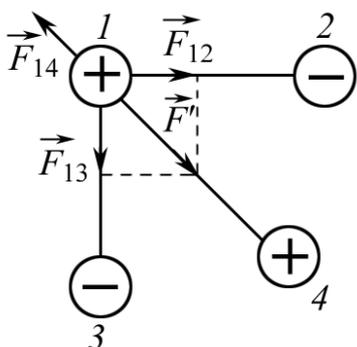
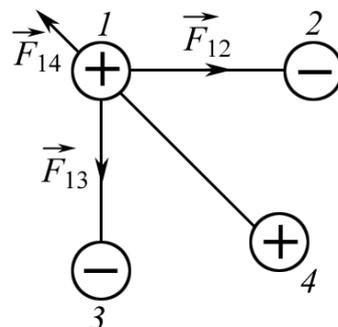


Примеры:

1. Показать силы, действующие на заряд q_2 , то есть показать силы \vec{F}_{21} , \vec{F}_{23} и \vec{F}_{24} , направление которых зависит от знаков зарядов.

2. Показать силы, действующие на заряд q_1 . Для тренировки покажите силы, действующие на заряды q_3 и q_4 (на бумаге).

Заметим, что число сил всегда будет $(n - 1)$. Теперь найдем равнодействующую \vec{F} , действующую на заряд. Сначала сложим векторно силы \vec{F}_{13} и \vec{F}_{12} и получим силу \vec{F}' . Величина и направление равнодействующей силы \vec{F} будет зависеть от соотношения сил \vec{F}' и \vec{F}_{14} . Если они

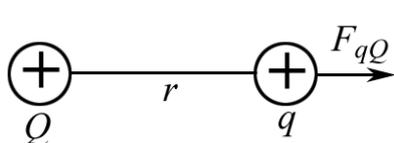


равны, то $\vec{F} = 0$, если $\vec{F}_{14} > \vec{F}'$, то \vec{F} направлена, как и \vec{F}_{14} . Если $\vec{F}' > \vec{F}_{14}$, то \vec{F} направлена, как \vec{F}' . Модули сил \vec{F}_{12} , \vec{F}_{13} и \vec{F}_{14} находим по закону Кулона, а $|\vec{F}'|$ – по теореме Пифагора, если треугольники прямоугольные, и по теореме косинусов, если непрямоугольные.

Напряженность поля

Окружающее заряд пространство, в каждой точке которого на другой заряд действует сила, называется **электрическим полем**. Количественной характеристикой поля является вектор напряженности \vec{E} . Этот вектор численно равен отношению силы, действующей в данной точке на помещенный в эту точку положительный заряд, к величине заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}; [E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$



Если поле создает точечный заряд Q , а заряд q находится на расстоянии r от него, то по закону Кулона

$$F_{qQ} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

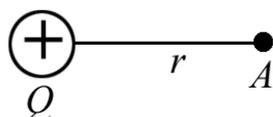
а напряженность E в точке на расстоянии r от заряда Q (это точка, где располагается заряд q) будет равна

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

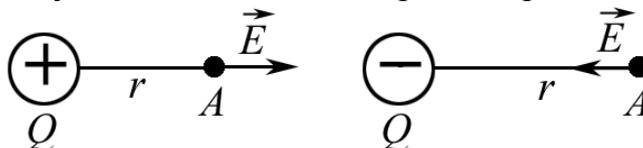
(в вакууме, система СИ).

Примеры:

1. Найти направление вектора напряженности в точке A на расстоянии r от заряда Q .



Чтобы найти направление вектора напряженности в точке A , надо мысленно поместить в эту точку положительный заряд и найти направление силы, действующей на него со стороны заряда, создающего поле.

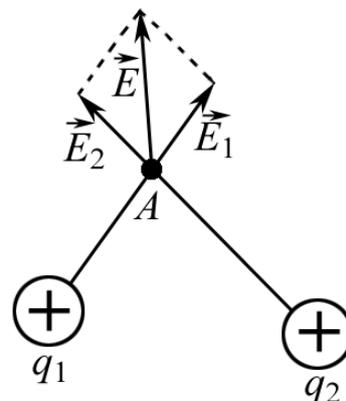


Если Вы хорошо усвоили нахождение направления сил, то Вам не составит труда находить направление напряженности поля в данной точке.

Если электрическое поле создается системой зарядов, то вектор напряженности суммарного поля равен геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом в отдельности. **Это принцип суперпозиции (или наложения) полей.**

2. Найти направление напряженности поля \vec{E} , создаваемого зарядами $+q_1$ и $+q_2$, в точке A .

Для графического изображения полей используют силовые линии вектора \vec{E} – линии, касательные в каждой точке к которым совпадают с направлением вектора \vec{E} в этой точке. Если вектор напряженности \vec{E} одинаков по величине и направлению во всех точках поля, такое поле называется однородным. В зависимо-



сти от количества свободных зарядов тела подразделяются на проводники (имеются свободные заряды), диэлектрики (свободные заряды отсутствуют, но есть связанные заряды), полупроводники (занимают промежуточное положение между ними).

Если диэлектрик поместить в электрическое поле, то на краях диэлектрика под действием поля появятся нескомпенсированные связанные заряды, которые создают собственное поле, направленное противоположно внешнему полю.

Суммарное поле в диэлектрике \vec{E} будет меньше, чем \vec{E}_0 :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_{\text{диэл}}$$

Отношение $E_0/E = \epsilon$ было названо **относительной диэлектрической проницаемостью среды**. Таким образом, напряженность поля, которую создает заряд в данной точке в диэлектрике, уменьшается в ϵ по сравнению с вакуумом, т. е.

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

Сила взаимодействия зарядов Q и q в диэлектрике по закону Кулона равна

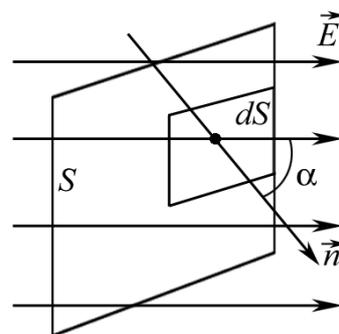
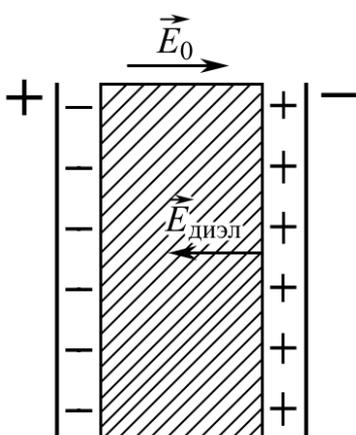
$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

Диэлектрические проницаемости диэлектриков (данные, необходимые для решения задач) указаны в справочных данных.

Теорема Гаусса

Как находить напряженность поля, если заряд не точечный, а распределенный? Для нахождения напряженности поля распределенного заряда необходимо применить **теорему Гаусса**. При этом следует помнить, что теорема Гаусса позволяет сравнительно просто рассчитывать напряженность поля при симметричных распределениях зарядов. В общем случае несимметрично распределенных зарядов применяют дифференциально-интегральный метод и принцип суперпозиции.

Сначала необходимо выяснить, что называется потоком вектора напряженности (или любого другого вектора). Имеем поверхность S ,



которую пересекают силовые линии вектора \vec{E} , и элементарную площадку dS , к которой восстановлена единичная нормаль \vec{n} .

Элементарным потоком dN_E называется величина

$$dN_E = E dS \cos \alpha = E_n dS.$$

Здесь E_n – проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} . Поток вектора напряженности N_E через поверхность S найдем как

$$N_E = \int_S E_n dS.$$

Теорема Гаусса:

Поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность численно равен алгебраической сумме находящихся внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 (в вакууме), то есть

$$N_E = \frac{\sum q}{\epsilon_0}; \quad \oint_S E_n dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0}.$$

Необходимо также знать характеристики распределенных зарядов:

1) линейная плотность заряда Q на длине l

$$\tau = \frac{dQ}{dl},$$

при равномерном распределении заряда

$$\tau = \frac{Q}{l} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right];$$

2) поверхностная плотность заряда Q на поверхности площадью S

$$\sigma = \frac{dQ}{dS},$$

при равномерном распределении заряда

$$\sigma = \frac{Q}{S} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right];$$

3) объемная плотность заряда Q в объеме V

$$\rho = \frac{dQ}{dV},$$

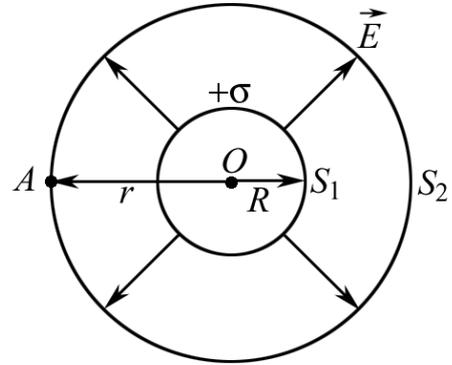
при равномерном распределении заряда

$$\rho = \frac{Q}{V} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right].$$

Примеры:

1. Найти напряженность поля равномерно заряженной сферы радиусом R в точке A на расстоянии r от центра сферы ($r > R$). Поверхностная плотность заряда на сфере равна σ . Векторы напряженности поля, симметричного относительно центра сферы O распределения заряда,

направлены радиально от центра. Чтобы воспользоваться теоремой Гаусса, надо выбрать вспомогательную (гауссову) поверхность. Чтобы решение было простым, желательно, чтобы вектор \vec{E} в каждой точке вспомогательной поверхности был ей перпендикулярен и имел одинаковые значения. Итак, в нашем случае гауссова поверхность – это сфера радиусом r , расположенная так, чтобы исследуемая точка лежала на ее поверхности. Теперь мы имеем вспомогательную замкнутую поверхность – сферу S_2 радиуса r , которая охватывает заряженную сферу S_1 радиусом R . По теореме Гаусса поток вектора \vec{E} через вспомогательную сферу S_2 будет равен



$$N_E = \frac{\sum q}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Суммарный заряд на поверхности сферы

$$q = \sigma S_1 = 4\pi\sigma R^2.$$

Из определения потока

$$N_E = \int_S E_n dS.$$

Величина напряженности в каждой точке вспомогательной сферы S_2 одинакова, обозначим ее E и вынесем за знак интеграла, тогда

$$N_E = E \int_S ds = E \cdot 4\pi r^2. \quad (2)$$

Приравняв (1) и (2), получим

$$\frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2.$$

Отсюда

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad (\text{в вакууме}).$$

Мы получили напряженность поля заряженной с поверхностной плотностью σ сферы радиусом R в точке на расстоянии r от центра сферы.

Поскольку заряд сферы

$$q = 4\pi\sigma R^2,$$

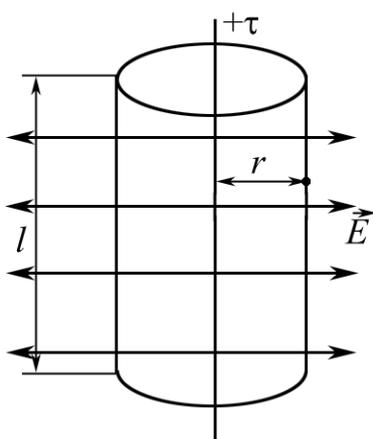
то после умножения и деления на 4π получим

$$E = \frac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{в вакууме}),$$

здесь q – заряд, распределенный по поверхности сферы (сравните с напряженностью поля точечного заряда).

2. Найти напряженность поля в точке на расстоянии r от равномерно заряженной с линейной плотностью τ бесконечно длинной нити.

Для нахождения напряженности поля заряженной бесконечной нити или тонкого цилиндра целесообразно взять в качестве вспомогательной поверхности цилиндр длиной l , охватывающий нить. Исследуемая точка должна лежать на поверхности этого цилиндра. Найдем поток вектора \vec{E} через поверхность вспомогательного цилиндра.



Как следует из рисунка, поток вектора \vec{E} через торцы цилиндра равен 0 (силовые линии скользят вдоль поверхности торцов). Следовательно, надо найти поток только через боковую поверхность площадью $S = 2\pi r l$. Напряженность поля в каждой точке боковой поверхности одинакова по величине, обозначим ее через E и вынесем за знак интеграла:

$$N_E = \oint_S dS = E \cdot 2\pi r l.$$

По теореме Гаусса

$$N_L = \frac{\sum q}{\epsilon_0}; \quad \sum q = \tau l.$$

Отсюда

$$E = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r} \quad (\text{в вакууме}).$$

Это выражение для напряженности поля, создаваемого заряженной с линейной плотностью τ бесконечно длинной нитью на расстоянии r от нее. Аналогично можно получить выражение для напряженности поля, создаваемого бесконечной заряженной с поверхностной плотностью σ плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Историческая справка

После того как Гальвани, профессор анатомии в Болонье, в 1780 г. открыл, что лапки мертвой лягушки двигаются, если присоединить к ним источник электричества, начался настоящий бум исследований. В качестве источника электричества использовались лейденская банка и электрофорная машина. При большом стечении публики 700 парижских

монахов, взявшись за руки, испытали электрический удар, когда один из них прикоснулся к голове лейденской банки. Все 700 монахов, сведенные общей судорогой, вскрикнули от ужаса. Публика наблюдала со страхом и интересом. Сто восемьдесят королевских мушкетеров тоже провели перед королем подобный опыт в Версале. Даже гвардейская дисциплина оказалась бессильной перед электрическим ударом. «Было очень курьезно видеть разнообразие жестов и слышать мгновенный вскрик, исторгаемый неожиданностью у большей части получающих удар», – писал очевидец. Доктор Ура из Глазго «оживлял» повешенного. Один электрод он присоединял к пятке трупа, другой – к ресничному нерву. Лицо повешенного внезапно оживо, он приоткрыл рот, глаза его стали оглядывать окружающих. Ужас сковал присутствующих... Почти как современные фильмы ужасов, не правда ли?

Подсказка

Конечно, Вы помните, что силовые линии электрического поля исходят из положительного заряда и входят в отрицательный (рис. 8.1 и 8.2). Помня это, можно всегда изобразить на рисунке поле плоскости, нити (рис. 8.3).

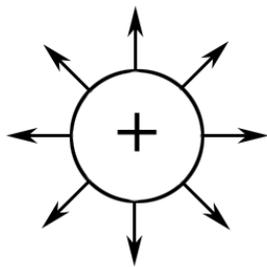


Рис. 8.1

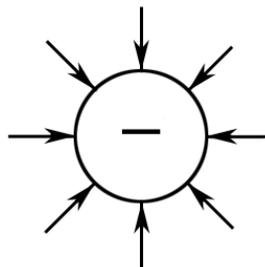


Рис. 8.2

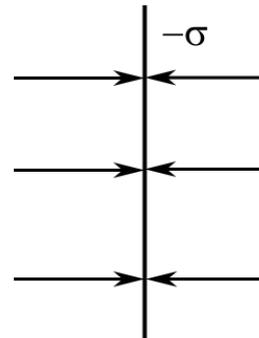


Рис. 8.3

1. Найти силу, действующую на точечный заряд, помещенный на расстоянии r от бесконечной заряженной с линейной плотностью τ нити.

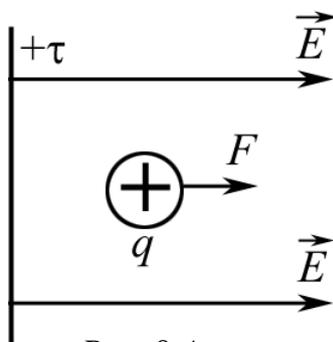


Рис. 8.4

Решение

Вы уже догадались, что закон Кулона применить нельзя, так как заряд на нити распределенный (рис. 8.4). К тому же нить бесконечна.

Зато силу \vec{F} можно найти как произведение:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Известно, что напряженность на расстоянии r от заряженной нити равна

$$E = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r}.$$

Тогда

$$F = q \cdot \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r}.$$

Аналогично решается задача, если заряд находится вблизи заряженной плоскости.

2. Две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 несут соответственно заряды Q_1 и Q_2 . Найти напряженность поля E в точках, отстоящих от центра сфер на расстоянии r_1 (внутри первой сферы), r_2 (между сферами) и r_3 (за второй сферой).

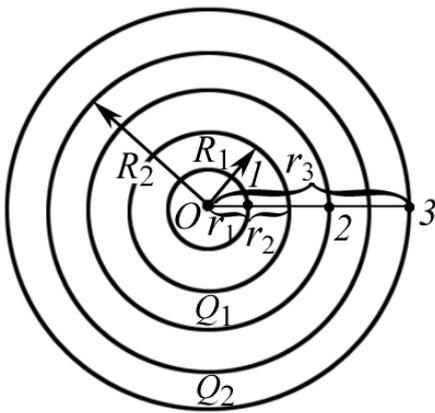


Рис. 8.5

Решение

Проведем вспомогательные сферические поверхности радиусами r_1 , r_2 и r_3 и воспользуемся теоремой Гаусса для нахождения напряженностей в точках 1, 2, 3.

Случай 1

Сфера радиусом r_1 заряда не охватывает, т. е.

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0.$$

Напряженность E_1 одинакова во всех точках сферы S_1 , поэтому ее можно вынести за знак интеграла ($E_0 = E_1$):

$$E_1 \oint_{S_1} dS = 0.$$

Так как площадь сферы не может быть равна 0, то $E_1 = 0$.

Случай 2

Внутри сферы S_2 радиусом r_2 находится заряд Q_1 . Согласно теореме Гаусса

$$\oint_{S_2} E_2 dS = Q_1 / \epsilon_0.$$

Поскольку $E_2 = E_n = \text{const}$, то

$$E_2 \oint_{S_2} dS = Q_1 / \epsilon_0, \text{ или } E_2 S_2 = Q_1 / \epsilon_0.$$

Отсюда

$$E_2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S_2} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r_2^2}; \quad S_2 = 4\pi r_2^2.$$

Случай 3

Внутри сферы S_3 радиусом r_3 находится суммарный заряд $Q_1 + Q_2$. Для этой сферы теорема Гаусса имеет вид

$$\oint_{S_3} E_n dS = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0}, \quad \text{т. е.} \quad E_3 S_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0}.$$

Для этого случая величина E_3 может быть найдена по формуле

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}.$$

Знаки зарядов следует учитывать.

3. Два точечных положительных заряда $Q_1 = 2Q$ и $Q_2 = Q$ находятся на расстоянии r друг от друга. Найти положение точки на прямой, проходящей через эти заряды, напряженность поля E в которой равна 0 (рис. 7.6). (Обратите внимание, что в этом примере оба заряда положительные, а в тестовой задаче – один положительный, а второй отрицательный).

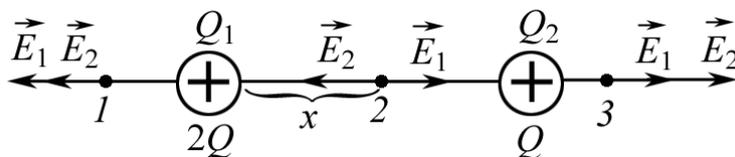


Рис. 8.6

Решение

Выделим три области, в которых необходимо исследовать точки 1, 2, 3 и найти напряженность. Покажем направления напряженностей, создаваемых в этих точках зарядами Q_1 и Q_2 .

В точках 1 и 3 направления напряженностей E_1 и E_2 совпадают, поскольку оба заряда отталкивают положительный заряд, помещенный нами мысленно в каждую из рассматриваемых точек. Следовательно, напряженность суммарного поля E , равная сумме напряженностей E_1 и E_2 , не может быть равна 0 в этих точках.

Остается исследовать точку 2. В этой точке направления напряженностей E_1 и E_2 противоположны, следовательно, возможна ситуация $E_1 = E_2$. Нужно узнать, на каком расстоянии от зарядов Q_1 и Q_2 будет находиться данная точка.

Обозначим расстояние от точки 2 до заряда Q_1 через x . Воспользовавшись формулой для вычисления напряженности поля, создаваемого точечным зарядом, запишем:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 x^2}; \quad E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (r-x)^2}.$$

Поскольку $E_1 = E_2$, то

$$\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r-x)^2}.$$

После сокращения получим квадратное уравнение: $x^2 - 4rx + 2r^2 = 0$.

Найдем его корни:

$$x_{12} = \frac{4r \pm \sqrt{16r^2 - 8r^2}}{2};$$

$x_1 = r(2 + \sqrt{2}) = 3,4r$ – этот корень отбросим, поскольку он не подходит по условию задачи (точка 2 должна находиться между зарядами, то есть x должно быть меньше r). Остается второй корень, который является решением задачи: $x_2 = r(2 - \sqrt{2})$.

На таком расстоянии от заряда Q находится точка, в которой $E = 0$.

ТЕСТ

Вопросы

8.1. Найдите правильное продолжение фразы: *точечным зарядом называется ...*

1) *заряженное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи;*

2) *заряженное тело, заряд которого мал по сравнению с другими зарядами;*

3) *заряженное тело, заряд которого пренебрежимо мал по сравнению с размерами.*

8.2. Найдите правильное продолжение фразы: *закон Кулона справедлив в случае взаимодействия ...*

1) *любых заряженных тел;*

2) *точечных неподвижных зарядов;*

3) *распределенных зарядов;*

4) *зарядов, находящихся на малом расстоянии.*

8.3. Каков знак заряда q_2 (рис. 8.7)?

1. *Только положительный.*

2. *Только отрицательный.*

3. *Может быть как положительным, так и отрицательным.*

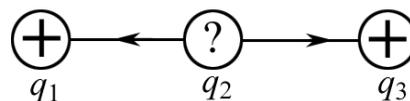


Рис. 8.7

8.4. Каков знак заряда q_2 (рис. 8.8)?

1. *Только отрицательный.*

2. *Может быть как положительным, так и отрицательным.*

3. *Только положительный.*

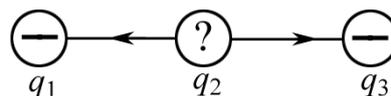


Рис. 8.8

8.5. Каков знак заряда q_3 (рис. 8.9)?

1. *Только положительный.*

2. *Только отрицательный.*

3. *Может быть как положительным, так и отрицательным.*

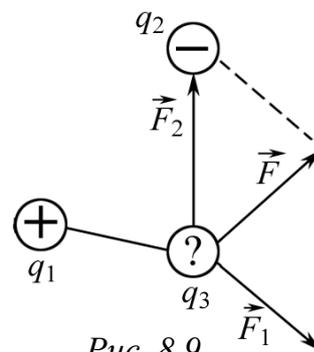


Рис. 8.9

8.6. Как изменится напряженность поля точечного заряда Q , если его опустить в керосин, а расстояние до точки наблюдения оставить неизменным?

1. *Уменьшится в 2 раза.*

2. *Увеличится в 2 раза.*

3. *Уменьшится в 4 раза.*

4. *Не изменится.*

8.7. Как изменится напряженность поля точечного заряда Q , если его опустить в керосин, а расстояние до точки наблюдения удвоить?

1. Уменьшится в 4 раза.
2. Увеличится в 4 раза.
3. Уменьшится в 8 раз.
4. Не изменится.

8.8. Как изменится сила взаимодействия двух точечных зарядов, если их опустить в масло, а расстояние между ними уменьшить в 2 раза?

1. Уменьшится в 0,8 раза.
2. Увеличится в 2 раза.
3. Уменьшится в 2 раза.
4. Не изменится.

8.9. Как изменится сила взаимодействия двух точечных зарядов, если их опустить в масло, а расстояние между ними увеличить в 2 раза?

1. Уменьшится в 10 раз.
2. Увеличится в 10 раз.
3. Уменьшится в 20 раз.
4. Не изменится.

8.10. Поле каких заряженных тел однородно?

1. Поле бесконечно длинного тонкого цилиндра.
2. Поле точечного заряда.
3. Поле заряженной сферы.
4. Поле бесконечной заряженной плоскости.

8.11. Какие величины векторные?

1. Напряженность поля, сила Кулона, поток вектора напряженности.
2. Сила Кулона, заряд, напряженность поля.
3. Напряженность поля, сила Кулона.
4. Поток вектора напряженности, заряд.



Рис. 8.10

Рис. 8.11

8.12. Чему равен поток вектора \vec{E} через поверхность сферы S (рис. 8.10)?

1. $N_E = (q_1 + q_2)/\epsilon_0$.
2. $N_E = 0$.
3. Нельзя определить.
4. $N = \infty$.

8.13. Чему равен поток вектора \vec{E} через поверхность полусферы S (рис. 8.11)?

1. $N_E = \frac{(q_1 + q_2)}{\epsilon_0}$.
2. $N_E = \int_S E_n dS$.
3. $N_E = 0$.
4. $N = \infty$.

8.14. Найдите правильное продолжение фразы: теорему Гаусса целесообразно применить для нахождения напряженностей полей, создаваемых ...

- 1) точечными зарядами;
- 2) симметрично распределенными зарядами;
- 3) любыми заряженными телами;
- 4) несимметрично распределенными зарядами.

8.15. Чему равен поток (N_E) вектора \vec{E} через площадку S , расположенную параллельно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ (рис. 8.12)?

1. $N_E = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$.
2. $N_E = \frac{\sigma S}{2\epsilon_0}$.
3. $N_E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.
4. $N_E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.
5. $N_E = \oint_S E_n dS$.

8.16. В каких точках напряженность поля, создаваемого заряженными плоскостями, наибольшая (рис. 8.13)?

1. В точке 2.
2. В точке 1.
3. В точке 3.
4. В точках 1 и 3.

8.17. В каких точках напряженность поля, создаваемого заряженными плоскостями, равна 0 (рис. 8.14)?

1. В точке 2.
2. В точке 1.
3. В точке 3.
4. В точках 1, 2, 3.

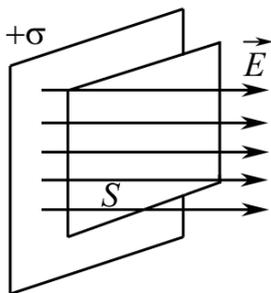


Рис. 8.12

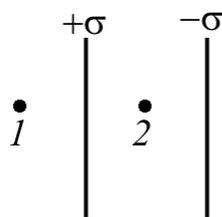


Рис. 8.13

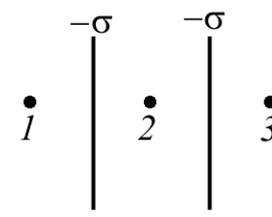


Рис. 8.14

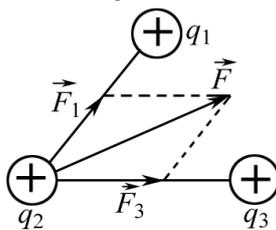
8.18. Найдите правильное продолжение фразы: напряженность поля в данной точке численно равна силе, действующей на ..., помещенный в данную точку поля.

- 1) заряд, равный заряду электрона;
- 2) положительный единичный заряд;
- 3) отрицательный единичный заряд;
- 4) единичный заряд

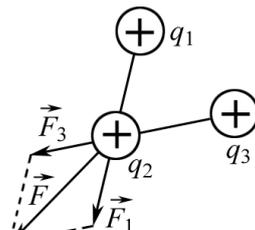
8.19. Найти верное продолжение фразы: напряженность – это ...

- 1) силовая и энергетическая характеристика электрического поля;
- 2) энергетическая характеристика электрического поля;
- 3) силовая характеристика электрического поля;
- 4) скалярная характеристика электрического поля.

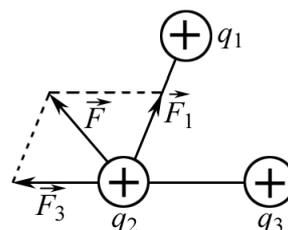
8.20. Найдите рисунок, где правильно показано направление силы \vec{F} , действующей на заряд q_2 .



1.

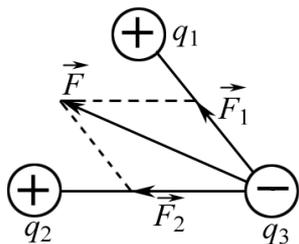


2.

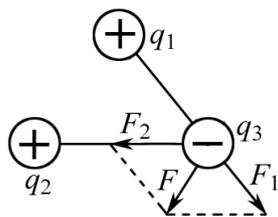


3.

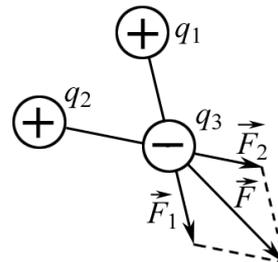
8.21. Найдите рисунок, где правильно показано направление силы \vec{F} , действующей на заряд q_3 .



1.

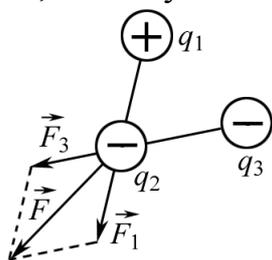


2.

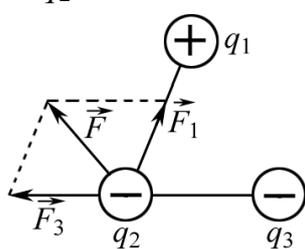


3.

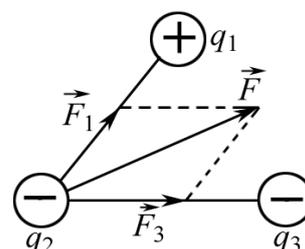
8.22. Найдите рисунок, где правильно показано направление силы \vec{F} , действующей на заряд q_2 .



1.

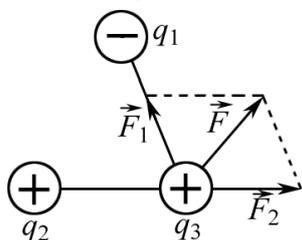


2.

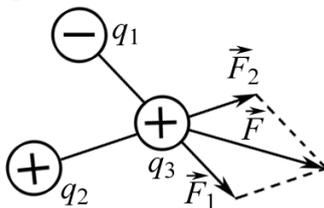


3.

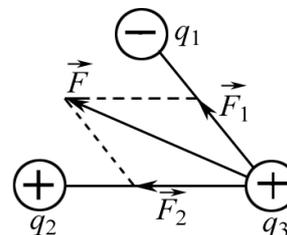
8.23. Найдите рисунок, где правильно показано направление силы \vec{F} , действующей на заряд q_3 .



1.

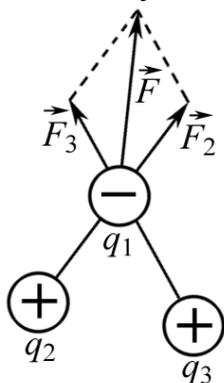


2.

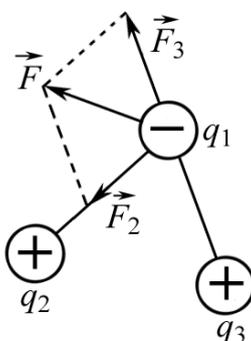


3.

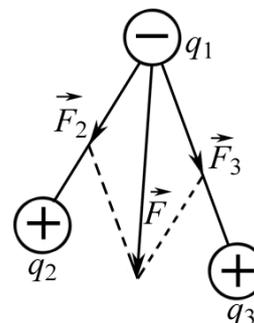
8.24. Найдите рисунок, где правильно показано направление силы \vec{F} , действующей на заряд q_1 .



1.



2.



3.

Задачи

8.1. На расстоянии $r = 15$ см от тонкой бесконечно длинной заряженной нити находится заряд $q = 6 \cdot 10^{-8}$ Кл. Найти модуль силы, действующей на заряд q со стороны нити, если линейная плотность заряда на нити равна $\tau = 8 \cdot 10^{-6}$ Кл/м (рис. 8.15).

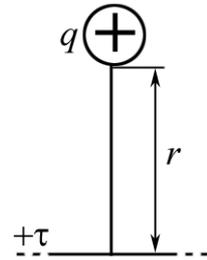


Рис. 8.15

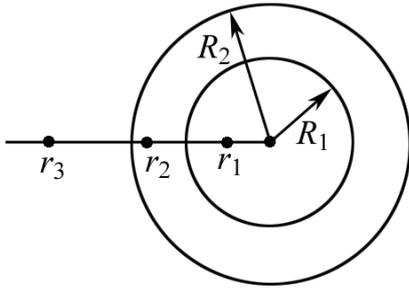


Рис. 8.16

8.2. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 0,1$ м и $R_2 = 0,2$ м (рис. 7.16) несут соответственно заряды $Q_1 = 10 \cdot 10^{-9}$ Кл и $Q_2 = 10 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найти напряженность поля E по модулю в точках, отстоящих от центра сфер на расстояния $r_1 = 0,05$ м, $r_2 = 0,15$ м и $r_3 = 0,25$ м.

8.3. Электрическое поле (рис. 8.17) создано двумя точечными зарядами $Q_1 = 10$ нКл и $Q_2 = 8$ нКл, находящимися на расстоянии $r = 10$ см друг от друга. Определить напряженность поля E в точке, удаленной от первого заряда на расстояние $r_1 = 10$ см и второго на $r_1 = 5$ см. Заряды оба положительные.

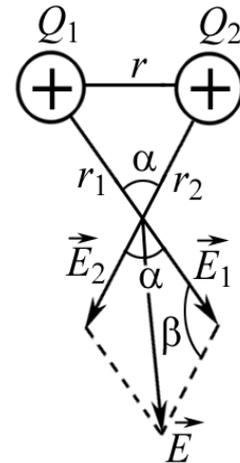


Рис. 8.17

8.4. Два точечных заряда $Q_1 = 2Q$ и $Q_2 = -Q$ находятся на расстоянии $r = 12$ см друг от друга. Найти положение точки относительно заряда Q_2 на прямой, соединяющей эти заряды, напряженность поля E в которой равна 0 (рис. 8.18).

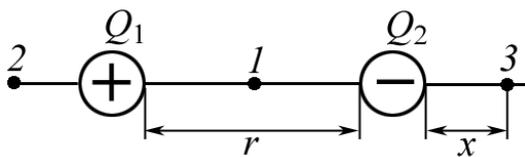


Рис. 8.18

8.5. Определить поток N_E вектора напряженности электростатического поля через сферическую поверхность, охватывающую точечные заряды $Q_1 = 5$ нКл и $Q_2 = -2$ нКл

8.6. Два точечных заряда $Q_1 = 4$ нКл и $Q_2 = -2$ нКл находятся друг от друга на расстоянии 60 см. Определить напряженность E поля в точке, лежащей посередине между зарядами.

8.7. Два точечных заряда, находясь в воздухе ($\epsilon = 1$) на расстоянии $r_1 = 20$ см друг от друга, взаимодействуют с некоторой силой. На каком расстоянии r_2 нужно поместить эти заряды в масле, чтобы получить ту же силу взаимодействия?

8.8. Найти напряженность E электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами $Q_1 = 8$ нКл и $Q_2 = -6$ нКл. Расстояние между зарядами $r = 10$ см, $\varepsilon = 1$.

8.9. Вблизи бесконечной заряженной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ мкКл/см² находится точечный заряд $q = 1$ мкКл. Найти силу F , действующую на заряд q .

8.10. Вблизи бесконечной заряженной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 3$ мкКл/см² находится точечный заряд $q = 5$ мкКл. Найти силу F , действующую на заряд q .

8.11. Два шарика массой $m = 1$ г каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити $l = 10$ см. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол $\alpha = 60^\circ$?

8.12. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 1,5$ нКл/см. На продолжении оси стержня на расстоянии $d = 12$ см от его конца находится точечный заряд $Q = 0,2$ мкКл. Определить силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

8.13. Длинная прямая тонкая проволока несет равномерно распределенный заряд. Вычислить линейную плотность τ заряда, если напряженность поля на расстоянии $r = 0,5$ м от проволоки против ее середины $E = 2$ В/см.

8.14. С какой силой, приходящейся на единицу площади, отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяженные плоскости с одинаковой поверхностной плотностью заряда $\sigma = 2$ мкКл/м²?

8.15. Заряд равномерно распределен на бесконечной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м². Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от нее на расстояние $a = 10$ см.

8.16. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α . Шарика погружаются в масло плотностью $\rho_0 = 8 \cdot 10^2$ кг/м³. Какова диэлектрическая проницаемость ε масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остается неизменным? Плотность материала шариков $\rho = 1,6 \cdot 10^3$ кг/м³.

8.17. На продолжении оси тонкого стержня длиной $l = 0,06$ м равномерно заряженного с линейной плотностью заряда $\tau = 15$ нКл/см на расстоянии $a = 40$ см от конца стержня находится точечный заряд $q = 10$ мкКл. Определить силу, действующую на заряд q .

Указание. Воспользоваться дифференциально-интегральным методом.

8.18. Два точечных электрических заряда $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -2$ нКл находятся на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность поля, создаваемого этими зарядами в точке A , удаленной от заряда q_1 на расстояние $r_1 = 9$ см и от заряда q_2 на $r_2 = 7$ см.

8.19. Какую массу m_e' должен иметь протон для того, чтобы сила электростатического отталкивания двух протонов уравновешивалась силой их гравитационного притяжения?

8.20. Два заряда $9Q$ и $-Q$ закреплены на расстоянии $l = 50$ см друг от друга. Третий заряд Q_1 может перемещаться только вдоль прямой, проходящей через заряды. Определить положение заряда Q_1 , при котором он будет находиться в равновесии. При каком знаке заряда равновесие будет устойчивым?

8.21. Три одинаковых положительных заряда, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ нКл, расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы указанная система зарядов находилась в равновесии?

8.22. Тонкий стержень длиной $l = 20$ см несет равномерно распределенный заряд. На продолжении оси на расстоянии $a = 10$ см от ближнего конца находится точечный заряд $Q_1 = 40$ нКл, который взаимодействует со стержнем с силой $F = 6$ мкН. Определить линейную плотность τ заряда на стержне.

ЗАНЯТИЕ 9

РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛ. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ

Теория

Представим, что заряд q перемещается в поле, которое создается зарядом Q , из точки 1 в точку 2 по траектории, показанной на рис. 9.1 сплошной линией. При перемещении заряда совершается работа. Поскольку сила \vec{F} , действующая на заряд q , является переменной величиной, то для нахождения работы по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2 придется воспользоваться дифференциально-интегральным методом (ДИ). Выделим бесконечно малое перемещение $d\vec{l}$, элементарная работа dA на котором будет равна

$$dA = Fdl \cos \alpha.$$

Как видно из рис. 9.1, $d\cos \alpha$ – проекция перемещения $d\vec{l}$ на направление силы \vec{F} . Она численно равна приращению длины радиус-вектора r , т. е.

$$dl \cos \alpha = dr.$$

Пусть заряды Q и q – точечные, тогда сила (по закону Кулона)

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr.$$

Таким образом,

$$dA = \frac{qQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr. \quad (1)$$

Для нахождения полной работы, совершаемой при перемещении точечного заряда q из точки 1 в точку 2 , следует проинтегрировать выражение (1):

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2)$$

Как видно из выражения (2), работа A_{12} не изменится, если перемещение заряда q будет происходить по другим траекториям (пунктирные

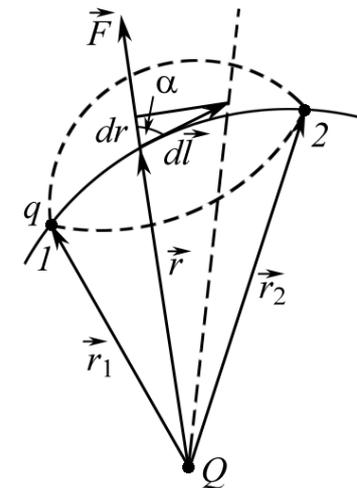


Рис. 9.1

кривые на рис. 9.1), так как она определяется только начальным и конечным положениями перемещаемого заряда q .

Изучая динамику, мы уже встречались с названием таких сил, работа которых не зависит от пути перехода из начального положения в конечное – это **консервативные** (или потенциальные) силы. Американский физик Фейнман сказал, что название этих сил не имеет ничего общего с названием партии консерваторов в Англии. Поле таких сил называется **потенциальным**. Теперь нужно ввести понятие потенциальной энергии.

Если ввести функцию

$$W(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + C, \quad (3)$$

где C – произвольная постоянная, то работа

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Поскольку работа есть мера изменения энергии, то W_1 и W_2 – это энергии в положениях 1 и 2. Если сравнить выражение (3) с формулой для потенциальной энергии двух тяготеющих масс m_1 и m_2 :

$$W_r = G \frac{m_1 m_2}{r},$$

то не останется сомнений в том, что W_1 и W_2 – это взаимные потенциальные энергии зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстояниях r_1 и r_2 . Следовательно,

$$A_{12} = W_{п1} - W_{п2}; \quad W_{п12} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r},$$

если постоянная C выбрана равной нулю. За нулевой уровень потенциальной энергии в разделе физики «Электричество» чаще всего принимают бесконечно удаленную точку (в разделе «Механика» – уровень Земли), то есть $W_{п,\infty} = 0$.

Таким образом,

$$A_{1,\infty} = W_{п1} - W_{п,\infty} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1}. \quad (4)$$

Разделим выражение (4) на q :

$$\frac{A_{1,\infty}}{q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = \varphi_1,$$

здесь ϵ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, окружающего заряд Q .

Величина, численно равная работе, совершаемой силами электрического поля, по перемещению единичного положительного заряда из

данной точки поля на бесконечность, называется **потенциалом** электрического поля. Как следует из вышесказанного, **потенциал** – это энергетическая характеристика поля. Из выражения (4) можно получить:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

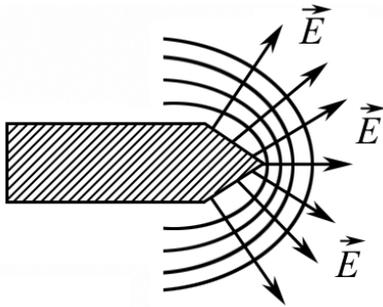


Рис. 9.2

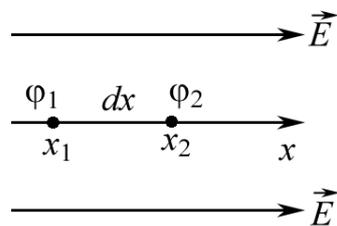
где φ_1 и φ_2 – разность потенциалов. Потенциал и разность потенциалов в системе СИ измеряются в вольтах (В). Для графического изображения распределения потенциала используют систему поверхностей равного потенциала (**эквипотенциальных поверхностей**). Поверхность проводников является эквипотенциальной поверхностью. Линии напряженности \vec{E} всегда нормальны к эквипотенциальным поверхностям. Поэтому, если известно направление силовых линий вектора \vec{E} , можно изобразить эквипотенциальные поверхности. На рис. 9.2 показаны силовые линии вектора \vec{E} и эквипотенциальные поверхности вблизи острия (заряженный проводник с заостренным концом).

Связь напряженности и потенциала

Работа dA по перемещению **единичного** точечного положительного заряда из одной точки в другую вдоль оси x (точки расположены бесконечно близко друг к другу) равна $dA = E_x dx$.

Эта же работа через разность потенциалов выражается как $\varphi_2 - \varphi_1 = -d\varphi$

$$dA = -d\varphi, \text{ т. е. } E_x dx = -d\varphi; \quad E_x = -\frac{d\varphi}{dx}.$$



Аналогично можно получить

$$E_y = -\frac{d\varphi}{dy} \quad \text{и} \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Подчеркнув с помощью символа частной производной, что дифференцирование производится только по координатам, для вектора \vec{E} получим

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей координат. Таким образом, напряженность поля \vec{E} равна градиенту потенциала со знаком минус:

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}}\varphi, \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Знак минус показывает, что вектор \vec{E} направлен в сторону убывания потенциала, а градиент потенциала – в сторону его возрастания (т. е. в противоположную). Используя связь между силовой (вектор \vec{E}) и энергетической (потенциал) характеристиками электрического поля, можно найти разность потенциалов по известной напряженности поля.

Пример

Найти разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ бесконечной плоскости (рис. 9.3).

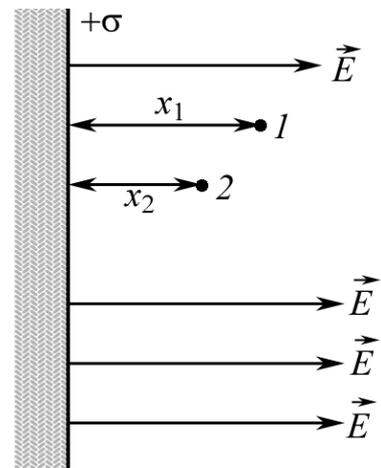


Рис. 9.3

Используя соотношение $-d\varphi = E dx$, для разности $\varphi_1 - \varphi_2$ потенциалов получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx. \quad (5)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ (в вакууме)}. \quad \text{Поэтому} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1).$$

Выражение (5) позволяет найти разность потенциалов полей, создаваемых заряженными длинными цилиндрами или нитями, шарами. Достаточно в выражение (5) подставить соответствующие соотношения для напряженностей полей и проинтегрировать. Если Вы эти соотношения не помните, а они нужны для решения задач, можете посмотреть «Справочник».

Очень интересная ситуация возникает при рассмотрении вопроса о **потенциале** и **напряженности** поля, создаваемого заряженной **сферой** или **шаром**. Как Вы помните из предыдущего занятия, напряженность поля внутри металлического заряженного шара или сферы равна нулю,

а на поверхности $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, где q – заряд, R – радиус сферы. При удалении от поверхности напряженность поля уменьшается пропорционально $1/r^2$, где r – расстояние от центра сферы.

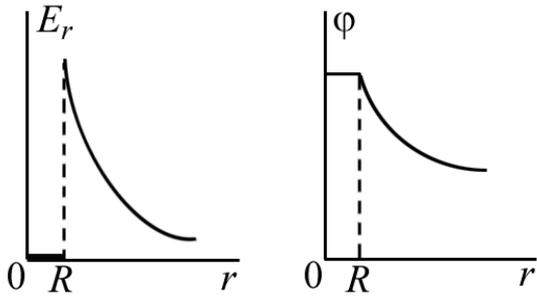


Рис. 9.4

Потенциал внутри шара и сферы постоянен, что следует из связи напряженности и потенциала

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}, \quad E_r = 0, \quad \varphi = \text{const}, \quad \text{и равен}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (\text{то же и на поверхности шара и сферы}).$$

Далее вне поверхности потенциал уменьшается пропорционально $1/r$. Графики зависимости E_r от r и φ от r показаны на рис. 9.4 для $q > 0$.

Далее вне поверхности потенциал уменьшается пропорционально $1/r$. Графики зависимости E_r от r и φ от r показаны на рис. 9.4 для $q > 0$.

Емкость

Если увеличивать заряд уединенного шара (то есть вблизи отсутствуют другие заряженные тела), то увеличивается и его потенциал. Отношение заряда к потенциалу остается постоянным (см. рисунок).

Величина C , равная отношению заряда q уединенного проводника к его потенциалу φ , называется **электрической емкостью** (емкостью, или просто емкостью) этого проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Иногда говорят, что емкость – это способность тел накапливать заряд. Отсюда такое название физической величины. Единица измерения емкости C в системе СИ – фарад (Ф). Используя соотношение (5), можно найти емкость уединенного заряженного шара (или сферы) радиуса R в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ (на поверхности):

$$\varphi = -\int_{\infty}^R E_r dr = -\int_{\infty}^R \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}$$

(знак « \leftarrow » опускаем, поскольку для емкости он не имеет значения).

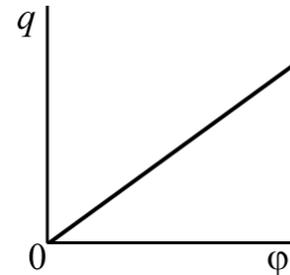
Сравнивая

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R},$$

получим

$$C_{\text{шара}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R.$$

Аналогично для плоского конденсатора можно найти



$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

здесь ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами; S – площадь пластин; d – расстояние между пластинами.

Если электрическое поле создается не одним, а несколькими зарядами, то потенциал суммарного поля в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в данной точке каждым зарядом в отдельности.

Пример:

$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_3}.$$

Примечание: если необходимо выразить линейную плотность заряда τ через поверхностную плотность σ , то для этого выделим элемент цилиндра (если рассматривается заряженный цилиндр радиуса R) длиной l и выразим находящийся на нем заряд Q двумя способами:

$$Q = \sigma \cdot \rho = \sigma \cdot 2\pi R l;$$

$$Q = \tau \cdot l.$$

Приравняем правые части равенств, получим

$$\tau \cdot l = \sigma \cdot 2\pi R l,$$

отсюда

$$\tau = 2\pi R \sigma.$$

Справка

1. Напряженность поля E , создаваемого бесконечно длинным тонким заряженным цилиндром или нитью, на расстоянии r от его оси равна

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

здесь τ – линейная плотность заряда цилиндра.

2. Напряженность поля E , создаваемого заряженным шаром или сферой, на расстоянии r от центра шара равна

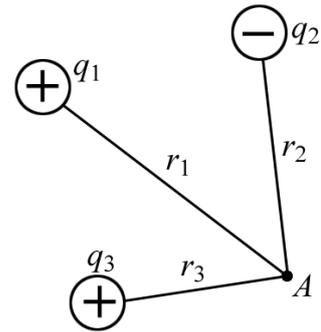
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

здесь q – заряд шара.

3. $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

4. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

5. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

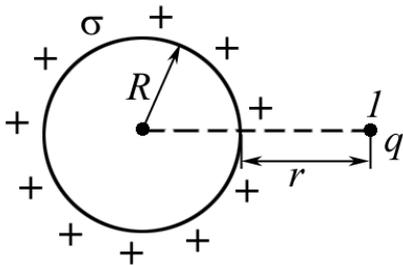


$$6. \int \frac{dx}{x} = \ln|x|.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}.$$

Подсказка

1. Какая работа A совершается при перенесении точечного заряда $q = 20$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 1$ см от поверхности шара радиусом $R = 1$ см с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10$ мкКл/м²? Ответ представить в мкДж, округлить до целого числа.



Решение

Заряд движется и останавливается в точке I . Работа A по перемещению заряда q из точки I в точку 2 находится по известному из теоретической части занятия соотношению:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

здесь φ_1 – потенциал в точке I ; φ_2 – потенциал в точке 2. Поскольку заряд q перемещается из бесконечности в точку I , то $\varphi_2 = \varphi_\infty = 0$, и работа:

$$A = q \cdot \varphi_1.$$

Потенциал, создаваемый заряженной сферой в точке I , определяется так же, как и для точечного заряда:

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r'},$$

здесь Q – заряд на поверхности сферы; r' – расстояние от центра сферы до точки I , т. е. как будто бы заряд располагается в центре сферы: $r = R + r$. Заряд Q на поверхности сферы найдем, зная поверхностную плотность заряда на сфере (заряд единицы площади поверхности):

$$Q = \sigma S; \quad S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2.$$

Таким образом,

$$\varphi_1 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 (R + r)} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon\epsilon_0 (R + r)}.$$

Поскольку среда, окружающая сферу, не указана, то $\epsilon = 1$. Используя вышеприведенные рассуждения, получим, что работа по перемещению заряда равна

$$A = \frac{q\sigma R^2}{\epsilon_0 (R + r)}.$$

Подставив числовые данные, переведя единицы измерения в систему СИ, получим

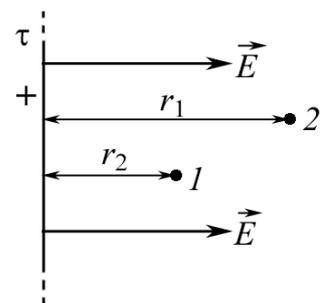
$$A = 113 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 113 \text{ мкДж}.$$

2. Электрическое поле создается бесконечно длинным тонким цилиндром, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 15 \text{ нКл/м}$. Определить разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстояния $r_1 = 1 \text{ см}$ и $r_2 = 2 \text{ см}$ от поверхности цилиндра. Результат представить в единицах СИ и округлить до целого числа.

Решение

Используя теорему Гаусса, получим формулу для вычисления напряженности поля E , создаваемого бесконечным цилиндром на расстоянии r от его оси:

$$E = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r}.$$



Для поля с осевой симметрией связь между напряженностью и потенциалом ($\vec{E} = -\mathbf{grad} \varphi$) запишется в виде

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

или

$$d\varphi = -E dr.$$

Подставив сюда выражение для напряженности поля, получим

$$d\varphi = -\frac{\tau dr}{2\pi \epsilon_0 r}.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем искомую разность потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Знак « \leftarrow » исчез, т. к. мы заменили $\varphi_2 - \varphi_1$ на $\varphi_1 - \varphi_2$.

Мы воспользовались дифференциально-интегральным методом, который очень часто применяется в физике. Таким образом, разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Переведем единицы измерения в систему СИ:

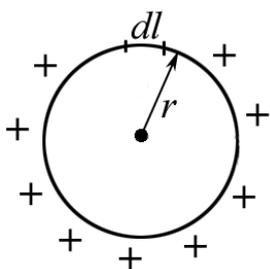
$$\tau = 15 \text{ нКл/м} = 15 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}, r_1 = 1 \text{ см} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}, r_2 = 2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Подставив числовые данные, получим $\varphi_1 - \varphi_2 = 189 \text{ В}$.

3. Кольцо радиусом $r = 5$ см из тонкой проволоки несет равномерно распределенный заряд $Q = 10$ нКл. Определить потенциал φ электростатического поля в центре кольца.

Указание: воспользоваться дифференциально-интегральным методом. Результат представить в кВ (киловольтах).

Решение



Поскольку кольцо мы не можем принять за точечный заряд, нам следует воспользоваться дифференциально-интегральным методом, т. е. найти сначала потенциал $d\varphi$, создаваемый в центре кольца бесконечно малым элементом dl , а затем, суммируя вклады всех элементов dl кольца, определить потенциал φ .

Заряд элемента dl

$$dQ = \tau \cdot dl,$$

здесь τ – поверхностная плотность заряда кольца, равная

$$\tau = \frac{Q}{2\pi r}, \text{ т. е. } dQ = \frac{Q}{2\pi r} dl.$$

Заряд dQ , создает в центре кольца потенциал $d\varphi$, который может быть найден как потенциал, создаваемый точечным зарядом:

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi r} \cdot \frac{dl}{4\pi \epsilon_0 r}.$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi r \cdot 4\pi \epsilon_0 r} \cdot \int_0^{2\pi r} dl = \frac{Q \cdot 2\pi r}{2\pi r \cdot 4\pi \epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}.$$

Таким образом,

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}.$$

Подставим значения величин:

$$r = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, Q = 10 \text{ нКл} = 10 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}.$$

Проведем вычисления: $\varphi = 1,8$ кВ.

4. Определить ускоряющую разность потенциалов, которую должен пройти в электрическом поле электрон, чтобы его скорость возросла от $v_1 = 1$ Мм/с до $v_2 = 5$ Мм/с.

Решение

Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Работа, совершаемая силами электрического поля при перемещении электрона из точки 1 в точку 2,

$$A = e(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1)$$

Работа есть мера изменения энергии, в данном случае изменяется кинетическая энергия электрона, т. е.

$$A = E_{x2} - E_{x1} = \frac{m\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_1^2}{2}. \quad (2)$$

Приравняв (1) и (2), найдем ускоряющую разность потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{m(\mathbf{v}_2^2 - \mathbf{v}_1^2)}{2e}.$$

Подставим значения величин:

$$\mathbf{v}_1 = 1 \text{ Мм/с} = 10^6 \text{ м/с}, \quad \mathbf{v}_2 = 5 \text{ Мм/с} = 5 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Проведем вычисления, получим $\varphi_1 - \varphi_2 = 68,3 \text{ В}$.

ТЕСТ

Вопросы

9.1. Векторные величины –

- 1) сила Кулона, напряженность поля, потенциал;
- 2) сила Кулона, напряженность поля, поток вектора напряженности;
- 3) сила Кулона, напряженность поля;
- 4) потенциальная энергия.

9.2. Найдите верное заключение:

1. Потенциал характеризует энергию электрического поля.
2. Напряженность поля является энергетической характеристикой поля.
3. Потенциал и напряженность являются силовыми характеристиками электрического поля.
4. Потенциал является силовой характеристикой электрического поля.

9.3. Найдите правильное продолжение фразы: при наложении электростатических полей

- 1) их потенциалы складываются алгебраически;
- 2) напряженности складываются алгебраически;
- 3) их потенциалы и напряженности складываются алгебраически;
- 4) потенциалы складываются геометрически.

9.4. Найдите правильное заключение: потенциал поля в данной точке равен

- 1) потенциальной энергии, которой обладает заряд в данной точке поля;
- 2) работе по перемещению положительного заряда из данной точки поля на бесконечность;
- 3) потенциальной энергии, которой обладает единичный заряд в данной точке поля;
- 4) потенциальной энергии, которой обладает заряд.

9.5. Найдите верное заключение:

1. Потенциальная энергия в каждой точке поля определяется точно.
2. Потенциальная энергия в каждой точке поля определяется с точностью до произвольной постоянной.
3. Нулевой уровень потенциальной энергии связывается с бесконечностью.
4. Нулевой уровень потенциальной энергии определяется однозначно.

9.6. Потенциальная энергия электрического поля задана как функция координаты x , чему равна потенциальная сила $F(x)$?

1. $F(x) = -\frac{\partial W_{\Pi}(x)}{\partial x}$. 2. $F(x) = -\frac{\partial W_{\Pi}(x)}{\partial t}$. 3. $F(x) = 0$. 4. $F(x) = \infty$.

9.7. Чему равны: а) напряженность и б) потенциал в точке A на расстоянии r от центра заряженной металлической сферы (заряд сферы q) (рис. 9.5)?

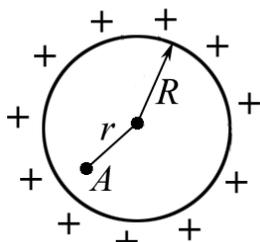


Рис. 9.5

1. а) $E_A = 0$; б) $\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

2. а) $E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$; б) $\varphi_A = 0$.

3. а) $E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$; б) $\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

4. а) $E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$; б) $\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

9.8. Чему равны (рис. 9.6): а) напряженность и б) потенциал в точке A на поверхности заряженной металлической сферы (заряд сферы q)?

1. а) $E_A = 0$; б) $\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

2. а) $E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$; б) $\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

3. а) $E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$; б) $\varphi_A = 0$.

4. а) $E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$; б) $\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

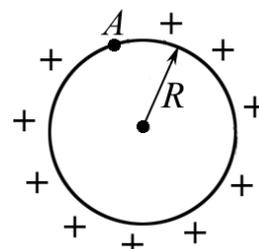


Рис. 9.6

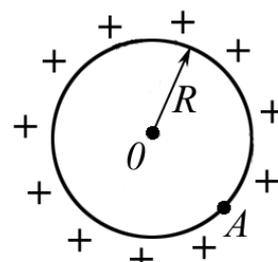


Рис. 9.7

9.9. Чему равна работа A (рис. 9.7) по перемещению малого заряда q (по сравнению с зарядом Q сферы) из центра заряженной сферы на ее поверхность (т. A).

1. $A = 0$. 2. $A = q(\varphi_0 - \varphi_A)$.

3. $A = \infty$. 4. $A = Q(\varphi_0 - \varphi_A)$.

9.10. Чему равна работа A (рис. 9.8) по перемещению заряда q по поверхности заряженной металлической сферы из точки 1 в точку 2? Заряд сферы Q .

1. $A = 0$. 2. $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

3. $A = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$. 4. $A = \infty$.

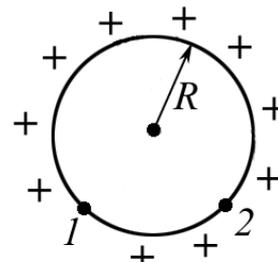


Рис. 9.8

9.11. Как изменится потенциал в точке на расстоянии r от точечного заряда, если заряд окружить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ ?

1. Увеличится в ϵ раз.
2. Уменьшится в ϵ раз.
3. Не изменится.
4. Уменьшится в $\sqrt{\epsilon}$ раз.

9.12. Определите, где находится положительный заряд, создающий поле, если градиент потенциала направлен, как $\vec{\text{grad}} \varphi$ показано на рисунке?

1. Слева. 2. Справа. 3. Вверху. 4. Внизу.

9.13. В какой точке потенциал поля, создаваемого системой двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, равен нулю (рис. 9.9)?

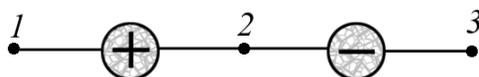


Рис. 9.9

1. 2. 2. 3. 3. 1.

9.14. В какой точке потенциал поля, создаваемого системой двух равных по величине отрицательных зарядов, равен нулю (рис. 9.10)?

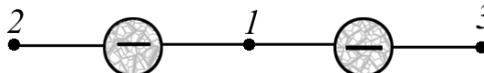
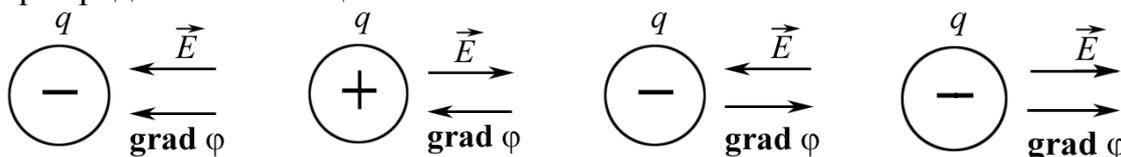


Рис. 9.10

1. Ни в одной не равен нулю. 2. 3. 3. 1. 4. 2.

9.15. Укажите номер рисунка, где верно показано направление вектора градиента потенциала.



а)

б)

в)

г)

9.16. Металлический шар окружили диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Как изменилась емкость шара?

1. Уменьшилась в ϵ раз.
2. Увеличилась в ϵ раз.
3. Не изменилась.
4. Увеличилась в $\sqrt{\epsilon}$ раз.

9.17. Как изменится емкость воздушного конденсатора, если площадь его пластин увеличить вдвое, расстояние между ними уменьшить вдвое, а пространство между пластинами заполнить диэлектриком с $\epsilon = 2$?

1. Не изменится.
2. Увеличится в 8 раз.
3. Уменьшится в 6 раз.
4. Увеличится вдвое.

9.18. Потенциал поля в направлении x изменяется как $\varphi = Bx^2 + Cx$, B и C – положительные константы. Как изменяется в этом направлении напряженность поля?

1. $E_x = -(2Bx + C)$.
2. $E_x = (2Bx + C)$.
3. $E_x = Bx^2 + Cx$.
4. $E_x = Bx + Cx$.

9.19. Потенциал поля в направлении x изменяется как $\varphi = Cx$, C – положительная константа. Как изменяется напряженность в направлении x ?

1. Не изменяется.
2. Уменьшается.
3. Увеличивается.
4. Уменьшается в C раз.

9.20. Точки 1 и 2 находятся внутри заряженной сферы (рис. 9.11). Какие величины равны нулю?

1. Потенциалы в точках 1 и 2.
2. Разность потенциалов между точками 1 и 2.
3. Напряженность поля на поверхности сферы.
4. Потенциал на поверхности сферы.

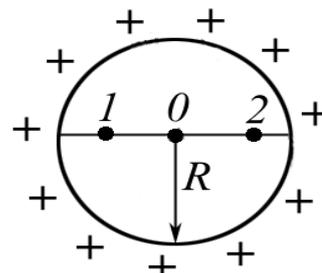


Рис. 9.11

9.21. Чему равна разность потенциалов, если напряженность поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью (рис. 9.12), $E = 100$ В/м ($x_1 = 10$ см, $x_2 = 20$ см)?

1. 10 В.
2. 100 В.
3. 20 В.
4. 50 В.

9.22. Чему равна разность потенциалов ($\varphi_1 - \varphi_2$), если напряженность поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью (рис. 9.12), $E = 200$ В/м ($x_1 = 5$ см, $x_2 = 10$ см)?

1. 100 В.
2. 200 В.
3. 10 В.
4. 50 В.

9.23. Чему равна разность потенциалов ($\varphi_1 - \varphi_2$), если напряженность поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью (рис. 9.12), $E = 300$ В/м ($x_1 = 15$ см, $x_2 = 20$ см)?

1. 30 В.
2. 15 В.
3. 300 В.
4. 150 В.

9.24. Чему равна разность потенциалов ($\varphi_1 - \varphi_2$), если напряженность поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью (рис. 9.12), $E = 400$ В/м ($x_1 = 15$ см, $x_2 = 25$ см)?

1. 40 В.
2. 400 В.
3. 200 В.
4. 100 В.

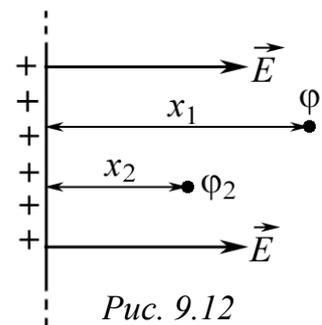


Рис. 9.12

Задачи

9.1. Какая работа A совершается при перенесении точечного заряда $q = 18$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 1$ см от поверхности шара радиусом $R = 1$ см с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 26$ мкКл/м²? Ответ представить в мкДж, округлить до целого числа.

9.2. Электрическое поле создается бесконечно длинным тонким цилиндром, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 18$ нКл/м. Определить разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 1$ см и $r_2 = 7$ см от поверхности цилиндра. Результат представить в единицах СИ и округлить до целого числа.

9.3. Кольцо радиусом $r = 10$ см из тонкой проволоки несет равномерно распределенный заряд $Q = 15$ нКл. Определить потенциал ϕ электростатического поля в центре кольца.

Указание: воспользоваться дифференциально-интегральным методом. Результат представить в кВ (киловольтах).

9.4. Определить ускоряющую разность потенциалов, которую должен пройти в электрическом поле электрон, чтобы его скорость возросла от $v_1 = 5$ Мм/с до $v_2 = 15$ Мм/с. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

9.5. Под действием электростатического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости точечный заряд $Q = 1$ нКл переместился вдоль силовой линии на расстояние $r = 1$ см, при этом совершена работа 5 мкДж. Определить поверхностную плотность заряда σ на плоскости. Ответ дать в Кл/м².

9.6. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/см. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 1,5$ см до $r_2 = 1$ см? Ответ дать в Мм/с (1 Мм/с = 10^6 м/с).

9.7. Электростатическое поле создается положительно заряженной с постоянной поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м² бесконечной плоскостью. Какую работу надо совершить для того, чтобы перенести электрон вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 2$ см до $r_2 = 1$ см?

9.8. Полый шар несет на себе равномерно распределенный заряд. Определить радиус шара, если потенциал в центре шара равен $\phi_1 = 200$ В, а в точке, лежащей от его центра на расстоянии $r = 50$ см, $\phi_2 = 40$ В.

9.9. Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, заряженной равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 5$ нКл/м. Определить числовое значение и направление градиента потенциала $\text{grad } \varphi$ этого поля.

9.10. Электростатическое поле создается бесконечной прямой нитью, заряженной равномерно с линейной плотностью $\tau = 50$ пКл/см. Определить числовое значение и направление градиента потенциала $\text{grad } \varphi$ в точке на расстоянии $r = 0,5$ м от нити.

9.11. Определить линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда $Q = 1$ нКл с расстояния $r_1 = 5$ см до $r_2 = 2$ см в направлении, перпендикулярном нити, равна 50 мкДж.

9.12. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью. Протон, двигаясь от нити под действием поля вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 1$ см до $r_2 = 5$ см, изменил свою скорость от 1 до 10 Мм/с. Определить линейную плотность заряда нити.

9.13. Определить ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi$, которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью $v_1 = 10^6$ м/с, чтобы скорость его возросла в $n = 2$ раза.

9.14. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 10^{-3}$ мкКл/м² и $\sigma_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ мкКл/м². Определить напряженность поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин.

9.15. Положительные заряды $q_1 = 3$ мкКл и $q_2 = 0,02$ мкКл находятся в вакууме на расстоянии 1,5 м друг от друга. Определить работу, которую надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния 1 м.

9.16. При перемещении заряда $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл между двумя точками поля внешними силами была совершена работа $A = 4 \cdot 10^{-6}$ Дж. Определить: 1) работу сил поля; 2) разность потенциалов этих точек поля.

9.17. Заряды $q_1 = 1$ мкКл и $q_2 = -1$ мкКл находятся на расстоянии $l = 10$ см. Определить напряженность E и потенциал φ поля в точке, удаленной на расстоянии $r = 10$ см от первого заряда и лежащей на линии, проходящей через первый заряд перпендикулярно к направлению от q_1 к q_2 .

9.18. Заряд распределен равномерно по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м². Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от плоскости на расстоянии $r = 10$ см.

9.19. Какова потенциальная энергия системы четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см? Заряды одинаковы по абсолютной величине $q = 10^{-8}$ Кл, но два из них отрицательны.

9.20. Бесконечно длинная тонкая прямая нить несет равномерно распределенный по длине нити заряд с линейной плотностью $\tau = 0,01$ мкКл/м. Определить разность потенциалов двух точек поля, удаленных от нити на $r_1 = 2$ см и $r_2 = 4$ см.

9.21. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 20$ нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстояниях $a_1 = 0,5$ см и $a_2 = 2$ см от поверхности цилиндра в средней его части.

Примечание. Для нахождения разности потенциалов воспользоваться соотношением

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} E dr.$$

Здесь r_1 и r_2 – расстояния, на которых находятся точки от оси цилиндра.

ЗАНЯТИЕ 10

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Теория

Электрическим током называется направленное движение электрических зарядов.

Имеются две характеристики электрического тока:

1. Сила тока (ток):

$$I = \frac{dq}{dt} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{с}} \right].$$

Ток в проводниках называется током проводимости. Если ток $I = \text{const}$, то он называется постоянным (при этом $I = q / t$).

2. Плотность тока:

$$|\vec{j}| = \frac{dI}{dS_{\perp}} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}^2} \right].$$

По величине плотность тока есть заряд, переносимый в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную току.

Направление вектора \vec{j} совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов (т. е. с направлением тока).

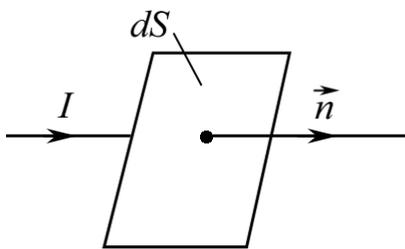


Рис. 10.1

В проводниках $\vec{j} = ne\vec{v}$, здесь n – концентрация носителей тока (свободных электронов в проводниках); e – заряд электрона; \vec{v} – средняя скорость упорядоченного движения носителей тока (скорость дрейфа).

Связь между характеристиками:

$$I = \int \vec{j} d\vec{S},$$

где $d\vec{S} = \vec{n}dS$ (рис. 10.1).

Основные законы

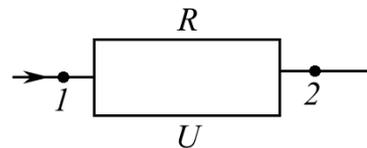
Закон Ома и Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах (правила Кирхгофа не рассматриваем).

В интегральной форме:

I. а) Закон Ома для однородного участка цепи (не содержит ЭДС):

$$U = I \cdot R$$

(произведение тока на сопротивление называется падением потенциала на данном участке цепи), или



$$I = \frac{U}{R},$$

где $R = \rho \frac{l}{S}$; ρ – удельное сопротивление; l – длина; S – площадь поперечного сечения проводника.

б) Закон Ома для неоднородного (содержащего ЭДС) участка цепи.

Электростатическое (кулоновское) поле не может поддерживать постоянный электрический ток. Для создания упорядоченного движения носителей тока в проводнике необходимы сторонние силы. Работа сторонних сил (которая совершается, например, в динамомашине за счет механической энергии, затрачиваемой на вращение ротора генератора,

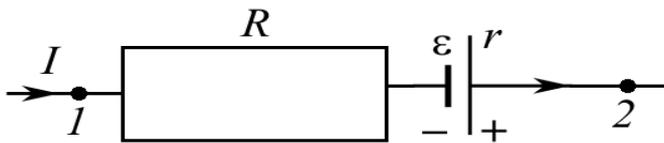


Рис. 10.2

а в гальваническом элементе – за счет энергии химической реакции) при перемещении по проводнику единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2

(рис. 10.2) называется электродвижущей силой источника (ЭДС) тока:

$$\frac{A_{12\text{стор}}}{q} = \varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

При перемещении заряда работу совершают и кулоновские силы:

$$\frac{A_{12\text{кул}}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Суммарная работа по перемещению, совершаемая полем кулоновских и сторонних сил вдоль цепи из точки 1 в точку 2 единичного положительного заряда, называется напряжением на участке цепи $1-2$ (U_{12}):

$$U_{12} = IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}; \quad U_{12} = IR_{12},$$

здесь R_{12} – полное сопротивление на участке цепи $1-2$ (в данном случае $R_{12} = R + r$); r – внутреннее сопротивление источника ЭДС).

Обобщенный закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}.$$

II. Закон Ома для замкнутой цепи.

Если замкнуть точки $1-2$ проводником, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и для тока в цепи получим

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

здесь R – сопротивление внешней цепи (рис. 10.3); ε, r – ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

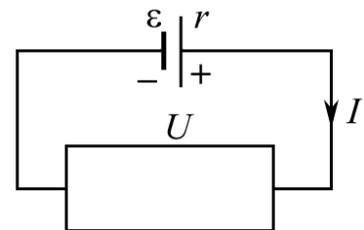


Рис. 10.3

III. Закон Джоуля – Ленца:

$$Q = I^2 R t,$$

здесь Q – количество тепла, которое выделяется за время t в проводнике сопротивлением R при протекании в нем постоянного тока I .

Если ток меняется во времени, то: $dQ = I^2 R dt$, а $Q = \int I^2 R dt$.

При этом работа $A = Q$ по закону сохранения энергии (если нет других превращений энергии, кроме превращения энергии электрического тока в тепло).

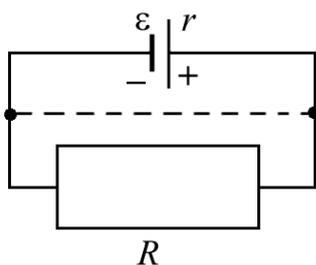
IV. Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме.

Заменив в выражении $I = \frac{U}{R}$, $R = \rho \frac{l}{S}$, получим $I = \frac{U \cdot S}{\rho \cdot l}$; приведя к виду $\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{l}$ и заменив $\frac{U}{l} = E$, а $\frac{I}{S} = j$, найдем, что $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ (здесь

$1/\rho$ – удельная проводимость, или электропроводность, данного проводника).

Обычно $1/\rho$ обозначают как γ , т. е. $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

V. Ток короткого замыкания ($I_{\text{кз}}$). Мощность, выделяемая во внешней цепи. КПД элемента.



Чтобы в замкнутой цепи получить ток короткого замыкания, надо замкнуть накоротко внешнее сопротивление R . Тогда ток

$$I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Мощность P , выделяемая на внешнем сопротивлении R , потребителе энергии, равна

$$P = I \cdot U,$$

где I – ток в цепи; U – напряжение на сопротивлении R (или падение потенциала). Это выражение можно преобразовать, если в нем заменить $U = I \cdot R$, а $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$, получим $P = \frac{\varepsilon \cdot IR}{R + r}$ и еще раз заменим $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$.

Окончательно получим

$$P = \frac{\varepsilon^2 \cdot R}{(R + r)^2}.$$

Чтобы получить соотношение между R и r , при котором на внешнем сопротивлении R выделяется наибольшая мощность, необходимо взять производную $\frac{dP}{dR}$ и приравнять ее нулю, т. е. исследовать функцию $P(R)$ на максимум. Мы получим, что P_{max} будет при $R = r$, отсюда

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2 \cdot R}{4R^2} = \frac{\varepsilon^2}{4R}.$$

Коэффициент полезного действия источника тока

$$\eta = \frac{P_{\text{внешн.цепи}}}{P_{\text{полной цепи}}}, \text{ отсюда } \eta = \frac{UI}{\varepsilon I} = U / \varepsilon.$$

VI. Электрический ток в жидкостях и газах.

Носителями тока в жидкостях и газах (электролиты, проводники II рода) являются положительные и отрицательные ионы, которые образуются всегда парами, и концентрация их одинакова ($n_+ = n_- = n_0$). Плотность электрического тока в газах и электролитах равна геометрической сумме плотностей тока положительных и отрицательных ионов:

$$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_-.$$

При небольшом напряжении на газовом промежутке выражение для плотности тока в газе и электролите одинаково:

$$\vec{j} = q_+ n_0 \vec{v}_+ + q_- n_0 \vec{v}_- \text{ (сравните с плотностью тока в металлах),}$$

здесь q_+ , \vec{v}_+ и q_- , \vec{v}_- – заряды и средние скорости упорядоченного движения (дрейфа) положительных и отрицательных ионов в электрическом поле. Скорость дрейфа ионов (как и электронов в проводниках) пропорциональна напряженности \vec{E} электрического поля:

$$\vec{v}_+ = u_+ E, \quad \vec{v}_- = u_- E,$$

здесь u_+ и u_- – подвижности ионов.

Ионы в электролите образуются за счет диссоциации молекул электролита, поэтому их концентрация (n_0) не зависит от напряженности поля.

Записав выражение для плотности тока в электролите в виде

$$\vec{j} = (q_+ n_0 U_+ + q_- n_0 U_-) \vec{E}$$

и учитывая, что $(q_+ n_0 U_+ + q_- n_0 U_-) = \text{const}$, можем указать, что плотность тока в электролите пропорциональна напряженности электрического поля и совпадает с ней по направлению, т. е. для электролитов выполняется закон Ома.

Для электролитов имеют место два **закона Фарадея**:

1) $m = K I t$, K – электрохимический эквивалент;

2) $K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{Z}$; $F = 96,5 \cdot 10^3$ Кл/моль – постоянная Фарадея; A – атомная масса элемента; Z – валентность.

Электропроводность газов

При обычных условиях газы не проводят электрический ток (ток в газе называется разрядом). Газ становится проводником, если часть его молекул ионизовать, т. е. расщепить на свободные электроны и положительные ионы. Часть освобожденных электронов присоединяется к нейтральным молекулам, образуя отрицательные ионы. Ионизация может происходить под действием сильного нагрева газа, рентгеновского излучения, гамма излучения, бомбардирования газа быстро движущимися электронами и другими частицами. Если для прохождения тока в газе необходим внешний ионизатор, то такой разряд в газе называется несамостоятельным.

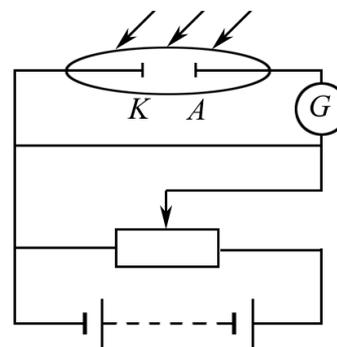


Рис. 10.4

Работа ионизации газа

$$A_u = \varphi_u \cdot e,$$

где φ_u – разность потенциалов, которую должна пройти бомбардирующая частица, чтобы энергия ее была равна работе удаления из атома электрона; e – заряд электрона.

Зависимость силы тока I от напряжения на газоразрядном промежутке (рис. 10.4) называется вольтамперной характеристикой (рис. 10.5).

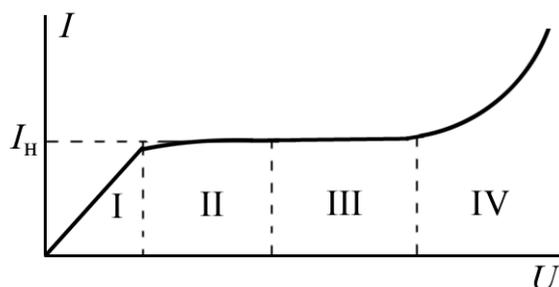


Рис. 10.5

При небольших значениях напряжения сила тока I пропорциональна u (область I). Подобно току в электролитах, для плотности тока в газе можно записать

$$j = qn_0 (u_+ + u_-) E,$$

т. е. в области I для газового разряда выполняется закон Ома. При дальнейшем увеличении напряжения U между электродами линейная зависимость тока I от U нарушается (области II и III). Когда все образовавшиеся ионы доходят до электродов, ток I остается постоянным при увеличении напряжения U (область III). Этот ток называется током насыщения I_n , его плотность равна

$$j_n = Nqd,$$

здесь N – число пар ионов, создаваемых ионизатором в единицу объема в единицу времени; d – расстояние между электродами. При последующем увеличении напряжения между электродами сила тока начинает резко возрастать (область IV), что объясняется возникновением ударной ионизации молекул газа электронами и положительными ионами. Электрический ток в газе в области IV вольтамперной характеристики сохраняется и в отсутствие внешней ионизации – это уже область самостоятельного газового разряда. Разновидностями самостоятельных газовых разрядов являются тлеющий, коронный, искровой и дуговой газовые разряды, которые широко применяются в технике.

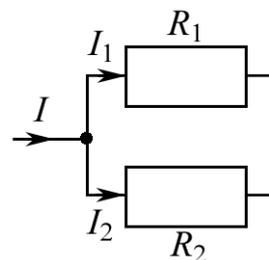
Некоторые полезные при решении задач сведения:

1. *Первое правило Кирхгофа*: сумма токов в узле равна 0.

Токи, вытекающие из узла, имеют знак «-», притекающие к узлу – знак «+».

$$I - I_1 - I_2 = 0, \text{ или } I = I_1 + I_2.$$

2. *Последовательное и параллельное соединение проводников.*

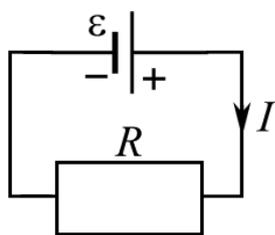
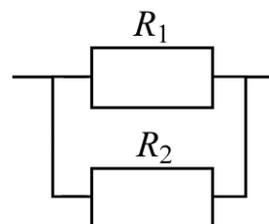


При последовательном соединении сопротивление проводников равно

$$R = R_1 + R_2.$$

При параллельном соединении сопротивление проводников равно

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$



3. Полезной считается мощность ($P_{\text{полезн}}$), выделяемая на внешнем сопротивлении R :

$$P_{\text{полезн}} = I \cdot U = U^2 / R;$$

$$U = I \cdot R.$$

Полной мощностью называется

$$P_{\text{полн}} = I \cdot \varepsilon.$$

4. Напряжение U на зажимах элемента равно напряжению на внешнем сопротивлении R .

Подсказка

1. Лампа накаливания потребляет ток, равный 0,6 А. Температура вольфрамовой нити диаметром 0,1 мм равна 2200 °С. Ток подводится медным проводом сечением 6 мм². Определить напряженность электрического поля: 1) в вольфраме (удельное сопротивление при 0 °С $\rho_0 = 55$ нОм·м, температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 0,0045$ °С⁻¹); 2) в меди ($\rho_M = 17$ нОм·м).

Решение

Напряженность поля в проводниках можно найти из закона Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

здесь \vec{E} – напряженность электрического поля; \vec{j} – вектор плотности тока; γ – удельная электропроводность проводника, $\gamma = 1/\rho$, где ρ – удельное сопротивление проводника. Для вольфрама удельное сопротивление указано в условии задачи при температуре 0 °С, но поскольку температура равна 2200 °С, то его удельное сопротивление находится из соотношения

$$\rho_t = \rho_0 (1 + \alpha t).$$

Это соотношение известно Вам из школьного курса физики.

Таким образом, для вольфрама $E_{\text{в}} = j_{\text{в}} \rho_{\text{тв}}$, для меди $E_{\text{м}} = j_{\text{м}} \rho_{\text{тм}}$.

Плотность тока найдем по известной силе тока (одинаковой для меди и вольфрама) и площади поперечного сечения проводников:

$$j = I / S.$$

Для вольфрама $j_{\text{в}} = 4I/\pi d_{\text{в}}^2$, для меди $j_{\text{м}} = I/S_{\text{м}}$.

Окончательно получим:

$$E = \frac{4I}{\pi d_{\text{в}}^2} \cdot \rho_0 (1 + \alpha t); E = 45,8 \text{ В/м} \text{ – для вольфрама.}$$

$$E = \frac{I}{S_{\text{м}}} \cdot \rho; E = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ В/м} = 1,7 \text{ мВ/м} \text{ – для меди.}$$

2. Пространство между пластинами плоского конденсатора имеет объем $V = 375$ см³ и заполнено водородом, который частично ионизован. Площадь пластин конденсатора $S = 250$ см². При каком напряжении между пластинами конденсатора сила тока I , протекающего через конденсатор, достигнет значения 2 мкА, если концентрация n_0 ионов обоих знаков в газе равна $5,3 \cdot 10^7$ см⁻³?

Подвижность ионов $u_+ = 5,4 \cdot 10^{-4}$ м²/(В·с), $u_- = 7,4 \cdot 10^{-4}$ м²/(В·с).

Решение

Поле внутри конденсатора можно считать однородным, поэтому напряжение между пластинами конденсатора U равно

$$U = Ed, \quad (1)$$

где E – напряженность поля в конденсаторе; d – расстояние между пластинами конденсатора. Напряженность поля может быть найдена из выражения для плотности тока в газе (ток далек от насыщения):

$$j = qn_0(u_+ + u_-)E \quad (\text{здесь } q \text{ – заряд иона}).$$

Отсюда

$$E = \frac{j}{qn_0(u_+ + u_-)}.$$

Так как $j = \frac{I}{S}$, а расстояние $d = V/S$, то, подставив выражения для E и d в (1), получим

$$U = \frac{I \cdot V}{qn_0(u_+ + u_-)S^2}.$$

Переведем единицы измерения в систему единиц СИ: $S = 250 \text{ см}^2 = 250 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $V = 375 \text{ см}^3 = 375 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $n_0 = 5,3 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3} = 5,3 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$, $I = 2 \text{ мкА} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ А}$. Заряд иона водорода $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

Подставив числовые данные, получим $U = 110 \text{ В}$.

3. Определить скорость v , с которой растет слой никеля на плоской поверхности металла при электролизе, если плотность тока j , протекающего через электролит, равна 30 А/м^2 . (Никель считать двухвалентным, осаждение его на поверхность металла – равномерным.)

Решение

Для решения задачи воспользуемся объединенным законом Фарадея:

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{Z} It, \quad (1)$$

здесь F – постоянная Фарадея; μ – молярная масса ионов никеля; Z – валентность ионов никеля; I – ток в электролите; t – время протекания тока. Если осаждение никеля идет по поверхности металла равномерно, то массу m выделившегося за время t никеля можно выразить через плотность ρ , площадь S поверхности и толщину h слоя никеля:

$$m = \rho \cdot S \cdot h.$$

Сила тока $I = jS$. Подставив в (1) выражения для массы и силы тока, получим

$$\rho h = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{Z} jt. \quad (2)$$

При неизменной плотности тока нарастание слоя никеля будет происходить с постоянной скоростью v , определяемой отношением h/t , т. е. $v = h/t$.

Тогда из соотношения (2) следует

$$v = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu j}{Z \rho_{\text{Ni}}}.$$

Подставим значения величин: $\mu_{\text{Ni}} = 58,7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $Z = 2$, $j = 30$ А/м², $\rho_{\text{Ni}} = 8,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Проведем вычисления: $v = 1,04 \cdot 10^{-9}$ м/с.

4. Сила тока в проводнике с сопротивлением $R = 50$ Ом равномерно растет от $I_0 = 0$ до $I_{\text{max}} = 3$ А за время $\tau = 6$ с. Определить выделившееся в проводнике за это время количество теплоты Q .

Решение

Согласно закону Джоуля – Ленца, для бесконечно малого промежутка времени количество теплоты равно

$$\delta Q = I^2 R dt.$$

По условию задачи ток равномерно растет, при этом $I_0 = 0$,

$$\text{т. е. } I = kt, \text{ где } k = \frac{I_{\text{max}}}{\tau}.$$

Тогда можно записать:

$$\delta Q = k^2 R t^2 dt. \quad (1)$$

Проинтегрировав (1) и подставив выражение для k , найдем искомое количество теплоты:

$$Q = \int_0^{\tau} k^2 R t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R t^3 = \frac{1}{3} \frac{I_{\text{max}}^2}{\tau^2} \cdot R \cdot \tau^3 = \frac{1}{3} I_{\text{max}}^2 R \tau.$$

Подставив числовые значения, получим $Q = 900$ Дж.

ТЕСТ

Вопросы

10.1. Какие величины векторные?

1. Напряженность, плотность тока.
2. Потенциал, сила тока.
3. Сила тока, напряжение.
4. Напряжение, плотность тока.

10.2. Какие величины измеряются в одних и тех же единицах в системе СИ?

1. Потенциал, разность потенциалов, напряжение, электродвижущая сила.
2. Напряженность поля, потенциал, работа сил поля, напряжение.
3. Напряженность поля, потенциал, разность потенциалов, напряжение.
4. Напряженность поля, потенциал.

10.3. Укажите выражение, отвечающее закону Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме.

1. $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. 2. $I = \frac{U}{R}$. 3. $I_{12} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R_{12}}$. 4. $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$.

10.4. Два одинаковых одноименно заряженных до одинакового по величине заряда шара соединили проволокой с гальванометром (G). Будет ли протекать ток через гальванометр (рис. 10.6)?

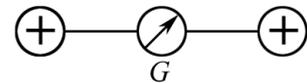


Рис. 10.6

1. Будет протекать, пока шары не разрядятся.
2. Будет протекать постоянно.
3. Не будет протекать совсем.
4. Будет протекать, если шары соединить накоротко.

10.5. Чему равно напряжение U_{12} на участке 1–2 (рис. 10.7)?

1. $U_{12} = \frac{A_{12\text{сop}}}{q} + \frac{A_{12\text{кул}}}{q}$. 2. $U_{12} = \frac{A_{12\text{сop}}}{q}$.

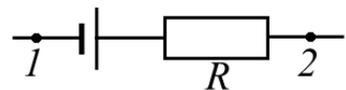


Рис. 10.7

3. $U_{12} = \frac{A_{12\text{кул}}}{q}$. 4. $U_{12} = 0$.

10.6. Два разноименно заряженных до одинакового по величине заряда шара соединены проволокой с гальванометром (G). Будет ли протекать ток через гальванометр (рис. 10.8)?

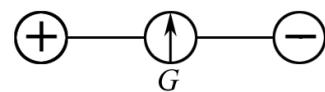


Рис. 10.8

1. Будет протекать, пока шары не разрядятся.
2. Будет протекать постоянно.
3. Не будет протекать совсем.
4. Будет протекать, если шары соединить накоротко.

10.7. Найдите правильное выражение:

1. Напряжение на неоднородном участке цепи равно сумме ЭДС источников и разности потенциалов на этом участке.
2. Напряжение на неоднородном участке цепи равно разности потенциалов на этом участке.
3. Напряжение на однородном участке цепи равно сумме ЭДС всех источников и разности потенциалов на этом участке.
4. Напряжение на однородном и неоднородном участках равно разности потенциалов.
5. Напряжение на однородном участке цепи равно сумме ЭДС всех источников.

10.8. Как подсчитать количество теплоты Q , которое выделится в проводнике, сопротивление которого R , за время t протекания в нем непостоянного тока $I(t)$?

$$1. Q = I^2(t)Rt. \quad 2. \delta Q = I^2(t)Rt. \quad 3. Q = \frac{U^2}{R}t. \quad 4. Q = \int_0^t I^2(t)Rdt.$$

10.9. В каких веществах плотность тока определяется как $\vec{j} = \vec{n}e\vec{u}$?

1. В электролитах.
2. В газах.
3. В металлах.
4. В электролитах и металлах.

10.10. В каких веществах плотность тока определяется как $\vec{j} = qn_0(u_+ + u_-)\vec{E}$?

1. В металлах.
2. Только в электролитах.
3. Только в газе.
4. В электролитах и газе при небольшом напряжении между электродами.

10.11. В каких веществах ток может достичь насыщения и его плотность будет определяться как $j_H = Nqd$?

1. В металлах.
2. В газе.
3. В электролитах.
4. В электролитах, газе и металле.

10.12. Закон Ома выполняется при небольшом напряжении между электродами ...

- 1) только в металлах;
- 2) только в электролитах;
- 3) только в газе;
- 4) в металлах, электролитах и газах.

10.13. Какая величина определяется как U^2 / R ?

1. Мощность тока.
2. Работа электрического тока.
3. Количество теплоты, выделяющееся в проводнике.
4. Сила тока.

10.14. Какая величина определяется как $\frac{U^2}{R} \cdot t$?

1. Мощность тока.
2. Энергия электрического поля.
3. Количество теплоты, выделяющееся в проводнике за время t .
4. Сила тока.

10.15. Какая величина определяется как $I^2 \cdot R$?

1. Мощность тока.
2. Работа электрического тока.
3. Количество теплоты, выделяющееся в проводнике.
4. Плотность тока.

10.16. Какая величина определяется как $\oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$?

1. Электродвижущая сила, действующая в цепи.
2. Напряжение на данном участке цепи.
3. Разность потенциалов на данном участке цепи.
4. Плотность тока.

Задачи

10.1. Лампа накаливания потребляет ток, равный $I = 0,8$ А. Температура вольфрамовой нити диаметром 0,1 мм равна $t = 2520$ °С. Ток подводится медным проводом сечением 6 мм². Определить напряженность электрического поля: 1) в вольфраме (удельное сопротивление при 0 °С $\rho_0 = 55$ нОм·м, температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 0,0045$ °С⁻¹); 2) в меди ($\rho = 17$ нОм·м).

10.2. Пространство между пластинами плоского конденсатора имеет объем $V = 300$ см³ и заполнено водородом, который частично ионизован. Площадь пластин конденсатора $S = 250$ см². При каком напряжении между пластинами конденсатора сила тока I , протекающего через конденсатор, достигает значения 2 мкА, если концентрация n_0 ионов обоих знаков в газе равна $5,3 \cdot 10^7$ см⁻³? Подвижность ионов $u_+ = 5,4 \cdot 10^{-4}$ м²/(В·с), $u_- = 7,4 \cdot 10^{-4}$ м²/(В·с).

10.3. Определить скорость V , с которой растет слой никеля на плоской поверхности металла при электролизе, если плотность тока, протекающего через электролит, равна 77 А/м². Никель считать двухвалент-

ным, осаждение его на поверхность металла – равномерным. Молярная масса ионов никеля $\mu_{Ni} = 58,7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Плотность никеля $\rho_{Ni} = 8,84 \cdot 10^3$ кг/м³.

10.4. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 57$ Ом равномерно растет от $I_0 = 0$ до $I_{max} = 2$ А за время $\tau = 4$ с. Определить выделившееся в проводнике за это время количество теплоты Q .

10.5. ЭДС батареи $\varepsilon = 120$ В, сопротивление $R_3 = 30$ Ом, $R_2 = 60$ Ом. Амперметр показывает ток $I = 2$ А (рис. 10.9). Найти мощность P , выделяющуюся в сопротивлении R_1 . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

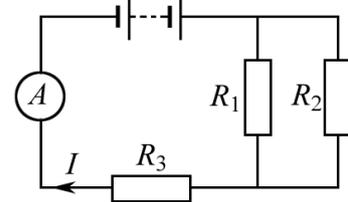


Рис. 10.9

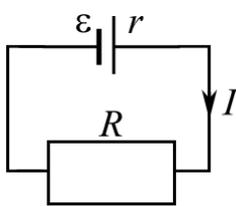


Рис. 10.10

10.6. Элемент с ЭДС $\varepsilon = 1,6$ В имеет внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом. Найти КПД (в %) элемента при токе в цепи $I = 2,4$ А (рис. 10.10).

10.7. Амперметр с сопротивлением $R = 0,16$ Ом зашунтирован сопротивлением $R_m = 0,04$ Ом (рис. 10.11). Амперметр показывает ток $I_0 = 8$ А. Найти ток I в цепи.

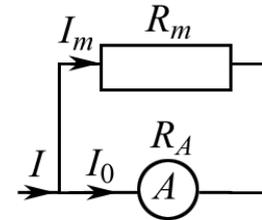


Рис. 10.11

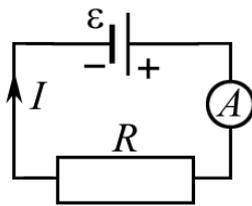


Рис. 10.12

10.8. Элемент, сопротивление и амперметр соединены последовательно. Элемент имеет ЭДС $\varepsilon = 2$ В и внутреннее сопротивление $r = 0,4$ Ом. Амперметр показывает ток $I = 1$ А (рис. 10.12). С каким КПД η (в %) работает элемент?

10.9. ЭДС батареи аккумуляторов $\varepsilon = 12$ В, сила тока короткого замыкания $I_{кз} = 5$ А. Какую наибольшую мощность можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

10.10. Батарея с ЭДС $\varepsilon = 240$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнута на внешнем сопротивлении $R = 23$ Ом. Найти полную мощность $P_{полн}$ и полезную мощность $P_{ползн}$.

10.11. Элемент с ЭДС $\varepsilon = 2$ В имеет внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом. Найти падение потенциала U_r внутри элемента при токе в цепи $I = 0,25$ А. Чему равно внешнее сопротивление R ?

10.12. К батарее аккумуляторов, ЭДС которой $\varepsilon = 2$ В и внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом, присоединен проводник. Найти: 1) сопротивление проводника R , при котором мощность, выделившаяся в нем, максимальна; 2) мощность P , которая при этом выделяется в проводнике.

10.13. Сила тока в проводнике сопротивлением $r = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_0 = 0$ до $I = 6$ А (рис. 10.13). Определить теплоту Q_1 и Q_2 , выделившиеся в этом проводнике за первую и вторую секунды соответственно, а также найти отношение Q_2/Q_1 .

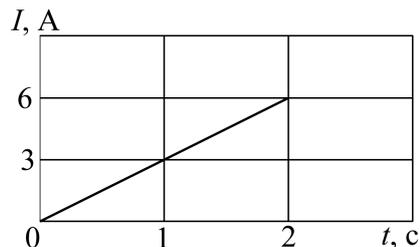


Рис. 10.13

10.14. Конденсатор емкостью $C_1 = 3$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 40$ В. После отключения от источника тока конденсатор был соединен параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 5$ мкФ. Какая энергия W' израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

10.15. К батарее ЭДС = 300 В подключены последовательно два плоских конденсатора емкостью $C_1 = 2$ пФ и $C_2 = 3$ пФ. Определить заряд Q и напряжение U на пластинах конденсаторов.

10.16. К батарее ЭДС = 300 В подключены параллельно два плоских конденсатора емкостью $C_1 = 2$ пФ и $C_2 = 3$ пФ. Определить заряд Q и напряжение U на пластинах конденсаторов.

10.17. Конденсатор емкостью $C_1 = 600$ пФ зарядили до разности потенциалов $U = 1,5$ кВ и отключили от источника напряжения. Затем к конденсатору присоединили параллельно второй, незаряженный конденсатор емкостью $C_2 = 400$ пФ. Сколько энергии, запасенной в первом конденсаторе, было израсходовано на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов?

ЗАНЯТИЕ 11

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. СИЛА АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Теория

Магнитное поле

Наше изучение физики продолжается. Мы уже на станции «Электромагнетизм». Вопрос: «А почему не просто магнетизм?». Интересно? Поясняем.

В физике терминология содержит важную информацию. В данном случае «электро» указывает на причину, вызывающую появление магнитного поля. Оно появляется в пространстве, окружающем движущиеся заряды, например проводники с током. Что касается постоянных магнитов, то французский физик А. Ампер еще в прошлом веке предположил, что в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Эти токи были названы микроскопическими молекулярными токами, в отличие от макротоков в проводниках. Магнитное поле постоянных магнитов создается этими токами. Подробнее об этом мы поговорим, когда будем изучать ферромагнетики.

Вектор магнитной индукции

Из опыта известно, что если контур с током (или рамку с током) поместить в магнитное поле, то на него будет действовать вращающий момент \vec{M} , равный

$$\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}],$$

где \vec{P}_m – вектор магнитного момента рамки с током I . Здесь и далее ток I не изменяется во времени.

Для плоского контура с током I

$$\vec{P}_m = IS\vec{n},$$

где S – площадь поверхности контура; \vec{n} – единичный вектор положительной нормали к поверхности рамки (рис. 11.1).

В качестве положительного направления нормали принимается направление, связанное с током правилом правого винта. Головка винта вращается в на-

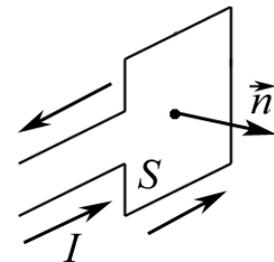


Рис. 11.1

правлении тока, а направление перемещения винта показывает, как направлена положительная нормаль. Во внешнем магнитном поле рамка устанавливается так, чтобы нормаль \vec{n} , а также направление вектора \vec{P}_m совпали с направлением вектора \vec{B} , в этом случае $M_{вр} = 0$ (рис. 11.2).

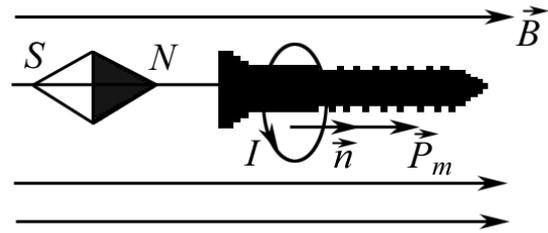


Рис. 11.2

Вектор \vec{B} является характеристикой магнитного поля и называется **вектором магнитной индукции**. Он равен максимальному вращающему моменту, действующему на рамку с магнитным моментом, равным единице, если нормаль \vec{n} перпендикулярна к поверхности рамки. Совершенно аналогично силовым линиям вектора напряженности электрического поля \vec{E} вводятся силовые линии вектора магнитной индукции \vec{B} , которые отличаются тем, что они всегда замкнуты и охватывают проводник с током. Физический смысл вектора \vec{B} можно уяснить из выражений закона Ампера и силы Лоренца.

Закон Ампера

Вращающий момент, действующий на рамку, есть результат действия магнитного поля на отдельные ее элементы. Ампер установил, что сила $d\vec{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника с током $d\vec{l}$, равна

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}].$$

Направление вектора $d\vec{F}$ может быть найдено по правилу векторного произведения, из которого следует правило левой руки. Если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор \vec{B} , а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на элемент $d\vec{l}$ с током и на проводник (рис. 11.3).

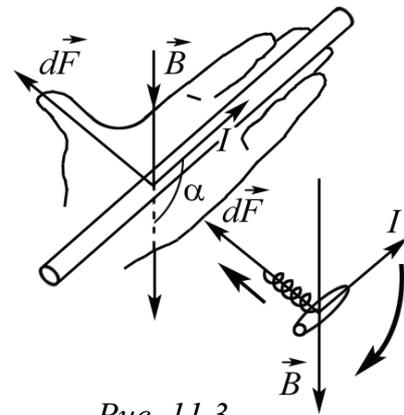


Рис. 11.3

Модуль силы Ампера равен

$$dF = IBdl \sin \alpha,$$

здесь α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} , отсюда если $\sin \alpha = 1$, то

$$B = \frac{dF}{Idl}, \quad (1)$$

т. е. вектор \vec{B} численно равен силе, действующей на проводник единичной длины с током в один ампер, когда проводник перпендикулярен вектору \vec{B} .

Сила Лоренца

Поскольку ток есть направленное движение электрических зарядов, то на каждый отдельный заряд также действует сила. Эта сила была названа силой Лоренца: на заряд q , движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} , действует сила \vec{F}_L , равная

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}]; \quad F_L = qvB \sin \alpha, \quad (2)$$

здесь α – угол между векторами \vec{B} и \vec{v} .

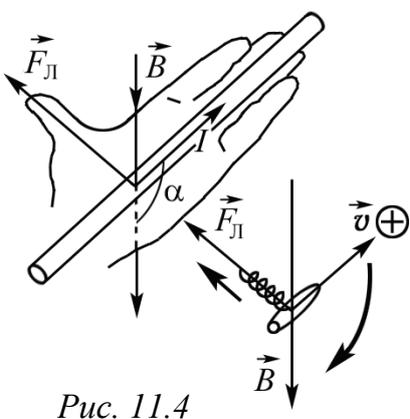


Рис. 11.4

Поскольку сила Лоренца – это сила Ампера, действующая не на проводник с током, а на отдельный заряд, то ее направление также определяется правилом левой руки (рис. 11.4). Ладонь располагаем так, чтобы вектор \vec{B} в нее входил, четыре вытянутых пальца направляем вдоль вектора скорости **положительного** заряда, тогда отогнутый большой палец покажет направление силы \vec{F}_L , действующей на положительный заряд. Если в магнитном поле движется электрон, то четыре пальца левой руки направляем противоположно вектору скорости электрона (рис. 11.5).

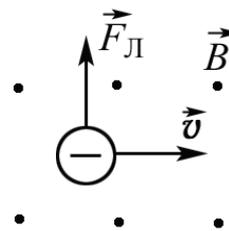


Рис. 11.5

Из выражения (1), если $\sin \alpha = 1$, следует:

$$B = \frac{F_L}{qv}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что вектор магнитной индукции численно равен силе Лоренца, действующей на единичный положительный заряд, движущийся со скоростью $v = 1$ м/с перпендикулярно силовым линиям вектора \vec{B} .

Из (1), (3) можно найти размерность вектора \vec{B} :

$$[B] = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} \quad \text{или} \quad [B] = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

Единица измерения вектора магнитной индукции в системе СИ – тесла (Тл):

$$1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

Направление вектора \vec{B} магнитного поля, создаваемого прямолинейным проводником с током, находится по правилу правого винта. Если тело винта перемещается по направлению тока, то рукоятка винта показывает направление вектора \vec{B} (по касательной к силовым линиям).

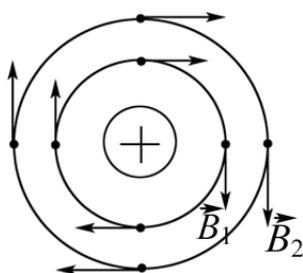


Рис. 11.6

Примеры:

1. Прямолинейный проводник с током расположен горизонтально (на рис. 11.6 показано его сечение), ток идет за чертеж, следовательно, винт закручивается. В этом случае вектор \vec{B} направлен по касательным, которые располагаются по часовой стрелке. Если ток идет «к нам» (точка в центре кружка), то касательные направлены в противоположную сторону. Направление вектора \vec{B} магнитного поля, создаваемого круговым витком с током, определяется также по правилу правого винта, но теперь рукоятка винта движется по направлению тока, а движение тела винта показывает направление вектора \vec{B} в центре витка.

2. На рис. 11.7 ток I направлен по часовой стрелке, винт закручивается, тело винта движется «от нас», и вектор \vec{B} направлен за чертеж. Силовые линии вектора \vec{B} по-прежнему охватывают проводник с током, они всегда замкнуты, в отличие от силовых линий электрического поля, которые начинаются на положительном и заканчиваются на отрицательном заряде. Как уже отмечалось, мы рассматриваем магнитное поле постоянного тока, оно обнаруживается вне проводника, в окружающем его пространстве, в то время как электрическое поле сосредоточено внутри проводника.

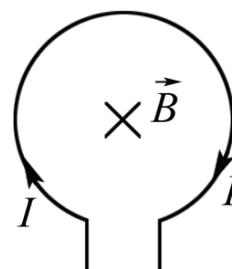


Рис. 11.7

Движение заряженных частиц в магнитном поле

Будем считать, что магнитное поле однородно. Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью \vec{v} вдоль линий магнитной индукции, то угол между векторами \vec{B} и \vec{v} равен 0 или π , следовательно, сила Лоренца в этом случае на частицу не действует, и она движется равномерно и прямолинейно (согласно первому закону Ньютона). Другое дело, если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью \vec{v} , перпендикулярной вектору \vec{B} . Действующая на час-

тицу сила Лоренца постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. По второму закону Ньютона эта сила создает центростремительное ускорение, следовательно, частица будет двигаться по окружности, радиус r которой определяется из условия

$$qvB = m\mathbf{v}^2 / r.$$

Отсюда

$$r = \frac{m \mathbf{v}}{q B}.$$

Период обращения частицы, то есть время одного полного оборота, равен

$$T = 2\pi r / \mathbf{v}.$$

Заменяя r , получим

$$T = \frac{2\pi m}{B q}.$$

Таким образом, период обращения частицы в однородном магнитном поле не зависит от ее скорости (если $\mathbf{v} \ll c$, где c – скорость света в вакууме), а определяется удельным зарядом q/m частицы и магнитной индукцией поля. Если скорость $\vec{\mathbf{v}}$ заряженной частицы направлена под углом α к вектору $\vec{\mathbf{B}}$ (рис. 11.8), то она будет двигаться по винтовой линии. Движение частицы можно представить в виде суперпозиции (рис. 11.8):

1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} \cos \alpha;$$

2) равномерного движения со скоростью $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} \sin \alpha$ по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Радиус окружности при этом будет $r = \frac{m \mathbf{v}}{q B} \sin \alpha$. Шаг винтовой линии равен $h = \mathbf{v}_{\parallel} T = \mathbf{v} T \cos \alpha$. За-

менив $T = \frac{2\pi m}{B q}$, получим

$$h = 2\pi m \mathbf{v} \cos \alpha / (Bq).$$

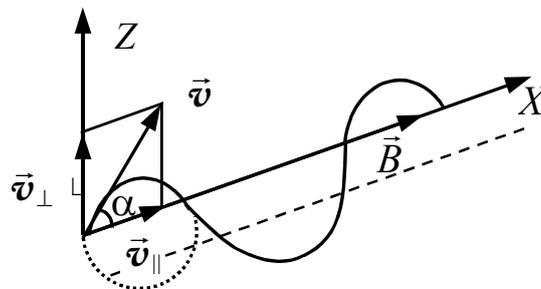


Рис. 11.8

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы.

Примечание: при решении задач Вам будет необходимо определить эквивалентный круговой ток электрона, движущегося по окружности. Для этого надо вспомнить, что называется силой тока – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в 1 с.

Для электрона $I_e = \frac{e}{T}$, здесь e – заряд; T – время одного оборота электрона по окружности.

Магнитный момент кругового тока $P_m = I_e S$, где S – площадь, ограниченная окружностью, описываемой электроном.

Подсказка

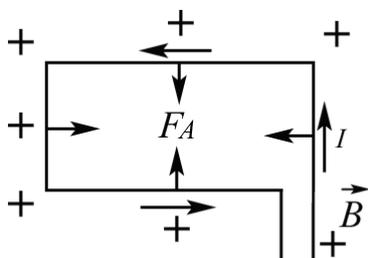


Рис. 11.9

Пользуясь правилом левой руки, не сложно выяснить, как будут действовать силы на рамку с током в магнитном поле:

1. Если плоскость рамки перпендикулярна линиям вектора \vec{B} .

Как видно из рис. 11.9, при выбранных на рисунке направлениях тока и вектора \vec{B} силы Ампера рамку сжимают. Если изменить направление тока или вектора \vec{B} , то рамка будет растягиваться. Если изменить и то и другое, то направление сил Ампера не изменится.

2. Если плоскость рамки параллельна линиям вектора магнитной индукции.

В этом случае на левую и правую стороны рамки действует пара сил (рис. 11.10), которая стремится повернуть рамку так, чтобы ее плоскость была перпендикулярна линиям вектора \vec{B} . В этом положении рамки момент вращения равен нулю:

$$M_{\text{вр}} = B \cdot P_m \cdot \sin\alpha, \quad \alpha = 0, \quad \text{поэтому } M_{\text{вр}} = 0.$$

На верхнюю и нижнюю стороны рамки силы Ампера не действуют, так как $F_A = IB \sin\alpha$, угол $\alpha = 0$, потому что нормаль \vec{n} либо совпадает по направлению с вектором \vec{B} , либо направлена противоположно.

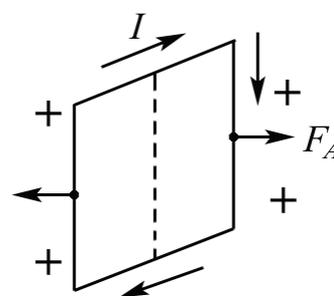


Рис. 11.10

Рассмотрим несколько задач

1. Прямоугольная рамка $ABCD$ с током $I = 1$ А расположена в однородном магнитном поле так, что ее плоскость перпендикулярна линиям индукции \vec{B} , величина которого $B = 0,1$ Тл. Выберите направление век-

тора \vec{B} и тока I , сделайте чертеж, найдите величину и направление сил Ампера, действующих на стороны рамки. Стороны рамки $AB = CD = a = 20$ см, $BC = AD = b = 10$ см.

Решение

Выберем направление вектора \vec{B} и тока I в рамке. Пусть вектор \vec{B} направлен «за чертеж», а ток обтекает рамку по часовой стрелке (рис. 11.11). Тогда силы Ампера будут растягивать рамку. Величина сил Ампера зависит от длин сторон, т. е.

$$F_{AB} = F_{CD} = I \cdot B \cdot a \quad (\sin \alpha = 1);$$

$$F_{BC} = F_{AD} = I \cdot B \cdot b \quad (\sin \alpha = 1).$$

Отсюда, подставив числовые данные, получим:

$$F_{AB} = F_{CD} = 0,02 \text{ Н}; \quad F_{BC} = F_{AD} = 0,01 \text{ Н}.$$

2. Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 800$ В, влетает в однородные скрещенные под прямым углом магнитное

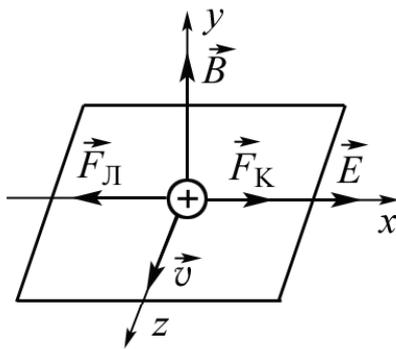


Рис. 11.12

и электрическое поля (рис. 11.12). Определить напряженность E электрического поля, если протон движется в скрещенных полях прямолинейно ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, $e_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

Решение

Протон в скрещенных под прямым углом электрическом и магнитном полях будет двигаться по прямолинейной траектории только в том случае, если силы, действующие со стороны электрического (F_K) и магнитного (F_L) полей, равны по величине и противоположны по направлению. Один из вариантов взаимного расположения векторов \vec{v} , \vec{B} и \vec{E} для выполнения этого условия представлен на рис. 11.12.

Поскольку $F_K = eE$ (e – заряд протона), $F_L = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}$ ($\sin \alpha = 1$), то $eE = E\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}$, отсюда $E = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}$.

Скорость частицы найдем по известной разности потенциалов, которую прошел протон. Работа по перемещению протона в электрическом поле

$$A = eU.$$

Поскольку работа равна изменению кинетической энергии протона, то

$$eU = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}; \quad \mathbf{v} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

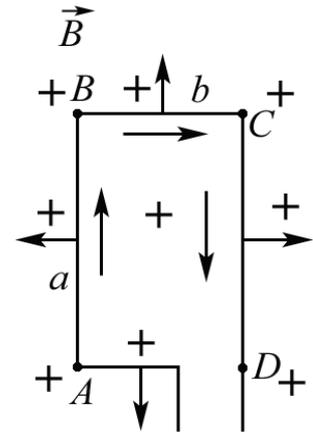


Рис. 11.11

Подставив числовые значения, окончательно получим $E = 19,6$ кВ/м.

3. Заряженная частица движется по окружности радиусом $R = 1$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. Вычислить промежуток времени Δt , в течение которого должно действовать электрическое поле для того, чтобы кинетическая энергия частицы возросла вдвое.

Решение

В отсутствие электрического поля частица двигалась по окружности, следовательно, ее скорость (\vec{v}_B) была перпендикулярна направлению вектора \vec{B} . При возбуждении электрического поля, напряженность которого параллельна вектору \vec{B} , на частицу будет действовать сила Кулона в направлении, совпадающем с направлением вектора \vec{E} (и вектора \vec{B}). Сила Кулона по второму закону Ньютона ($\vec{F}_K = m\vec{a}$) сообщит частице ускорение a , которое можно найти из равенства $Ee = ma$, откуда $a = E \cdot e/m$, здесь m – масса; e – заряд частицы.

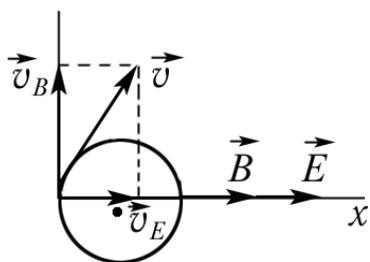


Рис. 11.13

Ускорение будет постоянным, так как $F_K = \text{const}$ (временем возбуждения электрического поля пренебрегаем).

Скорость частицы (\vec{v}_E) (рис. 11.13) в направлении оси x через промежуток времени Δt после возбуждения электрического поля будет равна

$$v_E = a \cdot \Delta t = \frac{E \cdot e}{m} \cdot \Delta t. \quad (1)$$

Суммарная скорость частицы \vec{V} , которая определяет кинетическую энергию частицы, будет равна геометрической сумме \vec{v}_B и \vec{v}_E . По условию, кинетическая энергия частицы должна возрасти в 2 раза, т. е.

$$\frac{m\mathbf{v}^2}{m\mathbf{v}_B^2} = 2; \quad \mathbf{v} = \sqrt{2}\mathbf{v}_B, \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_E, \quad \text{но} \quad \mathbf{v}_B = \frac{eBR}{m}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$v_B = \frac{eBR}{m} = \frac{E \cdot e}{m} \Delta t.$$

Отсюда

$$\Delta t = BR/E.$$

Подставив числовые данные, окончательно получим

$$\Delta t = 10 \cdot 10^{-6} \text{ с } (10 \text{ мкс}).$$

ТЕСТ

Вопросы

11.1. Рамка с током I расположена перпендикулярно направлению вектора \vec{B} (направлен за чертеж). Как будут действовать силы Ампера на стороны рамки (рис. 11.14)?

1. Поворачивать рамку.
2. Сжимать рамку.
3. Растягивать рамку.
4. Силы не будут действовать.

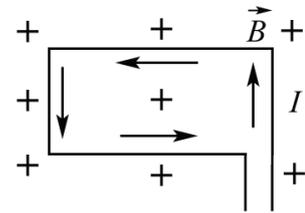


Рис. 11.14

11.2. Рамка с током I расположена перпендикулярно направлению вектора \vec{B} (направлен «к нам»). Как будут действовать силы Ампера на стороны рамки (рис. 11.15)?

1. Растягивать рамку.
2. Сжимать рамку.
3. Поворачивать рамку.
4. Силы не будут действовать.

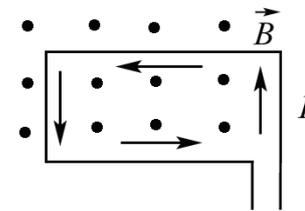


Рис. 11.15

11.3. Рамка с током I расположена перпендикулярно силовым линиям вектора магнитной индукции \vec{B} (направлен «к нам»). Как будут действовать силы Ампера на стороны рамки (рис. 11.16)?

1. Сжимать рамку.
2. Поворачивать рамку.
3. Растягивать рамку.
4. Силы не будут действовать.

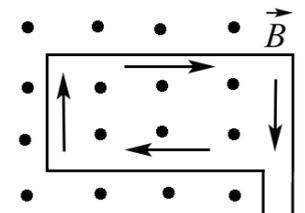


Рис. 11.16

11.4. Рамка с током I расположена перпендикулярно направлению вектора \vec{B} (направлен за чертеж). Как будут действовать силы Ампера на стороны рамки (рис. 11.17)?

1. Поворачивать рамку.
2. Растягивать рамку.
3. Сжимать рамку.
4. Силы не будут действовать.

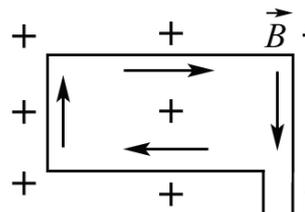


Рис. 11.17

11.5. Рамка с током I расположена так, что ее плоскость параллельна линиям магнитной индукции. Как будут действовать силы Ампера на стороны рамки (рис. 11.18.)?

1. Поворачивать рамку.
2. Растягивать рамку.
3. Сжимать рамку.
4. Силы не будут действовать.

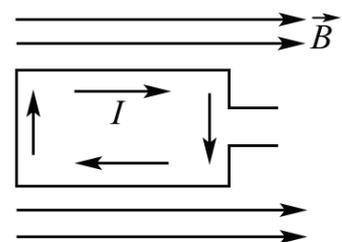


Рис. 11.18

11.6. Направление вектора магнитного момента рамки ...

- 1) совпадает с направлением тока в рамке;
- 2) противоположно направлению положительной нормали к плоскости рамки;
- 3) совпадает с направлением вектора магнитной индукции внешнего поля \vec{B} , если рамку с током поместить в поле;
- 4) противоположно направлению вектора магнитной индукции внешнего поля \vec{B} , если рамку с током поместить в поле.

11.7. Как направлена сила Лоренца, действующая на электрон, движущийся перпендикулярно силовым линиям вектора \vec{B} (направлен за чертеж) (рис.11.19)?

1. Вверх.
2. Вниз.
3. Вправо.
4. Влево.

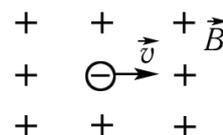
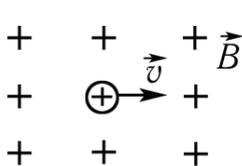


Рис. 11.19



11.8. Как направлена сила Лоренца, действующая на протон, движущийся перпендикулярно силовым линиям вектора \vec{B} (направлен за чертеж) (рис. 11.20)?

1. Вверх.
2. Вниз.
3. Вправо.
4. Влево.

Рис. 11.20

11.9. Электрон движется вдоль силовой линии вектора \vec{B} . Чему равна сила Лоренца (рис. 11.21)?

1. Нулю.
2. Сила Лоренца в этом случае имеет максимальное значение.
3. Сила Лоренца в этом случае имеет минимальное значение.
4. Бесконечно велика.

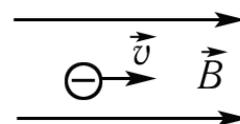
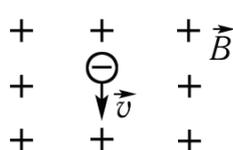


Рис. 11.21

11.10. Попробуйте преобразовать размерность вектора \vec{B} (Н/А·м), умножив числитель и знаменатель на метр и укажите правильный ответ.

1. $\frac{В \cdot с}{м^2}$.
2. $\frac{В \cdot м}{с}$.
3. $\frac{В \cdot м^2}{с}$.
4. $\frac{В \cdot с^2}{м}$.



11.11. Как направлена сила Лоренца, действующая на электрон, движущийся перпендикулярно силовым линиям вектора \vec{B} (направлен за чертеж) (рис. 11.22)?

1. Влево.
2. Вправо.
3. Вверх.
4. Вниз.

Рис. 11.22

11.12. Как направлена сила Лоренца, действующая на электрон, движущийся перпендикулярно силовым линиям вектора \vec{B} (направлен «к нам») (рис. 11.23)?

1. Влево.
2. Вправо.
3. Вверх.
4. Вниз.

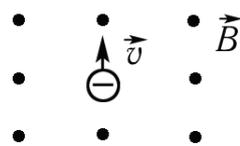


Рис. 11.23

11.13. Вращающий момент, действующий на рамку с током в магнитном поле, будет максимален, если

- 1) линии индукции лежат в плоскости рамки;
- 2) плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции;
- 3) плоскость рамки составляет угол $\pi/4$ с направлением линий индукции;
- 4) нормаль к рамке перпендикулярна линиям индукции.

11.14. Найдите правильное продолжение фразы: *вращающий момент, действующий на рамку с током в магнитном поле, будет минимален, если плоскость рамки*

- 1) перпендикулярна направлению линий индукции;
- 2) параллельна линиям магнитной индукции;
- 3) оставляет угол $\pi/4$ с направлением линий индукции;
- 4) оставляет угол $\pi/3$ с направлением линий индукции.

11.15. Найдите правильное продолжение фразы: *вращающий момент, действующий на рамку с током в магнитном поле, будет минимален, если нормаль к плоскости рамки*

- 1) параллельна линиям магнитной индукции;
- 2) перпендикулярна линиям магнитной индукции;
- 3) составляет угол $\pi/4$ с направлением линий магнитной индукции;
- 4) оставляет угол $\pi/3$ с направлением линий индукции.

11.16. Найдите правильное продолжение фразы: *вращающий момент, действующий на рамку с током в магнитном поле, будет максимален, если нормаль к плоскости рамки*

- 1) параллельна линиям магнитной индукции;
- 2) перпендикулярна линиям магнитной индукции;
- 3) составляет угол $\pi/4$ с направлением линий магнитной индукции;
- 4) оставляет угол $\pi/3$ с направлением линий индукции.

11.17. Как изменится период обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле, если ее скорость увеличится в 2 раза?

1. Не изменится.
2. Увеличится в 2 раза.
3. Уменьшится в 2 раза.
4. Увеличится в 4 раза.

11.18. Как изменится период обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле, если магнитная индукция уменьшится в 2 раза, а удельный заряд увеличится в 2 раза?

1. Не изменится.
2. Увеличится в 4 раза.
3. Уменьшится в 4 раза.
4. Увеличится в 2 раза.

11.19. Проводник с током I (длиной l) расположен в магнитном поле параллельно линиям вектора \vec{B} . Чему равна сила Ампера (F_A)?

1. $F_A = 0$.
2. $F_A = P_m \cdot B$.
3. $F_A = \infty$.
4. $F_A = I \cdot l \cdot B$.

11.20. Проводник с током I (длиной l) расположен в магнитном поле перпендикулярно линиям вектора \vec{B} . Чему равна сила Ампера (F_A)?

1. $F_A = 0$.
2. $F_A = I \cdot l \cdot B$.
3. $F_A = \infty$.
4. $F_A = P_m \cdot B$.

11.21. Найдите правильное заключение:

1. Силовые линии магнитной индукции начинаются на северном полюсе магнита и заканчиваются на южном.

2. Силовые линии напряженности электростатического поля разомкнуты: они начинаются на отрицательных и заканчиваются на положительных зарядах.

3. Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с токами.

4. Линии магнитной индукции параллельны проводникам с токами.

11.22. Чему равна работа силы Лоренца (A_L)?

1. $A_L = 0$, т. к. сила Лоренца перпендикулярна направлению скорости частицы.

2. $A_L = \infty$.

3. Работу A_L нельзя определить.

4. $A_L = e \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$.

11.23. Электрон, движущийся со скоростью v , влетает в однородное магнитное поле. Как изменится модуль скорости электрона?

1. Не изменится.
2. Увеличится.
3. Уменьшится.

11.24. Как изменится шаг винтовой линии, если удельный заряд частицы увеличится вдвое, а индукция уменьшится вдвое?

1. Не изменится.

2. Увеличится в 4 раза.

3. Уменьшится в 4 раза.

4. Увеличивается в 2 раза.

Задачи

11.1. Прямоугольная рамка $ABCD$ с током $I = 8$ А расположена в однородном магнитном поле так, что ее плоскость перпендикулярна линиям индукции B , величина которой $B = 0,1$ Тл. Выберите направление вектора B и тока I . Сделайте чертеж, найдите величину и направление сил Ампера, действующих на стороны рамки. Стороны рамки $AB = CD = a = 20$ см, $BC = AD = b = 10$ см.

11.2. Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 826$ В, влетает в однородные скрещенные под прямым углом магнитное $B = 81$ мТл и электрическое поля (рис. 11.12). Определить напряженность E электрического поля, если протон движется в скрещенных полях прямолинейно.

11.3. Заряженная частица движется по окружности радиусом $R = 5$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл. Парал-

тельно магнитному полю возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 105$ В/м. Вычислить промежуток времени Δt , в течение которого должно действовать электрическое поле, для того чтобы кинетическая энергия частицы возросла вдвое (рис. 11.13).

11.4. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл помещена квадратная рамка площадью $S = 25$ см². Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол 60° . Определить вращающий момент, действующий на рамку, если по ней течет ток $I = 1$ А.

11.5. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл по окружности. Определить угловую скорость вращения электрона ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

11.6. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 0,5$ кВ, влетая в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 2$ мТл, движется по окружности. Определить радиус этой окружности ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

11.7. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 2$ мТл, движется по круговой орбите радиусом $R = 15$ см. Определить магнитный момент P_m эквивалентного кругового тока.

11.8. Электрон движется в однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0,2$ мТл по винтовой линии. Определить скорость v электрона, если радиус винтовой линии $R = 3$ см, а шаг $h = 9$ см.

Указание: для упрощения решения задачи сначала найдите $\operatorname{tg} \alpha$, затем угол α .

11.9. Определить, при какой скорости пучок заряженных частиц, двигаясь перпендикулярно скрещенным под прямым углом однородным электрическому ($E = 100$ кВ/м) и магнитному ($B = 50$ мТл) полям, не отклоняется.

11.10. Заряженная частица, двигаясь перпендикулярно скрещенным под прямым углом электрическому ($E = 400$ кВ/м) и магнитному ($B = 0,25$ Тл) полям, не испытывает отклонения при определенной скорости v . Найти эту скорость.

11.11. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0,1$ Тл возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость v частицы.

11.12. Электрон, скорость которого $v = 1,6 \cdot 10^6$ м/с, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению поля. Индукция магнитного поля $B = 0,1$ Тл. Найти радиус винтовой траектории ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

11.13. Электрон, скорость которого $v = 1,7 \cdot 10^6$ м/с, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению поля. Найти шаг винтовой траектории электрона h .

11.14. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,3$ Тл под некоторым углом к направлению поля. Найти период обращения электрона по винтовой линии.

11.15. Электрон влетает в однородное магнитное поле под некоторым углом к направлению поля. Период обращения электрона по винтовой линии равен $T = 0,15$ нс. Найти индукцию магнитного поля B .

11.16. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл под углом $\alpha = 45^\circ$ к направлению поля. Шаг винтовой траектории электрона равен $h = 0,25$ мм. Найти скорость электрона v .

11.17. Электрон, скорость которого $v = 1,6 \cdot 10^6$ м/с, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению поля. Шаг винтовой траектории электрона равен $h = 0,3$ мм. Найти индукцию магнитного поля B .

11.18. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению поля. Радиус винтовой траектории электрона равен $R = 0,05$ мм. Найти скорость v электрона.

11.19. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью $v = 1,5 \cdot 10^6$ м/с под углом $\alpha = 45^\circ$ к направлению поля. Период обращения электрона по винтовой линии равен $T = 0,2$ нс. Найти радиус R винтовой траектории электрона ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

11.20. Протон влетел в магнитное поле перпендикулярно линиям индукции и описал дугу радиусом $R = 10$ см. Определить скорость протона, если магнитная индукция $B = 1$ Тл.

11.21. Определить частоту n обращения электрона по круговой орбите в магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл.

11.22. Электрон в однородном магнитном поле движется по винтовой линии радиусом $R = 5$ см и шагом $h = 20$ см. Определить скорость электрона, если магнитная индукция $B = 0,1$ мТл.

11.23. Проводник длиной $l = 1$ м движется со скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определить магнитную индукцию B , если на концах проводника возникает разность потенциалов $U = 0,02$ В.

11.24. Кольцо радиусом $R = 10$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,318$ Тл. Плоскость кольца составляет угол $\varphi = 30^\circ$ с линиями индукции. Вычислить магнитный поток, пронизывающий кольцо.

ЗАНЯТИЕ 12

ЗАКОН БИО – САВАРА – ЛАПЛАСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РАСЧЕТЕ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ И НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВ

Теория

Магнитные свойства веществ

Надеемся, что Вы не встречаете затруднений в определении величины и направления силовой характеристики электрического поля – вектора напряженности \vec{E} .

В настоящем занятии Вы научитесь определять величину силовой характеристики магнитного поля – вектора магнитной индукции \vec{B} (аналога вектора \vec{E}), а также вектора напряженности магнитного поля \vec{H} (аналога вектора электрического смещения \vec{D}). Но прежде, чем мы приступим к этой задаче, нам нужно выяснить назначение и различие векторов \vec{B} и \vec{H} .

Вектор магнитной индукции характеризует результирующее магнитное поле, создаваемое всеми **макро-** (токи в проводниках) и **микро-** **токами**. Микротоки обусловлены движением электронов в атомах и молекулах. Микротоки создают собственное магнитное поле вещества, ориентируясь определенным образом во внешнем магнитном поле. Поскольку величина и ориентация микротоков в разных средах различны, то и вектор \vec{B} имеет различное значение в разных средах (то есть зависит от свойств среды). Магнитное поле макротоків описывается вектором напряженности \vec{H} , т. е. вектор \vec{H} от свойств среды не зависит. Для однородной изотропной среды вектор индукции \vec{B} связан с вектором напряженности \vec{H} следующим соотношением:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H},$$

где μ_0 – магнитная постоянная (вспомните электрическую постоянную ϵ_0), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м (Гн – генри – единица измерения индуктивности в системе СИ); μ – магнитная проницаемость среды, которая показывает, во сколько раз магнитное поле макротоків (\vec{H}) увеличивается за счет поля микротоков среды (вспомните ϵ – диэлектрическую проницаемость). Для вакуума и воздуха $\mu = 1$ (так же, как $\epsilon = 1$). Направление

вектора \vec{H} (так же как и направление \vec{B}) определяется по правилу правого винта.

Чтобы научиться определять величину индукции и напряженности магнитного поля, нам придется сначала усвоить закон Био – Савара – Лапласа. Этот закон позволяет определить индукцию поля $d\vec{B}$, создаваемого элементом $d\vec{l}$ проводника с током I в некоторой точке A (рис. 12.1.) и записывается следующим образом:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I [d\vec{l} \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Здесь $d\vec{l}$ – вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током I ; \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из элемента dl проводника в точку A (рис. 12.1).

Направление $d\vec{B}$ и $d\vec{H}$ в точке A найдем по правилу правого винта. Направление вращения головки винта укажет направление $d\vec{B}$, если поступательное движение тела винта соответствует направлению тока в проводнике. Модуль вектора $d\vec{B}$ определяется выражением

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

здесь α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

В названии закона Био – Савара – Лапласа упомянуты имена трех ученых, открывших его. Все они французы. Ж. Био и Ф. Савар изучали опытным путем магнитные поля постоянных токов. Результаты этих опытов обобщил широко известный астроном, физик и математик Лаплас, учитель Ж. Био. Наполеон, уважавший ученых, на другой день после переворота 18-го брюмера назначил Лапласа министром внутренних дел, но через полгода был вынужден его заменить своим братом Люсьеном Бонапартом. Свое решение он объяснил так: «Великий астроном грешил тем, что рассматривал жизнь с точки зрения бесконечно малых». Все, что не касалось науки, для Лапласа было бесконечно малым. Подробнее о жизни ученых можно прочесть в разделе «Историческая справка».

Применение закона Био – Савара – Лапласа совместно с принципом суперпозиции (магнитное поле, так же как и электрическое, подчиняется этому принципу) позволяет довольно просто рассчитать конкретные поля.

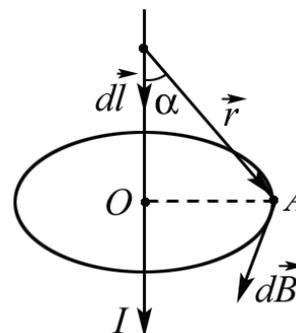


Рис. 12.1

1. Индукция магнитного поля прямолинейного проводника с током.

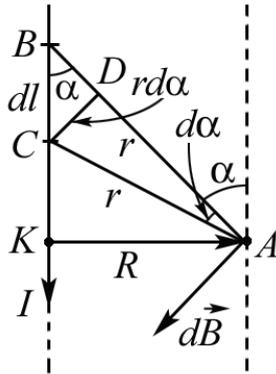


Рис. 12.2

На рис. 12.2 показан отрезок бесконечно длинного тонкого проводника с током I . Найдем индукцию в точке A , удаленной от проводника на расстояние R . При таком направлении тока, какое выбрано на рис. 12.2, векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление – «к нам» (по касательной к силовой линии).

Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заметить сложением их модулей.

Из закона Био – Савара – Лапласа следует:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \cdot \sin \alpha}{4\pi \cdot r^2}. \quad (1)$$

Из $\triangle BCD$: $dl = CD / \sin \alpha$; $CD = rd\alpha$, отсюда $dl = rd\alpha / \sin \alpha$.

Из $\triangle ACK$: $r = R / \sin \alpha$.

Подставив эти выражения в (1), получим

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \sin \alpha d\alpha. \quad (2)$$

Угол α для всех элементов тока прямолинейного бесконечно длинного проводника изменяется в пределах от 0 до π , поэтому

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Следовательно, индукция магнитного поля бесконечно длинного проводника с током I в точке на расстоянии R от него равна

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (3)$$

2. Индукция магнитного поля проводника с током конечной длины.

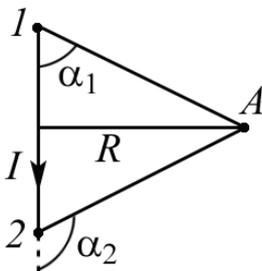


Рис. 12.3

На рис. 12.3 показан проводник с током I . Найдем выражение для определения индукции в точке A на расстоянии R от него.

Для этого нам достаточно проинтегрировать выражение (2). Определим пределы изменения угла α в данном случае. Если элемент dl находится в точке 1, тогда $\alpha = \alpha_1$, если в точке 2, тогда $\alpha = \alpha_2$. Следовательно,

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Таким образом, индукция B в точке на расстоянии R от проводника с током I находится из выражения

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Если точка A находится симметрично относительно концов проводника, то $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ и индукция B равна

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} \cos \alpha_1.$$

3. Индукция магнитного поля в центре кругового витка с током и на его оси.

Все элементы кругового витка с током создают в центре магнитное поле одного направления – вдоль нормали к плоскости витка (рис. 12.4).

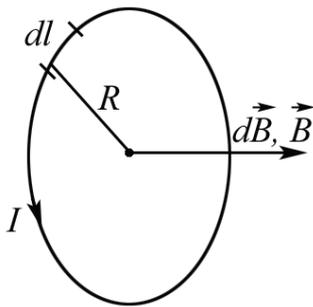


Рис. 12.4

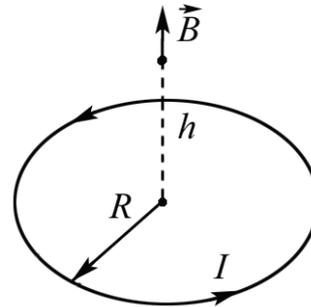


Рис. 12.5

Поэтому индукция B в центре витка будет равна

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl \quad (\sin \alpha = 1).$$

Таким образом,

$$B = \frac{\mu\mu_0 I \cdot 2\pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}.$$

Следовательно, индукция в центре витка с током I

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}.$$

На оси витка на расстоянии h от его центра (рис. 12.5) индукция равна

$$B = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Примечание: чтобы найти напряженность поля в рассмотренных случаях, нужно выражения, полученные для индукции, разделить на $\mu\mu_0$. Например, напряженность H в центре витка равна $H = I / 2R$ (отсюда легко найти единицу измерения напряженности в системе СИ).

Магнитные свойства веществ

Все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются, то есть приобретают магнитные свойства. Однако магнитные свойства разных веществ различны. Чтобы их изучать, нужно начать с атома. Воспользуемся классическими представлениями.

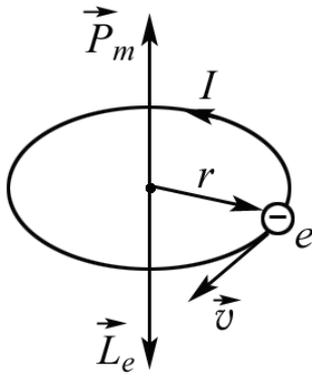


Рис. 12.6

Движение электрона на круговой орбите можно уподобить круговому току, то есть контуру с током. Ему соответствует орбитальный магнитный момент $\vec{P}_m = IS\vec{n}$, модуль которого равен $P_m = IS = enS$, здесь $I = en$ – сила кругового тока; n – частота обращения электрона по орбите; S – площадь орбиты. С другой стороны, электрон, обладая массой m и скоростью v , имеет механический орбитальный момент импульса $L_e = mvr$ ($\sin\alpha = 1$, рис. 12.6). Направления векторов \vec{P}_m и \vec{L}_e противоположны (хотя оба определяются по правилу правого винта), потому что направление \vec{P}_m определяется по направлению тока, т. е. по направлению движения положительной частицы, а \vec{L}_e – по направлению движения электрона. Но это еще не все. Оказалось, что электрон обладает собственным механическим моментом импульса \vec{L}_{es} , который был назван спином (от английского слова *spin* – «вертено»), потому что пытались объяснить наличие спина у электрона его вращением вокруг оси). Спины электрона соответствует собственный (спиновый) магнитный момент \vec{P}_{ms} . Магнитный момент электрона складывается из орбитального и спинового моментов. А магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов входящих в него электронов (магнитным моментом ядра пренебрегают).

Поместим атом в магнитное поле, направление которого показано на рис. 12.7. Вектор \vec{P}_m электрона может составлять с вектором \vec{B} внешнего магнитного поля угол α . Можно доказать, что вектор \vec{P}_m при этом будет прецессировать вокруг направления вектора \vec{B} (т. е. вращаться вокруг \vec{B} , описывая конус. Вспомните игрушку детства – волчок). Прецессирует также электронная орбита (рис. 12.7), что эквивалентно до-

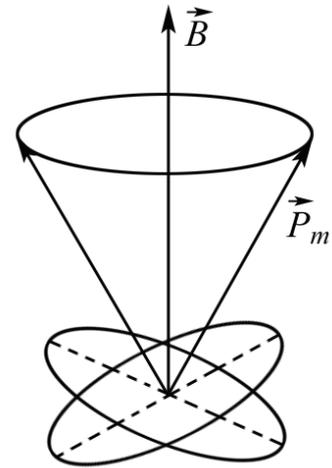


Рис. 12.7

получить магнитное поле, направление которого показано на рис. 12.7. Вектор \vec{P}_m электрона может составлять с вектором \vec{B} внешнего магнитного поля угол α . Можно доказать, что вектор \vec{P}_m при этом будет прецессировать вокруг направления вектора \vec{B} (т. е. вращаться вокруг \vec{B} , описывая конус. Вспомните игрушку детства – волчок). Прецессирует также электронная орбита (рис. 12.7), что эквивалентно до-

полнительному наведенному круговому току. Поскольку этот ток индуцирован, то по правилу Ленца магнитное поле этого микротока направлено противоположно внешнему полю.

Наведенные магнитные поля атомов складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее поле. Такой эффект получил название диамагнитного, а вещества – диамагнетиков. К диамагнетикам относятся: Bi, Ag, Au, Cu, большинство органических соединений, смолы, углерод и др. В отсутствие внешнего поля диамагнетик немагнитен (магнитные моменты электронов компенсируются, и суммарный момент атома равен нулю). Поскольку диамагнитный эффект обусловлен действием внешнего магнитного поля на электроны в атоме, то он свойственен всем веществам.

Существуют еще парамагнитный и ферромагнитный эффекты, благодаря которым создаются собственные магнитные поля, совпадающие по направлению с внешним полем и большие по величине, чем при диамагнитном эффекте. Атомы (молекулы) парамагнитных веществ всегда обладают магнитным моментом, однако вследствие теплового движения атомов (молекул) их магнитные моменты ориентированы хаотично и собственное магнитное поле в сумме равно нулю. Во внешнем магнитном поле магнитные моменты атомов парамагнетика ориентируются по направлению поля. Парамагнетики намагничиваются, их собственное магнитное поле усиливает внешнее. Этот эффект называется парамагнитным (аналогия с полярными диэлектриками). Как только внешнее поле исчезает, парамагнетик размагничивается. Парамагнетики – это щелочные и щелочноземельные металлы и газы: O₂, NO, MnO, FeCl₂, Pt, Al и др.

Намагниченность

Для количественного описания намагничивания вводится вектор намагничивания (или намагниченность \vec{J}):

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V}.$$

Здесь $\vec{P}_m = \sum \vec{P}_{ma}$ – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов атомов; V – объем магнетика. Таким образом, \vec{J} – это магнитный момент единицы объема магнетика (аналогия – вектор поляризации: $\vec{P} = \sum \vec{P}_i/V$).

В слабых магнитных полях для диа- и парамагнетиков намагниченность прямо пропорциональна напряженности внешнего магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}.$$

Здесь χ – магнитная восприимчивость вещества (аналог диэлектрической восприимчивости ϵ). Магнитная проницаемость μ и магнитная восприимчивость χ связаны зависимостью

$$\mu = 1 + \chi \text{ (в магнетиках),}$$

и аналогично $\epsilon = 1 + \epsilon$ (в диэлектриках).

Ферромагнетики по своим свойствам напоминают сегнетоэлектрики. Магнитная проницаемость ферромагнетиков зависит от внешнего поля, а зависимость намагниченности J (рис. 12.8) от напряженности внешнего поля H описывается петлей гистерезиса (так же как зависимость P от E для сегнетоэлектриков, только для ферромагнетиков петля более широкая). Ферромагнетики с узкой петлей гистерезиса называются магнитомягкими, используются для изготовления сердечников трансформаторов.

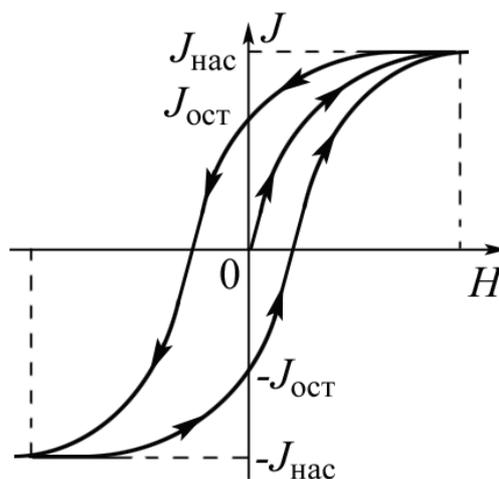


Рис. 12.8

Ферромагнитные вещества с широкой петлей называются жесткими и применяются для изготовления постоянных магнитов. Ферромагнетики – сильномагнитные вещества, в отличие от диа- и парамагнетиков. Они имеют макроскопические области – домены, самопроизвольно намагниченные до насыщения. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты доменов ориентированы хаотически, и ферромагнетик не намагничен. Внешнее магнитное поле ориентирует по полю магнитные моменты доменов, а не отдельных атомов, как это имеет место в парамагнетиках. Поэтому с ростом \vec{H} намагниченность J и вектор \vec{B} уже в слабых полях для ферромагнетиков растут очень быстро. При уменьшении внешнего магнитного поля до нуля ферромагнетики сохраняют остаточное намагничивание (рис. 12.8), то есть свои магнитные свойства. Так же как и сегнетоэлектрики, при нагревании до и выше температуры, называемой точкой Кюри, ферромагнетики теряют свои свойства и превращаются в парамагнетики. Этот переход является фазовым переходом II рода, так как не сопровождается поглощением или выделением теплоты. Точка Кюри у железа – 1043 К, у кобальта – 1403 К и у никеля – 631 К. Однако, если ферромагнетик охладить до температуры ниже точки Кюри, его свойства восстановятся.

В рамках квантовой теории магнитные свойства ферромагнетиков объясняются параллельным ориентированием спиновых магнитных мо-

ментов электронов в недостроенных внутренних оболочках атомов кристаллических веществ. В любой системе реализуются состояния с наименьшей энергией (вспомните предыдущие занятия: устойчивым является состояние с наименьшей энергией). Возникновение ферромагнетизма становится возможным при обменном взаимодействии, когда полная энергия минимальна, если спиновые магнитные моменты электронов параллельны. Магнитная проницаемость ферромагнетиков колеблется от 5000 (Fe) до 800 000 (супермаллой). Магнитная проницаемость диа- и парамагнетиков близка к единице, магнитная восприимчивость χ очень мала. Для диамагнетиков – отрицательна.

Историческая справка

Продолжим разговор о Лапласе. Как о нем пишут его современники, Лаплас был сдержанным, холодным и скрытным человеком. Он не оставил заметок, записок, каких-либо воспоминаний о своей жизни. Нам



Пьер Симон Лаплас

остается положиться на противоречивые высказывания о Лапласе как о великом ученом и беспринципном человеке, так как при каждой смене правительства он переходил на сторону победителей, получая от них почести и награды, а самое главное, возможность беспрепятственно работать. В этом он похож на Леонардо да Винчи. Жил Лаплас в эпоху величайших общественных потрясений: Великой французской буржуазной революции, правления Наполеона, реставрации монархии. Некоторые биографы Лапласа считают, что с его рождением связа-

на какая-то тайна.

Пьер Симон Лаплас родился 23 марта 1749 года в местечке Бомонан-Ож (Нормандия) в семье небогатого крестьянина. Крестьянский сын имел богатых покровителей, которые заботились о его образовании и дальнейшей судьбе. Предполагают, что Лаплас был незаконнорожденным сыном местного сеньора. Впоследствии граф и маркиз Лаплас стыдился своего незнатного происхождения и не поддерживал со своими родителями никаких отношений.

Пьер Симон рано проявил свои выдающиеся способности, с блеском окончил школу бенедиктинцев в Бомоне (вышел из нее убежденным атеистом). Работая в этой же школе преподавателем математики, Пьер в 17 лет написал свою первую научную работу. В 1766 году Лаплас переезжает в Париж и посвящает свою жизнь исследованиям в области математики, математической физики и небесной механики. Труд Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» издавался трижды при

жизни автора (1812, 1814, 1820). Пятитомное классическое сочинение Лапласа «Трактат о небесной механике» (1798–1825) содержит способы вычисления движения планет, определения их формы и теорию приливов. Как сказал бессменный секретарь Французской академии (членом которой Лаплас стал в 1817 году) Фурье: «Лаплас состоял членом всех известных ... академий наук».

В 1778 году Лаплас женился на Шарлотте де Курти – красивой с мягким характером, которая была значительно моложе своего мужа и делала все, чтобы оградить его от домашних забот и волнений. Семейная жизнь Лапласа текла ровно и приятно. У него были дочь и сын – впоследствии генерал Лаплас. Ученый прожил долгую жизнь и скончался в возрасте 78 лет, в 1827 году, после недолгой болезни. Его последние слова были: «То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, что мы не знаем».



Жан Батист Био

Жан Батист Био (21.04.1774–3.02.1862) – французский физик, член Парижской АН (1803). Родился в Париже. Окончил Политехническую школу (1797). С 1800 года – профессор Коллеж де Франс, в 1808–1849 годы – Парижского университета. Работы посвящены оптике, электромагнетизму, акустике, истории науки. Определял скорость звука в твердых телах (1809, 1823). В 1811 году открыл поляризацию при преломлении (независимо от Э. Малюса), в 1815 году – круговую поляризацию (независимо от Д. Араго и Д. Брюстера). Исследовал поляризационные свойства многих веществ. Обнаружил оптическую активность некоторых жидкостей (в частности, у скипидара), установив, что они обладают способностью вращать плоскость поляризации. Открыл закон вращения плоскости поляризации света (закон Био) и установил существование право- и левовращательных веществ (1815). Исследования Био вращения плоскости поляризации света в кристаллах и органических веществах положили начало сахарометрии (1836). В 1820 году вместе с Ф. Саваром экспериментально открыл закон электродинамики, определяющий величину напряженности магнитного поля, создаваемого электрическим током (закон Био – Савара). Совместно с Араго выполнил измерения плотности и показателя преломления различных газов (1806). Переоткрыл (1814) поляризационные свойства турмалина. Автор широко известного в свое время курса физики. Член Лондонского королевского общества (1815), Петербургской АН (1819).



Феликс Савар

Феликс Савар (30.06.1791–16.03.1841) – французский физик, член Парижской АН (1827). Родился в Мезьере. Окончил Страсбургский университет (1816), получив медицинское образование. Работал военным хирургом, с 1816 года занялся физикой, с 1828 года – профессор экспериментальной физики в Коллеж де Франс. Работы относятся к акустике, электромагнетизму, оптике, гидромеханике. Изобрел прибор для определения частоты звука (колесо Савара), изучал акустический резонанс, разрабатывал физические основы конструирования струнных инструментов, предложил конструкцию сирены. Показал (1826 г), что характер распространения звука в жидкостях такой же, как и в твердых телах. Проводил исследования пределов слышимости звука, в 1830 году установил верхний предел слышимости – 24 000 Гц, годом позже – нижний предел – 14–16 Гц. Изобрел для изучения поляризованного света кварцевую пластинку (пластинка Савара), полярископ (1840 г.).

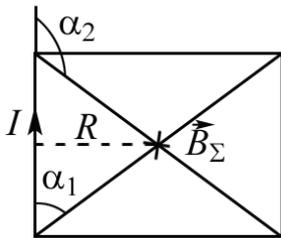


Рис. 12.9

Подсказка

1. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной, равной $a = 60$ см, течет постоянный ток $I = 3$ А. Определить индукцию магнитного поля в центре квадрата.

Решение

Выберем направление тока, как показано на рис. 12.9. По правилу правого винта определим направление векторов индукции магнитного поля, создаваемых каждой стороной квадрата. В центре квадрата они совпадают по направлению и направлены «от нас». Поскольку стороны рамки расположены на одинаковом расстоянии и ток в них одинаков, то равны будут по величине и векторы индукции, создаваемые каждой стороной квадрата, таким образом, индукция в центре квадрата (B_Σ)

$$B_\Sigma = 4B,$$

здесь B – индукция, создаваемая одной стороной.

Наша задача заключается теперь в том, чтобы найти индукцию, создаваемую одной стороной квадрата. А это не составит труда, т. к. мы уже имеем соотношение

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (1)$$

которое получили в разделе «Теория» для вычисления индукции, создаваемой проводником конечной длины в точке на расстоянии R от него.

На рис. 12.9 показаны углы α_1 и α_2 для выбранного нами направления тока. Выражение (1) для данного случая запишется как

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a} [\cos \alpha_1 - \cos(180^\circ - \alpha_1)] = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_1) = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi a} \cos \alpha_1,$$

здесь $R = a/2$.

Таким образом, индукция (B), создаваемая одной стороной квадрата в его центре, равна

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{\pi a} \cos \alpha_1.$$

Поскольку среда не указана, то $\mu = 1$, $B = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \cos \alpha_1$, а индукция в центре квадрата (B_Σ) равна

$$B_\Sigma = \frac{4\mu_0 I}{\pi a} \cos \alpha_1.$$

Подставим числовые данные: $B_\Sigma = 5,6 \cdot 10^{-6}$ Тл = 5,6 мкТл.

2. По двум параллельным прямым проводникам длиной $l = 2$ м, находящимся в вакууме на расстоянии $d = 10$ см друг от друга, в противоположных направлениях текут токи $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А. Определить силу взаимодействия токов.

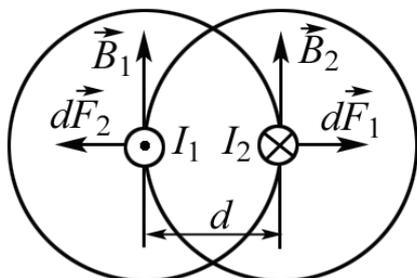


Рис. 12.10

Аналогично

$$dF_2 = I_1 B_2 dl. \quad (2)$$

Модули векторов магнитных индукций B_1 и B_2 (направления векторов \vec{B}_1 и \vec{B}_2 показаны на рис. 12.10) определяются соотношениями (см. раздел «Теория»):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}.$$

Подставив эти выражения в (1) и (2), получим, что по модулю

$$dF_1 = dF_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl = dF \quad (3)$$

(направления сил показаны на рис. 11.10). Проинтегрировав выражение (3), найдем искомую силу взаимодействия токов:

Решение

Согласно закону Ампера на каждый элемент длины проводника dl с током I_2 в магнитном поле, создаваемом током I_1 , действует сила

$$dF_1 = I_2 B_1 dl. \quad (1)$$

Ее направление определено по правилу левой руки и указано на рис. 12.10.

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^l dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l.$$

Вычисляя, получаем $F = 20$ мН.

3. По тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 10$ см течет ток $I = 80$ А. Найти магнитную индукцию B в точке A , равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 20$ см.

Решение

Для решения задачи воспользуемся законом Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \vec{r}]}{4\pi r^3},$$

где $d\vec{B}$ – индукция магнитного поля, создаваемая элементом тока $I d\vec{l}$ в точке, определяемой радиус-вектором \vec{r} . Выделим на кольце элемент $d\vec{l}$ и от него в точку A (рис. 12.11) проведем радиус-вектор \vec{r} . Вектор $d\vec{B}$ направим в соответствии с правилом правого винта. Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, магнитная индукция \vec{B} в точке A определяется интегралом

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B},$$

где интегрирование ведется по всем элементам dl кольца.

Разложим вектор $d\vec{B}$ на две составляющие: dB_{\perp} – перпендикулярную плоскости кольца и dB_{\parallel} – параллельную плоскости кольца, т. е.

$$d\vec{B} = d\vec{B}_{\perp} + d\vec{B}_{\parallel},$$

тогда

$$B = \int_L d\vec{B}_{\perp} + \int_L d\vec{B}_{\parallel}.$$

Заметив, что $\int_L d\vec{B}_{\parallel} = 0$ из соображений симметрии и что векторы

dB_{\perp} от различных элементов $d\vec{l}$ сонаправлены, заменим векторное суммирование (интегрирование) скалярным:

$$B = \int_L dB_{\perp},$$

где $dB_{\perp} = dB \cos \beta$ и $dB = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl}{4\pi \cdot r^2}$ (поскольку $d\vec{l}$ перпендикулярен \vec{r} и, следовательно, $\sin \alpha = 1$).

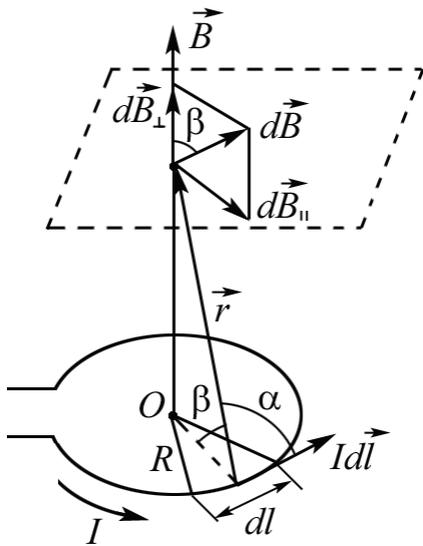


Рис. 12.11

Таким образом

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cos \beta \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \cos \beta \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot r^2}.$$

После сокращения на 2π и замены $\cos \beta$ на R/r , получим:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot r^3}.$$

Произведем вычисления: $B = 6,28 \cdot 10^{-5}$ Тл или $B = 62,8$ мкТл.

4. Бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 50$ А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом $R = 10$ см. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током, в случаях 1(а) – 10(к), изображенных на рис. 12.12.–12.21.

Решение

Случай 1(а)

Во всех рассматриваемых случаях магнитную индукцию в точке O найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B}_0 = \sum \vec{B}_i.$$

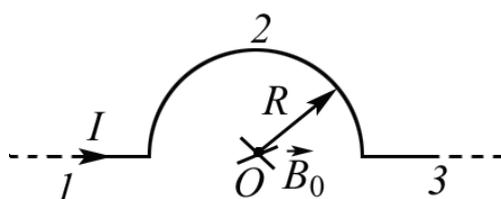


Рис. 12.12

В данном случае проводник можно разбить на три части (рис. 12.12): два прямолинейных проводника (1 и 3), одним концом уходящие в бесконечность, и дугу полуокружности (2) радиуса R .

Тогда

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3,$$

где \vec{B}_1 , \vec{B}_2 , \vec{B}_3 – магнитные индукции поля в точке O , создаваемые током, текущим соответственно на первом, втором и третьем участках проводника. Так как точка O лежит на оси проводников 1 и 3, то $B_1 = 0$ и $B_3 = 0$, тогда $B = B_2$.

Магнитную индукцию B_2 найдем, используя выражение для магнитной индукции в центре кругового проводника с током I :

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}.$$

Так как магнитная индукция создается в точке O половиной кругового проводника с током, то

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot R}.$$

Подставим числовые данные и получим, что $B_2 = B = 157$ мкТл.

Случай 2(б)

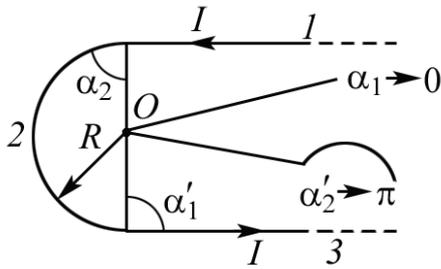


Рис. 12.13

Как следует из рис. 12.13, магнитная индукция в точке O создается двумя полу-бесконечными проводниками (1 и 3) и половиной кругового проводника с током (2), т. е.

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

Магнитную индукцию, создаваемую проводниками 1 и 3 в точке O , найдем из соотношения, полученного в разделе «Теория»:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Для проводника 1 угол $\alpha_1 \rightarrow 0$, а $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$; для проводника 3 угол $\alpha'_1 \rightarrow \pi/2$, а $\alpha'_2 \rightarrow \pi$.

Индукция, создаваемая в точке O половиной кругового витка с током, равна

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot R}.$$

По правилу правого винта определяем, что векторы \vec{B}_1 , \vec{B}_2 , \vec{B}_3 в точке O направлены «к нам», поэтому векторную сумму заменяем скалярной:

$$B_0 = B_1 + B_2 + B_3,$$

или, учитывая вышесказанное, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi \right) + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{2\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Приведем к общему знаменателю: $B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (2 + \pi)$, подставив данные, получим $B_0 = 257$ мкТл.

Случай 3(в) (рис. 12.14)

Так как точка O лежит на оси проводника 1, то $B_1 = 0$ и тогда

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

По правилу правого винта определяем, что векторы \vec{B}_2 и \vec{B}_3 в точке O направлены «к нам», поэтому

$$B_0 = B_2 + B_3.$$

Для кругового витка с током

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

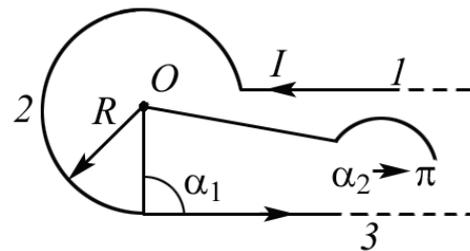


Рис. 12.14

Учитывая, что в данном случае длина кругового витка с током составляет $3/4$ окружности, получим

$$B = \frac{3\mu_0 I}{4 \cdot 2R} = \frac{3\mu_0 I}{8R}.$$

Для полубесконечного проводника 3

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Отсюда

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8\pi \cdot R} (3\pi + 2).$$

После подстановки числовых данных
 $B_0 = 286$ мкТл.

Случай 4(з) (рис. 12.15)

Разобьем проводник с током I на три части: два прямолинейных проводника (1 и 3), одним концом уходящие в бесконечность, и дугу окружности (2) радиуса R .

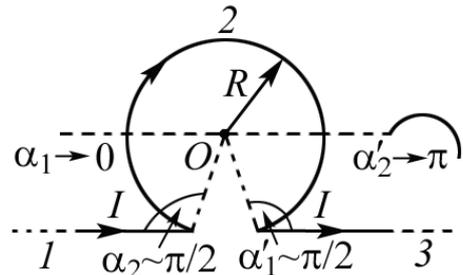


Рис. 12.15

Для данного случая получим:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot R} \left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} \right); B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot R} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi \right) = \frac{\mu_0 I \cdot 1}{4\pi \cdot R}; B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

По правилу правого винта определяем, что вектор \vec{B}_1 в точке O направлен «к нам», \vec{B}_2 – «от нас», а \vec{B}_3 – «к нам». Выберем за положительное направление «от нас», тогда B_0 в точке O будет равно

$$B_0 = B_2 - B_1 - B_3.$$

Отсюда

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{2\mu_0 I}{4\pi \cdot R}.$$

Приведа к общему знаменателю и сократив, получим

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot R} (\pi - 1).$$

После подстановки числовых данных $B_0 = 214$ мкТл.

Случай 5(д)

Для случая, изображенного на рис. 12.16, индукция B_0 в точке O создается двумя полубесконечными проводниками 1 , 3 и круговым витком с током 2 . Векторы магнитной индукции \vec{B}_1 , \vec{B}_2 , \vec{B}_3 в точке O имеют одинаковое направление «к нам», поэтому индукция B_0 в точке O равна

$$B_0 = B_1 + B_2 + B_3.$$

Для кругового витка $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

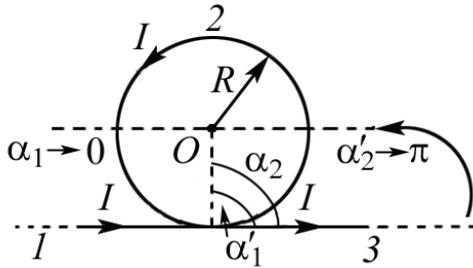


Рис. 12.16

Индукцию B_1 и B_3 можно найти из соотношений:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

здесь $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi/2$ (рис. 12.16);

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot R} (\cos \alpha'_1 - \cos \alpha'_2),$$

здесь $\alpha'_1 = \pi/2, \alpha'_2 = \pi$.

Таким образом,

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot R}.$$

Окончательно приведя к общему знаменателю и сократив, получим

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} + \frac{2\mu_0 I}{4\pi \cdot R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot R} (\pi + 1).$$

После подстановки числовых данных $B_0 = 414$ мкТл.

Случай б(е)

В данном случае (рис. 12.17) индукция B_0 в т. O создается $3/4$ кругового витка с током и двумя сторонами квадрата. Половинки сторон квадрата $1-2$ и $3-4$ магнитное поле в точке O не создают, т. к. точка O расположена на их осях.

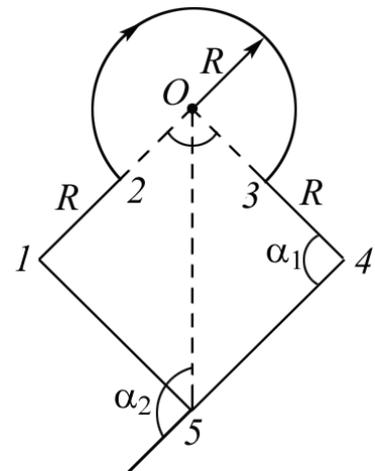


Рис. 12.17

Индукция, создаваемая одной стороной квадрата, определится из выражения

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot 2R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Для стороны $4-5$: $\alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 135^\circ$.

Для стороны $5-1$: $\alpha'_1 = 45^\circ, \alpha'_2 = 90^\circ$.

Таким образом:

$$B_{4-5} = \frac{\mu_0 I}{8\pi \cdot R} (\cos 90^\circ - \cos 135^\circ);$$

$$B_{5-1} = \frac{\mu_0 I}{8\pi \cdot R} (\cos 45^\circ - \cos 90^\circ).$$

Получим, что

$$B_{4-5} = B_{5-1} = \frac{\mu_0 I}{8\pi \cdot R} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Индукция B_1 , создаваемая $3/4$ кругового витка с током, равна

$$B_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

По правилу правого винта находим, что индукции B_1, B_{4-5}, B_{5-1} направлены «от нас», поэтому $B_0 = B_1 + 2B_{4-5}$.

Окончательно

$$B_0 = \frac{3\mu_0 I}{8R} + \frac{2\mu_0 I}{8\pi \cdot R} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

После простейших преобразований

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R} \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right).$$

Подставим числовые данные: $B_0 = 271$ мкТл.

Случай 7(ж)

В случае, изображенном на рис. 12.18, индукция в точке O создается двумя проводниками (I и II) в виде полуокружностей радиусов R и $2R$. Отрезки провода с током 1–2 и 3–4 в точке O магнитное поле не создают, т. к. точка O расположена на их осях. Направления векторов \vec{B}_1 и \vec{B}_2 в точке O совпадают (определяем по правилу правого винта). Индукция кругового витка с током в его центре равна

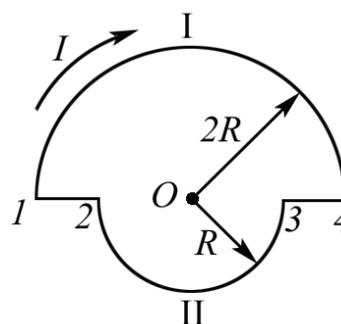


Рис. 12.18

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Для рассматриваемого случая

$$B_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 2R}; \quad B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Окончательно

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R} + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{3\mu_0 I}{8R} = 235,5 \text{ мкТл.}$$

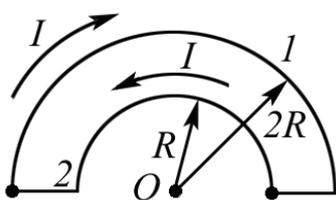


Рис. 12.19

Случай 8(з)

В случае, рассматриваемом на рис. 12.19, индукция \vec{B}_2 , создаваемая проводником в виде полуокружности радиуса R , направлена противоположно индукции \vec{B}_1 , создаваемой проводником I ; учитывая, что $B_2 > B_1$, для индукции B_0 в точке O получим:

$$B_0 = B_2 - B_1;$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}; B_1 = \frac{\mu_0 I}{8R}.$$

Таким образом,

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R} - \frac{\mu_0 I}{8R} = \frac{\mu_0 I}{8R} = 78,5 \text{ мкТл}.$$

Случай 9(и) (рис. 12.20)

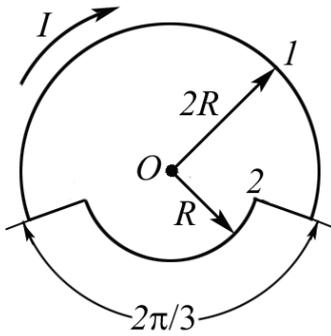


Рис. 12.20

В данном случае, т. к. B_1 и B_2 сонаправлены (направления векторов определяются по правилу правого винта), магнитная индукция в точке O (рис. 12.20) будет равна $B_0 = B_1 + B_2$, при этом

$$B_1 = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 2R}; B_2 = \frac{1}{3} \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Отсюда, приведя к общему знаменателю и сократив, получим

$$B_0 = \frac{2\mu_0 I}{12R} + \frac{\mu_0 I}{6R} = \frac{1}{3} \frac{\mu_0 I}{R}.$$

После подстановки числовых данных $B_0 = 209 \text{ мкТл}$.

Случай 10(к)

Для случая, изображенного на рис. 12.21, индукция B_0 в точке O создается проводником с током в виде полуокружности 1 и проводником в виде половины квадрата 2. Поскольку направления векторов \vec{B}_1 , и \vec{B}_2 в точке O совпадают, то $B_0 = B_1 + B_2$.

Для определения индукции B_2 воспользуемся соотношением

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

которое позволяет определить индукцию проводника конечной длины в точке на расстоянии R от него.

Для одной стороны квадрата (рис. 12.21) получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot R} 2 \cos \alpha_1 \quad (\alpha_1 = 45^\circ; \alpha_2 = 135^\circ).$$

Для четырех сторон

$$B' = \frac{4\mu_0 I}{4\pi \cdot R} 2 \cos \alpha_1.$$

Наконец, для половины квадрата

$$B_2 = \frac{2\mu_0 I}{2\pi \cdot R} \cos \alpha_1.$$

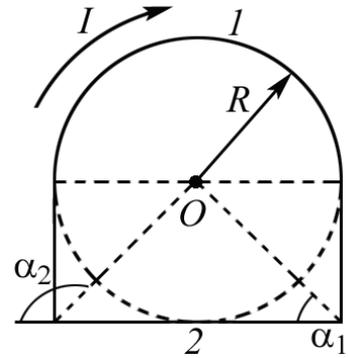


Рис. 12.21

Для проводника в виде полуокружности

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 2R}.$$

Окончательно получим

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{\pi \cdot R} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) = 298 \text{ мкТл}.$$

ТЕСТ

Вопросы

12.1. Найдите верное выражение:

1. *Направление вектора \vec{B} определяется по правилу правого винта, а вектора \vec{H} – по правилу левого винта.*
2. *Вектор \vec{B} определяется макротоками.*
3. *Вектор \vec{H} определяется макротоками (токами проводимости) и микротоками.*
4. *Величина векторов \vec{B} и \vec{H} зависит от среды.*

12.2. Найдите правильное заключение:

1. *Направление вектора \vec{B} определяется по правилу левого винта, а вектора \vec{H} – по правилу правого винта.*
2. *Вектор \vec{B} является силовой характеристикой магнитного поля и аналогом вектора \vec{E} , а вектор \vec{H} – аналогом вектора \vec{D} .*
3. *Величина вектора \vec{H} зависит от свойств среды.*
4. *Величина вектора \vec{B} не зависит от свойств среды.*

12.3. Какие величины имеют одинаковую единицу измерения в системе СИ?

1. *Напряженность магнитного поля и намагниченность.*
2. *Индукция и напряженность магнитного поля.*
3. *Магнитный поток и магнитная индукция.*
4. *Напряженность магнитного поля и магнитный момент.*

12.4. Какие величины имеют единицу измерения в СИ А/м?

1. *Индукция и напряженность магнитного поля.*
2. *Намагниченность и магнитный поток.*
3. *Намагниченность и напряженность магнитного поля.*
4. *Магнитный поток и магнитная индукция.*

12.5. Какая величина имеет размерность в СИ А·м²?

1. *Магнитный момент.*
2. *Магнитный поток.*
3. *Напряженность магнитного поля.*
4. *Магнитная индукция.*

12.6. Какая величина измеряется в системе СИ в теслах (Тл)?

1. *Магнитная индукция.*
2. *Магнитный момент.*
3. *Напряженность магнитного поля.*
4. *Намагниченность.*

12.7. Размерность какой величины в системе СИ имеет вид Тл·м²?

1. Магнитный поток.
2. Магнитная индукция.
3. Напряженность магнитного поля.
4. Магнитный момент.

12.8. Укажите, каким магнетикам соответствуют зависимости $J(H)$ (рис. 12.22).

1. 1 – диамагнетики; 2 – парамагнетики;
3 – ферромагнетики.

2. 1 – ферромагнетики; 2 – парамагнетики;
3 – диамагнетики.

3. 1 – диамагнетики; 2 – ферромагнетики; 3 – парамагнетики.

4. 1 – парамагнетики; 2 – ферромагнетики; 3 – диамагнетики.

12.9. Для каких видов магнетиков характерна прямая зависимость между намагниченностью и напряженностью магнитного поля?

1. Диамагнетиков и парамагнетиков.
2. Ферромагнетиков.
3. Ферромагнетиков и парамагнетиков.
4. Ферромагнетиков и диамагнетиков.

12.10. Какие величины безразмерные?

1. Магнитная восприимчивость (χ) и магнитная проницаемость (μ).
2. Намагниченность.
3. Магнитная постоянная (μ_0).
4. Магнитная индукция.

12.11. У Вас намагнитились ножницы. Они размагнитятся, если их ...

- 1) нагреть значительно выше точки Кюри;
- 2) нагреть до точки Кюри, но после охлаждения они снова намагнитятся;
- 3) нагреть до точки Кюри, а затем дать остыть;
- 4) поместить в жидкий азот.

12.12. Найдите правильное продолжение фразы: переход ферромагнетика в парамагнетик ...

- 1) является фазовым переходом III рода;
- 2) не является фазовым переходом;
- 3) является фазовым переходом I рода;
- 4) является фазовым переходом II рода.

12.13. В каком магнетике (при внесении его во внешнее магнитное поле) возникает собственное магнитное поле, противоположное внешнему?

1. Диамагнетике.
2. Парамагнетике.
3. Ферромагнетике.
4. Диа- и парамагнетиках.

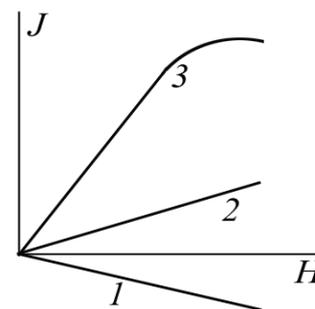


Рис. 12.22

12.14. Какая величина служит аналогом вектора намагниченности в электростатике?

1. Вектор напряженности электрического поля (\vec{E}).
2. Вектор электрического смещения (\vec{D}).
3. Вектор поляризации диэлектриков (\vec{P}).
4. Электрический дипольный момент.

12.15. Векторной величиной являются

- 1) намагниченность;
- 2) магнитная проницаемость;
- 3) магнитный поток;
- 4) магнитная восприимчивость.

12.16. Какими магнитными моментами обусловлены свойства ферромагнетиков?

1. Орбитальными магнитными моментами электронов.
2. Спиновыми магнитными моментами электронов.
3. Не зависят от магнитных моментов электронов.
4. Орбитальными и спиновыми магнитными моментами электрона.

12.17. Как взаимодействуют проводники с токами (рис. 12.23)?

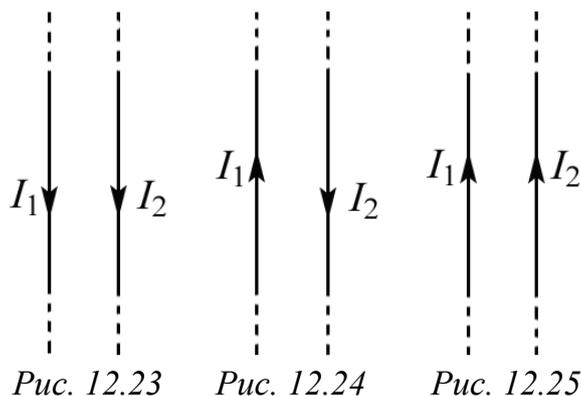
1. Притягиваются.
2. Отталкиваются.
3. Не взаимодействуют.

12.18. Как взаимодействуют проводники с токами (рис. 12.24)?

1. Притягиваются.
2. Отталкиваются.
3. Не взаимодействуют.

12.19. Как взаимодействуют проводники с токами (рис. 12.25)?

1. Не взаимодействуют.
2. Притягиваются.
3. Отталкиваются.



12.20. Закон Био – Савара – Лапласа совместно с принципом суперпозиции не позволяет найти магнитную индукцию

- 1) прямолинейного длинного проводника с током;
- 2) в центре и на оси кругового витка с током;
- 3) проводника с током конечной длины;
- 4) движущегося заряда.

12.21. Найдите верное заключение:

1. Силовые линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с током.

2. Линии напряженности электростатического поля замкнуты, они начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах.

3. Линии магнитной индукции начинаются на южном полюсе магнита (S) и заканчиваются на северном (N).

4. Линии магнитной индукции начинаются на северном полюсе магнита (N) и заканчиваются на южном (S).

12.22. Как изменится магнитная индукция в центре витка с током, если его радиус уменьшить вдвое, не изменяя ток в нем?

1. Увеличится вдвое.

2. Не изменится.

3. Уменьшится вдвое.

4. Увеличится в 4 раза.

12.23. Какой эффект свойственен всем магнетикам?

1. Диамагнитный. 2. Парамагнитный. 3. Ферромагнитный.

12.24. Найдите правильную аналогию:

1. Ферромагнетики – сегнетоэлектрики.

2. Диамагнетики – полярные диэлектрики.

3. Парамагнетики – неполярные диэлектрики.

4. Парамагнетики – сегнетоэлектрики.

12.25. Какие магнетики сохраняют остаточное намагничение при выключении внешнего магнитного поля?

1. Диа- и парамагнетики.

2. Диамагнетики.

3. Ферромагнетики.

4. Парамагнетики.

12.26. Петля гистерезиса – это зависимость

1) намагниченности от напряженности магнитного поля.

2) магнитной индукции от магнитного потока.

3) намагниченности от магнитного потока.

4) магнитной индукции от магнитной проницаемости.

12.27. Для каких магнетиков магнитная восприимчивость (χ) и магнитная проницаемость (μ) принимают значения $\chi < 0$ и $\mu < 1$?

1. Диамагнетиков.

2. Ферромагнетиков.

3. Парамагнетиков.

4. Диа- и парамагнетиков.

12.28. Для каких магнетиков магнитная восприимчивость (χ) и магнитная проницаемость (μ) принимают значения $\chi > 0$ и $\mu > 1$?

1. Диамагнетиков.

2. Ферромагнетиков.

3. Парамагнетиков.

4. Диа- и парамагнетиков.

12.29. Для каких магнетиков магнитная восприимчивость (χ) и магнитная проницаемость (μ) принимают значения $\chi \gg 0$ и $\mu \ll 1$?

1. Диамагнетиков.

2. Ферромагнетиков.

3. Парамагнетиков.

4. Диа- и парамагнетиков.

Задачи

12.1. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной, равной $a = 21$ см, течет постоянный ток $I = 5$ А. Определить индукцию магнитного поля в центре квадрата (рис. 12.9).

12.2. По двум параллельным прямым проводникам длиной $l = 2$ м, находящимся в вакууме на расстоянии $d = 10$ см друг от друга, в противоположных направлениях текут токи $I_1 = 23$ А и $I_2 = 94$ А (рис. 12.10). Определить силу взаимодействия токов.

12.3. По тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 92$ см течет ток $I = 75$ А. Найти магнитную индукцию B в точке A , равноудаленную от всех точек кольца на расстояние $r = 20$ см (рис. 12.11).

12.4. Бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 50$ А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом $R = 10$ см. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током, в случаях 1а – 10к, изображенных на рис. 12.12.–12.21 в подсказке.

12.5. Определить индукцию магнитного поля в центре проволочной квадратной рамки со стороной $a = 15$ см, если по рамке течет ток $I = 5$ А.

12.6. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого отрезком бесконечно длинного провода, в точке, равноудаленной от концов отрезка и находящейся на расстоянии $R = 4$ см от его середины. Длина отрезка провода $l = 20$ см, а сила тока в проводе $I = 10$ А.

12.7. Определить магнитную индукцию на оси тонкого проволочного кольца радиусом $R = 5$ см, по которому течет ток $I = 10$ А, в точке A , расположенной на расстоянии $d = 10$ см от центра кольца.

12.8. Определить магнитную индукцию B_A на оси тонкого проволочного кольца радиусом $R = 10$ см в точке, расположенной на расстоянии $d = 20$ см от центра кольца, если в центре кольца $B = 50$ мкТл.

12.9. Принимая, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите, определить отношение магнитного момента p_m эквивалентного кругового тока к моменту импульса L орбитального движения электрона.

12.10. По контуру в виде квадрата течет ток $I = 50$ А. Длина a стороны квадрата равна 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.

12.11. По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника, течет ток $I = 60$ А. Длины сторон прямоугольника равны $a = 30$ см и $b = 40$ см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.

12.12. Тонкий провод изогнут в виде правильного шестиугольника. Длина d стороны шестиугольника равна 10 см. Определить магнитную индукцию B в центре шестиугольника, если по проводу течет ток $I = 25$ А.

12.13. Напряженность магнитного поля в центре кругового витка $H = 64$ А/м. Радиус витка $R = 11$ см. Найти напряженность H' магнитного поля на оси витка на расстоянии $a = 10$ см от его плоскости.

12.14. Из проволоки длиной $l = 1$ м сделана квадратная рамка. По рамке течет ток $I = 10$ А. Найти напряженность H магнитного поля в центре рамки.

12.15. По тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 10$ см течет ток $I = 80$ А. Найти магнитную индукцию B в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 20$ см.

12.16. При какой силе тока I , текущего по тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 0,2$ м, магнитная индукция в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 0,3$ м, станет равной 20 мкТл?

ЗАНЯТИЕ 13

ЭФФЕКТ ХОЛЛА. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Теория

Эффект Холла

Американский физик Холл открыл этот эффект в 1879 году.

Поместим металлическую пластинку (если есть возможность, то лучше всего из золота) с током плотностью \vec{j} в магнитное поле \vec{B} , перпендикулярное \vec{j} (рис. 13.1).

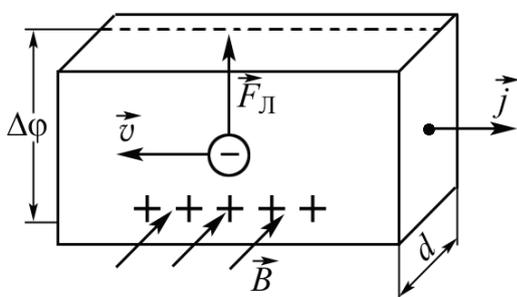


Рис. 13.1

При выбранном направлении \vec{j} скорость носителей тока – электронов – направлена справа налево. Электроны испытывают действие силы Лоренца, направление которой определяется по правилу левой руки. В данном случае она направлена вверх (рис. 13.1). Таким образом, у верхней грани пластинки возникает повышенная кон-

центрация электронов, и она заряжается отрицательно. У нижней грани появится недостаток электронов – она заряжается положительно. В результате между гранями возникает дополнительная разность потенциалов и электрическое поле, направленное снизу вверх. Холл установил, что поперечная разность потенциалов прямо пропорциональна магнитной индукции \vec{B} , силе тока I и обратно пропорциональна толщине пластинки d , т. е.

$$\Delta\varphi = R \frac{I \cdot B}{d}.$$

Здесь $R = \frac{1}{en}$ – постоянная Холла; e – заряд электрона; n – концен-

трация электронов. Постоянная Холла R зависит от вещества. По измеренному значению постоянной Холла R можно определить:

- 1) концентрацию носителей тока в проводнике (если известен их заряд);
- 2) знак носителей тока в полупроводнике и определить тем самым природу его проводимости.

Закон электромагнитной индукции

Об интересной судьбе Майкла Фарадея, английского физика, рассказано в разделе «Историческая справка» (советуем прочесть).

Майклу Фарадею было известно, что магнитное поле возбуждается вокруг проводника с током. Поскольку в природе многие явления симметричны, то должно существовать обратное явление – возбуждение электрического поля с помощью магнитного. В течение почти десятилетней работы Фарадею опытным путем удалось установить, что при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего плоскость замкнутого проводящего контура, в нем возникает ток, называемый индукционным (т. е. появляется электрическое поле). Это явление было названо явлением электромагнитной индукции.

Сформулируем закон электромагнитной индукции Фарадея:

В замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока Φ , пронизывающего плоскость контура, возникает ЭДС ε_i индукции, пропорциональная скорости изменения магнитного потока с обратным знаком:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Вспомните, что физический смысл производной – скорость изменения какой-либо величины. Знак минус в выражении (1) объясняется правилом Ленца: индукционный ток в контуре всегда имеет такое направление, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.

Напомним, что потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку dS называется скалярная величина, равная

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = B_n dS,$$

где $d\vec{S} = \vec{n}dS$, $B_n = B \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{B} на направление нормали к площадке dS ; α – угол между векторами \vec{B} и \vec{n} . Поток через произвольную поверхность S равен

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}.$$

Подумаем, каким образом можно изменять магнитный поток сквозь поверхность замкнутого контура?

1. Очевидно, самый простой способ – это движение постоянного магнита (рис. 13.2) сквозь поверхность контура.

2. Если в неподвижную катушку (1) вводить другую катушку (2), подключенную к источнику постоянного тока, то в катушке (1) возникает ЭДС индукции (рис. 13.3).

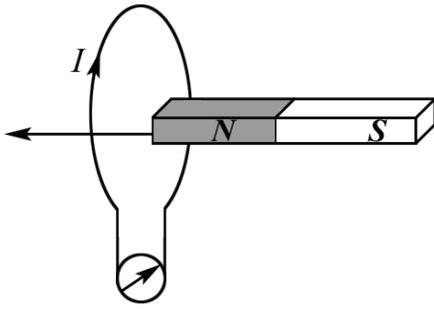


Рис. 13.2

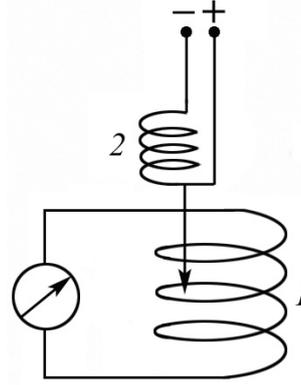


Рис. 13.3

3. Если вращать рамку или контур в однородном магнитном поле (рис. 13.4) равномерно с частотой ω , то магнитный поток сквозь поверхность, охватываемую рамкой (площадью S), будет изменяться по закону

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \omega t,$$

здесь угол $a = \omega t$ – это угол поворота рамки в момент времени t .

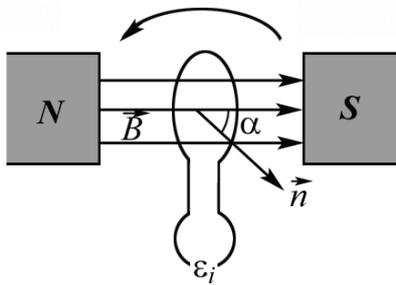


Рис. 13.4

Согласно закону Фарадея, мгновенное значение ЭДС индукции в рамке будет

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS \sin \omega t.$$

Нетрудно установить максимальное значение ЭДС $\varepsilon_{i\max}$ (если $\sin \omega t = 1$):

$$\varepsilon_{i\max} = BS\omega.$$

Среднее значение ЭДС индукции $\langle \varepsilon_i \rangle$ за время Δt можно найти из соотношения

$$\langle \varepsilon_i \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

здесь $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – изменение магнитного потока за время Δt .

Если увеличить число витков, то пропорционально увеличится и ЭДС индукции. Величина $\psi = N \cdot \Phi$ называется потокосцеплением. Выражение для ЭДС индукции в этом случае будет

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t.$$

Мы рассмотрели принципиальное устройство электрического генератора, в котором механическая энергия преобразуется в электрическую. Этот процесс обратим: если через рамку, помещенную в магнитное поле, пропускать ток, то на нее будет действовать вращающий момент и рамка начнет поворачиваться. Тогда мы получим электродвигатель – преобразователь электрической энергии в механическую.

4. Можно в самом замкнутом контуре пропускать переменный ток, тогда будет изменяться и сцепленный с ним магнитный поток. Следовательно, в контуре возникнет ЭДС индукции. *Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется явлением самоиндукции.*

Поскольку магнитная индукция, создаваемая проводником с током, по закону Био – Савара – Лапласа пропорциональна току I , то и магнитный поток Φ также пропорционален току ($\Phi = \int \vec{B}d\vec{S}$):

$$\Phi = L \cdot I,$$

здесь L – коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью. Единица измерения индуктивности в системе СИ – генри (Гн):

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}.$$

Индуктивность длинного соленоида (длинной катушки) равна

$$L = \mu \cdot \mu_0 \frac{N^2}{l} S,$$

здесь N – число витков соленоида; l – его длина; S – площадь сечения витка; μ – магнитная проницаемость среды, из которой изготовлен сердечник соленоида. Применим к явлению самоиндукции закон Фарадея:

$$\varepsilon_S = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Знак минус показывает, что любое изменение тока тормозится, то есть происходит медленнее из-за явления самоиндукции. Изменения тем медленнее, чем больше индуктивность L данного контура.

Вследствие явления самоиндукции при выключении ЭДС ток в цепи спадает по закону

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

где t – время протекания тока; R – сопротивление цепи; L – индуктивность.

При включении ЭДС ток нарастает по закону

$$I = I_0 \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right].$$

5. А теперь рядом с замкнутым контуром (1), в котором протекает изменяющийся во времени ток I_1 , поместим замкнутый контур (2). При этом в контуре (2) возникнет ЭДС ε_{12} (рис. 13.5).

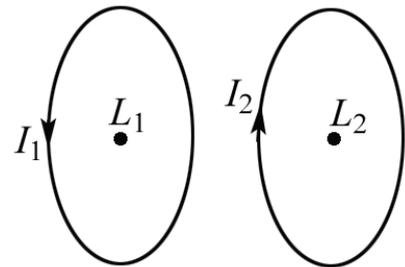


Рис. 13.5

Явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией.

По закону Фарадея $\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}$.

Если изменяется ток I_2 , во втором контуре, то ЭДС индукции в первом контуре равна

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Известно, что $L_{12} = L_{21}$ – взаимная индуктивность контуров (единица измерения – генри).

На явлении взаимной индукции основан принцип действия трансформаторов (рис. 13.6).

ЭДС взаимной индукции равна

$$\varepsilon_2 = -\frac{N_2}{N_1} \varepsilon_1,$$

здесь ε_1 – ЭДС источника переменного тока первичной катушки; ε_2 – ЭДС взаимной индукции; $\frac{N_2}{N_1} = n$ – коэффициент трансформации.

Индуктивности и взаимные индуктивности зависят только от геометрических характеристик контуров с током и их взаимного расположения.

Из рассмотренных пяти примеров видно, насколько широко применяется закон электромагнитной индукции Фарадея. Но это еще не все. Если вблизи массивных сплошных проводников (например, стальные станины различных устройств) проходят провода с переменным током, то в толще проводников возникают замкнутые токи, которые называются вихревыми, или токами Фуко. Эти токи вызывают нагревание проводников (используются в индукционных печах для плавки металлов) или торможение движения (используются для успокоения или демпфирования подвижных частей различных приборов). Направление вихревых токов определяется правилом Ленца.

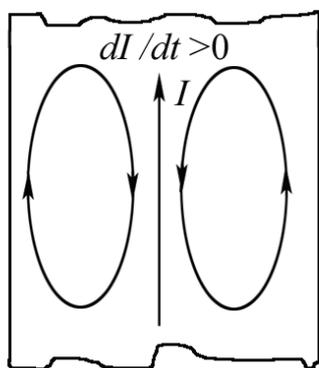


Рис. 13.7

На рис. 13.7 показано, что при возрастании тока в проводнике вихревой ток направлен так, что уменьшает первичный ток внутри проводника и увеличивает его вблизи поверхности. Таким образом, вследствие возникновения вихревых токов первичный переменный ток в проводнике как бы вытесняется на поверхность. Это явление получило название **скин-эффекта**, или поверхностного эффекта. Из-за этого эффекта про-

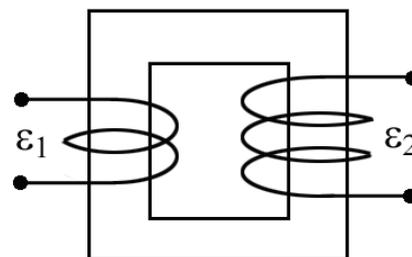


Рис. 13.6

водники для токов высокой частоты делаются полыми (волноводы). Скин-эффект применяют для поверхностной закалки металлов.

Примечания. 1. Применяя закон электромагнитной индукции, несложно получить выражение для вычисления количества электричества, индуцируемого в рамке: если $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$; $q = I \cdot \Delta t$; $I = \frac{\varepsilon_i}{R}$, следовательно, $q = \frac{\varepsilon_i}{R} \cdot \Delta t$.

Окончательно

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t \cdot R} \cdot \Delta t = -\frac{\Delta\Phi}{R};$$

или

$$q = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{1}{R} (\Phi_2 - \Phi_1).$$

2. Сила тока при размыкании (1) и замыкании (2) цепи:

$$I = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (1)$$

$$I = I_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad (2)$$

где $\tau = L/R$ – время релаксации; L – индуктивность; R – сопротивление.

Используя эти соотношения, можно находить изменения тока в катушке.

Преобразуем выражение в виде $\frac{I}{I_0} = e^{-t/\tau}$ и прологарифмируем для

нахождения, например, времени, в течение которого ток изменился.

Основы теории Максвелла для электромагнитного поля

Джеймс Максвелл обобщил закон электромагнитной индукции Фарадея на случай электромагнитного поля, включив его в систему уравнений, составляющих основу раздела «Электродинамика» и играющих в этом разделе ту же роль, что и законы Ньютона в механике.

Максвелл высказал гипотезу, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое является причиной возникновения индукционного тока в контуре. По представлениям Максвелла, контур, в котором проявляется ЭДС, играет второстепенную роль. Контур является всего лишь «прибором», обнаруживающим электрическое поле. Закон Фарадея Максвелл переписал следующим образом:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (2)$$

По физическому смыслу оно аналогично выражению (1), так как $\oint_L \vec{E} d\vec{L}$ – циркуляция вектора \vec{E} по замкнутому контуру L , равна действующей в контуре ЭДС (вспомните занятие «Законы постоянного тока»). Магнитный поток $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$, в итоге получим

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Поскольку циркуляция вектора \vec{E} по замкнутому контуру L для электрического поля, возбуждаемого магнитным полем, не равна нулю, то это электрическое поле, как и магнитное, является вихревым. Уравнение (2) также показывает, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющееся во времени магнитное поле.

Два других уравнения Максвелла – это теорема Гаусса для вектора \vec{D} и вектора \vec{B} (здесь \vec{D} – вектор электрической индукции):

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (3)$$

Смысл уравнения (3) состоит в утверждении, что источником электрического поля являются электрические заряды.

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (4) следует, что не существует свободных магнитных зарядов, силовые линии вектора магнитной индукции \vec{B} всегда замкнуты.

И, наконец, последнее уравнение Максвелла – это обобщенная теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля \vec{H} :

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = (I_{\text{пр}} + I_{\text{смещ}}). \quad (5)$$

Циркуляция вектора \vec{H} вдоль замкнутого контура L равна сумме

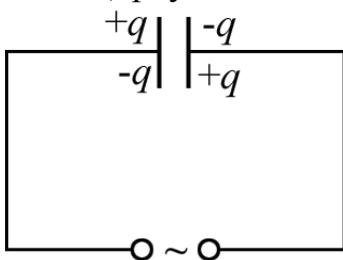


Рис. 13.8

токов проводимости $I_{\text{пр}}$ и смещения $I_{\text{смещ}}$, охватываемых этим контуром, – закон полного тока. Для пояснения понятия тока смещения рассмотрим конденсатор, подключенный к источнику переменного тока (рис. 13.8).

В конденсаторе ток проводимости, связанный с движением электронов, существовать не может, так как обкладки конденсатора разделены диэлектриком, однако обмен зарядами между обкладками происходит. Процесс, который как бы замыкает ток проводимости, т. е. обеспечивает обмен зарядом между обкладками конденсатора без переноса заряда между ними, называется током смещения.

Можно показать, что плотность тока смещения $\vec{j}_{\text{см}}$ равна

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Учитывая, что ток I равен $I = \int \vec{j} d\vec{S}$, уравнение (5) запишется в виде

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно – способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле. Теперь запишем уравнения Максвелла все вместе:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad \text{– закон электромагнитной индукции Фарадея –}$$

Максвелла.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{– теорема Гаусса.}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad \text{– закон полного тока.}$$

$$\text{Здесь } \vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}.$$

Заметим, что Фарадей не принял столь математическую запись открытого им закона.

Из уравнений Максвелла вытекает, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Для стационарных (неизменяющихся во времени полей $E = \text{const}$ и $B = \text{const}$) уравнения Максвелла примут вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q; \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

то есть источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, источниками магнитного – только токи проводимости. В данном случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что позволяет изучать отдельно постоянные электрические и магнитные поля.

Воспользовавшись известными из векторного анализа теоремами Стокса и Гаусса

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{A} d\vec{l} = \int_V \text{div} \vec{A} d\vec{V},$$

можно представить полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме (характеризующих поле в каждой точке пространства):

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}; \quad \text{div} \vec{D} = \rho; \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

Если заряды и точки распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений – интегральная и дифференциальная – эквивалентны. Однако если имеются поверхности разрыва – поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, – то интегральная форма уравнений является более общей.

Историческая справка

Майкл ФАРАДЕЙ родился в 1791 году в предместье Лондона в семье кузнеца и горничной. В 12 лет его школьное образование было закончено, и он стал работать рассыльным в одном из книжных магазинов Лондона. Однажды в этот магазин зашел друг физика Г. Дэви и был очень удивлен тем, что разносчик книг с большим интересом изучает «Британскую энциклопедию». Оказалось, что Майкл не просто читал, он пытался дома ставить опыты. В результате он был приглашен слушать лекции Г. Дэви, а в 1813 году стал его ассистентом в Королевском институте в Лондоне. Учился Майкл самостоятельно.



Майкл Фарадей

Вместе с Г. Дэви Фарадей много путешествовал, встречался с известными физиками Европы. Беседы с ними имели огромное значение для самообразования Фарадея, особенно встречи с Ампером. Прекрасный экспериментатор, Фарадей не видел смысла в математической логике физических законов, особенно уравнений Максвелла, поскольку математику не изучал. Фарадей был женат на известной французской актрисе Саре Бернар. Как пишут его биографы, был счастлив в браке. Опубликованные в России воспоминания Сары Бернар, к сожалению, охватывают отрезок времени, когда она еще не была знакома со своим будущим мужем.

В 1821 году он впервые осуществил вращение магнита вокруг проводника с током и проводника с током вокруг магнита, создав тем самым лабораторную модель электродвигателя. В этом опыте наглядно проявилась связь между электрическими и магнитными явлениями. В

1831 году открыл явление электромагнитной индукции – возникновение электрического тока в проводнике при изменении магнитного потока через контур проводника. В последующие годы подробно изучил открытое им явление и установил закон электромагнитной индукции. Открыл (1835) экстратоки при замыкании и размыкании и установил их направление. Ввел понятия: подвижность (1827), катод, анод, ионы, электролиз, электролиты, электроды (1834), изобрел вольтметр (1833). В 1845 году открыл диамагнетизм и в 1847 году – парамагнетизм. Обнаружил в 1845 году явление вращения плоскости поляризации света в магнитном поле (эффект Фарадея). В работах Фарадея по электромагнетизму важным также является понятие поля. Он первый в 30-х годах ввел это понятие, а в 1845 году употребил термин «магнитное поле». Отчетливо сформулировалась его концепция поля в 1852 году. По мнению А. Эйнштейна, идея поля была самой оригинальной идеей Фарадея, самым важным открытием со времен Ньютона. У Ньютона и других ученых пространство выступало как пассивноеместилище тел и электрических зарядов, у Фарадея же оно участвует в явлениях. «Надо иметь могучий дар научного предвидения, – писал А. Эйнштейн, – чтобы распознать, что в описании электрических явлений не заряды и не частицы описывают суть явлений, а, скорее, пространство между зарядами и частицами». Является создателем учения об электромагнитном поле. В 1846 году в мемуарах «Мысли о лучевых колебаниях» высказал идею об электромагнитной природе света.

Джеймс Клерк МАКСВЕЛЛ – английский физик, учился в Эдинбургском и Кембриджском университетах. Между прочим, Максвелл, как и Ньютон и Эйнштейн, в школе учился плохо. Пока его не заинтересовала геометрия. Последующие его работы в области статистической физики и электродинамики показали, что он был не только великолепным физиком, но и превосходным математиком. Уравнения электродинамики (уравнения Максвелла) были непонятны не только студентам, но и преподавателям, его современникам. Современники Максвелла свидетельствуют, что студенты посещали лекции по электродинамике очень неохотно, иногда Максвелл читал лекцию одному студенту. Но это его мало огорчало. Он говорил: «Мне достаточно одного слушателя, лишь бы он меня понимал». Максвелл был широко образованным человеком, любил поэзию, сам писал белые стихи. Джеймс Максвелл умер в



Джеймс Клерк Максвелл

возрасте 48 лет. В отличие от него, Майкл Фарадей прожил долгую жизнь и умер в возрасте 76 лет.

Работы Максвелла были посвящены электродинамике, молекулярной физике, общей статистике, оптике, механике, теории упругости. Наиболее весомый вклад Максвелл сделал в молекулярную физику и электродинамику. В кинетической теории газов установил в 1859 году статический закон, описывающий распределение молекул газа по скоростям (распределение Максвелла). В 1866 году дал новый вывод функции распределения молекул по скоростям, основанный на рассмотрении прямых и обратных столкновений, развил теорию переноса в общем виде, применив ее к процессам диффузии, теплопроводности и внутреннего трения, ввел понятие времени релаксации. Самым большим научным достижением Максвелла является созданная им в 1860–1865 годах теория электромагнитного поля, которую он сформулировал в виде системы нескольких уравнений (уравнения Максвелла), выражающих все основные закономерности электромагнитных явлений. В своей теории электромагнитного поля Максвелл использовал (1861) новое понятие – ток смещения, дал (1864) определение электромагнитного поля и предсказал (1865) новый важный эффект: существование в свободном пространстве электромагнитного излучения (электромагнитных волн) и его распространение в пространстве со скоростью света.

Подсказка

1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл равномерно вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков, с частотой $n = 43 \text{ с}^{-1}$. Площадь S рамки равна 150 см^2 . Определить мгновенное значение ЭДС индукции ε_i , соответствующее углу поворота рамки $\alpha = 30^\circ$.

Решение

Мгновенное значение ЭДС индукции определяется из уравнения электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (1)$$

здесь ψ – потокосцепление, равное $\psi = N \cdot \Phi$, где N – число витков, пронизываемых магнитным потоком Φ . Подставив выражение для ψ в формулу (1), получим

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}.$$

При вращении рамки магнитный поток Φ , пронизывающий рамку, изменяется во времени по закону

$$\Phi = BS \cos \omega t, \quad (2)$$

где B – магнитная индукция; S – площадь рамки; ω – угловая частота вращения.

Продифференцировав выражение (2) по времени, найдем выражение для вычисления мгновенного значения ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = NBS \omega \sin \omega t. \quad (3)$$

Заметим, что максимальное значение $\varepsilon_{i \max} = NBS \omega$.

Угловая частота ω связана с частотой n вращения соотношением $\omega = 2\pi n$. Подставив выражение ω в формулу (3) и заменив $\omega \cdot t$ на угол α , получим

$$\varepsilon_i = 2\pi n NBS \sin \alpha.$$

Проведя вычисления, найдем $\varepsilon_i = 47,1$ В.

2. По соленоиду длиной $l = 1$ м без сердечника, имеющему $N = 10^3$ витков, течет ток $I = 20$ А. Определить: 1) циркуляцию вектора магнитной индукции \vec{B} вдоль контура, изображенного на рис. 13.9а; 2) значение вектора магнитной индукции \vec{B} , воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора \vec{B} вдоль контура, изображенного на рис. 13.9б.

Решение

1. Циркуляция вектора \vec{B} вдоль любого замкнутого контура L в вакууме равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (4)$$

где n – число проводников с токами, охватываемых контуром L произвольной формы. Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Выражение (4) называют теоремой о циркуляции вектора \vec{B} , или законом полного тока (в вакууме).

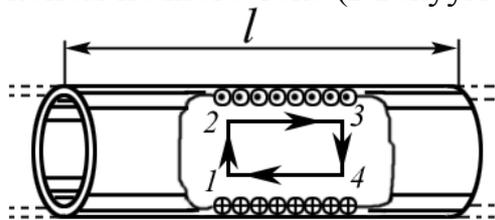


Рис. 13.9а

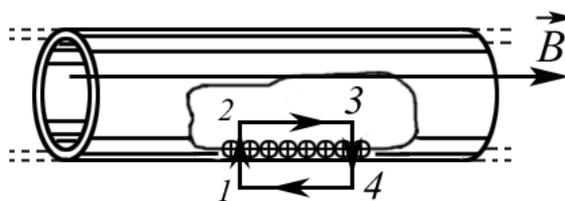


Рис. 13.9б

Из выражения (4) следует, что циркуляция вектора \vec{B} для случая, показанного на рис. 13.9а, равна нулю, т. к. контур токов не охватывает.

2. Для случая, изображенного на рис. 13.9б, будем рассматривать циркуляцию вектора \vec{B} вдоль сторон прямоугольника: 4–1, 1–2, 2–3, 3–4. Соленоид длинный, поэтому можно считать, что магнитное поле вне соленоида практически отсутствует, все поле сосредоточено внутри (так же, как электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора) и является однородным. Кроме того, проекции вектора \vec{B} на стороны 1–2 и 3–4 равны нулю, т. к. вектор \vec{B} направлен по оси соленоида, и угол α между \vec{B} и $d\vec{l}$ в данном случае равен $\pi/2$ ($\cos \alpha = 0$).

Поэтому остается рассмотреть только циркуляцию вектора \vec{B} вдоль стороны 2–3. Обозначим длину стороны 2–3 через a , тогда

$$\int_{2-3} \vec{B} d\vec{l} = \int_{2-3} B dl \cdot \cos \alpha = \int_0^a B dl = B \cdot a,$$

т. к. в пределах стороны 2–3 $\vec{B} = \text{const}$ и $\vec{B} \parallel d\vec{l}$.

Если на единицу длины соленоида приходится $n = N / l$ витков, то рассматриваемый контур охватывает $n \cdot a$ витков и, следовательно, Ina токов, которые текут в одном направлении, поэтому циркуляция вектора \vec{B}

$$B \cdot a = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l} \cdot a,$$

отсюда

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l}.$$

Воспользовавшись теоремой о циркуляции, мы нашли магнитную индукцию в центре соленоида (на его оси). Таким образом, теорема о циркуляции вектора \vec{B} имеет в учении о магнитном поле такое же значение, как и теорема Гаусса в электростатике, т. к. позволяет найти магнитную индукцию без применения закона Био – Савара – Лапласа.

Окончательно, подставив числовые данные, получим

$$B = 25,5 \text{ мТл.}$$

3. Определить, во сколько раз постоянная Холла у меди больше, чем у алюминия, если известно, что в алюминии на один атом приходится два свободных электрона, а в меди – 0,8 свободных электронов. Плотности меди и алюминия соответственно 8,93 и 2,7 г/см³.

Решение

$$\mu_{\text{Cu}} = 65,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; \mu_{\text{Al}} = 27 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Постоянная Холла R равна

$$R = \frac{1}{e \cdot n},$$

здесь e – заряд электрона; n – концентрация электронов.

Поэтому соотношение выглядит следующим образом:

$$\frac{R_{\text{Cu}}}{R_{\text{Al}}} = \frac{2 \cdot n_{\text{Al}}}{0,8 n_{\text{Cu}}},$$

здесь n_{Al} и n_{Cu} – концентрации атомов алюминия и меди.

Концентрацию можно найти по известной плотности и массе атома (молекулы) вещества, т. к. $\rho = m_0 \cdot n$, здесь ρ – плотность; m_0 – масса одного атома (молекулы); n – концентрация атомов, отсюда

$$n_{\text{Al}} = \frac{\rho_{\text{Al}}}{m_{0\text{Al}}}; \quad n_{\text{Cu}} = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{m_{0\text{Cu}}}.$$

Массу атома найдем как $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$ где μ – молярная масса вещества; N_A – число Авогадро.

$$\text{Таким образом, } n_{\text{Al}} = \frac{\rho_{\text{Al}} \cdot N_A}{\mu_{\text{Al}}}; \quad n_{\text{Cu}} = \frac{\rho_{\text{Cu}} \cdot N_A}{\mu_{\text{Cu}}}.$$

$$\text{Отношение постоянных Холла: } \frac{R_{\text{Cu}}}{R_{\text{Al}}} = \frac{2 \cdot \rho_{\text{Al}} \cdot \mu_{\text{Cu}}}{0,8 \cdot \rho_{\text{Cu}} \cdot \mu_{\text{Al}}}.$$

$$\text{Подставив числовые данные, получим } \frac{R_{\text{Cu}}}{R_{\text{Al}}} = 1,78.$$

4. Кольцо из алюминиевого провода ($\rho = 26$ нОм·м) помещено в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Диаметр кольца $D = 30$ см, диаметр провода $d = 2$ мм. Определить скорость изменения магнитного поля, если ток в кольце $I = 1$ А. (В ответе скорость изменения указать по модулю.)

Решение

Поскольку основной характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции, то в условии задачи требуется определить скорость изменения магнитной индукции. Зная, что физический смысл производной – скорость изменения какой-либо величины, устанавливаем, что требуется найти $\frac{dB}{dt}$.

Скорость изменения магнитной индукции может быть найдена из закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt},$$

здесь ε_i – ЭДС электромагнитной индукции в кольце; Φ – магнитный поток, пронизывающий плоскость кольца. Поток Φ равен

$$\Phi = \int_S \vec{B}(t) d\vec{S} = \int_S B(t) dS \cos \alpha.$$

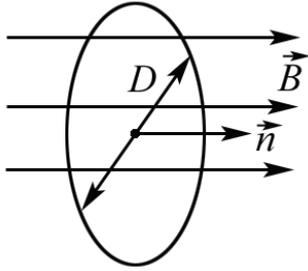


Рис. 13.10

Как следует из рис. 13.10, $\cos \alpha = 1$ (α – угол между \vec{B} и нормалью \vec{n} к плоскости кольца). Поскольку магнитная индукция B зависит только от времени, но одинакова во всех точках плоскости кольца для данного момента времени, то индукцию B можно вынести за знак интеграла. Таким образом,

$$\Phi = B(t) \cdot S = B(t) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}; \quad (S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \text{ – площадь кольца}).$$

$$\text{Следовательно, } \varepsilon_i = -S \frac{dB(t)}{dt} = -\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \frac{dB}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\varepsilon_i}{S} = \frac{4\varepsilon_i}{\pi \cdot D^2} \quad (\text{знак минус опускаем}).$$

ЭДС ε_i можем найти из закона Ома: $I = \frac{\varepsilon_i}{R}$, R – сопротивление кольца.

Отсюда

$$\varepsilon_i = I \cdot R.$$

Поскольку $R = \frac{\rho}{S'} \cdot l$, где ρ – удельное сопротивление материала кольца; l – длина кольца; S' – площадь поперечного сечения провода,

$$R = \rho \cdot \frac{2\pi \cdot D \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = \rho \cdot \frac{4\pi \cdot D}{\pi \cdot d^2} = \frac{4\rho \cdot D}{d^2}.$$

Подставим (6) и (7) в (5), получим

$$\frac{dB}{dt} = \frac{4 \cdot I \cdot R}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot I \cdot 4\rho \cdot D}{\pi \cdot D^2 \cdot d^2} = \frac{16I \cdot \rho}{\pi \cdot D \cdot d^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{dB}{dt} = \frac{16I \cdot \rho}{\pi \cdot D \cdot d^2}.$$

$$\text{Проверим размерность: } \left[\frac{dB}{dt} \right] = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{Ом}}{\text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл}}{\text{с}}.$$

Подставив числовые данные, получим $\frac{dB}{dt} = 0,11 \text{ Тл/с}$.

ТЕСТ

Вопросы

13.1. В каком направлении будет действовать сила на положительный заряд (рис. 13.11)?

1. Вверх.
2. Вниз.
3. Влево.
4. Вправо.

13.2. В каком направлении будет действовать сила на отрицательный заряд (рис. 13.12)?

1. Вверх.
2. Вниз.
3. Влево.
4. Вправо.

13.3. Какое явление поясняет рис. 13.13?

1. Эффект Холла.
2. Скин-эффект.
3. Явление электромагнитной индукции.
4. Явление самоиндукции.

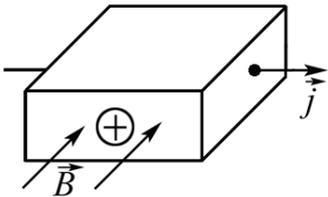


Рис. 13.11

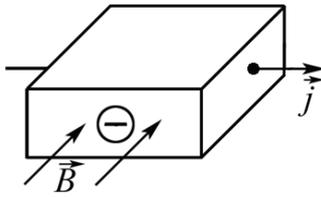


Рис. 13.12

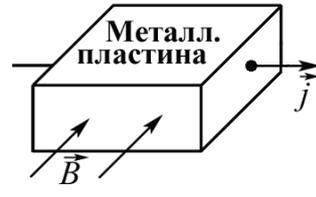


Рис. 13.13

13.4. Какое явление возникнет в замкнутом контуре при протекании в нем переменного тока?

1. Эффект Холла.
2. Скин-эффект.
3. Явление электромагнитной индукции.
4. Явление самоиндукции.

13.5. Какое явление позволяет определить знак носителей тока в полупроводниках?

1. Эффект Холла.
2. Скин-эффект.
3. Явление электромагнитной индукции.
4. Явление самоиндукции.
5. Явление взаимной индукции.

13.6. Один из двух контуров, плоскости которых параллельны (рис. 13.14), подсоединен к источнику постоянного тока, другой замкнут на гальванометр. Будет ли отклоняться стрелка гальванометра, и, если да, то в результате какого явления?

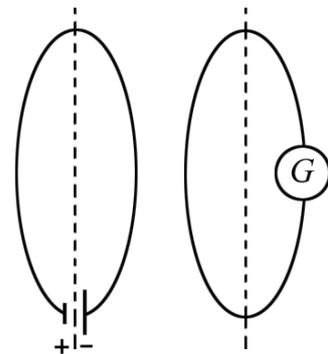


Рис. 13.14

1. Стрелка не будет отклоняться.
2. Стрелка отклоняется вследствие явления взаимной индукции.
3. Стрелка отклоняется вследствие явления самоиндукции.
4. Стрелка отклоняется вследствие эффекта Холла.

13.7. Какое явление используют для поверхностной закалки металлов?

1. Эффект Холла.
2. Скин-эффект.
3. Явление электромагнитной индукции.
4. Явление самоиндукции.

13.8. Из какого соотношения можно вычислить среднее значение ЭДС (ε_i) индукции?

1. $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.
2. $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.
3. $\varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt}$.
4. $\varepsilon_i = \omega BS \cos \omega t$.

13.9. Из какого соотношения можно вычислить мгновенное значение ЭДС (ε_i)?

1. $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.
2. $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.
3. $\varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt}$.
4. $\varepsilon_i = \omega BS \cos \omega t$.

13.10. Из какого соотношения можно вычислить максимальное значение ЭДС (ε_m) индукции в рамке, вращающейся с круговой частотой ω в магнитном поле, индукция которого B , а площадь рамки S ?

1. $\varepsilon_m = \omega BS$.
2. $\varepsilon_m = \omega BS \cos \omega t$.
3. $\varepsilon_m = \omega Bs \sin \omega t$.
4. $\varepsilon_m = B \cdot S$.

13.11. Стрелка гальванометра, включенного в замкнутый проводящий контур (рис. 13.15), будет отклоняться, если ...

- 1) в плоскости контура будет находиться постоянный магнит;
- 2) в контуре будет протекать постоянный ток;
- 3) в контуре будет протекать переменный ток;
- 4) плоскость контура будет пересекать постоянный магнит.

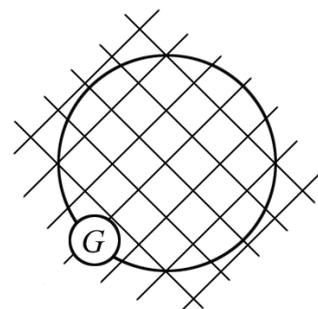


Рис. 13.15

13.12. Какое уравнение Максвелла позволяет утверждать, что силовые линии магнитного поля всегда замкнуты?

1. $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$.
2. $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$.
3. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$.
4. $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$.

13.13. Какое из уравнений Максвелла свидетельствует о том, что переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле?

1. $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$
2. $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$
3. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$
4. $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$

13.14. Какое из уравнений Максвелла является законом полного тока?

1. $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$
2. $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$
3. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$
4. $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$

13.15. Какое из уравнений Максвелла является законом электромагнитной индукции?

1. $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$
2. $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$
3. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$
4. $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$

13.16. Чему равна циркуляция вектора \vec{H} по замкнутому контуру L (рис. 13.16.), если в проводнике течет ток $I = 2$ А?

1. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0.$
2. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 2A.$
3. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 4A.$

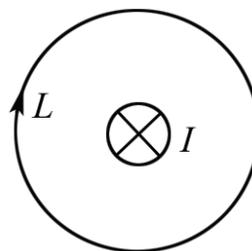


Рис. 13.16

13.17. Теплота выделяется в проводнике

1) при прохождении как тока проводимости, так и тока смещения;

2) только при прохождении тока смещения;

3) только при прохождении тока проводимости.

13.18. Чему равна циркуляция вектора \vec{H} по замкнутому контуру L (рис. 13.17), если он охватывает проводники с токами $I_1 = I_2 = 2$ А противоположного направления?

1. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0.$
2. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 2 \text{ А}.$
3. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 4 \text{ А}.$
4. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 3 \text{ А}.$

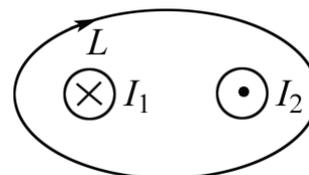


Рис. 13.17

13.19. Какая величина определяется скоростью изменения вектора электрического смещения?

1. Ток смещения.
2. Ток проводимости.
3. Плотность тока проводимости.
4. Плотность тока смещения.

13.20. По закону Джоуля – Ленца в проводнике выделилось количество теплоты Q при прохождении в нем

- 1) тока проводимости;
- 2) тока смещения;
- 3) тока проводимости и тока смещения;
- 4) переменного тока.

13.21. С направлением какого вектора совпадает направление вектора плотности тока смещения ($\vec{j}_{см}$)?

1. С направлением вектора \vec{H} .
2. С направлением вектора \vec{B} .
3. С направлением вектора \vec{D} .

13.22. Циркуляция ... по замкнутому контуру L равна нулю.

1) векторов напряженности электростатического и индукции магнитного полей;

- 2) вектора магнитной индукции \vec{B} ;
- 3) вектора напряженности электростатического поля \vec{E} ;
- 4) вектора напряженности магнитного поля \vec{H} ;
- 5) векторов напряженности и индукции магнитного поля.

13.23. Поток вектора ... сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.

- 1) электрического смещения \vec{D} ;
- 2) магнитной индукции \vec{B} ;
- 3) напряженности магнитного поля \vec{H} ;
- 4) напряженности электрического поля \vec{E} ;
- 5) напряженностей электрического и магнитного полей.

13.24. Какие величины векторные?

1. Поток магнитной индукции.
2. ЭДС индукции.
3. Индукционный ток.
4. Плотность тока смещения.
5. Индуктивность.

13.25. Вихревые токи возникают в проводках, в которых

- 1) течет переменный ток;
- 2) течет постоянный ток;
- 3) ток не протекает.

13.26. Работа электродвигателей основана на принципе

- 1) возникновения ЭДС в рамке, вращающейся в магнитном поле;
- 2) преобразования механической энергии в электрическую;
- 3) вращения рамки с током в магнитном поле;
- 4) непосредственного преобразования тепловой энергии в механическую.

13.27. Работа генератора электрического тока основана на принципе

- 1) вращения рамки с током в магнитном поле;
- 2) непосредственного преобразования тепловой энергии в электрическую;
- 3) возникновения ЭДС в рамке, вращающейся в магнитном поле;
- 4) изменения тока в рамке.

13.28. По правилу Ленца индукционный ток направлен

- 1) так, чтобы препятствовать изменению вызвавшего его магнитного потока;
- 2) противоположно току, обусловленному внешним источником (первичному току);
- 3) так же, как и первичный ток, если он возрастает;
- 4) встречно, если первичный ток убывает.

13.29. Чему равен ток во вторичной обмотке трансформатора (рис. 13.18)?

1. Нулю.

2. $I = \frac{U}{R}$, R – сопротивление обмотки; U – напряжение на вторичной обмотке.

3. $I = \frac{\varepsilon_i}{R}$, ε_i – ЭДС индукции во вторичной обмотке.

4. $I = \frac{\varepsilon_i + U}{R}$.

13.30. Какие величины имеют одинаковую единицу измерения в системе СИ?

1. ЭДС индукции, напряжение, потенциал.
2. Напряженность магнитного поля, намагниченность.
3. Магнитная индукция и электрическое смещение.
4. Плотность тока проводимости, плотность тока смещения, сила тока.
5. Магнитный поток, ЭДС индукции, напряжение.

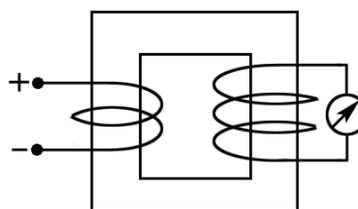


Рис. 13.18

Задачи

13.1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл равномерно вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков, с частотой $n = 43$ с⁻¹. Площадь S рамки равна 150 см². Определить мгновенное значение ЭДС ε_i , соответствующее углу поворота рамки $\alpha = 25^\circ$.

13.2. По соленоиду длиной $l = 1$ м без сердечника, имеющему $N = 1547$ витков, течет ток $I = 24$ А. Определить: 1) циркуляцию вектора магнитной индукции \vec{B} вдоль контура, изображенного на рис. 13.9а; 2) значение вектора магнитной индукции \vec{B} , воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора \vec{B} вдоль контура, изображенного на рис. 13.9б.

13.3. Определить, во сколько раз постоянная Холла у меди больше, чем у алюминия, если известно, что в алюминии на один атом приходится два свободных электрона, а в меди – 0,8 свободных электронов. Плотности меди и алюминия соответственно равны $8,93$ и $2,7$ г/см³.

$$\mu_{\text{Cu}} = 65,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; \quad \mu_{\text{Al}} = 27 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

13.4. Кольцо из алюминиевого провода ($\rho = 26$ нОм·м) помещено в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции (рис. 13.10). Диаметр кольца $D = 30$ см, диаметр провода $d = 4$ мм. Определить скорость изменения магнитного поля, если ток в кольце $I = 5$ А. (В ответе скорость изменения указать по модулю).

13.5. Определить постоянную Холла для натрия, если для него отношение концентрации электронов проводимости к концентрации атомов составляет $0,984$. Плотность натрия $\rho = 0,97$ г/см³.

13.6. Через сечение медной пластинки толщиной $d = 0,2$ мм пропускается ток $I = 6$ А. Пластинка помещается в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл, перпендикулярное ребру пластинки и направлению тока. Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определить возникающую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди $\rho = 8,93$ г/см³; $\mu_{\text{Cu}} = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

13.7. Определить циркуляцию вектора магнитной индукции по окружности, через центр которой перпендикулярно ее плоскости проходит бесконечно длинный прямолинейный провод, по которому течет ток $I = 5$ А.

13.8. В однородном магнитном поле ($B = 0,1$ Тл) равномерно вращается прямоугольная рамка, содержащая $N = 200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 100$ см². Определить частоту вращения рамки, если максимальная ЭДС, индуцируемая в ней, $\varepsilon_{i \max} = 12,6$ В.

13.9. Магнитная индукция B поля между полюсами двухполюсного генератора равна 1 Тл. Ротор имеет 140 витков (площадь каждого витка $S = 500 \text{ см}^2$). Определить частоту вращения якоря, если максимальное значение ЭДС индукции равно 220 В.

13.10. В однородном магнитном поле равномерно вращается прямоугольная рамка с частотой $n = 600 \text{ мин}^{-1}$. Амплитуда индуцируемой в рамке ЭДС $\varepsilon_0 = 3 \text{ В}$. Определить максимальный магнитный поток через рамку.

13.11. Через катушку, индуктивность L которой равна 200 мГн, протекает ток, изменяющийся по закону $I = 2 \cdot \cos 3t$. Определить максимальное значение ЭДС самоиндукции.

13.12. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,35 \text{ Тл}$ равномерно с частотой $n = 480 \text{ мин}^{-1}$ вращается рамка, содержащая $N = 1500$ витков площадью $S = 50 \text{ см}^2$. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции ε_{\max} , возникающую в рамке.

13.13. Рамка площадью $S = 200 \text{ см}^2$ равномерно вращается с частотой $n = 10 \text{ с}^{-1}$ относительно оси, лежащей в плоскости рамки, и перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0,2 \text{ Тл}$). Каково среднее значение ЭДС индукции $\langle \varepsilon_i \rangle$ за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения?

13.14. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4 \text{ Тл}$ в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной $l = 10 \text{ см}$. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов U на концах стержня при частоте вращения $n = 16 \text{ с}^{-1}$.

13.15. Круговой контур радиусом 2 см помещен в однородное магнитное поле, индукция которого $0,2 \text{ Вб/м}^2$. Плоскость контура перпендикулярна направлению магнитного поля, сопротивление контура 1 Ом. Какое количество электричества протечет через катушку при повороте ее на 90° ?

13.16. В магнитном поле, индукция которого равна 500 Гс ($1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}$), помещена катушка, состоящая из 200 витков проволоки. Сопротивление катушки 40 Ом, площадь ее поперечного сечения 12 см^2 . Катушка помещена так, что ее ось составляет 60° с направлением магнитного поля. Какое количество электричества протечет по катушке при исчезновении магнитного поля?

13.17. Катушка имеет сопротивление $R = 10$ Ом и индуктивность $L = 0,144$ Гн. Через какое время после включения в катушке установится ток, равный половине установившегося?

13.18. Имеется катушка, индуктивность которой равна $0,2$ Гн и сопротивление $1,64$ Ом. Найти, во сколько раз уменьшится сила тока в катушке через $0,05$ с после того, как ЭДС выключена и катушка замкнута накоротко.

13.19. Катушка длиной 20 см и диаметром 3 см имеет 400 витков. По катушке идет ток силой 2 А. Найти: 1) индуктивность катушки; 2) магнитный поток, пронизывающий площадь ее поперечного сечения.

13.20. Из какого числа витков проволоки состоит однослойная обмотка катушки, индуктивность которой $0,001$ Гн? Диаметр катушки 4 см, диаметр проволоки $0,6$ мм. Витки плотно прилегают друг к другу.

13.21. В магнитное поле, индукция которого равна $0,1$ Тл, помещена квадратная рамка из медной проволоки. Площадь поперечного сечения проволоки 1 мм², площадь рамки 25 см², нормаль к плоскости рамки направлена по силовым линиям поля. Какое количество электричества пройдет по контуру рамки при исчезновении магнитного поля?

ЗАНЯТИЕ 14

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Теория

*И надо мною роковой,
Неутомимый маятник качается
И хочет быть моей судьбой.*

О. Мандельштам

Мы начинаем знакомиться с колебаниями – процессами, обладающими той или иной периодичностью во времени. Трудно указать другие процессы, которые были бы так широко распространены в природе, начиная от атома и заканчивая Вселенной.

Общие закономерности колебательных процессов различной природы дают возможность использовать одни и те же соотношения для механических, акустических и электромагнитных колебаний.

Механические колебания

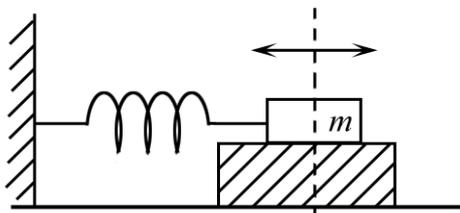


Рис. 14.1

1. *Пружинный маятник.* Самой простой колеблющейся системой является пружинный маятник (рис. 14.1).

Если растянуть пружину, груз будет совершать периодические движения под действием упругой силы пружины $F = -k \cdot x$ – закон Гука, здесь k – жесткость пружины; x – отклонение груза от положения равновесия. По второму закону Ньютона

ускорение груза

$$F = m \cdot a, \text{ или } m \cdot a = -k \cdot x, \quad (1)$$

$$a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Обозначая вторую производную от смещения по времени как \ddot{x} , запишем (1) в виде

$$m\ddot{x} + kx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0.$$

Введем обозначение

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ тогда } \ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0. \quad (2)$$

Как известно из курса высшей математики, решением дифференциального уравнения второго порядка (2) является выражение

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3)$$

Таким образом, смещение точки от положения равновесия x изменяется со временем по закону косинуса. Колебания, совершающиеся по закону косинуса или синуса, называются *гармоническими*. Следовательно, колебания пружинного маятника являются гармоническими. Если колебания совершаются за счет первоначального отклонения от положения равновесия без последующих внешних воздействий, то они называются *свободными*. Колебания пружинного маятника являются свободными гармоническими.

Система, совершающая колебания согласно (2), называется *гармоническим осциллятором*. Гармонический осциллятор служит моделью во многих задачах классической и квантовой физики.

Рассмотрим основные понятия и характеристики колебаний. В выражении (3) используются следующие обозначения:

Время одного полного колебания называется периодом T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \text{или} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Число колебаний в одну секунду называется частотой колебаний (ν):

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Примерами гармонических осцилляторов являются также физический и математический маятники.

2. *Физический маятник* – это твердое тело (рис. 14.2), совершающее колебания относительно неподвижной оси, проходящей через точку O и не проходящей через его центр масс (точку C).

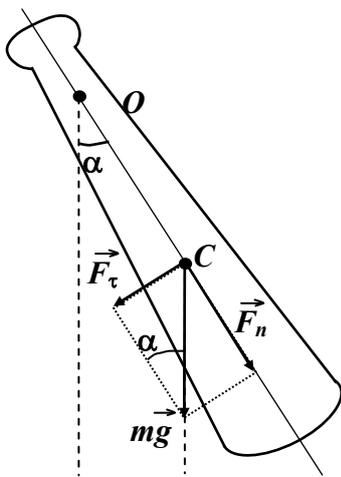


Рис. 14.2

При отклонении тела от положения равновесия на малый угол α на тело действует момент силы тяжести (M) относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через точку O :

$$M = F_\tau \cdot l = -m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot l,$$

где l – расстояние от центра масс (точка C) до оси вращения (точка O). Знак минус указывает на то, что направление возвращающей силы

$$F_\tau = -m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

всегда противоположно отклонению (направлению отсчета угла α).

В соответствии с уравнениями динамики вращения твердого тела относительно неподвижной оси момент M возвращающей силы F_τ можно записать в виде $M = J \cdot \varepsilon$, где J – момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку O ; ε – угловое ускорение. Поскольку

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

то

$$J \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot l. \quad (4)$$

При малых отклонениях $\sin \alpha \approx \alpha$, тогда (4) можно записать в виде

$$J \cdot \ddot{\alpha} + m \cdot g \cdot l \cdot \alpha = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{m \cdot g \cdot l}{J} \cdot \alpha = 0.$$

Обозначив $\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l}{J}}$, получим $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0$.

Это аналогично (2). Решение этого уравнения:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (5)$$

Из выражения (5) следует, что при малых отклонениях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot l}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}},$$

где $L = \frac{J}{m \cdot l}$ – приведенная длина физического маятника.

Примерами физического маятника могут служить колебания маятника часов, мостов, мачт, зданий, грузов, поднимаемых лебедками и кранами, шатунов, клапанов, топлива в бензобаке при движении машины и т. д.

3. Математический маятник.

Представим себе, что вся масса физического маятника сосредоточена в очень малом объеме, так что размерами такого тела можно пренебречь. Подвесим теперь эту материальную точку на тонкой, невесомой и нерастяжимой нити. Таким образом, получим математический маятник (рис. 14.3). При отклонении такого маятника на малый угол α на материальную точку

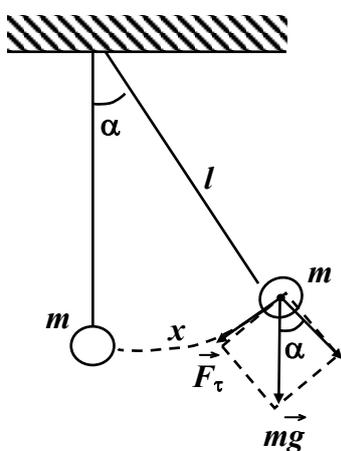


Рис. 14.3

действует возвращающая сила $F_\tau = -m \cdot g \cdot \sin \alpha$, для малых α $F_\tau \approx -m \cdot g \cdot \alpha$. С учетом того, что длина дуги $x = l \cdot \alpha$, имеем $F_\tau \approx -\frac{m \cdot g}{l} \cdot x$ (аналогично $F = -k \cdot x$).

Следовательно, колебания, как и в случае пружинного и физического маятников, являются гармоническими.

Поскольку в качестве k здесь можно принять $\frac{m \cdot g}{l}$, то период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Таким образом, период малых колебаний маятника **не зависит** от массы маятника и амплитуды колебаний!

Поскольку колебания – это движение, мы должны уметь находить его характеристики.

1. Скорость колеблющейся точки – это первая производная в данном случае от смещения x по времени, то есть

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

2. Ускорение – это вторая производная от смещения по времени:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

3. Механическая энергия:

а) кинетическая: $E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot A^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2}$, ее максимальное значение $E_{k \max} = \frac{m \cdot A^2 \cdot \omega_0^2}{2}$;

б) потенциальная энергия (при смещении от положения равновесия на x): $E_n = \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$.

Учитывая, что $k = m \cdot \omega_0^2$, имеем

$$E_n = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Максимальное значение потенциальной энергии

$$E_{n \max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2.$$

Таким образом, $E_{n \max} = E_{k \max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2$.

Поскольку $E_k = E_{k \max}$, то $E_n = 0$ и наоборот, то полная механическая энергия E равна

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2.$$

4. Сила F , действующая на колеблющуюся материальную точку

$$F = m \cdot a = -m \cdot A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Максимальное значение силы

$$F_{\max} = -m \cdot A \cdot \omega_0^2.$$

К сожалению, свободные гармонические колебания затухают, потому что в любой системе есть потери энергии (диссипация – рассеяние). Попробуйте качаться на качелях и не раскачивать их!

4. Свободные затухающие колебания.

В механической системе потери энергии чаще всего связаны с трением. Если поместить маятник в вязкую среду, то на него будет действовать сила трения $F_{\text{тр}} = -r \cdot \mathbf{v}$, где r – коэффициент сопротивления среды; \mathbf{v} – скорость движения.

Уравнение (1) будет иметь вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -r \cdot \mathbf{v} - k \cdot x$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Обозначив $\frac{r}{m} = 2\delta$, получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6):

$$x = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ – частота затухающих колебаний.

Построим график зависимости $x = f(t)$.

Как видно из рис. 14.4, амплитуда колебаний уменьшается. Скорость уменьшения амплитуды

$$A = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

определяется величиной δ (коэффициента затухания). Другая характеристика затухания – логарифмический декремент затухания θ (нату-

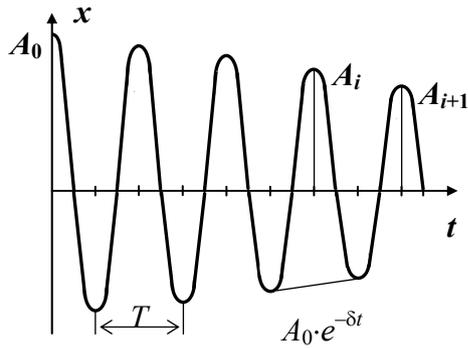


Рис. 14.4

ральный логарифм отношения амплитуд двух следующих друг за другом колебаний) (рис. 14.4),

$$\theta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta \cdot T.$$

Еще одна характеристика – добротность колебательной системы Q ,

$$Q = \frac{\pi}{\theta} \quad (\text{при малом } \delta).$$

Чем больше добротность, тем ближе система к гармоническому осциллятору, тем медленнее затухают колебания.

5. *Вынужденные колебания.* Чтобы поддерживать колебания, нужно компенсировать потери энергии, например при помощи внешней силы. Эта сила должна быть периодической. Тогда уравнение (6) будет иметь вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos \omega t.$$

Внешняя сила изменится по закону

$$F = F_0 \cdot \cos \omega t.$$

Решение этого уравнения в установившемся режиме:

$$x = A \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Амплитуда вынужденных колебаний A в установившемся режиме зависит от амплитуды колебаний вынуждающей силы F_0 , соотношения частот ω и ω_0 и коэффициента затухания δ (при данной массе m):

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}. \quad (7)$$

Вынужденные колебания отстают по фазе на угол φ от вынуждающей силы, тангенс этого угла

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Как видно из выражения (7), чем меньше разность собственной частоты системы ω_0 и частоты вынуждающей силы ω , тем больше амплитуда вынужденных колебаний. Во многих случаях система сама управляет моментами воздействия вынуждающей силы. Такую систему называют автоколебательной, а колебания – *автоколебаниями*. Примерами автоколебательных систем являются автомат Калашникова, часы, двигатель внутреннего сгорания, паровая турбина.

6. *Резонанс.* Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при некотором значении частоты вынуждающей силы называется *резонансом*. Частоту вынуждающей силы, при которой наступает резонанс, называют резонансной частотой ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2};$$

чем меньше δ , тем ближе ω_p к ω_0 и тем больше увеличивается амплитуда колебаний A_p при резонансе:

$$A_p = \frac{F_0}{2 \cdot m \cdot \delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

График зависимости амплитуды вынужденных колебаний A от частоты вынуждающей силы ω показан на рис. 14.5.

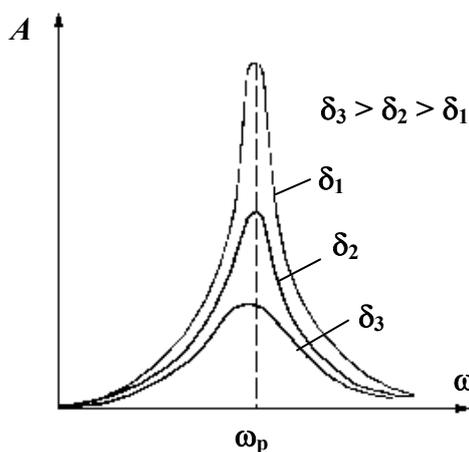


Рис. 14.5

7. *Волны.* Процесс распространения колебаний в среде называется волной. Сразу представляется море, пенные гребни волн, разбивающиеся о прибрежные камни. Необыкновенное зрелище! Но это не единственный вид волн. Различают три вида волн в зависимости от характера колебания частиц среды:

- 1) волны на поверхности жидкости;
- 2) продольные волны;
- 3) поперечные волны.

Изучение первого вида волн не входит в нашу задачу.

В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. Такие волны возникают при деформациях растяжения и сжатия. В поперечной волне частицы колеблются в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны. Поперечные волны возникают при деформациях сдвига.

Поскольку в твердых телах возникают упругие силы при деформации сжатия, растяжения и сдвига, то в твердом теле могут возбуждаться как продольные, так и поперечные волны, а в жидкостях и газах — только продольные. При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются относительно своих положений равновесия. Основным свойством всех волн является *перенос энергии без переноса вещества*. Волны, распространяющиеся в упругой среде, называются упругими, или механическими. Упругая волна называется гармонической, если колебания частиц среды являются гармоническими. На рис. 14.6 приведен график зависимости смещения ξ частиц среды

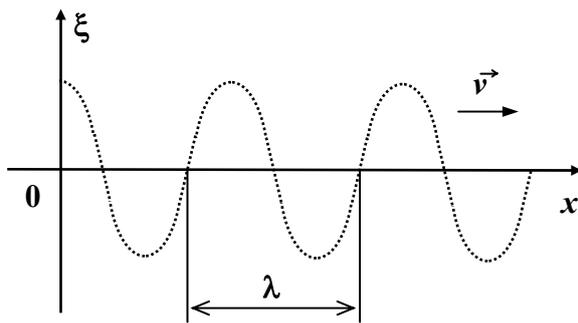


Рис. 14.6

от их расстояния x до источника колебаний. Расстояние, на которое распространяется волна за время T одного колебания, называется длиной волны λ , а время T – периодом колебаний. Т. е. $\lambda = \mathbf{v} \cdot T$, где \mathbf{v} – скорость распространения волны.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называются *волновым фронтом*. Фронт волны – это граница между волной и остальным пространством, где волны еще нет. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Нетрудно сообразить, что если источник волны – точечный, то волновой фронт (поверхность) – сфера, и волна называется сферической.

Если рассматривать колебания очень далеко от точечного источника, то волновой фронт будет иметь форму плоскости (плоская волна). Если колебания всех точек, лежащих в плоскости $x = 0$, описываются функцией

$$\xi(0, t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

то колебания частиц среды в плоскости x будут отставать по времени на $\tau = \frac{x}{\mathbf{v}}$. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x , будет

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega \cdot (t - x / \mathbf{v}) + \varphi). \quad (8)$$

Это уравнение плоской бегущей волны в непоглощающей среде. Здесь A – амплитуда волны; ω – циклическая частота; φ – начальная фаза.

Если ввести волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - k \cdot x + \varphi).$$

Предположим, что фаза волны постоянна, то есть

$$\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{\mathbf{v}} \right) + \varphi \right] = \text{const}, \quad (9)$$

и продифференцируем (9), сократив на ω . Получим

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{v}.$$

Следовательно, скорость \mathbf{v} в уравнении (8) есть скорость перемещения фазы волны, или фазовая скорость. Для фазовой скорости звуковой волны в газе получается выражение

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{\mu}},$$

где γ – коэффициент Пуассона (показатель адиабаты); R – универсальная газовая постоянная; T – температура газа; μ – молярная масса газа.

$$\text{Для продольных волн } v_{\phi \text{ прод}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E – модуль Юнга; ρ – плотность среды.

$$\text{Для поперечных волн } v_{\phi \text{ попер}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G – модуль сдвига.

Заметим, что $G < E$.

Если в упругой среде распространяется волна, то относительная деформация $\varepsilon = -\frac{v_1}{v}$, здесь v_1 – скорость смещения от положения равновесия частицы среды ($v_1 = \frac{ds}{dt}$, s – смещение частиц); v – скорость волны (в газе, как уже указывалось, $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$).

Закон Бюгера – Ламберта – Бера: $I(x) = I_0 e^{-\gamma x}$, где $I(x)$ – интенсивность волны на расстоянии x ; I_0 – интенсивность плоской волны на входе; γ – коэффициент затухания.

Интенсивность – отношение падающей на поверхность звуковой мощности к площади этой поверхности (измеряется в Вт/м²).

Уровень интенсивности определяет, во сколько раз интенсивность звука больше, чем минимальная интенсивность, воспринимаемая человеческим ухом.

Минимальная интенсивность (чувствительность), воспринимаемая человеком, равна $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м².

Уровень интенсивности в децибеллах (дБ) равен

$$\alpha_p = 10 \lg \frac{I}{I_0},$$

здесь I – интенсивность звука; I_0 – минимальная интенсивность.

Скорость звука в воздухе

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}},$$

здесь $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ (для воздуха $\gamma = 1,4$); R – универсальная газовая постоянная ($R = 8,31$ Дж/моль·К); μ – молярная масса (для воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль).

Подсказка

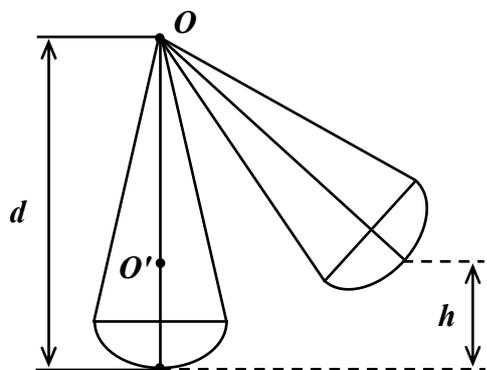


Рис. 14.7

1. В Горсаду на качелях качаются студент и студентка. Каков период колебаний маятника, если масса качелей вместе с массой студентов 120 кг, максимальная высота подъема качелей $h = 1$ м, расстояние $d = 4$ м (рис. 14.7)? Какую силу F нужно приложить, чтобы остановить качели? Центр масс качелей располагается в точке O' . Расстояние $OO' = 3$ м.

Примечание: момент инерции качелей относительно центра масс найти как $J_0 = m \cdot (d - l)^2$, где $l = |OO'|$.

Решение

а) Как это следует из теории, качели – физический маятник. Следовательно, период колебаний T равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot l}},$$

где J – момент инерции относительно т. O (центр качелей); l – расстояние от точки O до центра масс. В определении момента инерции здесь заключается наибольшая сложность решения задачи, поскольку ось качелей не проходит через центр масс (точку O'). Чтобы определить J , воспользуемся теоремой Штейнера: момент инерции относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и величины $m \cdot l^2$:

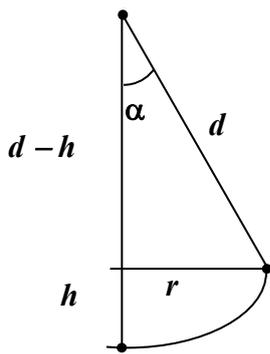
$J = J_0 + m \cdot l^2$, $OO' = l$; $J_0 = m \cdot (d - l)^2$ (учитывая примечание в условии задачи).

Отсюда

$$J = m \cdot (d - l)^2 + m \cdot l^2.$$

Окончательно

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot [(d - l)^2 + l^2]}{m \cdot g \cdot l}} = 2\pi \sqrt{\frac{(d - l)^2 + l^2}{g \cdot l}}.$$



б) Очевидно, что сила, которую нужно приложить, чтобы остановить качели, будет равна возвращающей силе, возникающей при максимальном подъеме качелей:

$$F = |\vec{F}_\tau| = m \cdot g \cdot \sin \alpha .$$

Из рисунка следует, что $\sin \alpha = r / d$, а

$$r = \sqrt{d^2 - (d - h)^2} .$$

Таким образом, $F = m \cdot g \frac{\sqrt{d^2 - (d - h)^2}}{d}$.

2. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой $M = 1$ кг, прикрепленный к пружине с коэффициентом упругости $k = 2$ Н/м (рис. 14.8). В шар попадает пуля массой $m = 10$ г, имеющая в момент удара скорость $v_0 = 500$ м/с, направленную вдоль оси пружины. Считая удар абсолютно неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период колебаний T шара. Ответ дать в СИ и округлить до сотых.

Решение

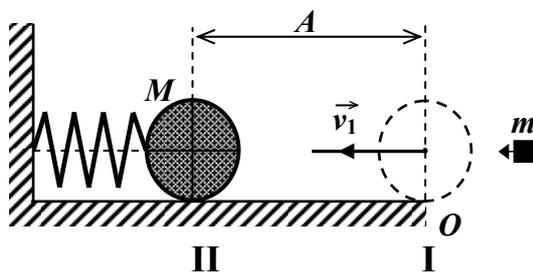


Рис. 14.8

В момент соударения пуля сообщит шару кинетическую энергию, вследствие чего он придет в движение и начнет сжимать пружину. Пружина будет сжиматься до тех пор, пока энергия движения полностью не перейдет в потенциальную энергию деформации. В этот момент кинетическая энергия шара станет равной нулю; потенциальная энергия пружины, а с ней и шара, достигнет максимума, смещение шара от положения равновесия станет равно амплитудному значению (положение II).

Дальше процесс пойдет в обратном порядке: форма пружины будет восстанавливаться, потенциальная энергия будет уменьшаться, кинетическая – возрастать, и в момент положения равновесия (точка O) первая станет равной нулю, вторая достигнет максимума (положение I). Скорость шара будет направлена при этом вправо, и он начнет колебаться.

Так как поверхность стола идеально гладкая и сопротивление воздуха ничтожно мало, кинетическая энергия полностью перейдет в потенциальную, возвращающая сила всюду пропорциональна смещению, а колебания шара будут *гармоническими*.

Чтобы определить амплитуду этих колебаний, воспользуемся законом сохранения энергии. Если в момент начала движения (положение I) шар вместе с пулей обладал энергией

$$E_I = \frac{(m+M) \cdot v_1^2}{2},$$

где v_1 – скорость шара вместе с пулей, а в положении II шар вместе с пулей обладал энергией

$$E_{II} = \frac{k \cdot A^2}{2},$$

где A – амплитуда колебаний, то $E_{II} - E_I = 0$, или

$$\frac{k \cdot A^2}{2} - \frac{(m+M) \cdot v_1^2}{2} = 0, \quad (1)$$

поскольку внешние силы (реакция опоры и сила трения) над системой шар – пружина работу не совершают. Из уравнения (1) мы не можем найти A , так как нам неизвестна скорость v_1 .

Начальная скорость шара v_1 определяется из уравнения закона сохранения импульса. Пренебрегая смещением шара во время удара и учитывая, что пуля застревает в шаре, получим

$$m \cdot v_0 = (m+M) \cdot v_1. \quad (2)$$

Величина возвращающей силы, действующей на шар, определяется уравнением

$$F = (m+M) \cdot \omega^2 \cdot x, \quad (3)$$

где ω – угловая частота, равная

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4)$$

Эту же силу можно определить из выражения

$$F = -k \cdot x, \quad (5)$$

где k – коэффициент упругости пружины (знак минус здесь опускаем).

Решая уравнения (1) и (2), получаем $A = \frac{m \cdot v_0}{m+M} \sqrt{\frac{m+M}{k}}$.

Из формул (3)–(5) находим $T = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{k}}$.

Подставив числовые значения, получим $A = 3,52$ м, $T = 4,46$ с.

3. Логарифмический декремент затухания тела θ , колеблющегося с частотой $\nu = 50$ Гц, равен 0,01. Определить: 1) время t , за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в $n = 20$ раз; 2) число полных колебаний N тела, необходимых для подобного уменьшения амплитуды. Ответы округлить до целого числа.

Решение

Амплитуда A затухающих колебаний уменьшается по экспоненциальному закону

$$A = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}, \quad (1)$$

где A – амплитуда колебаний в момент времени $t = 0$; δ – коэффициент затухания.

Логарифмический коэффициент затухания $\theta = \delta \cdot T$, где T – условный период затухания колебаний.

Поскольку $T = 1/\nu$, то $\delta = \theta \cdot \nu$ и выражение (1) можно записать в виде

$$A = A_0 \cdot e^{-\theta \cdot \nu \cdot t}. \quad (2)$$

Разделим (2) на A_0 , получим $\frac{A}{A_0} = e^{-\theta \cdot \nu \cdot t}$,

прологарифмируем:

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\theta \cdot \nu \cdot t, \quad \text{или} \quad \ln \frac{A_0}{A} = \theta \cdot \nu \cdot t.$$

Отсюда $t = \frac{1}{\theta \cdot \nu} \cdot \ln \frac{A_0}{A}$.

Число искомых полных колебаний $N = \frac{t}{T} = t \cdot \nu$.

4. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $\nu = 150$ м/с. Определить частоту ν колебаний, если минимальное расстояние Δx между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 0,75 м. Ответ округлить до целого числа.

Решение

Частоту колебаний мы можем найти, если известен период колебаний: $\nu = \frac{1}{T}$.

Чтобы определить период колебаний, запишем два уравнения смещения точек, находящихся на расстоянии x_1 и x_2 от источника колебаний:

$$\xi_1 = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x_1}{\nu} \right) + \varphi \right]; \quad \xi_2 = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x_2}{\nu} \right) + \varphi \right].$$

По условию задачи разность фаз этих колебаний равна π , т. е.

$$\left[\omega \left(t - \frac{x_2}{\nu} \right) + \varphi \right] - \left[\omega \left(t - \frac{x_1}{\nu} \right) + \varphi \right] = \pi.$$

Раскрыв скобки, найдем $\omega \left(\frac{x_2}{v} - \frac{x_1}{v} \right) = \pi$, заменив $\omega = \frac{2\pi}{T}$, получим

$$\frac{2\pi}{T \cdot v} (x_2 - x_1) = \pi.$$

По условию задачи $x_2 - x_1 = \Delta x$, поэтому $\frac{2\pi \cdot \Delta x}{T \cdot v} = \pi$.

$$\text{Отсюда } T = \frac{2\Delta x}{v}, \quad v = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\Delta x} = \frac{150}{2 \cdot 0,75} = 100 \text{ Гц}.$$

5. На поверхности воды в вертикальном положении плавает цилиндр массой 120 г с площадью основания 75 см^2 . С какой циклической частотой будут происходить вертикальные гармонические колебания цилиндра, если его слегка сместить из положения равновесия?

Плотность воды 1000 кг/м^3 .

Решение

В положении равновесия сила тяжести уравновешивается силой Архимеда. При вертикальном смещении цилиндра на x возникает возвращающая сила, равная изменению силы Архимеда:

$$F_{\text{возвр.}} = \Delta F_A = \Delta \rho_v \cdot \Delta V \cdot g = \Delta \rho_v \cdot S \cdot x \cdot g, \quad (1)$$

где ΔV – изменение объема подводной части цилиндра. Как это следует из выражения (1), возвращающая сила пропорциональна смещению, и коэффициент пропорциональности (эффективная жесткость колебательной системы) равен $k = \rho_v \cdot S \cdot g$.

Отсюда циклическая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} = \sqrt{\frac{1000 \cdot 9,8 \cdot 75 \cdot 10^{-4}}{120 \cdot 10^{-3}}} = 24,7 \text{ рад/с}.$$

ТЕСТ

Вопросы

- 14.1.** Фаза колебаний может измеряться в
1) *градусах;* 2) *радianaх;*
3) *секундах;* 4) *минутах;* 5) *часах.*
- 14.2.** В случае механических колебаний по гармоническому закону изменяется
1) *смещение точки от положения равновесия;*
2) *амплитуда колебаний;*
3) *фаза колебаний;*
4) *частота колебаний.*
- 14.3.** Коэффициент затухания зависит от
1) *массы тела;*
2) *частоты колебаний;*
3) *коэффициента сопротивления среды;*
4) *фазы колебаний;*
5) *амплитуды колебаний.*
- 14.4.** Амплитуда затухающих колебаний изменяется по
1) *экспоненциальному закону;*
2) *линейному закону;*
3) *закону обратной пропорциональности;*
4) *закону прямой пропорциональности.*
- 14.5.** Добротность и логарифмический декремент связаны между собой
1) *не связаны;*
2) *обратно пропорционально;*
3) *прямо пропорционально;*
4) *по линейному закону;*
5) *экспоненциальной зависимостью.*
- 14.6.** Модуль скорости $|\vec{v}|$ при максимальном отклонении маятника (рис. 14.9) равен
1) *максимальному значению $\omega \cdot A$;*
2) $|\vec{v}| = \omega \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$;
3) *нулю;*
4) *минимальному значению скорости.*
- 14.7.** Модуль скорости $|\vec{v}|$ при прохождении маятником положения равновесия равен

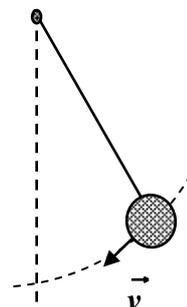


Рис. 14.9

1) *максимальному значению;*

2) $|\vec{v}| = \omega \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$;

3) *нулю;*

4) $\omega \cdot A$.

14.8. Затухание колебаний вызывает сила

1) *трения;* 2) *упругости;* 3) *тяжести;* 4) *инерции.*

14.9. Полная энергия (E) колебаний равна

1) $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$; 2) $E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$;

3) $E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$; 4) $E = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot A^2$.

14.10. Максимальная кинетическая энергия колебаний равна

1) $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$; 2) $E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$;

3) $E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$; 4) $E = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot A^2$.

14.11. Максимальному значению скорости соответствует выражение

1) $\omega \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$; 2) $\omega^2 \cdot A$; 3) $\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A$; 4) $\frac{k}{m} \cdot A$.

14.12. Максимальному значению ускорения соответствует выражение

1) $\omega \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$; 2) $\omega^2 \cdot A$; 3) $\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A$; 4) $\frac{m}{k} \cdot A$.

14.13. Частота и период малых колебаний при увеличении амплитуды

1) *не изменяются;*

2) *частота увеличивается;*

3) *период уменьшается;*

4) *частота и период уменьшаются;*

5) *частота и период увеличиваются.*

14.14. Зависит ли частота ν колебаний пружинного маятника от массы колеблющегося тела? Если да, то как?

1. *Не зависит.*

2. *Зависит, $\nu \sim \sqrt{\frac{1}{m}}$.*

3. *Зависит, $\nu \sim \sqrt{m}$.*

4. *Зависит, $\nu \sim m$.*

14.15. Отличаются ли и, если да, то насколько, фазы колебаний скорости и ускорения?

1. Фазы совпадают.
2. Отличаются на π .
3. Отличаются на $\frac{\pi}{2}$.
4. Отличаются на $\frac{\pi}{4}$.

14.16. Отличаются ли и, если да, то насколько, фазы ускорения и смещения точки от положения равновесия?

1. Отличаются на π .
2. Не отличаются.
3. Отличаются на $\frac{\pi}{2}$.
4. Отличаются на $\frac{\pi}{4}$.

14.17. Отношение полной энергии гармонического колебания к максимальному значению возвращающей силы, вызывающей это колебание, равно

- 1) $\frac{A^2 \cdot \omega^2}{2}$;
- 2) половине амплитуды колебаний;
- 3) $\frac{A}{2} \cos(\omega t + \varphi + \pi)$;
- 4) $\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \omega t$.

14.18. Упругая поперечная волна возникает в

- 1) твердом поле;
- 2) газах;
- 3) жидкостях;
- 4) любой среде.

14.19. Продольные волны возбуждаются в

- 1) жидкостях;
- 2) газах;
- 3) твердых телах;
- 4) любой среде.

14.20. При волновом процессе

- 1) происходит перенос энергии;
- 2) происходит перенос вещества;
- 3) частицы колеблются относительно положения равновесия;
- 4) происходит перенос массы.

14.21. Явление резонанса возникает при

- 1) вынужденных колебаниях;
- 2) гармонических колебаниях;
- 3) затухающих колебаниях;
- 4) автоколебаниях.

14.22. Верные заключения:

1. Амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает при резонансе.

2. Резонанс возникает при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебаний системы.

3. При малом затухании амплитуда резко уменьшается при приближении к резонансной частоте.

4. Амплитуда вынужденных колебаний резко уменьшается при резонансе.

14.23. Вынужденные колебания совершаются с частотой

- 1) вынуждающей силы ω ; 2) $\omega = \omega_0^2 - \delta^2$;
- 3) собственных колебаний системы, т. е. $\omega = \omega_0$;
- 4) $\omega = \omega_0^2 - 2\delta^2$.

14.24. Амплитуда установившихся вынужденных колебаний при заданных F_0, m, r, k определяется

- 1) собственной частотой системы;
- 2) частотой вынуждающей силы;
- 3) коэффициентом затухания;
- 4) логарифмическим коэффициентом затухания.

14.25. Возникновение резонанса возможно для ... колебаний.

- 1) гармонических; 2) затухающих;
- 3) автоколебаний; 4) вынужденных.

14.26. Амплитуда колебаний при резонансе при увеличении коэффициента затухания δ

- 1) не зависит от δ ; 2) увеличивается;
- 3) уменьшается; 4) равна нулю.

14.27. Вынуждающая сила F при вынужденных колебаниях равна

- 1) $F = F_0 \cos \alpha$; 2) $F = \text{const}$; 3) $F = 0$; 4) $F = F_0 \cos \omega t$.

14.28. Как соотносятся фазовые скорости продольных и поперечных волн?

1. Фазовые скорости равны.
2. Фазовая скорость продольных волн больше фазовой скорости поперечных волн.
3. Фазовая скорость продольных волн меньше фазовой скорости поперечных волн.
4. Фазовая скорость поперечных волн больше фазовой скорости продольных только в газах.

14.29. Укажите уравнение гармонических колебаний?

1. $x = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$.
2. $x = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - k \cdot x + \varphi\right)$.
3. $x = A \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right]$.
4. $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$.

14.30. Фазовая скорость звуковой волны в газе

- 1) не зависит от температуры газа;
- 2) обратно пропорциональна \sqrt{T} ;
- 3) прямо пропорциональна \sqrt{T} ;
- 4) прямо пропорциональна T .

14.31. Соответствие между видом колебания и его уравнением:

1. Гармонические колебания	1. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$
2. Свободные затухающие колебания	2. $\xi(x, t) = A \cos(\omega(t - x/v) + \varphi)$
3. Вынужденные колебания	3. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$
	4. $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$
	5. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

14.32. Соответствие между видом маятника и уравнением для нахождения его периода:

1. Физический маятник	1. $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}$
2. Математический маятник	2. $T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$
3. Пружинный маятник	3. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
	4. $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$
	5. $T = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Задачи

14.1. В Горсаду Томска на качелях качаются студент и студентка. Каков период колебаний маятника, если масса качелей вместе с массой студентов 120 кг? Максимальная высота подъема качелей $h = 1$ м, расстояние $d = 4$ м (рис. 14.10). Какую силу F нужно приложить, чтобы остановить качели? Центр масс качелей располагается в точке O' . Расстояние $OO' = 3$ м. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Момент инерции качелей относительно центра масс найти как $J_0 = m(d - l)^2$, где $l = OO'$.

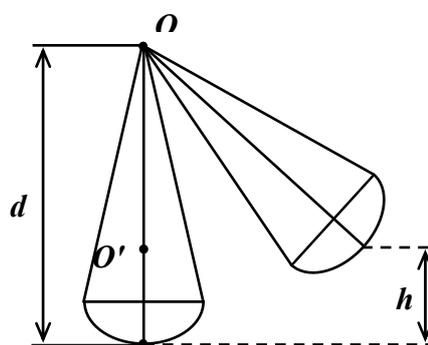


Рис. 14.10

центра масс найти как

14.2. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой $M = 1$ кг, прикрепленный к пружине с коэффициентом упругости $k = 2$ Н/м (рис. 14.11). В шар попадает пуля массой $m = 10$ г, имеющая в момент удара скорость $v_0 = 500$ м/с, направленную вдоль оси пружины. Считая удар абсолютно неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период колебаний T шара. Ответ дать в СИ и округлить до сотых.

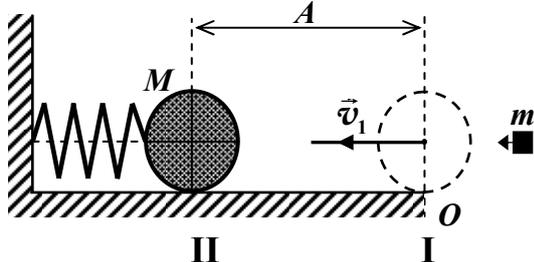


Рис. 14.11

удар абсолютнo неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период колебаний T шара. Ответ дать в СИ и округлить до сотых.

14.3. Логарифмический декремент θ затухания тела, колеблющегося с частотой $\nu = 50$ Гц, равен 0,01. Определить: 1) время t , за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в $n = 20$ раз; 2) число полных колебаний N тела, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

14.4. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $v = 150$ м/с. Определить частоту ν колебаний, если минимальное расстояние Δx между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 0,75 м.

14.5. На поверхности воды в вертикальном положении плавает цилиндр массой 120 г с площадью основания 75 см². С какой циклической частотой будут происходить вертикальные гармонические колебания цилиндра, если его слегка сместить из положения равновесия?

Плотность воды 1000 кг/м³.

14.6. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см и периодом $T = 5$ с. Определить для точки: 1) максимальную скорость; 2) максимальное ускорение.

14.7. Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и периодом $T = 4$ с.

14.8. Материальная точка массой $m = 20$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0,1 \cos(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{4})$ м. Определить полную энергию E этой точки.

14.9. Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 8$ см. Определить жесткость k пружины, если известно, что максимальная кинетическая энергия E груза составляет 0,8 Дж.

14.10. Спиральная пружина обладает жесткостью $k = 25$ Н/м. Определить, тело какой массой m должно быть подвешено к пружине, чтобы за $t = 1$ мин совершалось 25 колебаний.

14.11. Тонкий обруч радиусом $R = 50$ см подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определить период T колебаний обруча.

14.12. За время, в течение которого система совершает $N = 50$ полных колебаний, амплитуда уменьшается в 2 раза. Определить добротность Q системы.

14.13. Две точки лежат на луче и находятся от источника колебаний на расстояниях $x_1 = 4$ м и $x_2 = 7$ м. Период колебаний $T = 20$ мс, скорость v распространения волны равна 300 м/с. Определить разность фаз колебаний этих точек.

14.14. Определить длину волны λ , если числовое значение волнового вектора k равно $0,02512 \text{ см}^{-1}$.

14.15. Звуковые колебания с частотой $\nu = 450$ Гц и амплитудой $A = 0,3$ мм распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 80$ см. Определить: 1) скорость распространения волн v ; 2) максимальную скорость частиц среды v_{max} .

14.16. Период колебания маятника, покоящегося относительно земной поверхности, равен 1,5 с. Каков будет его период, если поместить маятник в вагон, движущийся горизонтально с ускорением $4,9 \text{ м/с}^2$?

14.17. Брусочек (с площадью основания S и высотой 10 см) из плотного дуба плавает в воде. Брусочек слегка погрузили в воду и отпустили. Найти частоту и период колебаний. Плотность дуба $0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; плотность воды 1000 кг/м^3 .

14.18. Точка струны совершает колебания с частотой 1 кГц. Какой путь (в м) пройдет эта точка за 1,2 с, если амплитуда колебаний $x_0 = 1$ мм?

14.19. Маятник отклонили на 2 см и отпустили. Какой путь (в см) пройдет маятник за 10 с, если период его колебаний 8 с?

14.20. Грузик на пружине колеблется вдоль прямой с амплитудой 2 см. Период колебаний 2 с. Определить среднюю скорость (в см/с) движения грузика от положения равновесия до максимального отклонения от положения равновесия.

14.21. Чему равна циклическая частота (в рад/с) гармонических колебаний точки, если амплитуда колебаний 6 см, а максимальная скорость точки $1,2 \text{ м/с}$?

14.22. Во сколько раз время прохождения колеблющейся точки первой половины амплитуды меньше, чем время прохождения второй половины? Колебания происходят по закону $x = A \sin \omega t$.

14.23. Два шарика, подвешенные на пружинах с жесткостями 400 и 100 Н/м, совершают гармонические вертикальные колебания с одинаковыми периодами. Во сколько раз масса одного шарика больше массы другого?

14.24. К динамометру, закрепленному вертикально, подвесили груз. При этом груз стал совершать гармонические колебания с циклической частотой 10 рад/с . Найти деформацию (в см) пружины динамометра после полного прекращения колебаний груза.

14.25. В маятниковых часах используется математический маятник с периодом колебаний 1 с . Часы помещают в ракету, которая начинает подниматься с постоянным ускорением. Чему равно это ускорение, если за 7 с подъема маятник часов совершает 8 полных колебаний?

ЗАНЯТИЕ 15

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Теория

Человек рождается, живет и умирает в «океане» электромагнитных волн. Они приходят на Землю из космоса, излучаются всевозможными устройствами: передающими теле- и радиостанциями, трансформаторами на подстанциях, линиями высокого напряжения и т. д.

По аналогии с другими волнами, электромагнитной волной называется процесс распространения электромагнитных колебаний в пространстве.

А почему не в «среде», как для упругих волн? Потому что электромагнитная волна, в отличие от упругой, может распространяться как в среде, так и в вакууме.

Электромагнитные колебания возникают, например, в колебательном контуре (рис. 15.1) при периодическом изменении заряда на обкладках конденсатора.

Свободные гармонические колебания

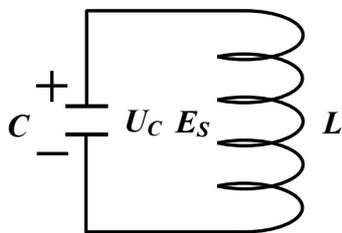


Рис. 15.1

Если зарядить конденсатор, замкнутый на катушку индуктивности, а затем источник тока отсоединить, то конденсатор будет разряжаться. Заряд q на обкладках при этом уменьшается, а ток в контуре возрастает. Энергия переменного электрического поля конденсатора $W_C = \frac{q^2}{2C}$ уменьшается, а энергия переменного магнитного поля катушки $W_L = \frac{1}{2} L \cdot I^2$ возрастает. (Сравните с взаимным превращением кинетической и потенциальной энергий маятника!).

По закону Ома

$$U_C = E_S, \tag{1}$$

здесь

$$U_C = \frac{q}{C} \tag{2}$$

– напряжение на конденсаторе, а

$$E_s = -L \frac{dI}{dt} \quad (3)$$

– ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке при протекании в ней переменного тока. Заменяем $\frac{dI}{dt} = \ddot{q}$ (вторая производная от заряда по времени) и подставим (2) и (3) в (1). Получим

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (4)$$

Сравните:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5)$$

Из сравнения (4) и (5) следует, что решением (4) является:

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где ω_0 – собственная частота колебаний, а период колебаний в контуре:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Таким образом, заряд совершает свободные гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом T . Сила тока I в колебательном контуре равна

$$I = \dot{q} = -\omega_0 \cdot q_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = -I_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где $I_0 = q_0 \cdot \omega_0$ – амплитуда силы тока. Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6)$$

здесь $U_0 = \frac{q_0}{C}$ – амплитуда напряжения. Если представить

$$I = I_0 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (7)$$

то из (6) и (7) следует, что колебания тока опережают колебания напряжения по фазе на $\pi/2$.

Затухающие электромагнитные колебания

Во всяком неидеализированном колебательном контуре присутствует сопротивление R (например, сопротивление провода, из которого изготовлена катушка). Поэтому полная энергия в контуре не сохраняется. Согласно закону Джоуля – Ленца, на сопротивлении R выделяется количество теплоты

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t,$$

то есть колебания являются свободными затухающими.

Уравнение (1) для данного случая имеет вид

$$I \cdot R + U_C = E_S.$$

После несложного преобразования получим:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (8)$$

Сравним со случаем механических колебаний:

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0. \quad (9)$$

Из сравнения выражений (8) и (9) коэффициент затухания

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \delta \cdot T.$$

Иначе уравнение (8) можно записать:

$$\ddot{q} + 2\delta \cdot \dot{q} + \omega_0^2 \cdot q = 0.$$

По аналогии с механическими свободными затухающими колебаниями

$$q = q_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad U = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

здесь

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (10)$$

– частота затухающих колебаний. Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Поскольку $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $\omega < \omega_0$. Если $R = 0$, то $\omega = \omega_0$.

Добротность контура $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Для этого в колебательный контур включают переменную ЭДС. Переменное напряжение в контуре изменяется по закону

$$U = U_0 \cos \omega t.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 \cdot q = \frac{U_0}{L} \cdot \cos \omega t. \quad (11)$$

(Вспомните вынужденные механические колебания! В (11) индуктивность L – аналог массы.)

Решение уравнения (11) вынужденных колебаний заряда в установившемся режиме (рис. 15.2) имеет вид

$$q = q_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

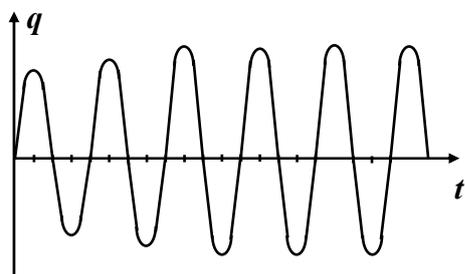


Рис. 15.2

Обратите внимание, что ω – частота колебаний переменного напряжения.

Амплитуда колебаний заряда q_0 :

$$q_0 = \frac{U_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}.$$

Начальную фазу φ найдем как

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\frac{1}{\omega \cdot C} - \omega \cdot L}.$$

Продифференцировав $q = q_0 \cos(\omega t - \varphi)$ по времени, найдем силу тока в контуре в установившемся режиме:

$$I = -\omega \cdot q_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \cdot \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

здесь

$$I_0 = \omega \cdot q_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}.$$

Резонанс

Аналогично механическим колебаниям, при приближении частоты вынуждающего переменного напряжения к собственной частоте колебательной системы возникает явление резонанса. Резонансные значения амплитуды колебаний заряда и частоты электромагнитных колебаний в контуре:

$$q_{рез} = \frac{q_0}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}; \quad \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях δ совершенно аналогичны соответствующим графикам для механических колебаний.

Электромагнитные волны

Для возбуждения электромагнитных волн необходимо создать в пространстве переменное электрическое поле (ток смещения, который мы рассматривали при изучении уравнений Максвелла) или переменное

магнитное поле. Источником электромагнитных волн может быть проводник, по которому течет переменный электрический ток, или электрический диполь, электрический момент которого изменяется по закону $P = P_0 \cdot \cos \omega t$. Источником может быть колебательный контур, пластины конденсатора которого необходимо раздвинуть, чтобы «выпустить» электромагнитное поле в пространство. Для электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x в однородной изотропной среде, вдали от источника можно записать волновое уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Здесь индексы y и z подчеркивают, что векторы напряженностей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей y и z (рис. 15.3).

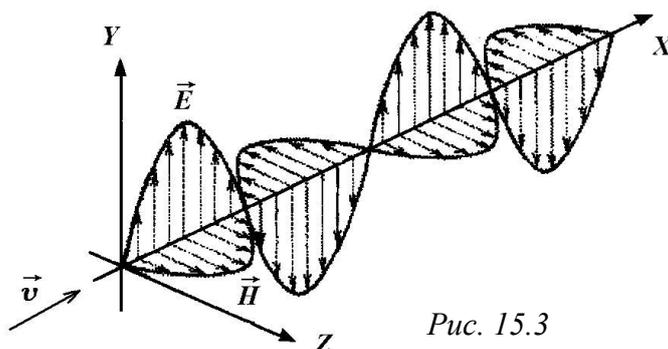


Рис. 15.3

Уравнениям (12) и (13) удовлетворяют плоские электромагнитные волны типа

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - k \cdot x + \varphi); \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - k \cdot x + \varphi),$$

где E_0 и H_0 – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – круговая частота волны; $k = \omega / v$ – волновое число; v – фазовая скорость волны; φ – начальная фаза колебаний в точках с координатой $x = 0$. Колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят в одинаковой фазе, но во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Свойства электромагнитных волн (ЭМВ)

1. Электромагнитные волны поперечны, то есть векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и лежат в плоскостях, перпендикулярных вектору скорости \vec{v} (рис. 15.3).

2. Фазовая скорость электромагнитных волн v равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}},$$

здесь $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$ – скорость света в вакууме (согласно теории Максвелла, свет – тоже электромагнитная волна); ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; ε, μ – электрическая и магнитная проницаемости среды.

3. В бегущей электромагнитной волне мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot E = \sqrt{\mu_0 \cdot \mu} \cdot H$$

(следует из уравнений Максвелла).

4. Энергия электромагнитной волны характеризуется вектором плотности потока электромагнитной энергии (вектором Умова – Пойнтинга S):

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}].$$

Вектор \vec{S} направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадь, перпендикулярную направлению распространения волны.

5. Электромагнитные волны оказывают на тела давление, объяснить которое можно следующим образом. Под действием электрического поля волны заряженные частицы вещества начинают двигаться и подвергаются действию сил Лоренца со стороны магнитного поля. Величина этого давления ничтожно мала. Существование давления электромагнитных волн свидетельствует о наличии механического импульса P , который равен $P = W / c$, где W – энергия электромагнитной волны; c – скорость света. Выражая импульс как $P = m \cdot c$, получим

$$P = m \cdot c = \frac{W}{c},$$

отсюда

$$W = m \cdot c^2. \tag{14}$$

Соотношение (14) характеризует связь между массой и энергией электромагнитного поля и является универсальным законом природы.

6. Действующие значения тока и напряжения в электромагнитной волне меньше амплитудных значений в $\sqrt{2}$ раз:

$$I_{\partial} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \quad U_{\partial} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Некоторые формулы, необходимые для решения задач:

Сопротивление проводника $R = \rho \frac{l}{S}$.

Индуктивность катушки $L = \mu \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot l \cdot S$, $n = \frac{N}{l}$, где S – площадь поперечного сечения катушки; n – число витков на единицу длины катушки.

Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}$.

Подсказка

1. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде с $\varepsilon = 2$ и $\mu = 1$. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 12$ В/м. Определить: 1) фазовую скорость волны; 2) амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Решение

Как это указано в теории, фазовая скорость электромагнитной волны v равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}},$$

где c – скорость света в вакууме; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Поскольку мгновенные значения напряженностей E и H связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot E = \sqrt{\mu_0 \cdot \mu} \cdot H,$$

то это же соотношение справедливо и для амплитуд напряженностей E_0 и H_0 :

$$\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot E_0 = \sqrt{\mu_0 \cdot \mu} \cdot H_0.$$

Отсюда искомая амплитуда напряженности магнитного поля волны H_0 равна

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}}{\sqrt{\mu_0 \cdot \mu}} \cdot E_0.$$

Подставив числовые данные, получим:

1) $v = 2,12 \cdot 10^8$ м/с; 2) $H_0 = 45$ мА/м = $45 \cdot 10^{-3}$ А/м.

2. Найти отношение энергий $\frac{W_M}{W_{эл}}$ магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $T/8$.

Решение

Энергия магнитного поля: $W_M = \frac{L \cdot I^2}{2}$, здесь I – ток в контуре; L – индуктивность.

Энергия электрического поля $W_{эл} = \frac{C \cdot U^2}{2}$, где C – емкость конденсатора; U – напряжение на его обкладках.

Напряжение на обкладках конденсатора $U = U_0 \cos \omega t$, ток в конденсаторе $I = \frac{dq}{dt}$, здесь $q = C \cdot U$; C – емкость.

Отсюда

$$I = C \cdot \frac{dU}{dt} = -C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \sin \omega t; \quad W_M = \frac{L \cdot C^2 \cdot U_0^2 \cdot \omega^2}{2} \sin^2 \omega t;$$
$$W_{эл} = \frac{C \cdot U_0^2 \cdot \omega^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Отношение энергий

$$\frac{W_M}{W_{эл}} = L \cdot C \cdot \omega^2 \frac{\sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = L \cdot C \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \omega t.$$

Поскольку $T = 2\pi\sqrt{LC}$, а $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $LC = \frac{1}{\omega^2}$, поэтому

$$\frac{W_M}{W_{эл}} = \operatorname{tg}^2 \omega t.$$

По условию $t = \frac{T}{8}$, т. е. $\omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8} = 45^\circ$, поэтому

$$\frac{W_M}{W_{эл}} = \operatorname{tg}^2 45^\circ = 1.$$

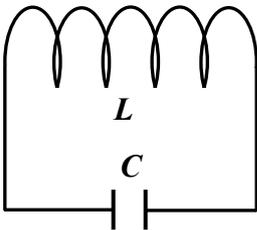


Рис. 15.4

3. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2 \cdot 10^{-8}$ Ф и катушки с общим числом витков $N = 300$ и индуктивностью $L = 5 \cdot 10^{-5}$ Гн (рис. 15.4). Омическим сопротивлением контура можно пренебречь. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора 120 В. Определить максимальный магнитный поток, пронизывающий катушку.

Решение

Поскольку омическое сопротивление контура равно нулю, можно считать, что колебания, возникающие в контуре, гармонические. Тогда колебания напряжения U на емкости

$$U = U_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

здесь $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная циклическая частота.

Магнитный поток как функция времени может быть найден из равенства

$$L \cdot I = N \cdot \Phi,$$

отсюда магнитный поток Φ равен

$$\Phi = \frac{L \cdot I}{N}. \quad (1)$$

Силу тока как функцию времени найдем из выражения

$$I = \frac{dq}{dt}; \quad q = C \cdot U.$$

Отсюда

$$I = -C \cdot U_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha_0).$$

Как видно из равенства (1), магнитный поток изменяется синхронно силе тока (L и N постоянны), т. е. магнитный поток достигает максимального значения тогда же, когда и сила тока.

Амплитуда силы тока

$$I_0 = C \cdot U_0 \cdot \omega_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Таким образом, максимальный магнитный поток, пронизывающий катушку

$$\Phi_{\max} = U_0 \frac{\sqrt{LC}}{N}.$$

Подставив числовые данные, получим $\Phi = 4 \cdot 10^{-7}$ Вб.

4. Два параллельных провода, погруженные в жидкий диэлектрик, индуктивно соединены с генератором Γ высокочастотных электромагнитных колебаний (рис. 15.5). При частоте $\nu = 1 \cdot 10^2$ МГц в системе устанавливаются стоячие электромагнитные волны. Перемещая вдоль проводов газоразрядную трубку A , по ее свечению определяют положение пучностей напряженности поля. Расстояние между соседними пучностями оказалось равным $l = 1$ м. Найти диэлектрическую проницаемость ϵ диэлектрика.

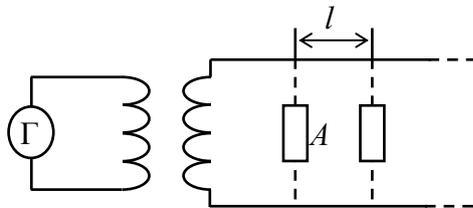


Рис. 15.5

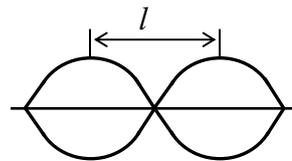


Рис. 15.6

Решение

Расстояние между пучностями (рис. 15.6) в стоячей волне равно ее длине волны, т. е. $\lambda_{\text{ст}} = l$. Длина бегущей волны $\lambda = 2\lambda_{\text{ст}}$.

Скорость электромагнитной волны в среде равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}},$$

здесь c – скорость света в вакууме.

Магнитная проницаемость диэлектрика $\mu = 1$; отсюда $\varepsilon = \frac{c^2}{v^2}$.

Таким образом, задача сводится к нахождению скорости электромагнитной волны. Поскольку длина бегущей волны – это расстояние, которое проходит волна за период, то $\lambda = v \cdot T$ или $v = \frac{\lambda}{T}$, $T = \frac{1}{\nu}$, таким образом,

$$\lambda = v \cdot \nu, \text{ здесь } \lambda = 2 \cdot l.$$

Окончательно диэлектрическая проницаемость диэлектрика равна

$$\varepsilon = \frac{c^2}{4l^2\nu^2}.$$

Подставив числовые данные, получим $\varepsilon = 2,25$.

5. Контур состоит из катушки индуктивностью $L = 3 \cdot 10^{-4}$ Гн и сопротивления $R = 1$ Ом и конденсатора емкостью $C = 22 \cdot 10^{-6}$ Ф. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе равно 0,5 В?

Решение

На омическом сопротивлении происходит выделение джоулевой теплоты, и полная энергия в контуре непрерывно уменьшается. Чтобы при наличии сопротивления в контуре колебания в нем были незатухающими, контур должен непрерывно получать энергию извне, причем потребляемая средняя мощность P должна равняться

$$P = \frac{W_T}{T}, \quad (1)$$

где W_T – потери энергии за время, равное периоду колебаний T .

За бесконечно малый промежуток времени dt на сопротивлении выделится количество теплоты dQ , равное по закону Джоуля – Ленца

$$dQ = I^2(t) \cdot R dt.$$

За время одного периода

$$W_T = \int_0^T I^2(t) \cdot R dt \quad (2)$$

Так как энергия контура непрерывно пополняется, колебания будут происходить по гармоническому закону:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

Подставим (3) в выражение (2):

$$W_T = I_0^2 \cdot R \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt.$$

Среднее значение $\cos^2(\omega t + \varphi_0)$ за период равно 1/2, поэтому

$$\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}.$$

Поскольку

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}; \quad U = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

следовательно,

$$I = C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4)$$

Сравнивая выражения (3) и (4), получим

$$I_0 = C \cdot U_0 \cdot \omega. \quad (5)$$

Подставив в (5) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, получим для амплитудного значения тока

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Таким образом,

$$P = \frac{U_0^2 \cdot C \cdot R \cdot T}{2 \cdot L \cdot T} = \frac{U_0^2 \cdot C \cdot R}{2 \cdot L}.$$

Подставив числовые данные, получим $P = 9,2 \cdot 10^{-3}$ Вт.

Тест

Вопросы

15.1. В колебательном контуре, изображенном на рис. 15.7, могут возникнуть ... колебания.

- 1) свободные гармонические;
- 2) свободные затухающие;
- 3) вынужденные;
- 4) автоколебания.

15.2. В колебательном контуре, показанном на рис. 15.8, могут возникнуть ... колебания.

- 1) свободные гармонические;
- 2) свободные затухающие;
- 3) вынужденные;
- 4) автоколебания.

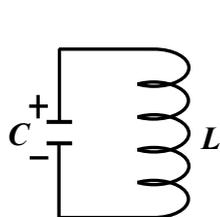


Рис. 15.7

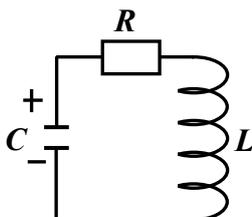


Рис. 15.8

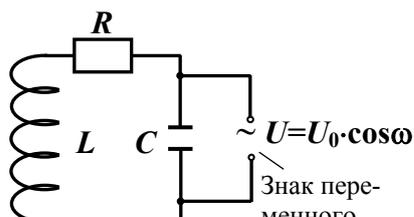


Рис. 15.9

$U = U_0 \cdot \cos \omega t$
Знак переменного напряжения

15.3. В контуре, показанном на рис. 15.9, могут возникнуть ... колебания.

- 1) свободные гармонические;
- 2) свободные затухающие;
- 3) вынужденные;
- 4) автоколебания.

15.4. В контуре, показанном на рис. 15.10, могут возникнуть ... колебания.

- 1) свободные гармонические;
- 2) свободные затухающие;
- 3) вынужденные;
- 4) автоколебания;
- 5) колебания не возникнут.

15.5. Вынужденные электромагнитные колебания совершаются с частотой, равной ...

- 1) частоте вынуждающего напряжения;
- 2) собственной частоте колебаний контура;
- 3) резонансной частоте;
- 4) разности резонансной частоты и собственной частоты колебаний контура.

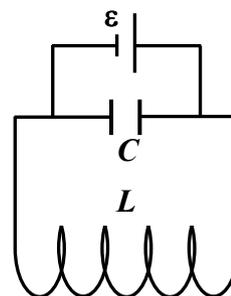


Рис. 15.10

15.6. Что в колебательном контуре действует аналогично силе трения?

1. *Емкость.*
2. *Индуктивность.*
3. *Омическое сопротивление.*
4. *Источник ЭДС.*

15.7. От каких величин и как зависит коэффициент затухания δ в контуре?

1. *От емкости C и сопротивления R . С увеличением C коэффициент затухания δ уменьшается, с увеличением R – растет.*
2. *От сопротивления R и индуктивности L . С увеличением R коэффициент затухания δ растет, с увеличением L – уменьшается.*
3. *От емкости C и индуктивности L . С увеличением C коэффициент затухания δ растет, с увеличением L уменьшается.*
4. *Только от сопротивления контура R .*

15.8. Электромагнитные волны являются

- 1) *упругими;*
- 2) *продольными;*
- 3) *поперечными;*
- 4) *упругие продольные.*

15.9. Какие величины изменяются по величине и направлению при распространении плоской электромагнитной волны в однородной среде?

1. *Напряженности электрического и магнитного полей.*
2. *Фаза и частота колебаний.*
3. *Амплитуда и период колебаний.*
4. *Скорость распространения волны.*

15.10. Разность фаз колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} в электромагнитной волне равна

- 1) *нулю;*
- 2) $\pi/2$;
- 3) π ;
- 4) $\pi/3$.

15.11. В вакууме могут распространяться ... волны.

- 1) *звуковые;*
- 2) *упругие;*
- 3) *электромагнитные;*
- 4) *продольные.*

15.12. Колебания векторов \vec{E} и \vec{H}

- 1) *происходят в одной плоскости;*
- 2) *имеют одинаковое направление;*
- 3) *направлены взаимноперпендикулярно;*
- 4) *направлены под углом $\pi/6$.*

15.13. В каком элементе и на что расходуется энергия в неидеализированном колебательном контуре?

1. *В омическом сопротивлении выделяется энергия, определяемая законом Джоуля – Ленца.*
2. *В электрической емкости энергия расходуется на возникновение колебаний.*

3. В катушке индуктивности энергия расходуется на возникновение колебаний.

4. Энергия расходуется в сопротивлении, индуктивности и конденсаторе.

15.14. Частота гармонических электромагнитных колебаний зависит от

- 1) заряда на обкладках и напряжения на конденсаторе;
- 2) индуктивности и емкости конденсатора;
- 3) омического сопротивления и индуктивности контура;
- 4) напряжения на конденсаторе.

15.15. Уравнение плоской электромагнитной волны имеет вид:

$$E = E_0 \cos\left(2\pi \cdot 10^7 t - \frac{2\pi \cdot \nu}{v} x + \varphi\right);$$
$$H = H_0 \cos\left(2\pi \cdot 10^7 t - \frac{2\pi \cdot \nu}{v} x + \varphi\right).$$

Волновое число k равно

- 1) $k = 2\pi$;
- 2) $k = \frac{2\pi \cdot \nu}{v}$;
- 3) $k = \frac{2\pi \cdot \nu}{v} x$;
- 4) $k = \varphi$.

15.16. Напряженность электрического поля в электромагнитной волне изменяется согласно уравнению $E = E_0 \cos(\pi \cdot 10^8 t - 2x + \varphi)$.

Фазовая скорость v волны равна

- 1) $\frac{\pi}{2} \cdot 10^8$ м/с;
- 2) $2 \cdot 10^8$ м/с;
- 3) $2\pi \cdot 10^8$ м/с;
- 4) $4\pi \cdot 10^8$ м/с.

15.17. Напряженность магнитного поля в электромагнитной волне изменяется согласно уравнению $H = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 10^9 \cdot t - 3x + \varphi\right)$.

Фазовая скорость v волны равна

- 1) $\frac{\pi}{4} \cdot 10^9$ м/с;
- 2) $3 \cdot 10^9$ м/с;
- 3) $\frac{\pi}{12} \cdot 10^9$ м/с;
- 4) $\frac{\pi}{8} \cdot 10^9$ м/с.

15.18. Напряженность магнитного поля в электромагнитной волне изменяется согласно уравнению $H = H_0 \cos(4\pi \cdot 10^7 t - x + \varphi)$.

Волновое число k равно

- 1) 1 м^{-1} ;
- 2) $\pi \text{ м}^{-1}$;
- 3) $2\pi \text{ м}^{-1}$;
- 4) $(\pi/2) \text{ м}^{-1}$.

15.19. Размерность вектора Умова – Пойнтинга

- 1) Дж/(с·м²);
- 2) Вт/м²;
- 3) Дж/м²;
- 4) Дж/с.

15.20. Напряженности электрического и магнитного полей изменяются согласно уравнениям:

$$E = 150 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^7 t - k \cdot x + \varphi\right) \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$H = 200 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^7 t - k \cdot x + \varphi\right) \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Максимальное значение модуля вектора Умова – Пойнтинга $|\vec{S}|$ равно ...

- 1) 200 Вт/м²; 2) 150 Вт/м²; 3) 30 · 10³ Вт/м²; 4) 100 Вт/м².

15.21. В вакууме распространяется электромагнитная волна. Мгновенное значение напряженности электрического поля равно E . Мгновенное значение напряженности магнитного поля H равно ...

1) $H = E \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{\mu \cdot \mu_0}}$; 2) $H = E$; 3) $H = E \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$;

4) $E = H \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$; 5) $H = E \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$.

15.22. Электромагнитная волна распространяется в вакууме. Мгновенное значение напряженности магнитного поля равно H . Мгновенное значение напряженности электрического поля E равно ...

1) $E = H \sqrt{\frac{\mu \cdot \mu_0}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}}$; 2) $E = H$; 3) $E = H \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$;

4) $E = H \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$; 5) $H = E \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$.

15.23. Мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне равны E и H соответственно. Чему равен $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ для среды, в которой распространяется электромагнитная волна?

1. $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{H}{E} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$. 2. $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{E}{H} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$.

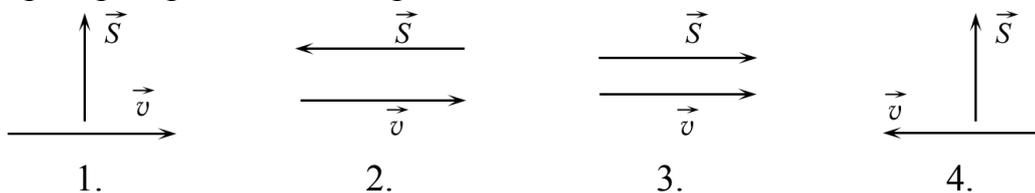
3. $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{E}{H} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$. 4. $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = EH \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$.

15.24. Какое соотношение между массой m и энергией W электромагнитного поля является универсальным законом природы?

1. $W = m \cdot c^2$. 2. $W = \frac{m \cdot v^2}{2}$.

3. $W = m \cdot g \cdot h$. 4. $W = \frac{m \cdot v^2}{2} + m \cdot g \cdot h$.

15.25. Укажите рисунок, где правильно показано направление вектора Умова – Пойнтинга $|\vec{S}|$ при заданном направлении вектора скорости \vec{v} распространения электромагнитной волны.



15.26. Модуль вектора Умова – Пойнтинга $|\vec{S}|$ равен

- 1) $|\vec{S}| = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}|$; 2) $|\vec{S}| = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot \sin \alpha$;
 3) $|\vec{S}| = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot \cos \alpha$; 4) $|\vec{S}| = \frac{|\vec{E}| \cdot |\vec{H}|}{\cos \alpha}$.

15.27. Напряженности E и H достигают максимума

- 1) *одновременно*; 2) *со сдвигом в $T/2$* ;
 3) *со сдвигом в $T/4$* ; 4) *со сдвигом в $T/8$* .

15.28. Напряженности E и H обращаются в нуль

- 1) *одновременно*; 2) *со сдвигом в $T/2$* ;
 3) *со сдвигом в $T/4$* ; 4) *со сдвигом в $T/8$* .

15.29. На какое время τ отстают колебания вектора \vec{E} в точке пространства, находящейся на расстоянии 628 м от источника колебаний? Уравнение колебаний $E = E_0 \cos(\pi \cdot 10^8 t - 4x + \varphi)$.

1. $\tau = 8 \cdot 10^{-6}$ с. 2. $\tau = \pi \cdot 10^{-7}$ с.
 3. $\tau = \pi/2 \cdot 10^{-7}$ с. 4. $\tau = 3,2 \cdot 10^{-5}$ с.

15.30. Если волновое число равно $k = \pi \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$, то длина волны равна

- 1) $2 \cdot 10^{-7}$ м; 2) $1 \cdot 10^{-7}$ м; 3) $\pi \cdot 10^{-7}$ м; 4) $3 \cdot 10^{-7}$ м.

15.31. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется

- 1) *волновой поверхностью*; 2) *волновым фронтом*;
 3) *эквипотенциальной поверхностью*;
 4) *поверхностью равной напряженности*.

15.32. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется

- 1) *волновой поверхностью*;
 2) *волновым фронтом*;
 3) *эквипотенциальной поверхностью*;
 4) *поверхностью равной напряженности*.

15.33. Энергию переносит ... волна.

- 1) бегущая; 2) плоская;
3) гармоническая; 4) стоячая.

15.34. Найдите верные выражения для зависимости длины волны от скорости v , периода T , циклической частоты колебаний ω и волнового числа k .

1. $\lambda = v \cdot T$. 2. $\lambda = \frac{\omega}{v}$. 3. $\lambda = v \cdot \frac{2\pi}{\omega}$. 4. $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

15.35. Резонансное значение частоты электромагнитных колебаний $\omega_{\text{рез}}$ равно ...

1) $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$; 2) $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2 \cdot L^2}}$;
3) $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2 \cdot L^2}}$; 4) $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4 \cdot m^2}}$.

15.36. Как должны изменяться коэффициент затухания δ , собственная частота колебаний ω_0 , частота затухающих колебаний ω и период T , чтобы колебания прекратились?

1. $\delta \rightarrow \omega_0$; $\omega \rightarrow 0$; $T \rightarrow \infty$. 2. $\delta \rightarrow 0$; $\omega_0 \rightarrow \omega$; $T \rightarrow 0$.
3. $\delta \rightarrow 0$; $\omega_0 \rightarrow 0$; $T \rightarrow \omega$. 4. $\delta \rightarrow \omega_0$; $\omega \rightarrow \omega_0$; $T \rightarrow 0$.

15.37. На рис. 15.11 изображен «моментальный снимок» электромагнитной волны. Пользуясь правилом буравчика, определите, в каком направлении распространяется эта волна.

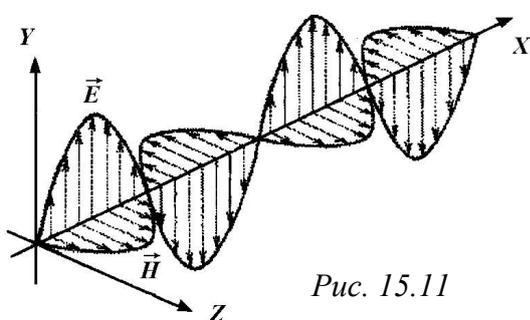


Рис. 15.11

Пользуясь правилом буравчика, определите, в каком направлении распространяется эта волна.

1. Вдоль оси X . 2. Вдоль оси Z .
3. Вдоль оси Y .
4. В сторону отрицательных значений x .

15.38. Как изменится направление распространения электромагнитной волны, если в волне изменится на противоположное направление: а) напряженность магнитного поля; б) напряженность электрического поля?

1. а) изменится на противоположное; б) не изменится.
2. а) и б) изменится на противоположное.
3. а) не изменится; б) изменится на противоположное.
4. а) и б) не изменится.

Задачи

15.1. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде с $\epsilon = 2$ и $\mu = 1$. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 12$ В/м. Определить: 1) фазовую скорость волны; 2) амплитуду напряженности магнитного поля волны.

15.2. Найти отношение энергий $\frac{W_M}{W_{эл}}$ магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $\frac{T}{8}$ ($t = \frac{T}{n}$).

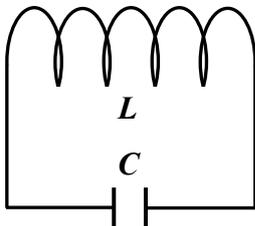


Рис. 15.12

15.3. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2 \cdot 10^{-8}$ Ф и катушки с общим числом витков $N = 300$ и индуктивностью $L = 5 \cdot 10^{-5}$ Гн. Омическим сопротивлением контура можно пренебречь. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора 120 В (рис. 15.12). Определить максимальный магнитный поток, пронизывающий катушку.

15.4. Два параллельных провода, погруженные в жидкий диэлектрик, индуктивно соединены с генератором Γ высокочастотных электромагнитных колебаний (рис. 15.13). При частоте $\nu = 1 \cdot 10^2$ МГц в системе устанавливаются стоячие электромагнитные волны (рис. 15.14). Перемещая вдоль проводов газоразрядную трубку A , по ее свечению определяют положение пучностей напряженности поля. Расстояние между соседними пучностями оказалось равным $l = 1$ м. Найти диэлектрическую проницаемость ϵ диэлектрика.

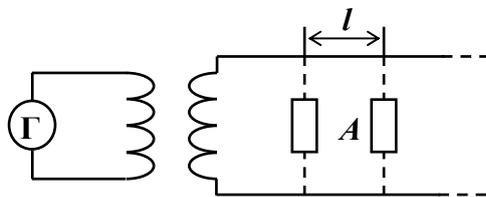


Рис. 15.13

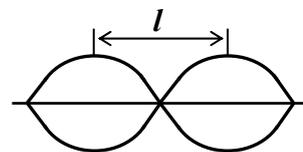


Рис. 15.14

15.5. Контур состоит из катушки индуктивностью $L = 3 \cdot 10^{-4}$ Гн и сопротивлением $R = 1$ Ом и конденсатора емкостью $C = 22 \cdot 10^{-6}$ Ф. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе равно 0,5 В?

15.6. Скорость распространения электромагнитных волн в некоторой среде составляет $v = 250$ Мм/с. Определить длину волны электромагнитных волн в этой среде, если их частота в вакууме $\nu_0 = 1$ МГц.

15.7. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 5$ МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ в вакуум. Определить приращение ее длины волны.

15.8. Радиолокатор обнаружил в море подводную лодку, отраженный сигнал от которой дошел до него за $t = 36$ мкс. Учитывая, что диэлектрическая проницаемость воды $\varepsilon = 81$, определить расстояние от локатора до подводной лодки.

15.9. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 0,5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 0,4$ мГн. Определить длину волны излучения, генерируемого контуром.

15.10. Определить длину электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд на обкладках конденсатора $q_m = 50$ нКл, а максимальная сила тока в контуре $I_m = 1,5$ А. Активным сопротивлением контура пренебречь.

15.11. Длина λ электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 12 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определить максимальный заряд q_m на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока в контуре $I_m = 1$ А.

15.12. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 10 В/м. Определить амплитуду напряженности магнитного поля волны.

15.13. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна 1 мА/м. Определить амплитуду напряженности электрического поля волны.

15.14. Конденсатор емкостью $C = 500$ пФ соединен параллельно с катушкой длиной $l = 40$ см и сечением $S = 5$ см², содержащей $N = 1000$ витков. Сердечник немагнитный, найти период T колебаний.

15.15. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 50 мВ/м. Определить интенсивность волны I , т. е. среднюю энергию, проходящую через единицу поверхности в единицу времени.

15.16. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля составляет 5 мА/м. Определить интенсивность волны I , т. е. среднюю энергию, проходящую через единицу поверхности в единицу времени.

15.17. Волны распространяются со скоростью $v = 1 \cdot 10^8$ м/с при частоте $\nu = 1 \cdot 10^{15}$ Гц. Чему равна разность фаз двух точек, отстоящих друг от друга на расстоянии $l = 0,05$ мкм?

15.18. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 48$ мкФ и индуктивности $L = 24 \cdot 10^{-3}$ Гн и активного сопротивления $R = 200$ Ом. Определить частоту свободных электромагнитных колебаний в этом контуре. Насколько изменится частота, если пренебречь активным сопротивлением катушки?

15.19. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2,22 \cdot 10^{-9}$ Ф и катушки (без сердечника), намотанной из медной проволоки диаметром $d = 0,5$ мм. Длина катушки $l = 20$ см. Найти логарифмический декремент затухания колебаний. (Плотность меди $\rho = 8600$ кг/м³, принять $T = 2\pi\sqrt{LC}$).

15.20. Колебательный контур состоит из индуктивности в 10^{-2} Гн, емкости $0,405$ мкФ и сопротивления 2 Ом. Найти, во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за время одного периода. (Принять $T = 2\pi\sqrt{LC}$, а $\varphi = 0$).

15.21. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью в $0,2$ мкФ и катушки, индуктивность которой $5,07 \cdot 10^{-3}$ Гн. При каком логарифмическом декременте затухания разность потенциалов на обкладках конденсатора через 10^{-3} колебаний уменьшится в три раза? (Принять $T = 2\pi\sqrt{LC}$, а $\varphi = 0$.)

15.22. Двухпроводная линия индуктивно связана с генератором электромагнитных колебаний и погружена в спирт. Определить частоту генератора, если расстояние между пучностями в стоячей волне $0,5$ м, а относительные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей спирта соответственно 26 и 1 .

15.23. Первичная обмотка трансформатора находится под напряжением 220 В и потребляет ток силой $1,5$ А. Вторичная обмотка питает лампу накаливания током 20 А при напряжении 12 В. КПД трансформатора 91 %. Определить коэффициент мощности при этой нагрузке (коэффициент мощности $\cos \varphi_1 = P_1/U_1I_1$).

15.24. Найти отношение энергий ($W_M/W_{эл}$) магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $T/8$.

15.25. Катушка длиной $l = 50$ см и площадью поперечного сечения $S = 10$ см² включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Число витков катушки $N = 3000$. Найти сопротивление R (в Ом) катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60^\circ$.

15.26. Обмотка катушки состоит из $N = 500$ витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $S = 1 \text{ мм}^2$. Длина катушки $l = 50 \text{ см}$, ее диаметр $D = 5 \text{ см}$. При какой частоте ν переменного тока полное сопротивление Z катушки вдвое больше ее активного сопротивления R ?

15.27. Два конденсатора емкостью $C_1 = 0,2 \text{ мкФ}$ и $C_2 = 0,1 \text{ мкФ}$ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением $U = 220 \text{ В}$ и частотой $\nu = 50 \text{ Гц}$. Найти ток I в цепи и падения потенциала U_{C_1} и U_{C_2} на первом и втором конденсаторах.

15.28. Индуктивность $L = 22,6 \text{ мГн}$ и сопротивление R включены параллельно в цепь переменного тока частотой $\nu = 50 \text{ Гц}$. Найти сопротивление R , если известно, что сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60^\circ$.

15.29. Конденсатор емкостью $C = 1 \text{ мкФ}$ и резистор с сопротивлением $R = 3 \text{ кОм}$ включены в цепь переменного тока частотой $\nu = 50 \text{ Гц}$. Найти полное сопротивление Z цепи, если конденсатор и резистор включены: а) последовательно; б) параллельно.

15.30. Колебательный контур состоит из катушки и конденсатора. Во сколько раз увеличится частота собственных колебаний в контуре, если в контур последовательно включить второй конденсатор, емкость которого в три раза меньше емкости первого?

15.31. К генератору переменного тока подключена электропечь, сопротивление которой 200 Ом . За 5 минут работы печи в ней выделяется 270 кДж теплоты. Какова при этом амплитуда силы тока в печи?

15.32. Во сколько раз уменьшится индуктивное сопротивление катушки, если ее включить в цепь переменного тока с частотой 50 Гц вместо 10 кГц ?

ЗАНЯТИЕ 16

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Теория

Мы приступаем к изучению необыкновенно «зрелищного» раздела физики – «Оптика». (Оптика от греч. *optike* – наука о зрительных восприятиях, *optos* – «видимый», «зримый»).

Оптика – это раздел физики, в котором изучается оптическое излучение (свет), процессы его распространения и явления, наблюдаемые при взаимодействии света и вещества. Это одна из древнейших наук! Множество приборов, которыми пользуются ученые-астрономы, открывая и изучая новые планеты и звезды, – телескопы, например, – функционируют согласно законам геометрической оптики (законы преломления и отражения света). Действие таких бытовых приборов, как очки, фотоаппараты, бинокли, также основано на принципах геометрической оптики.

Раздел оптики, в котором законы распространения света рассматриваются на основе представления света лучами, называется *геометрической оптикой*. Под световыми лучами понимают нормальные к волновым поверхностям линии, вдоль которых распространяется поток световой энергии. Принцип кратчайшего оптического пути (или минимального времени распространения света Ферма (1660)) в дальнейшем был назван *законом прямолинейности распространения света в оптически однородной среде*. При этом Ферма рассматривал луч как путь, для прохождения которого свету требуется минимальное время. В данном разделе очень много построений, которые основываются на законах отражения и преломления и законах геометрии.

Законы отражения и преломления света

Законы отражения были открыты еще в III в. до н. э. древнегреческим математиком Эвклидом.

Если среда оптически неоднородная, то в разных областях скорость распространения света $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$ различна, и прямолинейность распро-

странения световых лучей нарушается. Простейшей неоднородностью является плоская граница раздела двух однородных прозрачных сред, в которых свет распространяется с разными скоростями: v_1 ($v_1 = \frac{c}{n_1}$) и v_2

($v_2 = \frac{c}{n_2}$).

Как показано на рис. 16.1, луч 1, падающий из первой среды под углом i (угол падения) к перпендикуляру, на границе раздела раздваивается на два луча: отраженный 2 и преломленный 3.

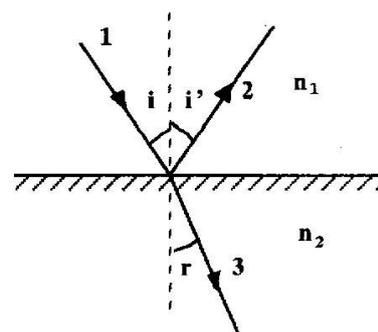


Рис. 16.1

Преломленный луч 3 распространяется во второй среде под углом r (угол преломления) к перпендикуляру. Заметим, что угол $r < i$ (преломленный луч приближается к нормали). Взаимное геометрическое расположение этих трех лучей определяется тремя законами Декарта:

1. Угол падения i равен углу отражения i' , т. е. $i' = i$ (закон отражения).

2. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная и равная относительному показателю преломления (n_{21}) второй среды относительно первой (закон Снеллиуса):

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21} \text{ (закон преломления),}$$

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

здесь n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления сред.

3. Луч падающий, луч отраженный и луч преломленный лежат в одной плоскости с перпендикуляром, восстановленным в точке падения к границе раздела двух сред.

Закономерности отражения и преломления электромагнитных волн (света) на границе раздела двух диэлектрических сред можно получить, исходя из граничных условий для векторов напряженностей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей (при этом магнитные проницаемости сред равны $\mu_1 = \mu_2 = 1$).

Абсолютным показателем преломления среды называется величина n , равная отношению скорости c электромагнитных волн в вакууме к их фазовой скорости v в среде:

$$n = \frac{c}{v}; \quad n = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu},$$

где ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды. Учитывая, что $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$, закон преломления можно записать в виде

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r. \quad (1)$$

Из симметрии этого выражения следует *обратимость* хода световых лучей (рис. 16.2, а, б).

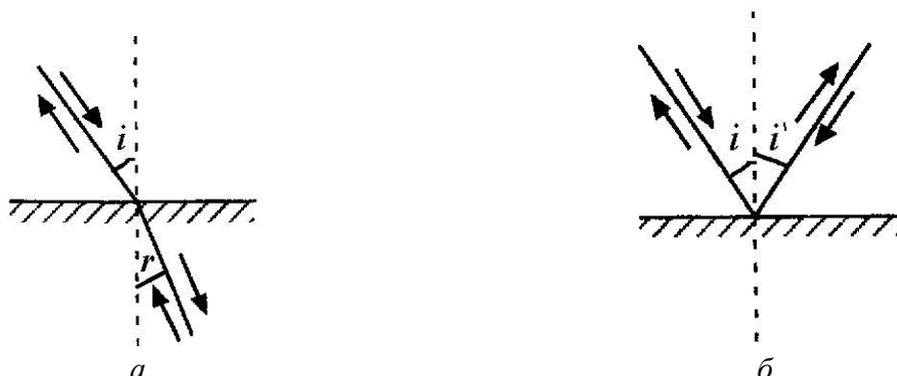


Рис. 16.2

Полное внутреннее отражение

Если свет распространяется из среды с бóльшим показателем преломления n_1 (оптически более плотной) в среду с меньшим показателем преломления n_2 (оптически менее плотную, $n_1 > n_2$), например из стекла в воду, то согласно (1)

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_1}{n_2} > 1.$$

Отсюда следует, что преломленный луч удаляется от нормали, и угол преломления r больше угла падения i . При некотором угле падения угол преломления может оказаться равным $\pi/2$. Угол падения, при котором $r = \pi/2$, называется предельным углом падения $i_{\text{пр}}$. При $i = i_{\text{пр}}$ интенсивность преломленного луча обращается в ноль, а интенсивность отраженного равна интенсивности падающего. Таким образом, при углах падения в пределах от $i_{\text{пр}}$ до $\pi/2$ падающий луч не преломляется, а полностью отражается обратно в первую среду (рис. 16.3). Это явление называется *полным внутренним отражением*. Предельный угол падения можно найти из соотношения

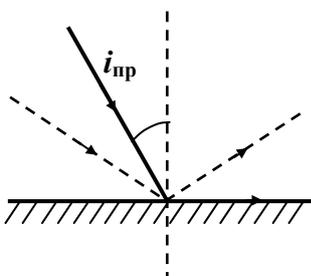


Рис. 16.3

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Явление полного внутреннего отражения используется в оптических приборах (биноклях, перископах), рефрактометрах (для определения показателей преломления веществ), световодах. Световоды представляют собой тонкие изогнутые стеклянные волокна, световедущая

жила которых окружена оболочкой из стекла с меньшим показателем преломления. Свет, падающий на торец световода под углом, большим предельного, подвергается полному внутреннему отражению и распространяется по световедущей жиле. Подробнее устройство световодов описано в разделе «Волоконная оптика».

Преломление на сферических поверхностях. Линзы

Линзы представляют собой прозрачные тела, ограниченные двумя поверхностями. Линза, преломляя свет, способна формировать оптические изображения предметов. По внешней форме (рис. 16.4) линзы делятся:

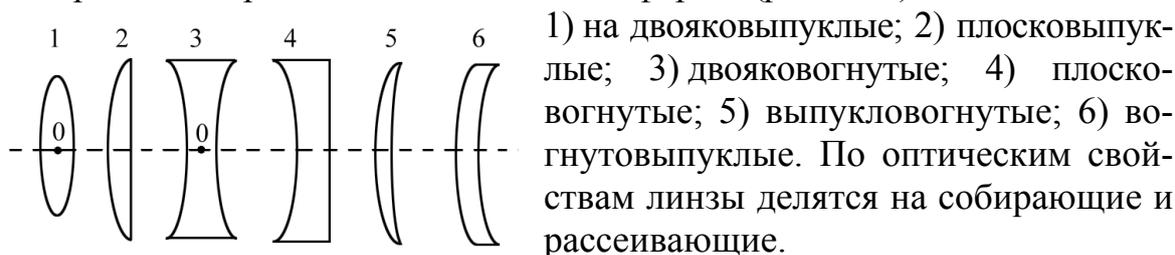


Рис. 16.4

1) на двояковыпуклые; 2) плосковыпуклые; 3) двояковогнутые; 4) плосковогнутые; 5) выпукловогнутые; 6) вогнутовыпуклые. По оптическим свойствам линзы делятся на собирающие и рассеивающие.

Линза называется *тонкой*, если ее толщина (расстояние между крайними точками ограничивающих поверхностей) значительно меньше радиусов поверхностей. Прямая, проходящая через центры кривизны поверхностей линзы, называется *главной оптической осью*. Точка, лежащая на главной оптической оси линзы, через которую лучи проходят без преломления, называется *оптическим центром линзы* (точка *O* на рис. 16.4, рис. 16.5). Далее будем рассматривать парааксиальные (приосевые) лучи, образующие с оптической осью малые углы. Точка, в которой собираются все преломленные лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси, называется *главным фокусом*. Расстояние от центра линзы до фокуса называется *фокусным расстоянием f* (рис. 16.5).

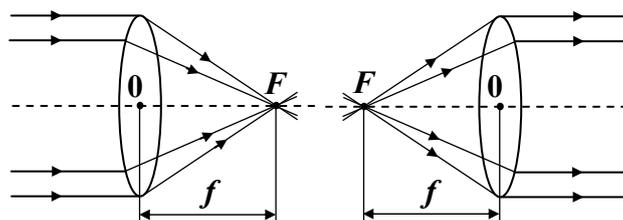


Рис. 16.5

Фокусные расстояния линзы, окруженной с обеих сторон одинаковой средой, равны. Величина $\Phi = \frac{1}{f}$ называется *оптической силой линзы*. Если фокусное расстояние линзы измеряется в метрах, то оптическая сила – в диоптриях. *Диоптрия* – это оптическая сила линзы с фо-

кусным расстоянием 1 м: 1 дптр = 1/1 м. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы могут быть найдены по формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad (2)$$

здесь a – расстояние от оптического центра линзы до предмета; b – расстояние от центра линзы до изображения. Фокусное расстояние тонкой линзы f и ее оптическая сила Φ зависят от отношения абсолютных показателей преломления вещества линзы $n_{л}$ и окружающей среды $n_{ср}$, а также от радиусов кривизны поверхностей линзы (R_1 и R_2).

$$\Phi = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_{л}}{n_{ср}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

при этом радиусы выпуклых поверхностей берутся со знаком «+», вогнутых – со знаком «-» (по обе стороны от линзы среда одна и та же). Линзы с положительным значением Φ являются собирающими, с отрицательным – рассеивающими. Плоскости, проходящие через фокусы линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, называются *фокальными плоскостями*.

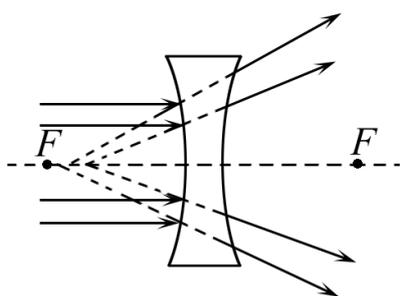


Рис. 16.6

Оптическая сила Φ двух тонких сложенных линз $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. В отличие от собирающей, рассеивающая линза имеет мнимое изображение и фокусы. В мнимом фокусе сходятся (после преломления) воображаемые продолжения лучей, падающих на рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси (рис. 16.6). Предмет и его изображение находятся по одну сторону рассеивающей линзы.

В формуле тонкой линзы (2), если линза рассеивающая, то фокусное расстояние f и расстояние от центра линзы до изображения b следует считать отрицательным:

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Если в собирающей линзе получено мнимое изображение ($b < f$), то расстояние b отрицательно. Отношение линейных размеров изображения y_1 и предмета y_2 называется *линейным (поперечным) увеличением k* линзы (рис. 16.7):

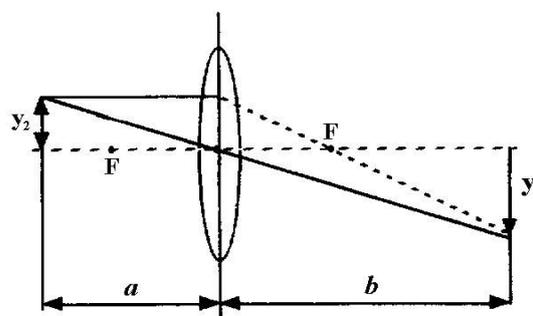


Рис. 16.7

$$k = \frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}.$$

Сферическое зеркало

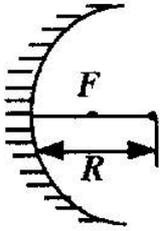


Рис. 16.8

Фокусное расстояние f сферического зеркала равно $f = \frac{R}{2}$, где R – радиус кривизны зеркала (рис. 16.8).

Оптическая сила сферического зеркала $\Phi = \frac{1}{f}$.

Формула сферического зеркала: $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, здесь a

и b – расстояния предмета и изображения от зеркала.

Правило знаков для зеркала такое же, как для линзы. Поперечное увеличение в зеркалах такое же, как в линзах

$$(k = \frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}).$$

Плоское зеркало

Радиус кривизны плоского зеркала равен бесконечности. Изображение находится от зеркала на таком же расстоянии, что и предмет, оно является мнимым, его положение определяется пересечением продолжения любых двух отраженных от зеркала лучей (рис. 16.9).

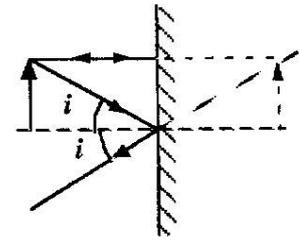


Рис. 16.9

Построение изображения предмета в линзах и зеркалах осуществляется с помощью следующих лучей:

1. Луча, проходящего через оптический центр линзы и не изменяющего своего направления.

2. Луча, идущего параллельно главной оптической оси. После преломления в линзе этот луч (или его продолжение) проходит через второй фокус линзы. На рис. 16.10–16.13 даны примеры построения изображений в линзах и зеркалах.

Линза, не являющаяся тонкой, называется *лупой*. Увеличение, даваемое лупой, определяется как $k = \frac{l}{f}$, здесь l – расстояние наилучшего зрения; f – фокусное расстояние лупы ($l = 25$ см).

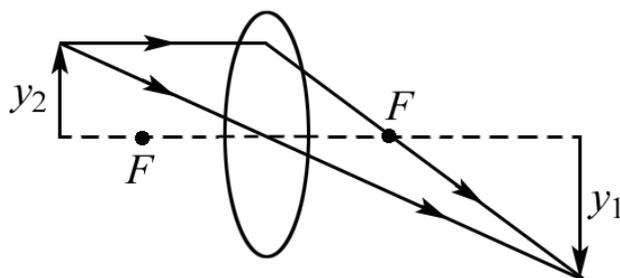


Рис. 16.10

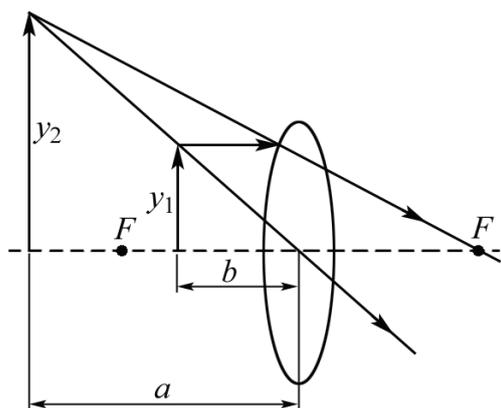


Рис. 16.11

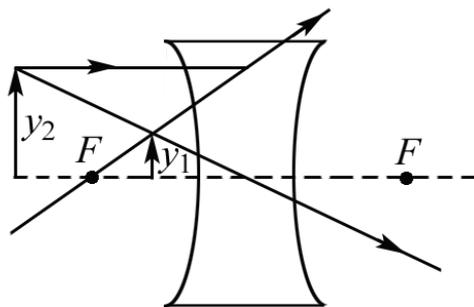


Рис. 16.12

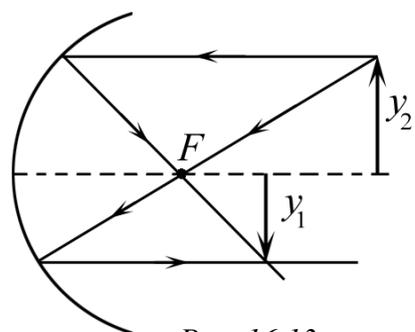


Рис. 16.13

Рассматривая прохождение света через тонкие линзы, мы ограничивались параксиальными (приосевыми) лучами. Показатель преломления материала линзы считали не зависящим от длины волны падающего света, а падающий свет – монохроматическим. В реальных оптических системах эти условия не выполняются, поэтому в них возникают искажения изображения – аберрации. Их изучение не входит в нашу задачу.

Помимо геометрической оптики, в физике и технике имеется раздел, изучающий вопросы формирования фокусировки и отклонения пучков заряженных частиц под действием электрических и магнитных полей в вакууме. С помощью сформированных таким образом пучков заряженных частиц получают изображения микрообъектов (например, кристаллической структуры вещества). Этот раздел физики называется электронной оптикой, а такие оптические системы – электронными и магнитными линзами.

Подсказка

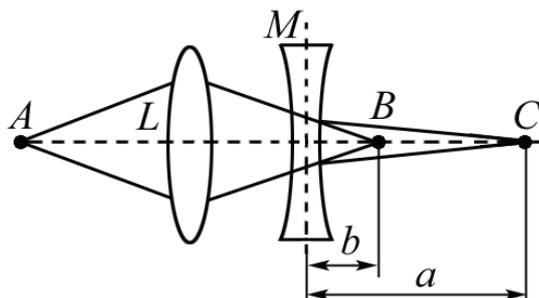


Рис. 16.14

1. Собирающая линза L дает на экране изображение B светящейся точки A , лежащей на главной оптической оси. Между линзой и экраном на расстоянии $b = 20$ см от экрана поместили рассеивающую линзу M . Отодвигая экран от рассеивающей линзы, получили новое изображение C светящейся точки. При этом расстояние нового положения экрана от линзы M оказалась равным $a = 60$ см. Определить фокусное расстояние рассеивающей линзы. Ответ дать в метрах.

Решение

На основании принципа обратимости хода лучей в линзе можно утверждать, что если в точку C поместить светящуюся точку, то мнимое изображение ее получится в точке B (рис. 16.14). Так как фокусное расстояние f рассеивающей линзы и расстояние b от линзы до мнимого изображения отрицательны, то формула рассеивающей линзы будет иметь вид

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{f} = \frac{b-a}{a \cdot b}.$$

Откуда

$$f = \frac{a \cdot b}{a - b}.$$

Подставив числовые данные, получим $f = 30$ см = 0,3 м.

2. На рассеивающую линзу падает сходящийся пучок лучей. После преломления в линзе лучи пересекаются в точке, лежащей на расстоянии $d = 15$ см от линзы. Если линзу убрать, то точка встречи лучей переместится на расстояние $x = 5$ см ближе к тому месту, где находилась линза. Определить фокусное расстояние линзы. Ответ дать в метрах по модулю (без минуса).

Решение

В данном случае (рис. 16.15) точка S_1 играет роль источника, а точка S_2 – роль изображения. Формула рассеивающей линзы

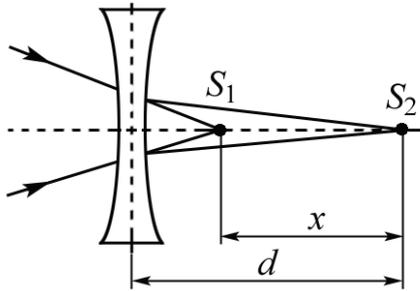


Рис. 16.15

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

По условию задачи расстояние до предмета $a = d - x$, расстояние до изображения $b = d$.

$$\text{Отсюда } f = \frac{a \cdot b}{a - b} = \frac{d(d - x)}{(d - x) - d} = \frac{d(d - x)}{-x},$$

$$\text{т. е. } f = \frac{d(d - x)}{-x}.$$

3. Точка S движется со скоростью $v = 4$ см/с. С какой скоростью (v_1) движется ее изображение, если $a = 30$ см, а фокусное расстояние линзы $f = 20$ см?

Решение

Пусть точка S за время t прошла путь l (рис. 16.16). Ее изображение за этот промежуток времени пройдет путь l_1 . Увеличение линзы $k = \frac{b}{a}$,

$$\text{или } k = \frac{l_1}{l}.$$

Из формулы линзы $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ выразим неизвестное нам расстояние b :

$$b = \frac{a \cdot f}{a - f}.$$

Следовательно,

$$k = \frac{a \cdot f}{(a - f) \cdot a} = \frac{f}{a - f}.$$

Путь, пройденный изображением, $l_1 = k \cdot l = \frac{f \cdot l}{a - f}$.

Скорость движения изображения $v_1 = \frac{l_1}{t}$. Время выразим как $t = \frac{l}{v}$.

Окончательно

$$v_1 = \frac{f \cdot l \cdot v}{(a - f) \cdot l} = \frac{f \cdot v}{a - f}.$$

Подставив числовые данные, получим

$$v_1 = \frac{0,2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{0,3 - 0,2} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

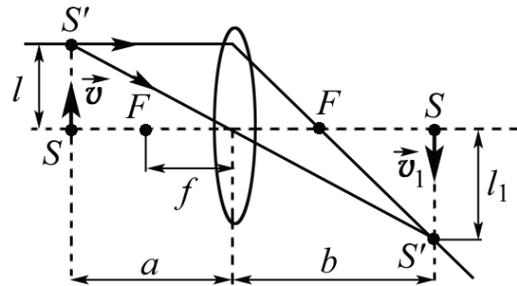


Рис. 16.16

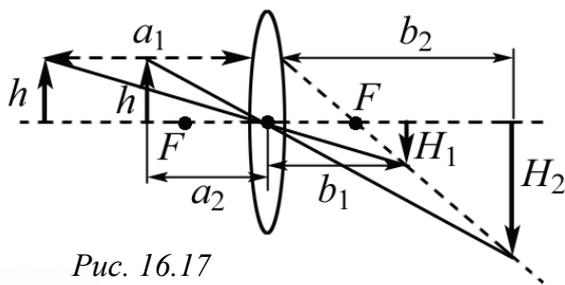


Рис. 16.17

фокусное расстояние линзы. Ответ дать в СИ.

4. Если расстояние от предмета до собирающей линзы $a_1 = 36$ см, то высота изображения $H_1 = 10$ см. Если же расстояние предмета от линзы $a_2 = 24$ см, то высота изображения $H_2 = 20$ см. Определить

Решение

Увеличения линзы в обоих случаях равны:

$$\frac{H_1}{h} = \frac{b_1}{a_1}; \quad (1)$$

$$\frac{H_2}{h} = \frac{b_2}{a_2}, \quad (2)$$

где h – высота предмета; b_1 и b_2 – расстояния от изображения до линзы в обоих случаях. После деления выражения (2) на (1)

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{b_2 \cdot a_1}{b_1 \cdot a_2}.$$

Отсюда

$$b_2 = b_1 \cdot \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{a_2}{a_1}.$$

После подставления числовых данных $b_2 = \frac{4}{3} b_1$.

Используя уравнение линзы, напишем выражение для фокусного расстояния:

$$f = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1}; \quad f = \frac{a_2 \cdot b_2}{a_2 + b_2} = \frac{\frac{4}{3} b_1 \cdot a_2}{\frac{4}{3} b_1 + a_2}.$$

Приравняв правые части полученных уравнений, получим

$$\frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1} = \frac{\frac{4}{3} b_1 \cdot a_2}{\frac{4}{3} b_1 + a_2}. \quad \text{После сокращения на } b_1: \quad \frac{a_1}{a_1 + b_1} = \frac{\frac{4}{3} a_2}{\frac{4}{3} b_1 + a_2};$$

$$a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot \frac{4}{3} \cdot b_1 = \frac{4}{3} \cdot a_1 \cdot a_2 + \frac{4}{3} b_1 \cdot a_2.$$

Отсюда после преобразований $b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2}{4(a_1 - a_2)}$; $f = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1}$.

Подставим числовые данные, получим $b_1 = 18$ см, $f = 12$ см = 0,12 м.

Тест

Вопросы

16.1. Как соотносятся показатели преломления сред, если при переходе луча света из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем n_2 возникло явление полного внутреннего отражения?

1. $n_1 > n_2$. 2. $n_1 = n_2$. 3. $n_1 < n_2$. 4. $n_1 = n_2 = 1$.

16.2. Луч света падает на границу раздела двух сред (рис. 16.18). Как соотносятся показатели преломления сред, если при этом возникло явление полного внутреннего отражения?

1. $n_1 > n_2$. 2. $n_1 = n_2$. 3. $n_1 < n_2$. 4. $n_1 = n_2 = 1$.

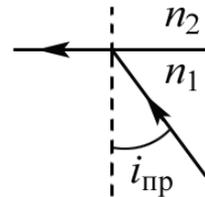


Рис. 16.18

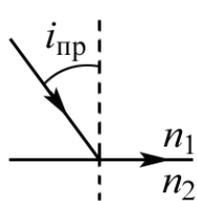


Рис. 16.19

16.3. Луч света падает на границу раздела двух сред (рис. 16.19), при этом возникает явление полного внутреннего отражения. Как соотносятся показатели преломления сред?

1. $n_1 > n_2$. 2. $n_1 = n_2$. 3. $n_1 < n_2$. 4. $n_1 = n_2 = 1$.

16.4. Луч света падает на границу раздела двух сред под углом $i = i_{\text{пред}}$. Чему равен угол преломления r , если при этом возникает явление полного внутреннего отражения?

1. $r = \pi/2$. 2. $r = \pi$. 3. $r = i$. 4. $r = 0$.

16.5. Чему равна оптическая сила Φ линзы, фокусное расстояние которой $f = 10$ см?

1. $\Phi = 1$ дптр. 2. $\Phi = 10$ дптр.
3. $\Phi = 0,1$ дптр. 4. $\Phi = 100$ дптр.

16.6. Чему равна оптическая сила Φ линзы, фокусное расстояние которой $f = 1$ см?

1. $\Phi = 1$ дптр. 2. $\Phi = 10$ дптр.
3. $\Phi = 0,1$ дптр. 4. $\Phi = 100$ дптр.

16.7. Чему равно фокусное расстояние f линзы, оптическая сила которой $\Phi = 10$ диоптрий?

1. $f = 10$ м. 2. $f = 1$ м.
3. $f = 0,1$ м. 4. $f = 0,01$ м.

16.8. Какое соотношение является формулой тонкой собирающей линзы? (Изображение действительное.)

1. $-\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. 2. $\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
3. $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. 4. $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

16.9. Тонкой рассеивающей линзе соответствуют соотношения:

1. $-\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. 2. $\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
 3. $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. 4. $-\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

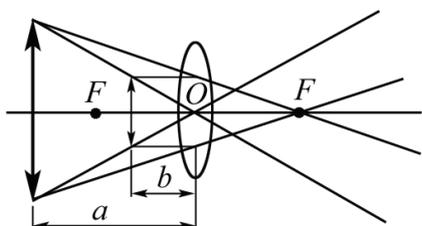


Рис. 16.20

16.10. Формула тонкой линзы для случая, изображенного на рисунке (рис. 16.20),

- 1) $-\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; 2) $\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;
 3) $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; 4) $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

16.11. Чему равно фокусное расстояние f собирающей стеклянной линзы ($n = 1,5$), находящейся в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны ее поверхностей $R = 10$ см?

1. $f = 1$ см. 2. $f = 5$ см.
 3. $f = 10$ см. 4. $f = 20$ см.

16.12. Чему равно фокусное расстояние f собирающей стеклянной линзы ($n = 1,5$), находящейся в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны ее поверхностей $R = 20$ см?

1. $f = 10$ см. 2. $f = 1$ см. 3. $f = 15$ см. 4. $f = 20$ см.

16.13. Чему равно фокусное расстояние f собирающей стеклянной линзы ($n = 1,5$), находящейся в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны ее поверхностей R ?

1. $f = 2R$. 2. $f = \frac{R}{2}$. 3. $f = R$. 4. $f = 4R$.

16.14. Чему равно фокусное расстояние f собирающей стеклянной линзы ($n = 1,5$), находящейся в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны ее поверхностей $R = 30$ см?

1. $f = 30$ см. 2. $f = 15$ см. 3. $f = 45$ см. 4. $f = 60$ см.

16.15. Чему равна оптическая сила Φ собирающей стеклянной линзы ($n = 1,5$), находящейся в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны ее поверхностей равен R ?

1. $\Phi = \frac{1}{R}$. 2. $\Phi = R$. 3. $\Phi = \frac{2}{R}$. 4. $\Phi = \frac{R}{2}$.

16.16. Чему равна оптическая сила Φ собирающей стеклянной линзы ($n = 1,5$), находящейся в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны ее поверхностей $R = 10$ см?

1. $\Phi = 1$ дптр. 2. $\Phi = 10$ дптр. 3. $\Phi = 5$ дптр. 4. $\Phi = 20$ дптр.

16.17. Чему равна оптическая сила Φ собирающей стеклянной линзы ($n = 1,5$), находящейся в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны ее поверхностей $R = 20$ см?

1. $\Phi = 10$ дптр. 2. $\Phi = 15$ дптр. 3. $\Phi = 5$ дптр. 4. $\Phi = 1$ дптр.

16.18. Чему равна оптическая сила Φ собирающей стеклянной линзы ($n = 1,5$), находящейся в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны ее поверхностей $R = 5$ см?

1. $\Phi = 1$ дптр. 2. $\Phi = 10$ дптр. 3. $\Phi = 20$ дптр. 4. $\Phi = 5$ дптр.

16.19. Чему равна оптическая сила Φ собирающей стеклянной линзы ($n = 1,5$), находящейся в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны ее поверхностей $R = 40$ см?

1. $\Phi = 1$ дптр. 2. $\Phi = 2,5$ дптр. 3. $\Phi = 40$ дптр. 4. $\Phi = 20$ дптр.

16.20. Чему равна оптическая сила Φ системы, состоящей из двух тонких собирающих стеклянных линз ($n = 1,5$), расположенных в воздухе, радиусы кривизны которых равны соответственно $R_1 = 10$ см, $R_2 = 40$ см?

1. $\Phi = 15$ дптр. 2. $\Phi = 30$ дптр.
3. $\Phi = 10$ дптр. 4. $\Phi = 5$ дптр.

16.21. Если оптическая сила линзы 1 равна $\Phi_1 = 5$ дптр (рис. 16.21), то оптическая сила Φ_2 линзы 2 равна ... (линзы 1 и 2 сделаны из одного сорта стекла).

- 1) $\Phi_2 = 5$ дптр; 2) $\Phi_2 = -5$ дптр;
3) $\Phi_2 = 10$ дптр; 4) $\Phi_2 = 1$ дптр.

16.22. Чему равна оптическая сила Φ системы, состоящей из линз одного сорта стекла ($n = 1,5$), расположенных в воздухе ($n = 1$), если радиус кривизны поверхностей линз равен $R = 10$ см (рис. 16.21)?

1. $\Phi = 0$. 2. $\Phi = 20$ дптр. 3. $\Phi = 10$ дптр. 4. $\Phi = 5$ дптр.

16.23. Изображение и предмет находятся слева от собирающей линзы, причем изображение помещается между фокусом и центром линзы. Это изображение ...

- 1) мнимое; 2) действительное;
3) изображение в виде светящейся точки на оптической оси линзы;
4) увеличенное.

16.24. Не преломляясь проходит линзу луч, ...

- 1) падающий на линзу параллельно оптической оси;
2) проходящий через центр линзы;
3) прошедший через фокус линзы;
4) прошедший через половину расстояния от центра линзы.

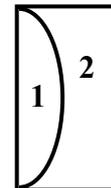


Рис. 16.21

16.25. Пройдя линзу параллельно оптической оси, идет луч,

- 1) падающий на линзу параллельно оптической оси;
- 2) проходящий через центр линзы;
- 3) прошедший через фокус линзы;
- 4) прошедший через половину расстояния от центра линзы.

16.26. После преломления в линзе через второй фокус линзы проходит луч,

- 1) падающий на линзу параллельно оптической оси;
- 2) проходящий через центр линзы;
- 3) прошедший через фокус линзы;
- 4) прошедший через половину расстояния от центра линзы.

16.27. Чему равна оптическая сила Φ системы, состоящей из двух одинаковых собирающих стеклянных линз ($n = 1,5$), радиус кривизны поверхностей которых равен $R = 20$ см?

1. 10 дптр. 2. 5 дптр. 3. 20 дптр. 4. 15 дптр.

16.28. Чему равна оптическая сила Φ системы, состоящей из двух одинаковых собирающих стеклянных линз, радиус кривизны поверхностей которых равен $R = 25$ см?

1. 25 дптр. 2. 8 дптр. 3. 10 дптр. 4. 5 дптр.

16.29. Оптическая система состоит из трех тонких сложенных вплотную стеклянных собирающих линз ($n = 1,5$). Линзы имеют одинаковый радиус кривизны поверхностей $R = 25$ см. Чему равна оптическая сила Φ системы?

1. 50 дптр. 2. 25 дптр. 3. 12 дптр. 4. 10 дптр.

16.30. Поперечное увеличение в тонкой собирающей линзе $k = 3$. Чему равно отношение b/a ? (a – расстояние от предмета до линзы, b – расстояние от изображения до линзы).

1. $\frac{b}{a} = 3$. 2. $\frac{b}{a} = 9$. 3. $\frac{b}{a} = 6$. 4. $\frac{b}{a} = 12$.

16.31 Поперечное увеличение в тонкой собирающей линзе $k = 4$. Чему равно отношение b/a ? (a – расстояние от предмета до линзы, b – расстояние от изображения до линзы).

1. $\frac{b}{a} = 8$. 2. $\frac{b}{a} = 12$. 3. $\frac{b}{a} = 4$; 4. $\frac{b}{a} = 2$.

16.32. Расстояние от изображения до собирающей линзы $b = 40$ см, расстояние от предмета до линзы $a = 20$ см. Чему равно поперечное увеличение линзы?

1. 2. 2. 4. 3. 6. 4. 10.

16.33. Расстояние от предмета до рассеивающей линзы $a = 20$ см, увеличение $k = 0,5$. Чему равно фокусное расстояние f линзы? Изображение мнимое.

1. $f = 0,2$ м. 2. $f = 0,5$ м. 3. $f = 0,4$ м. 4. $f = 0,1$ м.

16.34. Расстояние от предмета до рассеивающей линзы $a = 50$ см, увеличение $k = 0,2$. Чему равно фокусное расстояние f линзы? Изображение мнимое.

1. $f = 0,125$ м. 2. $f = 0,2$ м.
3. $f = 0,5$ м. 4. $f = 0,25$ м.

16.35. Чему равно фокусное расстояние вогнутого зеркала, если предмет находится на расстоянии $a = 20$ см, увеличение зеркала $k = 1$? Изображение действительное.

1. $f = 0,5$ м. 2. $f = 0,1$ м.
3. $f = 0,1$ м. 4. $f = 0,2$ м.

16.36. Радиус кривизны вогнутого зеркала $R = 20$ см. Чему равно фокусное расстояние f зеркала? Ответ дать в метрах.

1. $f = 0,2$ м. 2. $f = 0,1$ м.
3. $f = 0,4$ м. 4. $f = 0,05$ м.

16.37. Расстояние от предмета до вогнутого зеркала $a = 40$ см. Фокусное расстояние зеркала $f = 20$ см. Чему равно увеличение k зеркала? Изображение действительное.

1. $k = 1$. 2. $k = 2$. 3. $k = 5$. 4. $k = 4$.

16.38. Расстояние от предмета до выпуклого зеркала $a = 40$ см. Фокусное расстояние зеркала $f = 10$ см. Чему равно увеличение k зеркала? Учесть, что в формуле выпуклого зеркала фокусное расстояние следует взять со знаком минус. Изображение действительное.

1. $k = 0,1$. 2. $k = 1$. 3. $k = 0,4$. 4. $k = 0,2$.

16.39. Фокусное расстояние выпуклого зеркала $f = 20$ см (в формуле зеркала берется со знаком минус). Расстояние предмета от зеркала $a = 30$ см. Изображение действительное. Чему равно увеличение k зеркала?

1. $k = 0,1$. 2. $k = 1$. 3. $k = 0,4$. 4. $k = 0,2$.

16.40. Чему равна оптическая сила Φ сферического зеркала, если радиус кривизны зеркала $R = 40$ см?

1. $\Phi = 10$ дптр. 2. $\Phi = 40$ дптр.
3. $\Phi = 5$ дптр. 4. $\Phi = 20$ дптр.

Задачи

16.1. Собирающая линза L дает на экране изображение B светящейся точки A , лежащей на главной оптической оси. Между линзой и экраном на расстоянии $b = 11$ см от экрана поместили рассеивающую линзу M . Отодвигая экран от рассеивающей линзы, получили новое изображение C светящейся точки (рис. 16.22). При этом расстояние нового положения экрана от линзы M оказалась равно $a = 45$ см. Определить фокусное расстояние рассеивающей линзы. Ответ дать в метрах.

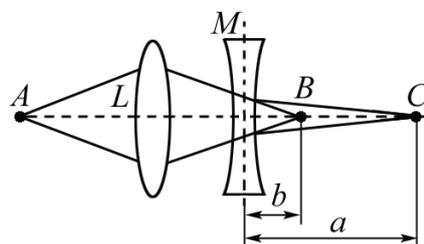


Рис. 16.22

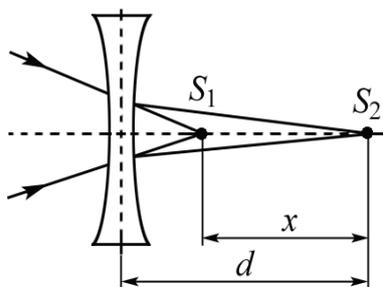


Рис. 16.23

16.2. На рассеивающую линзу падает сходящийся пучок лучей (рис. 16.23). После преломления в линзе лучи пересекаются в точке, лежащей на расстоянии $d = 25$ см от линзы. Если линзу убрать, то точка встречи лучей переместится на расстояние $x = 9$ см ближе к тому месту, где находилась линза. Определить фокусное расстояние линзы. Ответ дать в метрах по модулю (без минуса).

15.3. Точка S движется со скоростью $v = 10$ см/с (рис. 16.24). С какой скоростью (v_1) движется ее изображение, если $a = 35$ см, а фокусное расстояние линзы $f = 20$ см?

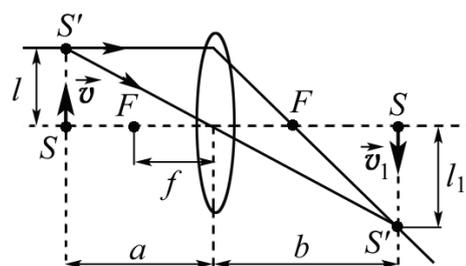


Рис. 16.24

16.4. Если расстояние от предмета до собирающей линзы $a_1 = 40$ см, то высота изображения $H_1 = 10$ см. Если же расстояние предмета от линзы $a_2 = 28$ см, то высота изображения $H_2 = 20$ см (рис. 16.25). Определить фокусное расстояние линзы. Ответ дать в СИ.

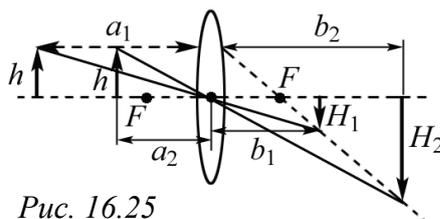


Рис. 16.25

16.5. Радиус кривизны выпуклого зеркала $R = 50$ см. Предмет высотой $h = 15$ см находится на расстоянии, равном $a = 1$ м от зеркала. Определить расстояние до его изображения b и его высоту H . Ответ дать в метрах.

16.6. Вогнутое сферическое зеркало дает на экране изображение предмета, увеличенное в четыре раза. Расстояние от предмета до зеркала $a = 25$ см. Определить радиус R кривизны зеркала. Ответ дать в метрах.

16.7. Фокусное расстояние собирающей линзы в воздухе равно $f = 10$ см. Чему оно равно в воде? В коричневом масле? ($n_{\text{в}} = 1,33$; $n_{\text{к.м}} = 1,6$). Ответ дать в метрах.

16.8. Фокусное расстояние линзы в воздухе $f_1 = 5$ см. Фокусное расстояние той же линзы, погруженной в раствор сахара, $f_2 = 35$ см. Определить показатель преломления раствора.

16.9. Если расстояние предмета от линзы $a_1 = 36$ см, то высота изображения $h_1 = 5$ см, если же это расстояние $a_2 = 24$ см, то высота $h_2 = 10$ см. Определить фокусное расстояние линзы. Ответ дать в метрах.

16.10. Каково фокусное расстояние линзы f , если для получения изображения предмета в натуральную величину он должен быть помещен на расстоянии $d = 25$ см от линзы? Какова оптическая сила линзы Φ ? Ответ дать в метрах и диоптриях.

16.11. Фокусное расстояние собирающей линзы $f = 10$ см. На каком расстоянии a от линзы нужно поместить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось на расстоянии $b = 25$ см от линзы? Ответ дать в СИ.

16.12. Фокусное расстояние линзы $f = 20$ см. Расстояние предмета от линзы $a = 10$ см. Определить расстояние b от изображения до линзы, если линза: 1) собирающая; 2) рассеивающая. Ответ дать в СИ.

16.13. Предельный угол полного внутреннего отражения для бензола $i_{\text{пред}} = 42^\circ$. Определить скорость света в бензоле.

16.14. Лупа, представляющая собой двояковыпуклую линзу, изготовлена из стекла ($n = 1,6$). Радиусы кривизны R поверхностей лупы одинаковы и равны 12 см. Определить увеличение лупы.

16.15. Горизонтальный луч света падает на вертикально расположенное зеркало. Зеркало поворачивается на угол α около вертикальной оси. На какой угол β повернется отраженный луч?

16.16. Радиус кривизны вогнутого зеркала $R = 20$ см. На расстоянии $a_1 = 30$ см от зеркала поставлен предмет высотой $y_1 = 1$ см. Найти положение a_2 и высоту y_2 изображения.

16.17. На каком расстоянии a_2 от зеркала получится изображение предмета в выпуклом зеркале с радиусом кривизны $R = 40$ см, если

предмет помещен на расстоянии $a_1 = 30$ см от зеркала? Какова будет высота y_2 изображения, если предмет имеет высоту $y_1 = 2$ см?

16.18. Выпуклое зеркало имеет радиус кривизны $R = 60$ см. На расстоянии $a_1 = 10$ см от зеркала поставлен предмет высотой $y_1 = 2$ см. Найти положение и высоту y_2 изображения.

16.19. В вогнутом зеркале с радиусом кривизны $R = 40$ см хотят получить действительное изображение, высота которого вдвое меньше высоты самого предмета. Где нужно поставить предмет и где получится изображение?

16.20. Высота изображения предмета в вогнутом зеркале вдвое больше высоты самого предмета. Расстояние между предметом и изображением $a_1 + a_2 = 15$ см. Найти фокусное расстояние F и оптическую силу D зеркала.

16.21. Линза из крона ($n = 1,5$) имеет в воздухе оптическую силу 8 диоптрий. Какова будет ее оптическая сила в воде? В сероуглероде ($n = 1,63$)?

ЗАНЯТИЕ 17

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

Теория

Чтобы не возникло проблем при изучении явления интерференции, необходимо изучить:

- электромагнитные колебания;
- сложение колебаний.

Слово «интерференция» происходит от латинского *inter* – «взаимно», «между собой» и *ferio* – «ударяю», «поражаю». Сложение (или наложение) двух или нескольких когерентных волн, в результате которого в одних точках пространства возникают минимумы, в других – максимумы интенсивности света (перераспределение энергии), называется *интерференцией*.

Когерентными называются волны, имеющие одинаковую частоту и постоянную во времени разность фаз, при этом колебания векторов напряженности электрических полей имеют одинаковое направление.

Условию когерентности удовлетворяют монохроматические волны – не ограниченные в пространстве волны одной и постоянной частоты.

Почему же в обычных аудиториях, где имеется несколько источников света, мы не наблюдаем интерференции? Потому что волны от независимых источников не являются когерентными. В каждом из двух источников возбужденные атомы излучают независимо друг от друга. Такое излучение является, во-первых, прерывистым, то есть существует в виде коротких импульсов, называемых волновым цугом. А во-вторых, колебания в разных цугах не связаны по фазе, и разность фаз колебаний изменяется во времени через 10^{-8} с.

Любой немонохроматический свет можно представить в виде совокупности гармонических цугов. Средняя продолжительность одного цуга называется временем когерентности ($\tau_{\text{ког}}$). В течение этого времени фаза сохраняется, и время $\tau_{\text{ког}}$ тем больше, чем меньше ширина $\Delta\omega$ спектра частот волны. Эта когерентность, связанная со степенью монохроматичности волны, называется временной. Существует еще и пространственная когерентность, которая определяется радиусом когерентности:

$$r_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\varphi},$$

где λ – длина волны света; φ – угловой размер источника. Следовательно, угловой размер источника должен быть как можно меньше.

Условия интерференционных максимумов и минимумов

Пусть две волны одинаковой частоты при наложении возбуждают колебания одинакового направления:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \\x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}$$

Здесь x – напряженность электрического E или магнитного H полей волн. Напряженности электрического или магнитного полей подчиняются принципу суперпозиции. Поэтому амплитуда результирующего колебания A в данной точке равна

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Интенсивность результирующей волны ($I \sim A^2$) выражается как

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если волны когерентны, то разность фаз $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ постоянна во времени. В точках пространства, где $\cos \delta > 0$, $I > I_1 + I_2$. В других точках, где $\cos \delta < 0$, $I < I_1 + I_2$. Таким образом, в одних местах возникают минимумы, в других – максимумы интенсивности света. Если $A_1 = A_2$ и $I_1 = I_2$, то в максимумах $I = 4I_1$, в минимумах $I = 0$.

Для некогерентных волн разность фаз δ непрерывно меняется, поэтому среднее значение $\cos \delta = 0$ и интенсивность результирующей волны всюду одинакова и при $I_1 = I_2$ равна $2I$. Как в обычной учебной аудитории!

Итак, если разность фаз $\delta = 0, \pm 2\pi, \dots, \pm 2m\pi$, то в данной точке пространства будет наблюдаться интерференционный максимум.

Если же $\delta = \pi, \dots, \pm(2m+1)\pi$, то в данной точке пространства будет наблюдаться интерференционный минимум.

Для получения интерференционной картины придуман очень остроумный метод создания когерентных волн: волна, излучаемая одним источником, разделяется на две волны, которые проходят разные оптические пути и накладываются друг на друга. Оптической длиной пути L называется произведение геометрической длины пути S на показатель преломления среды n , в которой распространяется волна. Разность оптических длин проходимых волнами путей Δ называется **оптической разностью хода**:

$$\Delta = L_2 - L_1 = S_2 \cdot n_2 - S_1 \cdot n_1.$$

Связь между оптической разностью хода Δ и разностью фаз δ легко найти из пропорции: разности фаз 2π соответствует длина λ_0 (длина волны в вакууме), разности фаз δ – длина Δ . Отсюда

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \Delta.$$

Таким образом, если

$$\delta = \pm 2m\pi, \text{ а } \Delta = \pm m \cdot \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2 \dots), \quad (1)$$

то в данной точке пространства наблюдается **интерференционный максимум**. Оптическая разность хода при этом должна быть равна **целому числу длин волн в вакууме** или четному числу полуволен:

$$\Delta = \pm 2m \cdot \frac{\lambda_0}{2}; \text{ [условие (1)].}$$

Если же

$$\delta = \pm(2m+1)\pi; \Delta = \pm(2m+1) \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2 \dots), \quad (2)$$

то в данной точке пространства колебания происходят в противофазе и наблюдается **интерференционный минимум**. При этом оптическая разность хода должна быть равна нечетному $(2m+1)$ числу полуволен $(\lambda_0/2)$ в вакууме (условие (2)). Запомните:

$$\Delta = \pm 2m \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{– условие максимума;}$$

$$\Delta = \pm(2m+1) \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{– условие минимума.}$$

**Методы наблюдения интерференции
(методы получения когерентных волн)
(Опыт Юнга, бипризма и зеркала Френеля)**

Сейчас мы узнаем, как получить когерентные волны, если под рукой нет лазера, излучение которого когерентно.

1. Опыт Юнга

Т. Юнг впервые наблюдал интерференцию. Опыт его гениально прост. Свет от ярко освещенной щели S падает на две узкие равноудаленные от источника щели S_1 и S_2 (рис. 17.1), которые играют роль когерентных источников.

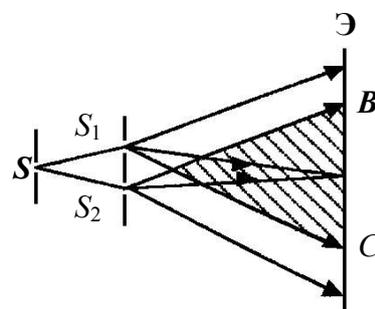


Рис. 17.1

Интерференционная картина (область BC) наблюдается на экране Э.

2. Зеркала Френеля

В данном опыте две когерентные волны получают путем отражения одной и той же волны от двух зеркал.

Свет от источника S падает на два плоских зеркала A_1O и A_2O . Зеркала расположены под углом, мало отличающимся от 180° (рис. 17.2).

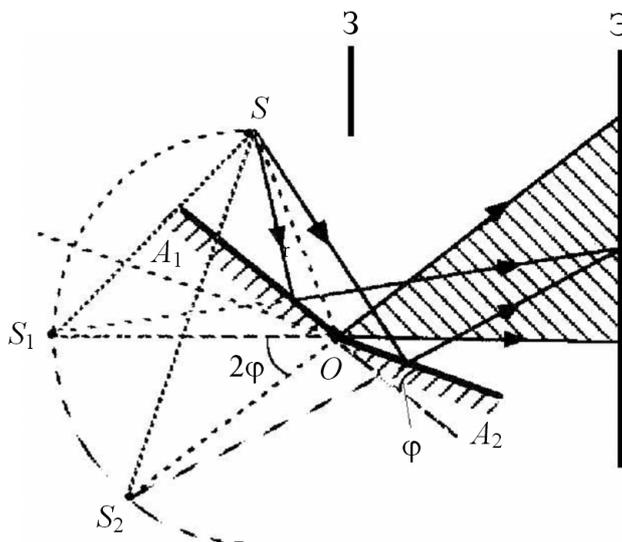


Рис. 17.2

Световые пучки, образовавшиеся при отражении от обоих зеркал, можно считать исходящими от мнимых источников S_1 и S_2 , которые являются мнимыми изображениями источника S в зеркалах. Мнимые источники S_1 и S_2 когерентны, а исходящие из них световые пучки интерферируют на экране Э в области взаимного перекрывания. Чтобы исключить прямое попадание света на экран Э , источник S со стороны экрана закрывают заслонкой З .

3. Бипризма Френеля

Когерентные волны в данном опыте получают за счет преломления

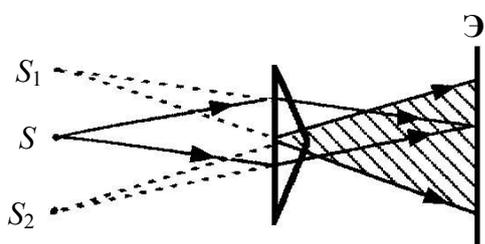


Рис. 17.3

одной волны в двух одинаковых призмах, склеенных основаниями (бипризма Френеля). Преломляющий угол призмы очень мал (рис. 17.3). Свет от источника S преломляется в обеих призмах. В результате за бипризмой распространяются световые лучи, как бы исходящие из мнимых источников S_1 и S_2 , являющихся когерентными.

На поверхности экрана Э (в заштрихованной области) наблюдается интерференция.

Расчет интерференционной картины от двух источников

А какой вид имеет интерференционная картина на экране? Чтобы это выяснить, проведем ее расчет от двух источников (рис. 17.4).

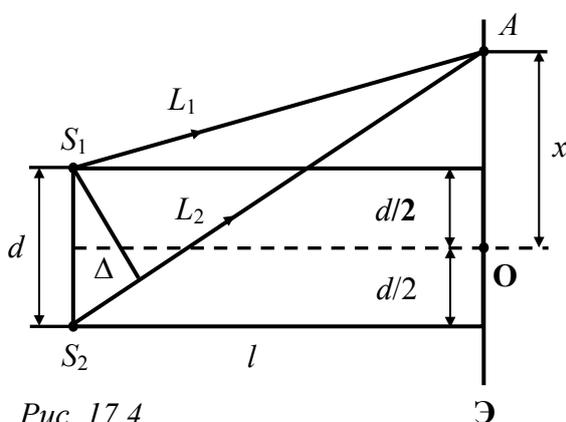


Рис. 17.4

Пусть в точке A интерферируют два луча, вышедшие из двух когерентных источников (мнимых или действительных – щелей) S_1 и S_2 . Источники находятся на расстоянии d друг от друга и на расстоянии l от экрана. Начало отсчета O симметрично относительно щелей. Интенсивность суммарной волны в точке A с координатой x зависит

от разности хода $\Delta = L_2 - L_1$. Из геометрии рисунка, а также полагая, что $l \gg d$, получим

$$\Delta = x \cdot \frac{d}{l}.$$

Подставим теперь для Δ условие максимума ($\Delta = \pm 2m \cdot \lambda_0 / 2$) интенсивности, получим координату максимума:

$$x_{\max} = \pm 2m \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Если подставить для Δ условие минимумов ($\Delta = \pm(2m + 1) \cdot \lambda_0 / 2$), получим координату минимума:

$$x_{\min} = \pm(2m + 1) \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

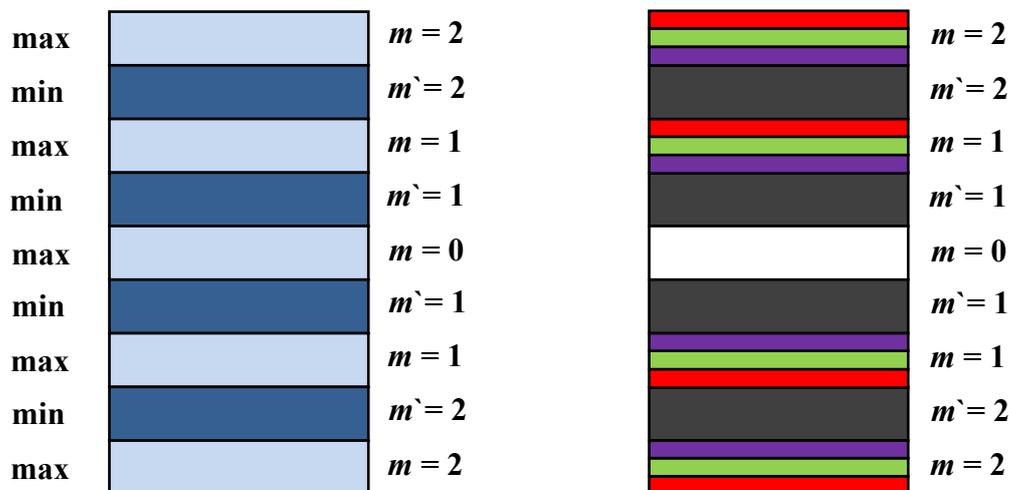
Расстояние между двумя соседними максимумами или минимумами называется шириной интерференционной полосы Δx :

$$\Delta x = x_{\max 2} - x_{\max 1} = x_{\min 2} - x_{\min 1} = \frac{l}{d} \cdot \lambda_0,$$

Δx является постоянной для данных l , d и λ_0 . Из соотношения $\Delta x = \frac{l}{d} \cdot \lambda_0$ можно получить условия наблюдения интерференции для

видимого участка спектра. Поскольку для видимого света $\lambda_0 \sim 10^{-7}$ м, то доступная для визуального наблюдения картина имеет место при $l \gg d$. Интерференционная картина, создаваемая двумя когерентными источниками на экране, имеет вид (при монохроматическом свете) чередующихся светлых и темных полос, параллельных друг другу (рис. 17.5, а). Главный максимум ($m = 0$) проходит через точку O . Вверх и вниз от не-

го на равных расстояниях друг от друга располагаются максимумы (минимумы) первого ($m = 1$), второго ($m = 2$) и т. д. порядков.



а) монохроматический свет (голубой)

б) белый свет

Рис. 17.5

Если используется источник белого света (от 0,39 мкм – фиолетовый до 0,75 мкм – красный), то максимумы для различных длин волн будут смещены на расстояние Δx друг от друга и образуют радужные полосы (рис. 17.5, б).

Для $m = 0$ максимумы всех длин волн совпадают, и в середине экрана наблюдается белая полоса. По обе стороны от белой полосы симметрично расположены окрашенные полосы максимумов первого, второго и т. д. порядков.

Интерференция в тонких пленках

Иногда можно наблюдать очень красивую радужную окраску масляной пленки на воде. Что это?

Это результат интерференции света, отраженного двумя поверхностями пленки. Поскольку солнечные лучи некогерентны, интерференция наблюдается только в очень тонких пленках (например, масляных). Для такой пленки для отраженного и преломленного лучей соблюдается условие когерентности. Интерференция в тонких пленках наблюдается как в отраженном, так и в проходящем свете.

Интерференция в отраженном свете

Пусть на плоскопараллельную тонкую прозрачную пленку (пластинку) с показателем преломления n и толщиной d падает плоская монохро-

матическая волна с длиной волны λ_0 . Для простоты покажем луч (1). На рис. 17.6 показана схема получения двух параллельных когерентных лучей I' и $2'$, отраженных от верхней и нижней поверхностей пленки. Оптические пути лучей следующие: для луча I' : $L_1 = AK$ ($n_1 = 1$); для луча $2'$: $L_2 = (AB + BC) \cdot n$.

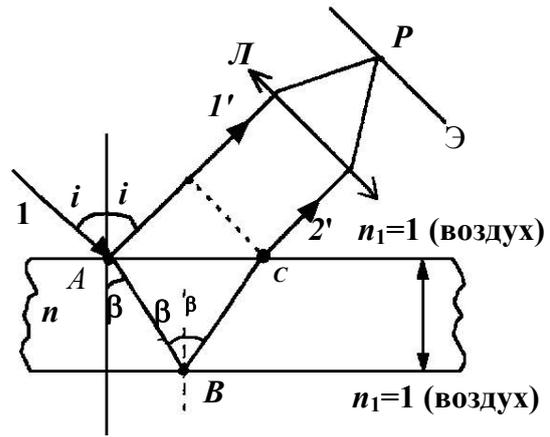


Рис. 17.6

Оптическая разность хода Δ определяется выражением

$$\Delta = (AB + BC) \cdot n - AK.$$

Выразив AB , BC и AK через известные величины n , d , i , получим

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (3)$$

Слагаемое $\lambda_0/2$ появилось из-за того, что луч I' отразился от более плотной среды. Нам уже известно, что в точке P , где накладываются лучи I' и $2'$ после прохождения линзы, будет наблюдаться максимум, если

$$\Delta = \pm 2m \cdot \frac{\lambda_0}{2}. \quad (4)$$

Заменим $\sin^2 i = n^2 \sin^2 \beta$ (из закона преломления $\frac{\sin i}{\sin \beta} = n$).

Приравняем выражения (3) и (4). В результате получим условие максимума:

$$2 \cdot d \cdot n \cdot \cos \beta = \pm (2 \cdot m + 1) \cdot \frac{\lambda_0}{2}. \quad (5)$$

Условие минимума:

$$2 \cdot d \cdot n \cdot \cos \beta = \pm 2 \cdot m \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Заметим, что по отношению к (1) и (2) все стало наоборот. Эти условия для оптической разности хода надо запомнить. Они остаются неизменными. А условия (5) и (6) связывают такие величины, как толщина пленки d , показатель преломления n , угол преломления β и длина волны λ_0 , и показывают, при каком соотношении между ними в точке P будет максимум или минимум.

Интерференция в проходящем свете

На рис. 17.7. показан ход отраженного ($2'$) и преломленного ($1'$) лучей, которые после прохождения линзы L накладываются в точке P экрана. Поскольку в данном случае нет потери полуволны, то условия максимума и минимума будут следующими:

$$\text{условие максимума: } 2 \cdot d \cdot n \cdot \cos \beta = \pm 2 \cdot m \cdot \frac{\lambda_0}{2};$$

$$\text{условие минимума: } 2 \cdot d \cdot n \cdot \cos \beta = \pm (2 \cdot m + 1) \cdot \frac{\lambda_0}{2}.$$

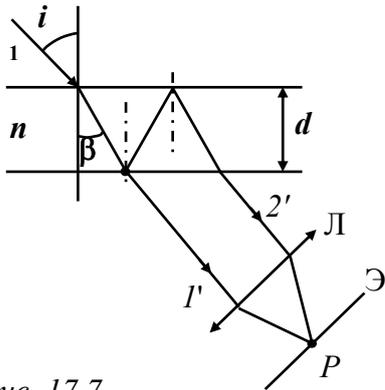


Рис. 17.7

Анализ условий (5) и (6) показывает, что если d и n не изменяются и свет падает на пленку параллельным пучком, то для всей поверхности пленки выполняется либо (5) – условие максимума, либо (6) – условие минимума. В первом случае вся пленка окрашена в цвет, соответствующий падающему монохроматическому, во втором случае вся пленка темная. Заметим, что интерференцию в тонких пленках можно наблюдать, имея под рукой линзу

или аккомодируя глаз на бесконечность. Очень интересное явление наблюдается, если на пленку одинаковой толщины падает параллельный пучок белого света. Пленка будет окрашена в тот цвет, для которого выполняется условие максимума (5). Если на пленку одинаковой толщины направить рассеянный свет, будут наблюдаться **полосы равного наклона**. Они возникают в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами. Поскольку

интерферирующие лучи параллельны, полосы равного наклона локализованы в бесконечности и для их наблюдения необходимо использовать линзу.

Если пленка имеет переменную толщину, например интерференция происходит на клине, возникают **полосы равной толщины**. Каждая из них возникает при отражении от мест пластинки, имеющих одинаковую толщину. Клин для наблюдения интерференционной картины должен иметь очень малый угол при вершине.

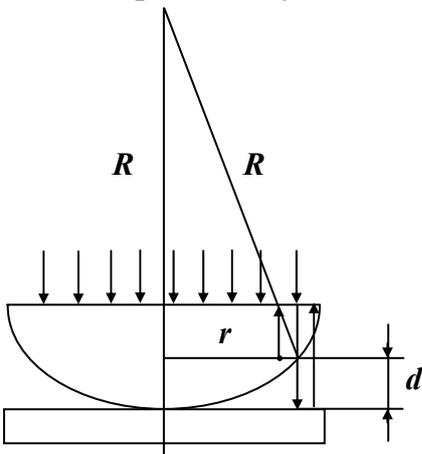


Рис. 17.8

Так как верхняя и нижняя грани клина не параллельны между собой, то интерферирующие лучи также непараллельны и пересекаются вблизи поверхности клина. Говорят, что полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности клина. Классическим примером полос равной толщины являются **кольца Ньютона**. Ньютон нашел очень остроумный способ получения тонкого воздушного клина между плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны (рис. 17.8).

Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней границ воздушного зазора между линзой и пластинкой. При наложении отраженных лучей возникают полосы равной толщины, имеющие вид концентрических окружностей. Радиусы светлых и темных колец можно найти из выражений (для отраженного света)

$$r_{\text{мсв}} = \sqrt{(2m-1)\frac{\lambda_0}{2}R}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots);$$

$$r_{\text{мтемн}} = \sqrt{m\lambda_0 R}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

В проходящем свете темные и светлые кольца меняются местами.

При интерференции в белом свете полосы и кольца равной толщины имеют радужную окраску.

Явление интерференции столь широко применяется в технике, что подробный перечень занял бы очень много места и времени.

Перечислим кратко примеры применения интерференции:

1. Просветление оптики (гашение бликов на объективах фотоаппаратов при помощи нанесения пленок).

2. Для точного (порядка 10^{-7} м) измерения длин при помощи оптического прибора, называемого интерферометром Майкельсона, а также для контроля чистоты обработки поверхностей.

3. Для измерения показателя преломления с помощью интерферометров. Напомним, что показатель преломления вещества равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в веществе: $n = c/v$.

Подсказка

1. Для уменьшения потерь света при отражении от стекла на поверхность объектива ($n_2 = 1,7$) нанесена тонкая прозрачная пленка ($n = 1,3$). При какой наименьшей толщине ее произойдет максимальное ослабление отраженного света, длина волны которого приходится на среднюю часть видимого спектра ($\lambda_0 = 0,56$ мкм)?

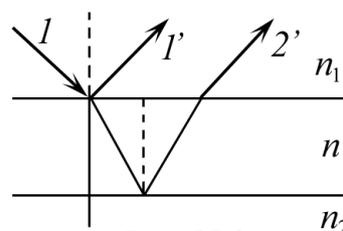


Рис. 17.9

Лучи падают нормально к поверхности объектива. Результат представить в микрометрах (мкм).

Решение

Ход интерферирующих на пленке в отраженном свете лучей аналогичен ходу лучей, показанному на рис. 17.9 (для наклонного падения лучей). В теории мы получили соотношение для минимума в отраженном свете:

$$2 \cdot d \cdot n \cdot \cos \beta = \pm 2 \cdot m \cdot \frac{\lambda_0}{2},$$

исходя из которого мы могли бы получить d_{\min} . Однако это соотношение получено при условии, что пленка (пластинка) окружена одинаковыми средами (воздухом). В рассматриваемом случае показатели преломления сред соотносятся как $n_1 < n < n_2$, т. е. оба луча ($1'$ и $2'$) отражаются от более плотной среды и оба луча «теряют» полуволну. Так как «потеря» полуволны обоими лучами не скажется на их разности хода, то в соотношении

$$\Delta = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2} \quad [(3), \text{«Теория»}]$$

величину $\lambda_0/2$ надо отбросить. Тогда получим

$$\Delta = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i}, \quad \text{или} \quad \Delta = 2 \cdot d \cdot n \cdot \cos \beta. \quad (1)$$

Поскольку $\beta = 0$, то $\Delta = 2 \cdot d \cdot n$.

Условие минимума интенсивности света для разности хода:

$$\Delta = \pm(2m+1) \cdot \frac{\lambda_0}{2}. \quad (2)$$

Приравняв соотношения (1) и (2), выразим толщину пленки d :

$$2 \cdot d \cdot n = \pm(2m+1) \cdot \frac{\lambda_0}{2}; \quad d = \pm(2m+1) \cdot \frac{\lambda_0}{4n}.$$

Минимальному значению d_{\min} толщины пленки будет соответствовать минимальное значение $m = 0$ (все остальные величины не изменяются). Учитывая, что толщина пленки – положительная величина, знак « \pm » опускаем. Окончательно получим $d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4 \cdot n} = 0,11 \text{ мкм}$.

2. Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками заключен очень тонкий воздушный клин. На пластинки нормально падает монохроматический свет ($\lambda_0 = 0,5 \text{ мкм}$). Угол при вершине клина (угол между пластинками) равен $\alpha = 1'40''$. Определить число темных интерференционных полос в отраженном свете на протяжении $l = 1 \text{ см}$.

Ответ округлите до целого числа.

Решение

В данном случае интерферируют лучи $1'$ и $2'$, отраженные от двух поверхностей воздушного клина. Чтобы различить ход лучей, угол падения лучей на пластинку взят отличным от нуля. Если Вы внимательно изучали теорию, то уже догадались, что наблюдаемые на поверхности клина полосы будут полосами равной толщины, представляя собой геометрическое место точек, соответствующих одинаковой толщине клина. Эти полосы располагаются параллельно ребру клина и перпендикулярно плоскости чертежа. Пусть между точками B и A , расстояние между которыми l , укладывается k полос, а в точке B располагается m -я полоса. Из рис. 17.10 следует, что

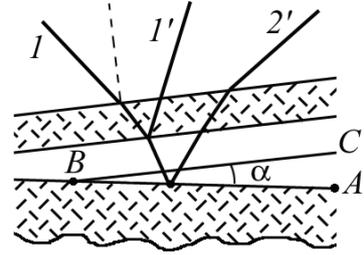


Рис. 17.10

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d_A - d_B}{l},$$

где d_A – толщина воздушного клина в точке A ; d_B – толщина воздушного клина в точке B .

Поскольку угол α мал, то

$$\alpha = \frac{d_A - d_B}{l}. \quad (3)$$

Для m -й темной полосы в точке B условие минимума интенсивности

$$2 \cdot d_B \cdot n \cdot \cos \beta = \pm 2 \cdot m \cdot \frac{\lambda_0}{2}.$$

Для $(m + k)$ -й темной полосы в точке A

$$2 \cdot d_A \cdot n \cdot \cos \beta = \pm 2(m + k) \frac{\lambda_0}{2}.$$

Поскольку $\cos \beta = 1$, $n = 1$, то

$$(d_A - d_B) = (m + k) \frac{\lambda_0}{2} - m \frac{\lambda_0}{2} = k \frac{\lambda_0}{2}.$$

Подставив в (3), получим $\alpha = \frac{k \cdot \lambda_0}{2 \cdot l}$.

Отсюда

$$k = \frac{2 \cdot l \cdot \alpha}{\lambda_0}; \quad (4)$$

$$\alpha(\text{рад}) = \frac{100''}{57 \cdot 3600} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Подставим числовые данные в (4), получим $k = 20$.

3. Определить перемещение зеркала в интерферометре Майкельсона, если интерференционная картина сместилась на $k = 100$ полос. Опыт проводился со светом с длиной волны $\lambda = 546$ нм.

Решение

Поясним устройство интерферометра Майкельсона.

На рис. 17.11 представлена упрощенная схема интерферометра Майкельсона. Монохроматический свет от источника S падает под углом 45° на плоскопараллельную пластинку P_1 . Сторона пластинки, удаленная от S , посеребренная и полупрозрачная, разделяет луч на две части: луч 1 (отражается от посеребренного слоя) и луч 2 (проходит через него). Луч 1 отражается от зеркала M_1 и, возвращаясь обратно, вновь проходит через пластинку P_1 (луч $1'$). Луч 2 идет к зеркалу M_2 , отражается от него, возвращается обратно и отражается от пластинки P_1 (луч $2'$).

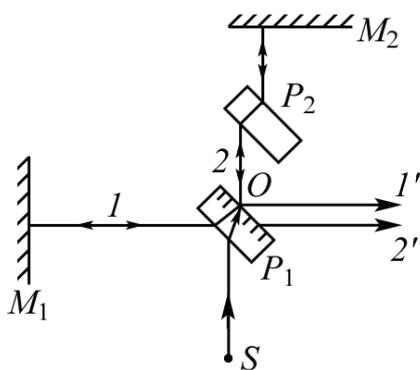


Рис. 17.11

Так как первый из лучей проходит сквозь пластинку P_1 дважды, то для компенсации возникающей разности хода на пути второго луча ставится пластинка P_2 (точно такая же, как P_1), только не покрытая слоем серебра).

Лучи $1'$ и $2'$ когерентны, следовательно, будет наблюдаться интерференционная картина, результат которой зависит от оптической разности хода луча 1 от точки O до зеркала M_1 и обратно и луча 2 от точки O до зеркала M_2 и обратно.

При перемещении одного из зеркал на расстояние, например, $\lambda_0/4$ разность хода обоих лучей изменится на $\lambda_0/2$, и произойдет смена освещенности зрительного поля. Если интерференционная картина просто смещается, например, на одну полосу, то происходит изменение разности хода на λ_0 .

Поскольку расстояние до зеркала луч проходит 2 раза, то удвоенное изменение разности хода равно $k \cdot \lambda_0$, т. е.

$$2\Delta = k \cdot \lambda_0. \quad (5)$$

Отсюда перемещение зеркала, равное Δ , определим из соотношения (5):

$$\Delta = \frac{k \cdot \lambda_0}{2} = \frac{100 \cdot 546 \cdot 10^{-9}}{2} = \frac{546}{2} \cdot 10^{-7} = 27,3 \text{ мкм.}$$

4. На установке для наблюдения колец Ньютона был измерен в отраженном свете радиус темного кольца ($m = 3$). Когда пространство между плоскопараллельной пластинкой и линзой заполнили жидкостью, то тот же радиус стал иметь кольцо с номером, на единицу большим. Определить показатель преломления n жидкости.

Решение

Радиусы светлых и темных колец, которые мы привели в теории, получены для воздушного клина между пластинкой и линзой. Получим выражение для радиусов колец при заполнении пространства между линзой и пластинкой жидкостью. Из прямоугольного треугольника COB (рис. 17.12) имеем:

$$r^2 = R^2 - (R - d)^2 = (2R - d)d \cong 2Rd,$$

(d^2 – очень малая величина);

$$d \cong \frac{r^2}{2R}. \quad (1)$$

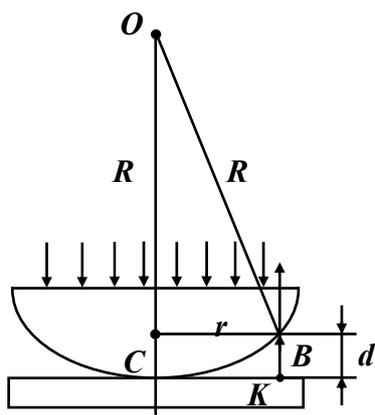


Рис. 17.12

Луч, доходящий до точки B , частично отражается, а частично проходит в воздушный клин (практически вертикально из-за малой кривизны линзы). Отражаясь в точке K от пластинки, он возвращается обратно и интерферирует с лучом, отраженным в точке B . Т. к. в точке K происходит отражение от оптически более плотной среды и теряется полволны, то оптическая разность хода обоих интерферирующих лучей равна

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Учитывая (1), имеем $\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}$.

При освещении линзы монохроматическим светом в отраженном и проходящем свете будут наблюдаться чередующиеся темные и светлые кольца. В центре картины в отраженном свете будет темный круг, в проходящем – светлый.

Радиусы темных колец найдем из условия минимума интенсивности для разности хода:

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2},$$

отсюда радиус m -го темного кольца $r_m = \sqrt{m\lambda_0 R}$.

Учтем, что длина волны света в веществе (в данном случае в жидкости) $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, таким образом

$$r_{\text{темн}} = \sqrt{m \frac{\lambda_0}{n} R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ в отраженном свете.}$$

Аналогично радиусы последовательных светлых колец

$$r_{\text{светл}} = \sqrt{(2m-1) \frac{\lambda_0}{2n} R} \text{ в отраженном свете.}$$

По условию задачи

$$r_m = \sqrt{m \lambda_0 R}; \quad r_{m+1} = \sqrt{(m+1) \frac{\lambda_0}{n} R} \quad (m = 3).$$

Поскольку $r_m = r_{(m+1)}$, то $\sqrt{m \lambda_0 R} = \sqrt{(m+1) \frac{\lambda_0}{n} R}$.

Возведя в квадрат и выразив n , получим $n = \frac{m+1}{m}$.

Подставим числовые данные: $n = 4/3 = 1,33$.

5. В опыте Юнга расстояние между щелями $d = 1$ мм, а расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить: 1) положение первой светлой полосы; 2) положение третьей темной полосы, если щели освещать монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм.

Решение

В разделе «Теория» приведены выражения для координат максимумов и минимумов, т. е. для определения положений светлых и темных полос.

Координата m -го максимума

$$x_{\text{max}} = \pm 2m \frac{l}{d} \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2). \quad (1)$$

Координата m -го минимума

$$x_{\text{min}} = \pm (2m+1) \frac{l}{d} \frac{\lambda_0}{2} \quad (2)$$

Подставив в (1) согласно условию задачи $m = 1$, а в (2) $m = 3$, получим положение первой светлой полосы:

$$x_1 = \pm \frac{l}{d} \lambda_0, \quad x_1 = \pm \frac{3}{1 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = \pm 1,5 \cdot 10^{-3} = \pm 1,5 \text{ мм.}$$

Положение третьей темной полосы:

$$x_3 = \pm \frac{7 \cdot l}{d} \cdot \frac{\lambda_0}{2}, \quad x_3 = \pm \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{2} = \pm \frac{1,5 \cdot 7 \cdot 10^{-3}}{2} = \pm 5,25 \text{ мм.}$$

ТЕСТ

Вопросы

17.1. Волны когерентны, если

- 1) имеют одинаковую частоту;
- 2) разность фаз их колебаний изменяется во времени;
- 3) имеют постоянную во времени разность фаз колебаний;
- 4) имеют кратную частоту.

17.2. Временная когерентность

- 1) определяется радиусом когерентности;
- 2) связана со степенью монохроматичности волны;
- 3) связана с длиной волны λ света;
- 4) зависит от углового размера источника света.

17.3. Пространственная когерентность

- 1) определяется радиусом когерентности;
- 2) связана со степенью монохроматичности волны;
- 3) связана с длиной волны λ света;
- 4) зависит от углового размера источника света.

17.4. Волны, испускаемые естественными источниками, некогерентны потому что

- 1) различаются частоты колебаний, испускаемых источником;
- 2) разность фаз непрерывно меняется во времени;
- 3) направления колебаний векторов напряженности электрического и магнитного полей непрерывно меняются;
- 4) разность фаз колебаний остается постоянной во времени.

17.5. При каком условии для разности фаз колебаний (δ) в данной точке пространства наблюдается максимум интенсивности при интерференции?

1. $\delta = \pm m\pi$. 2. $\delta = \pm(2m + 1)\pi$.

3. $\delta = \pm 2m\pi$. 4. $\delta = \pm(2m + 1)\frac{\pi}{2}$.

17.6. При каком условии для разности фаз колебаний (δ) в данной точке пространства наблюдается минимум интенсивности при интерференции?

1. $\delta = \pm m\pi$. 2. $\delta = \pm(2m + 1)\pi$.

3. $\delta = \pm 2m\pi$. 4. $\delta = \pm(2m + 1)\frac{\pi}{2}$.

17.7. При каком условии для оптической разности хода (Δ) двух интерферирующих волн в данной точке пространства наблюдается максимум интенсивности?

1. $\Delta = \pm m\lambda_0$. 2. $\Delta = \pm m \frac{\lambda_0}{2}$.
3. $\Delta = \pm(2m + 1) \frac{\lambda}{2_0}$. 4. $\Delta = \pm(2m + 1)\lambda_0$.

17.8. При каком условии для оптической разности хода (Δ) двух интерферирующих волн в данной точке пространства наблюдается минимум интенсивности?

1. $\Delta = \pm m\lambda_0$. 2. $\Delta = \pm m \frac{\lambda_0}{2}$.
3. $\Delta = \pm(2m + 1) \frac{\lambda}{2_0}$. 4. $\Delta = \pm(2m + 1)\lambda_0$.

17.9. Когерентные волны можно получить с помощью ...

- 1) отражения волны;
- 2) преломления волны;
- 3) разделения волны с помощью двух щелей;
- 4) поглощения волны.

17.10. Как соотносятся между собой расстояния между максимумами (Δx) и минимумами ($\Delta x'$) при интерференции?

1. $\Delta x = 2\Delta x'$. 2. $\Delta x = \Delta x'$. 3. $\Delta x \gg \Delta x'$. 4. $\Delta x \ll \Delta x'$.

17.11. Какое соотношение должно быть между расстоянием до экрана от источников когерентных волн (l) и расстоянием между источниками (d), чтобы наблюдать визуально интерференционную картину?

1. $l = d$. 2. $l \gg d$. 3. $l \ll d$. 4. $d = 10l$.

17.12. Ширина интерференционной полосы какого цвета будет наибольшей?

1. Фиолетового. 2. Синего. 3. Зеленого. 4. Красного.

17.13. Если расстояние между источниками уменьшить в два раза, то как изменится ширина полосы при интерференции от этих источников при прочих равных условиях?

1. Увеличится в 2 раза. 2. Уменьшится в 2 раза.
3. Не изменится. 4. Увеличится в 4 раза.

17.14. Расстояние от источников до экрана уменьшили в 4 раза. Как изменилась ширина интерференционной полосы при прочих равных условиях?

1. Уменьшилась в 2 раза. 2. Увеличилась в 4 раза.
3. Уменьшилась в 4 раза. 4. Не изменилась.

17.15. Интерференционная картина наблюдается в белом свете. Как окрашен центральный максимум ($m = 0$)?

1. В белый цвет.
2. В красный цвет.
3. В синий цвет.
4. В фиолетовый цвет.

17.16. Тонкая плоскопараллельная пластина освещается параллельным пучком белого света. Ни для одной длины волны не выполняется условие максимума. Как окрашена пленка?

1. Темная.
2. В синий цвет.
3. В белый цвет.
4. В красный цвет.

17.17. Полосы равной толщины наблюдаются при интерференции на

- 1) плоскопараллельной пластинке;
- 2) пленке постоянной толщины;
- 3) клине;
- 4) пленке переменной толщины.

17.18. Локализованы в бесконечности полосы

- 1) равного наклона;
- 2) равной толщины;
- 3) равного наклона и равной толщины;
- 4) увеличивающегося наклона.

17.19. Вблизи поверхности клина локализованы полосы

- 1) равной толщины;
- 2) равного наклона;
- 3) равной толщины и равного наклона;
- 4) увеличивающегося наклона.

17.20. Что будет наблюдаться в данной точке пространства, если оптическая разность хода интерферирующих в этой точке лучей равна $5\lambda_0/2$?

1. Минимум интенсивности света.
2. Максимум интенсивности света.
3. Интенсивности лучей складываются.
4. Интенсивности лучей вычитаются.

17.21. Что будет наблюдаться в данной точке пространства, если оптическая разность хода интерферирующих в этой точке лучей равна $4\lambda_0/2$?

1. Минимум интенсивности света.
2. Максимум интенсивности света,
3. Интенсивности лучей вычитаются.
4. Интенсивности лучей складываются.

17.22. Длина пути луча изменяется на $\lambda_0/2$ при отражении

- 1) от более плотной среды;
- 2) от жидкой среды;
- 3) от любой среды;
- 4) от металлической среды.

17.23. Можно наблюдать визуально, не аккомодируя глаз на бесконечность полосы

- 1) *в виде клина;*
- 2) *равного наклона;*
- 3) *равной толщины;*
- 4) *равной толщины и равного наклона.*

17.24. Если оптическая разность хода лучей равна λ_0 , то в данной точке пространства будет наблюдаться

- 1) *светлая точка;*
- 2) *максимум интенсивности света;*
- 3) *минимум интенсивности света;*
- 4) *темная точка.*

17.25. Если оптическая разность хода лучей равна $\lambda_0/2$, то в данной точке пространства, будет наблюдаться

- 1) *светлая точка;*
- 2) *максимум интенсивности света;*
- 3) *минимум интенсивности света;*
- 4) *темная точка.*

17.26. Если разность фаз колебаний в данной точке $\delta = \pi$, то в данной точке наблюдается

- 1) *светлая точка;*
- 2) *максимум интенсивности света;*
- 3) *минимум интенсивности света;*
- 4) *темная точка.*

17.27. Если разность фаз колебаний в данной точке $\delta = 4\pi$, то в данной точке наблюдается

- 1) *светлая точка;*
- 2) *максимум интенсивности света;*
- 3) *минимум интенсивности света;*
- 4) *темная точка.*

17.28. Если разность фаз колебаний в данной точке $\delta = 5\pi$, то в данной точке наблюдается

- 1) *светлая точка;*
- 2) *максимум интенсивности света;*
- 3) *минимум интенсивности света;*
- 4) *темная точка.*

17.29. Какое значение не может принимать показатель преломления обычных сред?

1. $n = 1$. 2. $n = 2$. 3. $n = 0$. 4. $n = 4$.

17.30. Чему равен абсолютный показатель преломления n ?

1. $n = \frac{c}{v}$, где c – скорость света в вакууме; v – скорость света в среде.

2. $n = \frac{v}{c}$.

3. $n = \frac{v_2}{v_1}$, где v_1 – скорость света в одной среде; v_2 – скорость света в другой среде.

4. $n = \frac{c}{v}$, где v – частота света.

17.31. Получить когерентные волны можно с помощью ...

- 1) тонкой пленки;
- 2) опыта Юнга;
- 3) лазера;
- 4) зеркал Френеля;
- 5) стеклянного клина.

Задачи

16.1. Для уменьшения потерь света при отражении от стекла на поверхность объектива ($n_2 = 1,7$) нанесена тонкая прозрачная пленка ($n = 1,3$). При какой наименьшей толщине ее произойдет максимальное ослабление отраженного света, длина волны ($\lambda_0 = 0,56$ мкм) которого приходится на среднюю часть видимого спектра. Лучи падают нормально к поверхности объектива (рис. 17.13, для наклонного падения лучей). Результат представить в микрометрах (мкм).

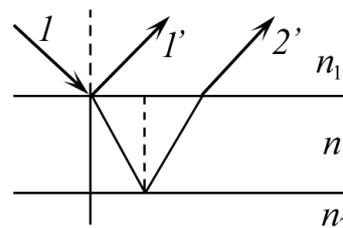


Рис. 17.13

16.2. Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками заключен очень тонкий воздушный клин. На пластинки нормально падает монохроматический свет ($\lambda_0 = 0,5$ мкм). Угол при вершине клина (угол между пластинками) равен $\alpha = 1'40''$ (рис. 17.14, чтобы различить ход лучей, угол падения лучей на пластинку взят отличным от нуля). Определить число темных интерференционных полос в отраженном свете на протяжении $l = 1$ см. Ответ округлите до целого числа.

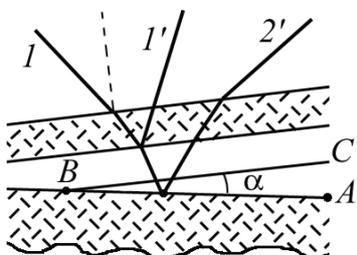


Рис. 17.14

падает монохроматический свет ($\lambda_0 = 0,5$ мкм). Угол при вершине клина (угол между пластинками) равен $\alpha = 1'40''$ (рис. 17.14, чтобы различить ход лучей, угол падения лучей на пластинку взят отличным от нуля). Определить число темных интерференционных полос в отраженном свете на протяжении $l = 1$ см. Ответ округлите до целого числа.

17.3. Определить перемещение зеркала в

интерферометре Майкельсона, если интерференционная картина сместилась на $k = 100$ полос (рис. 17.15). Опыт проводился со светом с длиной волны $\lambda = 546$ нм.

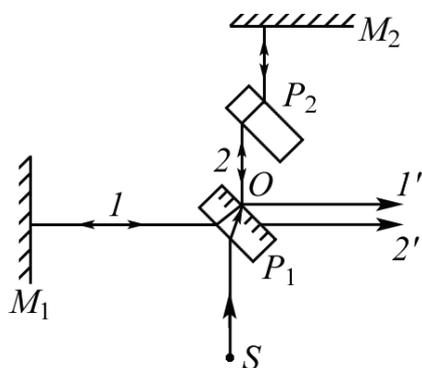


Рис. 17.15

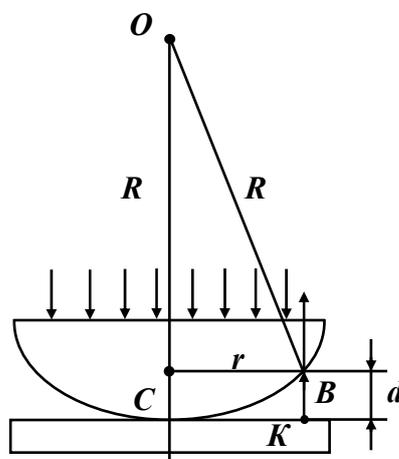


Рис. 17.16

17.4. На установке для наблюдения колец Ньютона был измерен в отраженном свете радиус третьего темного кольца ($m = 3$). Когда пространство между плоскопараллельной пластинкой и линзой заполнили жидкостью, то тот же радиус стал иметь кольцо с номером, на единицу большим (рис. 17.16). Определить показатель преломления n жидкости.

17.5. В опыте Юнга расстояние между щелями $d = 1$ мм, а расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить: 1) положение первой светлой полосы; 2) положение третьей темной полосы, если щели освещать монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм.

17.6. Поверхности стеклянного клина образуют между собой угол $\alpha = 0,2'$. На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм. Определить ширину Δx интерференционной полосы. Здесь показатель преломления стекла $n = 1,5$.

17.7. На тонкий стеклянный клин ($n = 1,55$) падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол α между поверхностями клина равен $2'$. Определить длину световой волны λ , если расстояние b между смежными интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,3 мм.

17.8. Расстояние $\Delta r_{2,1}$ между вторым и первым темными кольцами Ньютона в отраженном свете равно 1 мм. Определить расстояние $\Delta r_{10,9}$ между десятым и девятым кольцами.

17.9. Какой длины l_1 путь пройдет фронт волны монохроматического света в вакууме за то же время, за какое он проходит путь длиной $l_2 = 1$ м в воде? ($n = 1,33$).

17.10. Оптическая разность хода Δ двух интерферирующих волн монохроматического света равна $0,3\lambda$. Определить разность фаз δ . Ответ дать в долях π .

17.11. Расстояние d между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние l от щелей до экрана 3 м. Определить длину волны λ , испускаемой источником монохроматического света, если ширина b полос интерференции на экране равна 1,5 мм.

17.12. Если в опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей поместить перпендикулярно этому лучу тонкую стеклянную пластинку ($n = 1,5$), то центральная светлая полоса смещается в положение, первоначально занимаемое пятой светлой полосой. Длина волны $\lambda = 0,5$ мкм. Определить толщину пластинки.

17.13. Определить, во сколько раз изменится ширина интерференционных полос на экране в опыте с зеркалами Френеля, если фиолетовый светофильтр (0,4 мкм) заменить красным (0,7 мкм).

17.14. На плоскопараллельную пленку с показателем преломления $n = 1,33$ под углом $i = 45^\circ$ падает параллельный пучок белого света. Определить, при какой наименьшей толщине пленки зеркально отраженный свет наиболее сильно окрасится в желтый свет ($\lambda = 0,6$ мкм).

17.15. Определить длину волны света в опыте с интерферометром Майкельсона, если для смещения интерференционной картины на 112 полос зеркало пришлось переместить на расстояние $l = 33$ мкм.

17.16. Плосковыпуклая линза с показателем преломления $n = 1,6$ выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус третьего светлого кольца в отраженном свете ($\lambda = 0,6$ мкм) равен 0,9 мм. Определить фокусное расстояние линзы.

17.17. Монохроматический свет падает нормально на поверхность воздушного клина, причем расстояние между интерференционными полосами $\Delta x_1 = 0,4$ мм. Определить расстояние Δx_2 между интерференционными полосами, если пространство между пластинками, образующими клин, заполнить прозрачной жидкостью с показателем преломления $n = 1,33$.

17.18. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим нормально. При заполнении пространства между линзой и стеклянной пластинкой прозрачной жидкостью радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,21 раза. Определить показатель преломления жидкости.

17.19. Плосковыпуклая линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Определить толщину d слоя воздуха там, где в отраженном свете ($\lambda = 0,6$ мкм) видно первое светлое кольцо Ньютона.

17.20. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга $d = 0,5$ мм ($\lambda = 0,6$ мкм). Определить расстояние l от щелей до экрана, если ширина Δx интерференционных полос равна $1,2$ мм.

17.21. Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. Интерференция наблюдается в отраженном свете через красное стекло ($\lambda_1 = 631$ нм). Расстояние между соседними красными полосами при этом $l_1 = 3$ мм. Затем эта же пленка наблюдается через синее стекло ($\lambda_2 = 400$ нм). Найти расстояние l_2 между соседними синими полосами. Считать, что за время измерений форма пленки не изменяется и свет падает перпендикулярно к поверхности пленки.

17.22. В опыте с интерферометром Майкельсона для смещения интерференционной картины на $k = 500$ полос потребовалось переместить зеркало на расстояние $l = 0,161$ мм. Найти длину волны λ падающего света.

17.23. Пучок света ($\lambda = 582$ нм) падает перпендикулярно к поверхности стеклянного клина. Угол клина $\gamma = 20''$. Какое число k темных интерференционных полос приходится на единицу длины клина? Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

17.24. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр ($\lambda_1 = 500$ нм) заменить красным ($\lambda_2 = 650$ нм)?

17.25. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом ($\lambda = 600$ нм). Расстояние между отверстиями $d = 1$ мм, расстояние от отверстий до экрана $L = 3$ м. Найти положение трех первых светлых полос.

17.26. В опыте с зеркалами Френеля расстояние между мнимыми изображениями источника света $d = 0,5$ мм, расстояние до экрана $L = 5$ м. В зеленом свете получились интерференционные полосы, расположенные на расстоянии $l = 5$ мм друг от друга. Найти длину волны λ зеленого света.

17.27. В опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей помещалась тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная светлая полоса смещалась в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой (не считая центральную). Луч падает перпендикулярно к поверхности пластинки. Показатель преломления пластинки $n = 1,5$. Длина волны $\lambda = 600$ нм. Какова толщина h пластинки?

17.28. На мыльную пленку падает белый свет под углом $i = 45^\circ$ к поверхности пленки. При какой наименьшей толщине h пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ($\lambda = 600$ нм)? Показатель преломления мыльной воды $n = 1,33$.

17.29. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 15$ м. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между 5-м и 25-м светлыми кольцами Ньютона $l = 9$ мм. Найти длину волны λ монохроматического света.

17.30. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между 2-м и 20-м темными кольцами $l_1 = 4,8$ мм. Найти расстояние l_2 между 3-м и 16-м темными кольцами Ньютона.

ЗАНЯТИЕ 18

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Теория

Познакомимся ещё с одной темой волновой оптики – дифракцией. Прежде чем приступать к изучению этой темы, необходимо усвоить тему «Интерференция», так как дифракционная картина на экране наблюдения есть результат интерференции продифрагировавших волн.

Дифракцией называется огибание волнами препятствий и попадание волн в область геометрической тени. Явление дифракции характерно для любых волновых процессов и объясняется с помощью принципа Гюйгенса – Френеля.

Принцип Гюйгенса – Френеля

Согласно этому принципу, каждую точку фронта волны можно рассматривать как самостоятельный источник вторичных когерентных волн. Поэтому картина, наблюдаемая на экране, является результатом интерференции всех вторичных волн (иногда говорят, волн от фиктивных вторичных источников). Френель исключил возможность возникновения обратных вторичных волн. Он предположил, что если между источником и точкой наблюдения находится непрозрачный экран с отверстием, то на поверхности экрана амплитуда вторичных волн равна нулю, а в отверстии – такая же, как в отсутствие экрана. Поскольку, как всем известно, свет распространяется прямолинейно, то это противоречит принципу Гюйгенса – Френеля. Но Френель предвидел такое возражение противников волновой теории света и предложил метод зон Френеля, который позволяет не только показать прямолинейность распространения света, но и решать многие задачи на дифракцию.

Метод зон Френеля.

Прямолинейное распространение света

Френель предложил заменить действие первичного источника S действием вторичных источников в виде кольцевых зон на волновом фронте (рис. 18.1). При этом расстояния от краев соседних зон до точки M отличаются на $\lambda/2$. Это оказалось очень удобно при расчетах, так как колебания от соседних зон проходят до точки M расстояния, отличающиеся на $\lambda/2$. Следовательно, в точку M колебания от соседних зон приходят в противофазе и ослабляют друг друга.

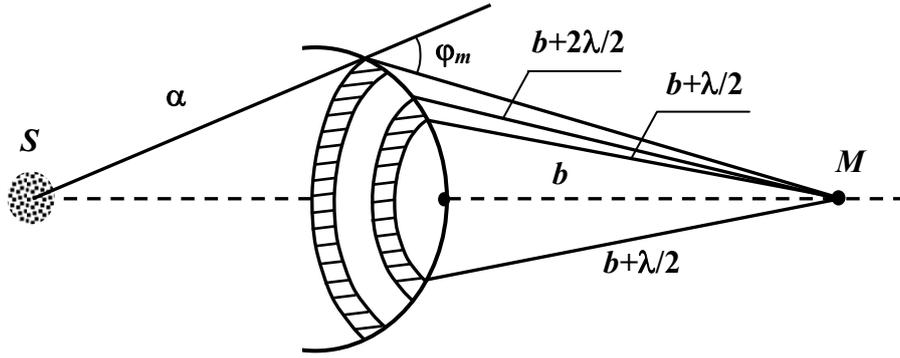


Рис. 18.1

Амплитуда результирующего светового колебания в точке M равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots, \quad (1)$$

где A_1, A_2, \dots – амплитуды колебаний, возбужденных в точке M 1, 2, ..., m -й зонами; m – номер зоны. Из геометрии рис. 17.1 можно показать, что площади зон равновелики:

$$S = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot \lambda}{a + b}, \quad (S \text{ не зависит от номера зоны}),$$

здесь a – расстояние от источника до волнового фронта; b – расстояние от волнового фронта до точки M . Если площади зон равновелики, значит, они содержат одинаковое число когерентных вторичных источников света. Поэтому интенсивности света от зон должны быть одинаковыми. Однако в связи с увеличением расстояния b до точки M вследствие увеличения номера зоны m и угла φ_m (рис. 18.1) амплитуды колебаний монотонно убывают:

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 \dots$$

Поэтому выражение (1) можно записать в виде

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \pm \frac{A_m}{2} = \frac{A_1}{2}, \quad (2)$$

так как выражения в скобках равны 0, а оставшаяся часть от амплитуды последней зоны $\pm \frac{A_m}{2}$ очень мала.

Очень интересно получается: действие всей волновой поверхности на точку M сводится к действию половины центральной зоны Френеля. А если все зоны, кроме центральной, закрыть? Тогда в точке M освещенность повысится, так как

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_1}{2} = A_1,$$

освещенность увеличится в 2 раза. Если закрыть, например, все четные зоны, то результирующая амплитуда будет ещё больше. Таков принцип

действия зонной пластинки. *Зонная пластинка* – это стеклянная пластинка, состоящая из чередующихся прозрачных и непрозрачных концентрических колец (для плоского фронта волны). Система колец построена по принципу расположения зон Френеля. Радиус внешней границы m -й зоны Френеля при сферическом фронте волны можно найти из соотношения

$$r_m = \sqrt{\frac{a \cdot b}{a + b} m \cdot \lambda}. \quad (3)$$

При этом для прозрачных колец $m = 0, 2, 4, \dots$, а для непрозрачных $m = 1, 3, 5, \dots$. Опыт подтверждает, что зонная пластинка увеличивает освещенность в точке M , действуя подобно **собирающей линзе**. Теперь можно легко доказать прямолинейность распространения света.

Подставим в (3) $a = 1$ м, $b = 1$ м, $\lambda = 0,5$ мкм. Получится, что радиус центральной зоны Френеля $r_1 \cong 1$ мм (один миллиметр). Следовательно, свет от точки S к точке M (рис. 18.1) проходит как бы внутри очень узкого канала вдоль оси системы, то есть можно сказать, что свет распространяется прямолинейно.

Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске

Метод зон Френеля позволяет определить, что будет наблюдаться – свет или темнота – в центре дифракционной картины при дифракции на круглом отверстии и диске.

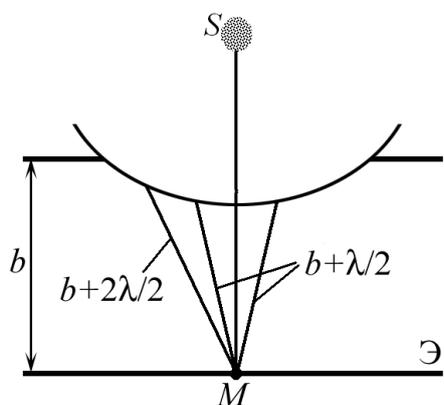


Рис. 18.2

Дифракция на круглом отверстии

Пусть сферическая волна встречается на своем пути экран с круглым отверстием (рис. 18.2). Дифракционная картина наблюдается в точке M . Экран наблюдения Э находится на расстоянии b от круглого отверстия. Разобьем открытую часть волновой поверхности на зоны Френеля. Амплитуда результирующего колебания в точке M , возбуждаемого всеми открытыми зонами, согласно (2) равна

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2},$$

здесь знак минус соответствует четным m , знак плюс – нечетным m . Если отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то амплитуда (интенсивность) в точке M будет больше, чем при отсутствии экрана, то есть чем при полностью открытом фронте волны. Когда отверстие оставляет открытым четное число зон, то амплитуда будет равна нулю.

Таким образом, дифракционная картина в точке M зависит от числа открытых зон Френеля, которое можно найти, зная радиус отверстия, расстояния a , b и длину волны λ :

$$r = \sqrt{\frac{a \cdot b}{a + b} m \cdot \lambda}. \quad (4)$$

Число зон m , которое отверстие радиусом r оставляет открытыми, можно найти, возведя в квадрат левую и правую части выражения (4):

$$m = \frac{r^2 (a + b)}{a \cdot b \cdot \lambda}.$$

Дифракционная картина от круглого отверстия вблизи точки M (рис. 18.2) будет иметь вид чередующихся светлых и темных колец.

Дифракция на диске

Сферическая волна встречает на своем пути небольшой непрозрачный диск (рис. 18.3). Пусть диск закрывает m зон Френеля. Тогда амплитуда колебаний в точке M будет определяться всеми оставшимися открытыми зонами, т. е.

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots = \frac{A_{m+1}}{2},$$

так как выражения в скобках равны нулю, а амплитуда последней зоны очень мала.

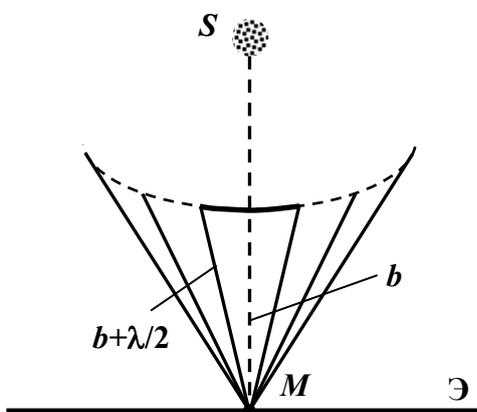


Рис. 18.3

Следовательно, в точке M всегда наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружен концентрическими темными и светлыми кольцами, интенсивность которых убывает с увеличением расстояния от центра. Светлое пятно в центре геометрической тени от небольшого непрозрачного диска было названо «пятном Пуассона». Историю этого названия можно узнать из исторической справки.

Примечание: к сожалению, метод зон Френеля применим только для центральной точки экрана.

Дифракция Фраунгофера на одной щели

Дифракция Фраунгофера – это дифракция плоских световых волн (дифракция в параллельных лучах). Если точечный источник удален от

препятствия и точки наблюдения бесконечно далеко, то фронт волны можно считать плоским. Пусть на узкую длинную щель падает плоская монохроматическая волна (рис. 18.4) нормально плоскости щели. За щелью поместим линзу, которая собирает в одну точку экрана параллельные пучки света.

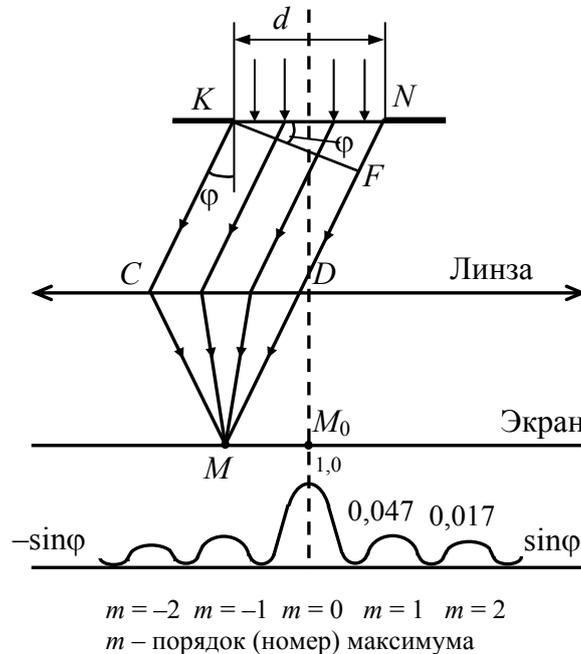


Рис. 18.4

Оптическая разность хода между крайними лучами KC и ND , идущими от щели в произвольном направлении φ ,

$$\Delta = NF = a \cdot \sin \varphi,$$

где a – ширина щели; F – основание перпендикуляра, опущенного из точки K на луч ND . Воспользуемся методом зон Френеля. Учитывая, что разность хода от соседних зон равна $\lambda/2$, ширина одной плоской зоны Френеля (рис. 18.4) равна $\frac{\lambda/2}{\sin \varphi}$.

Число зон Френеля k получим, разделив ширину щели a на ширину одной зоны:

$$k = \frac{a \cdot \sin \varphi}{\lambda/2},$$

если k – четное, т. е. $k = 2m$, то в направлении φ на экране получим минимум освещенности. Таким образом, условие минимума освещенности при дифракции на щели в направлении φ

$$a \cdot \sin \varphi = \pm 2 \cdot m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

здесь m – порядок минимума (рис. 18.4).

Если k – нечетное число, т. е. $k = 2m + 1$, то в направлении φ' получим максимум света:

$$a \cdot \sin \varphi' = \pm(2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (6)$$

здесь m – порядок максимума (рис. 18.4). При неизменной ширине щели максимумы света различной длины волны приходятся на различные углы. Если щель освещать белым светом, то нулевой центральный максимум $\varphi = 0$ будет белым, так как в этом направлении усиливаются все длины волн. По обе стороны от центрального максимума (рис. 18.4) располагаются радужно окрашенные максимумы первого порядка. Согласно формуле (6) красный свет ($\lambda = 0,76$ мкм) отклоняется на больший угол, фиолетовый свет ($\lambda = 0,4$ мкм) – на меньший. Интенсивность максимумов резко падает с увеличением номера m . Если принять интенсивность центрального максимума за единицу, то интенсивность первого максимума составляет 0,047; а второго – 0,017 (рис. 18.4).

Что же нужно сделать, чтобы увеличить интенсивность максимумов и их число? Для этого нужно перейти к наблюдению дифракционной картины на устройстве, которое содержит много узких щелей, расположенных на равном расстоянии друг от друга. Такое устройство называется дифракционной решеткой.

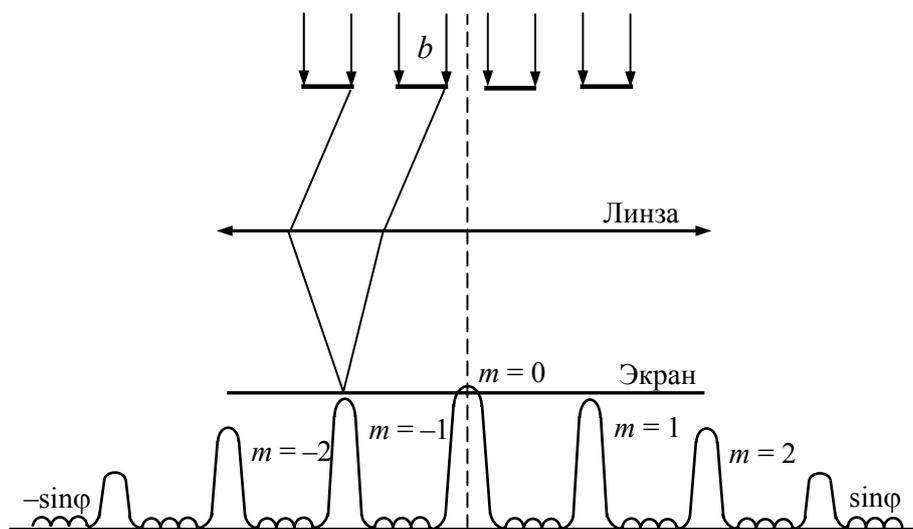


Рис. 18.5

Дифракционная решетка – это система параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками. Дифракционная картина на решетке определяется как результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей. То есть в дифракционной решетке осуществляется

многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей.

Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально к плоскости решетки (рис. 18.5). Очевидно, что в тех направлениях, в которых ни одна из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и от всех других щелей. То есть главные минимумы интенсивности будут наблюдаться в направлениях, для которых выполняется условие

$$a \cdot \sin \varphi = \pm 2 \cdot m \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Действие одной щели будет усиливаться действием другой (главные максимумы) при условии

$$d \cdot \sin \varphi = \pm 2 \cdot m \cdot \frac{\lambda}{2},$$

здесь $d = a + b$ (b – ширина непрозрачного промежутка). Величину d называют постоянной, или периодом дифракционной решетки: $d = 1 / n$, где n – число штрихов на единицу длины. Таким образом, при дифракции на дифракционной решетке

$$\begin{aligned} a \cdot \sin \varphi &= \pm 2 \cdot m \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ – условие главного минимума;} \\ d \cdot \sin \varphi &= \pm 2 \cdot m \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ – условие главного максимума.} \end{aligned} \quad (7)$$

Чем больше число щелей N , тем больше побочных минимумов образуется между соседними максимумами и более интенсивны максимумы. На рис. 18.5 качественно представлена дифракционная картина при дифракции на решетке. Положение главных максимумов зависит от длины волны:

$$\sin \varphi = \frac{m \cdot \lambda}{d}. \quad (8)$$

Поэтому при прохождении через решетку белого света все максимумы, кроме центрального ($m = 0$), разлагаются в спектр. При этом фиолетовая полоска расположена ближе к центру, красная – дальше от центра. Это свойство дифракционной решетки используется для исследования спектрального состава излучения (света), то есть для определения длины волны и интенсивности всех монохроматических компонентов излучения. Таким образом, дифракционная решетка используется как спектральный прибор. Она характеризуется угловой дисперсией и разрешающей способностью. Угловая дисперсия D равна

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Характеристика D определяет угловую ширину спектра. Продифференцировав (8), получим

$$D = \frac{m}{d \cdot \cos \varphi}.$$

Таким образом, угловая дисперсия тем выше, чем больше порядок спектра m и чем меньше постоянная решетки d . Разрешающая способность дифракционной решетки R характеризует минимальную разность двух монохроматических волн λ_1 и λ_2 равной интенсивности, которые можно раздельно видеть в спектре:

$$R = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

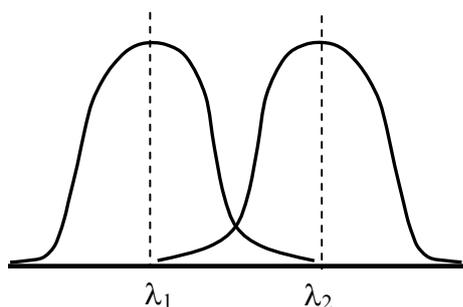


Рис. 18.6

Согласно критерию Рэлея, две спектральные линии считаются разрешенными (то есть видны раздельно), если главный максимум одной длины волны λ_1 совпадает с ближайшим минимумом второй длины волны λ_2 (рис. 18.6). Критерий Рэлея требует выполнения условия

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = m \cdot N,$$

т. е. разрешающая способность решетки равна произведению числа щелей на порядок спектра. Для современных дифракционных решеток $R \cong 10^5$.

Анализ спектров позволяет определить состав веществ и количество примесей в химии, метеорологические и оптические характеристики атмосферы, состав атмосфер других планет и межзвездного вещества. Многие приборы для регистрации спектров используют дифракционные решетки и явление дифракции. Явление голографии и голографический способ записи информации невозможно понять, не изучив законы интерференции и дифракции. В то же время голографии принадлежит будущее информатики и вычислительной техники. Кроме того, наблюдая дифракцию рентгеновских лучей на кристаллической решетке, можно определить структуру вещества.

Дифракция рентгеновских лучей на пространственной решетке

Для наблюдения дифракционной картины необходимо (как это следует из условия (7)), чтобы постоянная решетки d была того же порядка, что и длина волны λ падающего излучения. Кристалл можно представить в виде совокупности параллельных кристаллографических

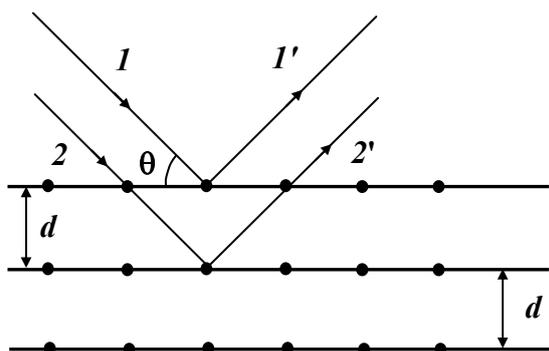


Рис. 18.7

плоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии d , которое имеет порядок 10^{-10} м (рис. 18.7).

Если использовать кристаллы в качестве естественных дифракционных решеток, когда узел (атом или ион) является непрозрачным промежутком, а расстояния между узлами выполняют роль щелей, то наблюдать дифракцию на кристаллических решетках можно, только используя рентгеновское излучение,

длина волны которого $\lambda = 10^{-8} \dots 10^{-12}$ м. Независимо друг от друга, Г. Вульф и Г. и Л. Брэгги предположили, что дифракция рентгеновского излучения является результатом его отражения от системы параллельных кристаллографических плоскостей, в которых лежат узлы кристаллической решетки (рис. 18.7).

При этом максимумы интенсивности (дифракционные максимумы) наблюдаются в тех направлениях, в которых все отраженные волны будут находиться в одинаковой фазе. Эти направления удовлетворяют формуле Вульфа – Брэггов:

$$2 \cdot d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

здесь θ – угол между направлениями падающих лучей и кристаллографической плоскостью (угол скольжения на рис. 18.7). Дифракция рентгеновских лучей лежит в основе рентгеноструктурного анализа и рентгеновской спектроскопии. Рентгеноструктурный анализ позволяет найти межплоскостное расстояние d по известным θ и m , то есть изучать структуру кристалла. С помощью рентгеновской спектроскопии по известным d , θ и m можно найти длину волны падающего рентгеновского излучения. Формула Вульфа – Брэггов остается справедливой и при дифракции электронов и нейтронов. Методы анализа называются электронография и нейтронография.

Историческая справка

Пятно Пуассона

В 1818 году в Парижской академии наук рассматривалась в качестве конкурсной работа Огюста Жана Френеля (1788–1827). О. Френель и Т. Юнг являются создателями волновой теории света. Председателем конкурсной комиссии был Симеон Дени Пуассон (1781–1840), сторонник и яростный защитник корпускулярной теории света, выдвинутой

еще Ньютоном. «Свет – это поток корпускул», – утверждал Ньютон. Особое раздражение Пуассона вызвало содержащееся в работе Френеля утверждение, что в самом центре геометрической тени, отбрасываемой небольшим непрозрачным диском, должна находиться светлая точка. Это парадоксальное, на его взгляд, утверждение Пуассон выдвинул в качестве доказательства несостоятельности рассуждений Френеля. Пуассон предполагал, что работа Френеля будет отвергнута, волновая теория потерпит крах. Присутствовавший на заседании Доминик Франсуа Араго (1786–1853) произвел соответствующий опыт и показал, что выводы Френеля соответствуют действительности и, следовательно, подтверждают волновую природу света. Как это ни странно, но пятно в центре геометрической тени получило название «пятна Пуассона», хотя было бы справедливо назвать его «пятно Френеля». Начиная с 20-х годов XIX века корпускулярная теория света, господствовавшая в течение почти трех столетий, была отвергнута, волновая теория света получила всеобщее признание, а затем еще через столетие обе теории в обновленном виде вошли в теорию корпускулярно-волнового дуализма света. О необычной судьбе Франсуа Араго Даниил Гранин написал рассказ «Повесть об одном ученом и одном императоре». А о Френеле и Юнге обычно рассказывают в качестве примера того, как увлеченность, собранность, работа в одном и том же направлении помогают достичь больших успехов в науке.

Томас Юнг (1773–1829), современник О. Френеля, с ранних лет обнаружил необыкновенные способности и феноменальную память. Судите сами: в 2 года бегло читал, в 8–9 лет мастерил различные физические приборы, к 14 годам усвоил дифференциальное исчисление, знал около десятка языков, учился в трех университетах, работал практически во всех разделах физики и в других науках. Работы относятся к оптике, акустике, теплоте, механике, математике, астрономии, геофизике, филологии, зоологии. В учебники физики вошли опыт Юнга (дифракция и интерференция, термин «интерференция» ввел именно Т. Юнг), а также модуль Юнга в теории упругости.

Способности **О. Френеля** оценивались как скромные, однако благодаря тому, что он работал только в оптике, он именно здесь добился успеха и весомого вклада в науку. О. Френель окончил Политехническую школу и Школу мостов и дорог в Париже. Работал инженером по ремонту и строительству дорог в различных департаментах Франции, а с 1817 году – в Политехнической школе. Под влиянием Э. Малюса в 1811 году стал самостоятельно изучать физику и вскоре начал экспериментальные исследования по оптике. Изобрел ряд интерференционных приборов (зеркала Френеля, бипризма Френеля, линза Френеля), много

сделал для развития волновой теории света. В учебники физики вошли: принцип Гюйгенса – Френеля, зоны Френеля, дифракция Френеля на круглом отверстии, бизеркала и бипризма Френеля.

Подсказка

1. Студенты Андрей и Дарья выполняли лабораторную работу по дифракции на дифракционной решетке, содержащей $n = 500$ штрихов на 1 мм. Решетка освещалась белым светом, падающим нормально к ее поверхности. Спектр проецировался помещенной вблизи решетки линзой на экран. Какова ширина l спектра первого порядка, полученного Андреем и Дарьей на экране, если расстояние L от линзы до экрана равно 1 м? Границы видимого спектра $\lambda_{кр} = 780$ нм, $\lambda_{ф} = 400$ нм ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$). Каково общее число максимумов, даваемых решеткой для $\lambda = 500$ нм?

Решение

Условие максимума интенсивности на экране в направлении φ при дифракции на дифракционной решетке

$$d \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda,$$

постоянная решетки $d = \frac{1}{n}$, $m = 1$ (по условию).

Как следует из этого соотношения, для спектра одного и того же порядка максимумы разных цветов находятся под разными углами φ (по отношению к центру экрана, рис. 18.8), т. е.

$$\sin \varphi_{кр} = \frac{\lambda_{кр}}{d}, \quad \sin \varphi_{ф} = \frac{\lambda_{ф}}{d}.$$

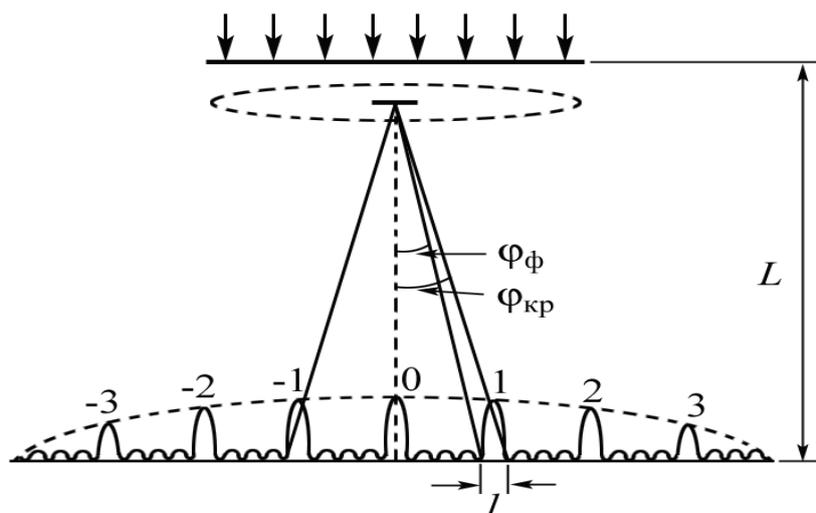


Рис. 18.8

Поскольку углы дифракции для спектра первого порядка малы, то можно принять, что

$$\sin \varphi \cong \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Обозначим расстояние на экране до λ_ϕ через x , тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{кр}} = \frac{x+l}{L}, \quad \operatorname{tg} \varphi_\phi = \frac{x}{L},$$

учитывая (1), получим

$$\frac{x+l}{L} = \frac{\lambda_{\text{кр}}}{d}. \quad (2)$$

$\frac{x}{L} = \frac{\lambda_\phi}{d}$, отсюда $x = \frac{\lambda_\phi \cdot L}{d}$, подставим в (2):

$$\frac{\frac{\lambda_\phi \cdot L}{d} + l}{L} = \frac{\lambda_{\text{кр}}}{d},$$

после преобразований получаем

$$l = \frac{L(\lambda_{\text{кр}} - \lambda_\phi)}{d}.$$

Подставив числовые данные, получим

$$l = 1 \cdot (380 \cdot 10^{-9}) \cdot 500 \cdot 10^3 = 0,19 \text{ м.}$$

Примечание: если подсчитать x и сравнить с L , то получим, что $x \ll L$, это подтверждает правомочность допущения (1). Общее число максимумов, даваемых решеткой, найдем, проанализировав выражение $d \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$. Учтем также, что дифракционная картина симметрична относительно нулевого центрального максимума. Наибольшее число максимумов, которое дает решетка при неизменных d и λ , определим, приравняв $\sin \varphi = 1$ (поскольку это наибольшее значение для $\sin \varphi$), т. е.

$$m_{\text{max}} = \frac{d}{\lambda}.$$

Подставим числовые данные:

$$m_{\text{max}} = \frac{1}{500 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 10^{-9}} = \frac{100}{25} = 4.$$

Общее число максимумов $k = 4 + 4 + 1 = 9$.

2. Посредине между точечным источником и экраном наблюдения находится диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным? Расстояние между источником и экраном $L = 4$ м, длина волны источника $\lambda = 500$ нм (рис. 18.9).

Решение

Если отверстие открывает m зон Френеля, то радиус m -й зоны равен радиусу отверстия, т. е.

$$r = r_m = \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot m \cdot \lambda}{a + b}},$$

здесь m – номер зоны; λ – длина волны, a и b – соответственно расстояния до диафрагмы от точечного источника и экрана.

Нам необходимо выяснить, при каком количестве открытых зон Френеля центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным.

Из теории этой темы нам известно, что амплитуды колебаний, возбуждаемых зонами, монотонно убывают с увеличением номера зоны, т. е. амплитуды колебаний от соседних зон близки, но не равны друг другу.

Кроме того, амплитуды колебаний, возбуждаемых соседними зонами в центре экрана, приходят в эту точку в противофазе, т. е.

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \dots,$$

где A – амплитуда результирующего колебания; A_1, A_2, A_3, \dots – амплитуды колебаний от первой, второй и т. д. зон Френеля. Таким образом, чтобы центр дифракционной картины был темным, отверстие должно оставлять открытыми (или в отверстии должно укладываться) четное число зон Френеля. А наиболее темным центр картины будет при наименьшем четном числе зон, т. е. если $m = 2$, расстояние $a = b = L / 2$. Таким образом,

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \lambda}{L}} = \sqrt{\frac{L \cdot \lambda}{2}}.$$

Подставив числовые данные, получим $r = 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм}$.

3. На щель шириной $a = 0,1 \text{ мм}$ нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda = 600 \text{ нм}$). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L = 1 \text{ м}$. Результаты представить в см.

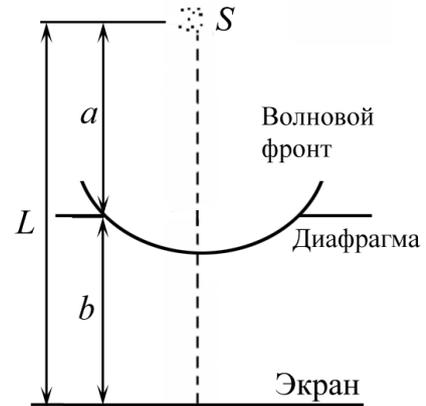


Рис. 18.9

Решение

Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности (рис. 18.10). Поэтому ширину центрального максимума примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности. Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели, как нам известно из теории, наблюдаются под углами φ , определяемыми условием

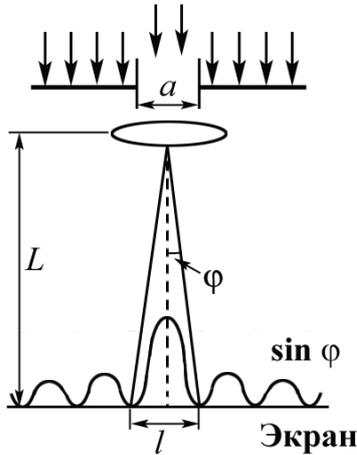


Рис. 18.10

$$a \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda, \quad (1)$$

где m – порядок минимума (в данном случае $m = 1$).

Как следует из чертежа, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2L}$, отсюда

$$l = 2L \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

При малых углах $\operatorname{tg} \varphi \cong \sin \varphi$, т. е.

$$l = 2L \cdot \sin \varphi. \quad (2)$$

Выразим $\sin \varphi$ из выражения (1) и подставим его в равенство (2):

$$l = \frac{2}{a} \cdot L \cdot m \cdot \lambda.$$

Подставим числовые данные, в результате получим $l = 1,2$ см.

4. Исходя из определения зон Френеля, найти число m зон Френеля, которые открывает отверстие радиуса $r = 1$ мм для точки, находящейся на расстоянии $b = 1$ м от центра отверстия, в случае если волна, падающая на отверстие, плоская. Длина волны $\lambda = 500$ нм.

Решение

Задачу можно решить двумя способами:

1. Воспользовавшись теоремой Пифагора (рис. 18.11), можно найти радиус r зоны Френеля:

$$r^2 = \left(b + m \cdot \frac{\lambda}{2} \right)^2 - b^2 = b^2 + m \cdot \lambda \cdot b + \frac{m^2 \cdot \lambda^2}{4} - b^2.$$

Пренебрегая $\frac{m^2 \cdot \lambda^2}{4}$ (ввиду его малой величины по сравнению с b), получим $r^2 = m \cdot \lambda \cdot b$.

Отсюда
$$m = \frac{r^2}{\lambda \cdot b}, \quad m = 2.$$

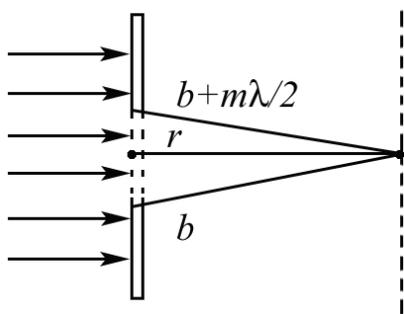


Рис. 18.11

2. Используем соотношение, полученное для сферической волны:

$$r_m = \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot m \cdot \lambda}{a + b}}.$$

Плоской волне соответствует расстояние от точечного источника до фронта волны $a \rightarrow \infty$. Тогда выражение для радиуса зон

$$r_m = \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot m \cdot \lambda}{a + b}} = \sqrt{m \cdot \lambda \cdot b}.$$

Получим $m = \frac{r^2}{\lambda \cdot b}$.

Подставив данные, получим $m = 2$.

ТЕСТ

Вопросы

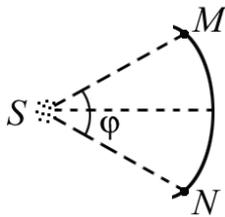


Рис. 18.12

18.1. Фазы колебаний в точках M и N волнового фронта (рис. 18.12.)

- 1) не отличаются;
- 2) отличаются на угол φ ;
- 3) отличаются на угол $\varphi/2$;
- 4) отличаются на угол 2φ .

18.2. Разность хода (Δ) лучей от краев соседних зон Френеля до точки наблюдения равна

- 1) $\Delta = \lambda$;
- 2) $\Delta = 0$;
- 3) $\Delta = \lambda/2$;
- 4) $\Delta = \lambda/4$.

18.3. Разность фаз δ колебаний в центре экрана от двух соседних зон Френеля равна

- 1) $\delta = \pi$;
- 2) $\delta = 2\pi$;
- 3) $\delta = \pi/2$;
- 4) $\delta = \pi/4$.

18.4. Отверстие оставляет открытой одну зону Френеля, амплитуда колебаний которой в центре экрана равна A_1 . Амплитуда колебаний в центре экрана A равна

- 1) $A = A_1/2$;
- 2) $A = A_1$;
- 3) $A = A_1/4$;
- 4) $A = 2A_1$.

18.5. Отверстие оставляет открытыми две зоны Френеля, амплитуды колебаний которых в центре экрана равны A_1 и A_2 . Амплитуда результирующего колебания в центре экрана A равна

- 1) $A \cong 0$;
- 2) $A = A_1 + A_2$;
- 3) $A = 2A_1$;
- 4) $A = 2A_2$.

18.6. Размерность в СИ угловой дисперсии D дифракционной решетки

- 1) безразмерная величина;
- 2) $[D] = \text{м}$;
- 3) $[D] = \text{м}^2$;
- 4) $[D] = \text{рад/м}$.

18.7. Размерность в СИ разрешающей способности дифракционной решетки R

- 1) $[R] = \text{м}$;
- 2) $[R] = \text{м}^2$;
- 3) $[R] = \text{рад}$;
- 4) безразмерная величина.

18.8. Отношение разрешающих способностей дифракционной решетки для спектров четвертого и первого порядков спектра равно

- 1) $R_4 / R_1 = 4$;
- 2) $R_4 / R_1 = 1$;
- 3) $R_4 / R_1 = 2$;
- 4) $R_4 / R_1 = 8$.

18.9. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Какое соотношение соответствует максимуму на экране? (d – порядок решетки, a – ширина щели, b – ширина непрозрачного промежутка).

1. $d \cdot \sin \varphi = \pm(2 \cdot m + 1)\lambda$.
2. $a \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.
3. $b \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.
4. $d \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.

18.10. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Какое соотношение соответствует минимуму на экране? (d – порядок решетки, a – ширина щели, b – ширина непрозрачного промежутка).

1. $d \cdot \sin \varphi = \pm(2 \cdot m + 1)\lambda$.
2. $a \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.
3. $b \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.
4. $d \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.

18.11. На щель нормально падает пучок света. Какое соотношение соответствует максимуму на экране? (a – ширина щели, b – ширина непрозрачного промежутка).

1. $a \cdot \sin \varphi = \pm(2 \cdot m + 1)\lambda / 2$.
2. $b \cdot \sin \varphi = \pm(2m + 1)\lambda / 2$.
3. $a \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.
4. $b \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.

18.12. На щель нормально падает пучок света. Какое соотношение соответствует минимуму на экране? (a – ширина щели, b – ширина непрозрачного промежутка).

1. $a \cdot \sin \varphi = \pm(2 \cdot m + 1)\lambda / 2$.
2. $b \cdot \sin \varphi = \pm(2m + 1)\lambda / 2$.
3. $a \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.
4. $b \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \lambda$.

18.13. На кристаллах не наблюдается дифракция видимого света, потому что

1) *длины волн видимого света много больше межплоскостного расстояния кристалла;*

2) *длины волн видимого света много меньше межплоскостного расстояния кристалла;*

3) *кристаллы не могут использоваться в качестве дифракционной решетки;*

4) *это следует из формулы Вульфа – Брэггов.*

18.14. С помощью рентгеноструктурного анализа можно определить

1) *межплоскостное расстояние;* 2) *угол скольжения;*

3) *длину волны излучения;* 4) *порядок спектра.*

18.15. С помощью рентгеновской спектроскопии можно определить

1) *межплоскостное расстояние;* 2) *угол скольжения;*

3) *длину волны излучения;* 4) *порядок спектра.*

18.16. Щель освещается белым светом. Цвет центрального максимума при этом

1) *белый;* 2) *красный;*

3) *фиолетовый;* 4) *желтый.*

18.17. Дифракционная решетка освещается белым светом. Цвет центрального максимума при этом

1) *белый;* 2) *красный;*

3) *фиолетовый;* 4) *желтый.*

18.18. Дифракционная решетка освещается белым светом. Ближе к центру дифракционной картины расположена ... область максимумов.

- 1) красная;
- 2) фиолетовая;
- 3) желтая;
- 4) зеленая.

18.19. Дифракционная решетка освещается белым светом. Дальше от центра дифракционной картины расположена ... область максимумов.

- 1) красная;
- 2) фиолетовая;
- 3) желтая;
- 4) зеленая.

18.20. Разрешающая способность дифракционной решетки меньше для максимума первого порядка по сравнению со вторым

- 1) в два раза.
- 2) разрешающая способность не зависит от порядка максимума.
- 3) в четыре раза.
- 4) в десять раз.

18.21. Дифракционная картина наблюдается на непрозрачном диске, закрывающем пять зон Френеля. В центре дифракционной картины наблюдается

- 1) максимум интенсивности;
- 2) минимум интенсивности;
- 3) тень от диска;
- 4) светлое пятно.

18.22. Непрозрачный диск закрывает девять зон Френеля. Максимум в центре экрана определяется половиной ... зоны.

- 1) восьмой;
- 2) девятой;
- 3) десятой;
- 4) одиннадцатой.

18.23. Непрозрачный диск закрывает четыре зоны Френеля. Максимум в центре экрана определяется половиной ... зоны.

- 1) третьей;
- 2) четвертой;
- 3) пятой;
- 4) шестой.

18.24. Непрозрачный диск закрывает три зоны Френеля. Максимум в центре экрана определяется половиной ... зоны.

- 1) второй;
- 2) третьей;
- 3) четвертой;
- 4) пятой.

18.25. Метод зон Френеля

1) подтверждает закон прямолинейного распространения света в однородной среде.

2) противоречит закону прямолинейного распространения света в однородной среде.

3) позволяет оценить амплитуду колебаний в любой точке дифракционной картины.

4) позволяет оценить амплитуду колебаний в центре дифракционной картины.

18.26. Отверстие оставляет открытыми три зоны Френеля, амплитуды колебаний которых в центре дифракционной картины соответственно A_1, A_2, A_3 . Амплитуда результирующего колебания в центре экрана A равна ...

- 1) $A = A_1 - A_2 + A_3$; 2) $A = A_1 + A_2 + A_3$;
 3) $A = A_1/2 + A_3/2$; 4) $A = A_1/2 - A_2/2 + A_3/2$.

18.27. Зонная пластинка ...

- 1) увеличивает интенсивность колебаний в центре экрана;
 2) уменьшает интенсивность колебаний в центре экрана;
 3) действует подобно собирающей линзе;
 4) действует подобно рассеивающей линзе.

18.28. В центре дифракционной картины будет наблюдаться светлое пятно при дифракции Френеля на круглом отверстии, если оно оставляет открытыми ...

- 1) две зоны Френеля; 2) четыре зоны Френеля;
 3) шесть зон Френеля; 4) три зоны Френеля.

18.29. Укажите угол дифракции (рис. 18.13).

1. α . 2. β . 3. γ . 4. 2β .

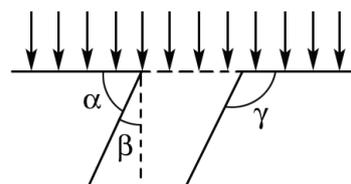


Рис. 18.13

18.30. Если угол дифракции $\varphi = 0$, то порядок максимума ...

- 1) первый; 2) второй;
 3) третий; 4) нулевой.

18.31. Расстояния от краев соседних зон Френеля до точки наблюдения отличаются на ...

- 1) $\lambda/2$; 2) λ ; 3) 2λ ; 4) 3λ .

18.32. Условие максимумов при дифракции Фраунгофера ...

- 1) $a \cdot \sin \varphi = +m \cdot \lambda$; 2) $a \cdot \sin \varphi = \pm(2m + 1) \cdot \lambda / 2$;
 3) $a \cdot \sin \varphi = 3\lambda$; 4) $a \cdot \sin \varphi = 4\lambda$.

18.33. Верные заключения:

1. Дифракция – огибание волной препятствий и попадание света в область геометрической тени.

2. Дифракционная картина – результат интерференции продифрагировавших волн.

3. Метод зон Френеля противоречит принципу прямолинейности распространения света.

4. Метод зон Френеля не противоречит принципу прямолинейности распространения света.

18.34. В каком из методов наблюдения интерференции присутствует также явление дифракции?

1. В опыте Юнга.
2. При наблюдении с помощью зеркал Френеля.
3. При наблюдении с помощью бипризмы Френеля.
4. На кристаллах.

18.35. Как изменится дифракционная картина на экране, если щель заменить решеткой?

1. Увеличится число максимумов.
2. Появятся побочные максимумы и минимумы.
3. Изменится условие главного минимума.
4. Изменится условие главного максимума.

18.36. Зонная пластинка оставляет открытыми две зоны Френеля, амплитуды колебаний которых в центре экрана равны A_1 и A_3 . Амплитуда A результирующего колебания в центре экрана равна ...

- 1) $A = A_1 + A_2$;
- 2) $A = A_1 - A_2$;
- 3) $A = 0$;
- 4) $A = A_1 / A_2$.

18.37. Зонная пластинка оставляет открытыми три зоны Френеля, амплитуды колебаний которых в центре экрана равны A_1 , A_2 , и A_3 . Амплитуда A результирующего колебания в центре экрана равна ...

- 1) $A = A_1 + A_2 + A_3$;
- 2) $A = A_1 - A_2 + A_3$;
- 3) $A = A_1 + A_2 - A_3$;
- 4) $A = 0$.

18.38. Зонная пластинка оставляет открытыми четыре зоны Френеля, амплитуды колебаний которых в центре экрана равны A_1 , A_2 , A_3 и A_4 . Амплитуда A результирующего колебания в центре экрана равна ...

- 1) $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$;
- 2) $A = 0$;
- 3) $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$;
- 4) $A = A_1 + A_2 - A_3 - A_4$.

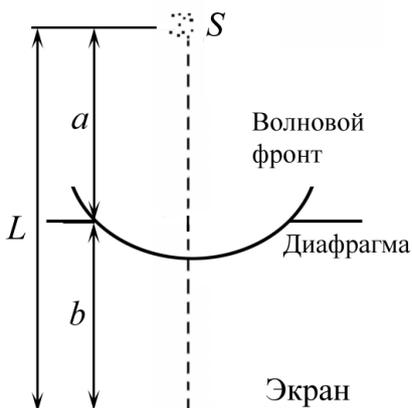


Рис. 18.14

Задачи

18.1. Посредине между точечным источником и экраном наблюдения находится диафрагма с круглым отверстием (рис. 18.14). При каком радиусе отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным? Расстояние между источником и экраном $L = 4$ м, длина волны источника $\lambda = 500$ нм.

18.2. Студенты Андрей и Дарья выполняли лабораторную работу по дифракции на дифракционной решетке, содержащей $n = 500$ штрихов на 1 мм. Решет-

ка освещалась белым светом, падающим нормально к ее поверхности. Спектр проецировался помещенной вблизи решетки линзой на экран (рис. 18.15). Какова ширина l спектра первого порядка, полученного Андреем и Дарьей на экране, если расстояние L от линзы до экрана равно 1 метру. Границы видимого спектра $\lambda_{кр} = 780$ нм, $\lambda_{ф} = 400$ нм ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$). Каково общее число максимумов, даваемых решеткой для $\lambda = 500$ нм? Принять, что $\sin \varphi \cong \text{tg} \varphi$.

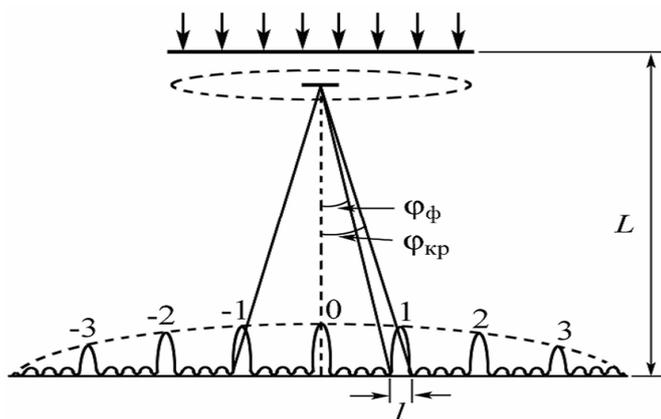


Рис. 18.15

18.3. На щель шириной $a = 0,1$ мм нормально падает (рис. 18.16) параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda = 600$ нм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L = 1$ м. Результат представить в см. Принять, что $\sin \varphi \cong \text{tg} \varphi$.

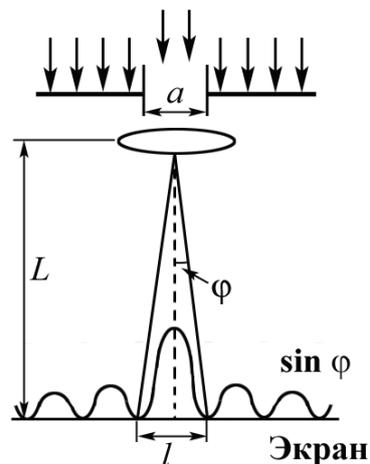


Рис. 18.16

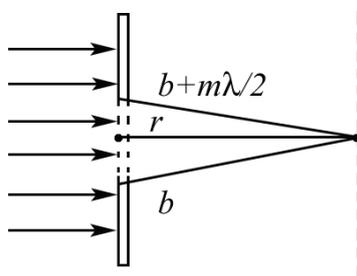


Рис. 18.17

18.4. Исходя из определения зон Френеля, найти число m зон Френеля, которые открывает отверстие радиуса $r = 1$ мм для точки, находящейся на расстоянии $b = 1$ м от центра отверстия, в случае если волна, падающая на отверстие, плоская (рис. 18.17). Длина волны $\lambda = 500$ нм. Результат округлите до целого числа.

18.5. Определить радиус четвертой зоны Френеля, если радиус второй зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 2 мм.

18.6. Студенты 1-го курса ЕНМФ Егор и Лена выполняли лабораторную работу с дифракционной решеткой. В наблюдаемой ими дифракционной картине на экране первый главный максимум наблюдался на расстоянии $l = 15$ см от центрального. При этом свет длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм падал на решетку нормально, а экран располагался от решетки и линзы на расстоянии $L = 1$ м. Определите число штрихов на 1 см дифракционной решетки в эксперименте Егора и Лены.

18.7. На узкую щель шириной $a = 0,05$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 694$ нм. Определить направление света на вторую светлую дифракционную полосу (по отношению к первоначальному направлению света). Ответ дать в градусах, округлить до целого числа.

18.8. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол $\varphi_1 = 14^\circ$. На какой угол φ_2 отклонен максимум третьего порядка? Ответ дать в градусах, округлить до целого числа.

18.9. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница ($\lambda = 0,4$ мкм) спектра третьего порядка? Ответ дать в мкм.

18.10. На дифракционную решетку, содержащую $n = 400$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Найти общее число дифракционных максимумов, которые дает эта решетка.

18.11. Дифракционная решетка содержит $n = 200$ штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

18.12. Свет от монохроматического источника ($\lambda = 600$ нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия $d = 6$ мм. За диафрагмой на расстоянии $l = 3$ м от нее находится экран. Какое число m зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым?

18.13. На щель шириной $a = 20$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Найти ширину A изображения щели на экране, удаленном от щели на расстояние $l = 1$ м. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

18.14. Найти наибольший порядок m спектра для желтой линии натрия ($\lambda = 589$ нм), если постоянная дифракционной решетки $d = 2$ мкм. Ответ округлить до целого числа.

18.15. На щель шириной $a = 2$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 589$ нм). Под какими углами φ будут наблюдаться дифракционные минимумы света?

18.16. На щель шириной $a = 20$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Найти ширину A изображения щели на экране, удаленном от щели на расстояние $l = 1$ м. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

18.17. На щель шириной $a = 6\lambda$ падает нормально параллельный пучок монохроматического света λ . Под каким углом φ будет наблюдаться третий дифракционный минимум света?

18.18. На дифракционную решетку падает нормально пучок света. Для того чтобы увидеть красную линию ($\lambda = 700$ нм) в спектре этого порядка, зрительную трубу пришлось установить под углом $\varphi = 30^\circ$ к оси коллиматора. Найти постоянную d дифракционной решетки. Какое число штрихов N_0 нанесено на единицу длины этой решетки?

18.19. Какое число штрихов N_0 на единицу длины имеет дифракционная решетка, если зеленая линия ртути ($\lambda = 561,1$ нм) в спектре первого порядка наблюдается под углом $\varphi = 19^\circ 8'$?

18.20. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. При повороте трубы гониометра на угол φ в поле зрения видна линия $\lambda_1 = 440$ нм в спектре третьего порядка. Будут ли видны под этим же углом φ другие спектральные линии λ_2 , соответствующие длинам волн в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм)?

18.21. Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в первом порядке был разрешен дублет натрия $\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм? Ширина решетки $a = 2,5$ см.

18.22. Постоянная дифракционной решетки $d = 2$ мкм. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить эта решетка в области желтых лучей ($\lambda = 600$ нм) в спектре второго порядка? Ширина решетки $a = 2,5$ см.

18.23. Постоянная дифракционной решетки $d = 2,5$ мкм. Найти угловую дисперсию $d\varphi/d\lambda$ решетки для $\lambda = 589$ нм в спектре первого порядка.

18.24. Для какой длины волны λ дифракционная решетка имеет угловую дисперсию $d\varphi/d\lambda = 6,3 \cdot 10^5$ рад/м в спектре третьего порядка? Постоянная решетки $d = 5$ мкм.

18.25. Угловая дисперсия для $\lambda = 668$ нм в спектре первого порядка $d\varphi/d\lambda = 2,02 \cdot 10^5$ рад/м. Найти период d дифракционной решетки.

ЗАНЯТИЕ 19 ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Теория

Поляризация света – это одно из самых сложных для представления явлений волновой оптики, но зато и очень интересное. Мы уже изучали тему «Поляризация диэлектриков». Диэлектрик помещается в электрическое поле, и в его объеме появляется электрический дипольный момент, а на краях – нескомпенсированные заряды. Явления поляризации света и поляризации диэлектриков связаны между собой, так как иногда поляризацию света вызывает поляризованный диэлектрик. Это явление получило название эффекта Керра, и мы с ним познакомимся.

Естественный и поляризованный свет

Электромагнитная волна характеризуется вектором напряженности электрического поля \vec{E} и вектором магнитной индукции \vec{B} (или вектором напряженности магнитного поля \vec{H}). Векторы \vec{E} и \vec{B} расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях и колеблются в одинаковых фазах (рис. 19.1).

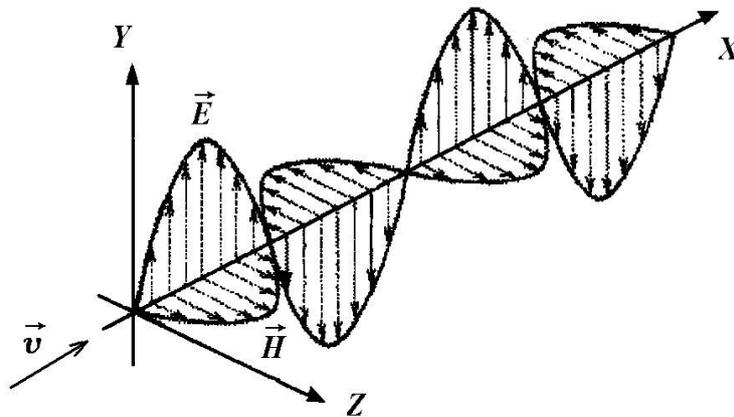


Рис. 19.1

Направление распространения колебаний называется лучом. Колебания векторов \vec{E} и \vec{B} в изотропной среде происходят перпендикулярно лучу, поэтому электромагнитные волны поперечны. В большинстве случаев воздействие световых волн определяется вектором напряженности \vec{E} электрического поля, поэтому вектор \vec{E} называется световым вектором.

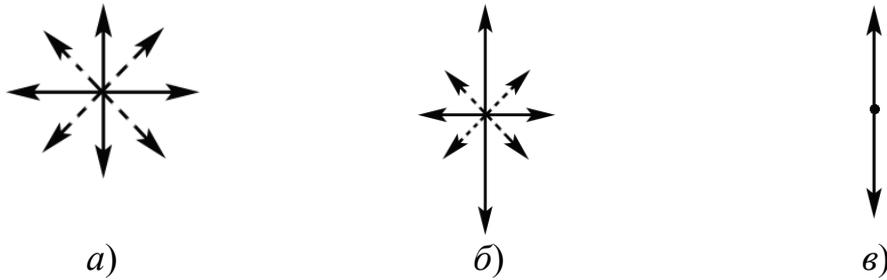


Рис. 19.2

Свет – это суммарное излучение множества атомов. Атомы излучают световые волны независимо друг от друга. Поэтому световая волна, излучаемая телом, характеризуется всевозможными равновероятными колебаниями светового вектора \vec{E} (рис. 19.2, а). Такой свет называется **естественным (неполяризованным)**. Свет, в котором направления колебаний светового вектора каким-либо образом выделены или упорядочены, называется поляризованным. Если в результате внешних воздействий появляется преимущественное направление колебаний вектора \vec{E} (рис. 19.2, б), то такой свет называется **частично поляризованным**. Свет, в котором вектор \vec{E} (и вектор \vec{H}) колеблются только в одном направлении (рис. 19.2, в), называется **плоско- (или линейно) поляризованным**. На рис. 19.2, а, б, в луч перпендикулярен плоскости чертежа.

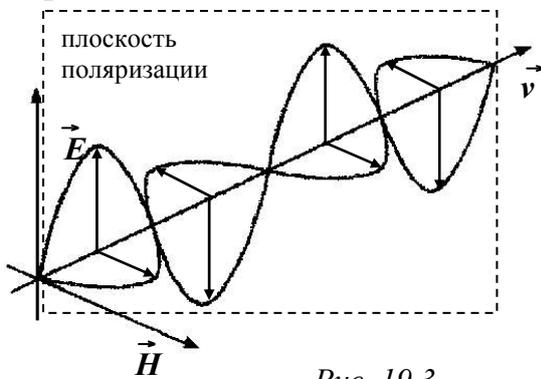


Рис. 19.3

Плоскость, проходящая через направление колебаний вектора \vec{E} и направление распространения волны (луч), называется плоскостью поляризации (рис. 19.3). Для того чтобы получить поляризованный свет, нужно создать разные условия для прохождения колебаний различных направлений, чтобы некоторые из них погасились.

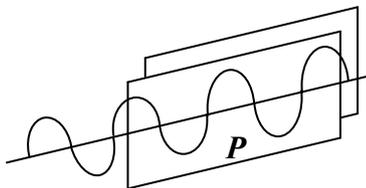


Рис. 19.4

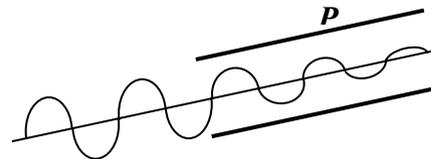


Рис. 19.5

Рассмотрим явление поляризации на механической модели. Поместим на пути упругих колебаний нити две параллельные пластины P . Ес-

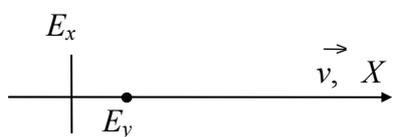
ли плоскость колебаний параллельна пластинам P (рис. 19.4), то поперечные волны пройдут между пластинами. Если же плоскость колебаний перпендикулярна пластинам, то они будут препятствовать колебаниям и не пропустят поперечную волну (рис. 19.5).

Аналогичные условия можно создать и для электромагнитных (световых) волн. Нужно пропустить свет через среду, структура и свойства которой отличаются в различных направлениях, перпендикулярных лучу. Такая среда называется **анизотропной**. Если свойства среды одинаковы во всех направлениях, то она называется **изотропной**.

Анизотропные кристаллы с невысокой степенью симметрии.

Получение поляризованного света

Естественный свет удобно представить в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих E_x и E_y . Фазы колебаний этих составляющих непрерывно и хаотически меняются



и не связаны между собой (то есть эти лучи некогерентны). На рисунке естественный свет изображается следующим образом: колебания E_x находятся в плоскости чертежа

(обозначены черточкой), а колебания E_y перпендикулярны плоскости чертежа (обозначены точкой). Если кристалл анизотропен, то его диэлектрические проницаемости в направлениях координатных осей ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z могут быть различны. Следовательно, будут различаться и показатели преломления:

$$n_x = \sqrt{\epsilon_x}; \quad n_y = \sqrt{\epsilon_y}; \quad n_z = \sqrt{\epsilon_z}.$$

Это означает, что скорость света в среде зависит от направления распространения световой волны и плоскости ее поляризации. Поэтому для анизотропной среды волновая поверхность, то есть поверхность, до которой распространяется за время t световое возмущение, исходящее от точечного источника, отлична от сферической. В случае изотропной среды

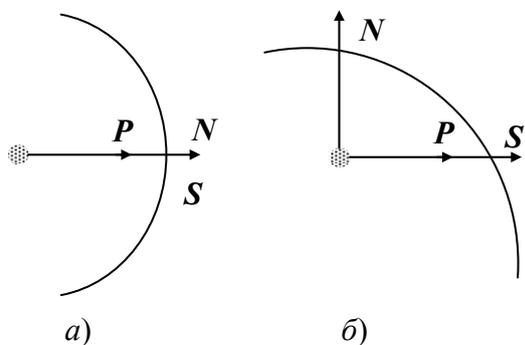


Рис. 19.6

волновая поверхность имеет форму сферы, и нормаль к волновой поверхности N совпадает с лучом P (рис. 19.6, а). Но для анизотропной среды нормаль к волновой поверхности не совпадает с лучом P , следовательно, и с направлением распространения энергии S (рис. 19.6, б).

Таким образом, для анизотропной среды направление распростра-

нения фазы (нормаль N) и направление распространения энергии (луч S) не совпадают. Однако и в анизотропных кристаллах имеются направления, для которых диэлектрические проницаемости во всех перпендикулярных к ним направлениях одинаковы: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_0$.

Такое направление называется оптической осью кристалла. Если оптическая ось одна, кристалл называется **одноосным**; если две – **двуосным**. Мы ограничимся рассмотрением одноосных кристаллов.

Поскольку показатели преломления зависят от направления распространения луча по отношению к оптической оси кристалла, то при прохождении через некоторые анизотропные кристаллы естественный свет можно разделить на два луча. Вышедшие из кристалла лучи плоскополяризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Плоскость, проходящая через направление луча света и оптическую ось кристалла, называется главной плоскостью, или главным сечением кристалла. Колебания светового вектора \vec{E} в одном из лучей происходят перпендикулярно главной плоскости (и, следовательно, оптической оси кристалла). Этот луч называется **обыкновенным**. Очевидно, что при любом направлении распространения обыкновенного луча колебания вектора \vec{E} перпендикулярны оптической оси, поэтому обыкновенный луч распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью v_0 , поскольку показатель преломления n_0 для него всюду одинаков.

Колебания светового вектора в другом луче лежат в главной плоскости, и этот луч называется **необыкновенным**. Для необыкновенного луча угол между направлениями колебаний вектора \vec{E} и оптической осью зависит от направления луча. Поэтому необыкновенные лучи распространяются с разными скоростями по различным направлениям. Следовательно, скорость v_e и показатель преломления n_e необыкновенного луча зависят от направления луча.

Явление деления луча естественного света в кристалле на два луча было названо **двойным лучепреломлением**. Впервые явление было обнаружено в 1669 году датским ученым Э. Бартолином в кристалле исландского шпата (разновидность кальцита CaCO_3). Для исландского шпата диэлектрические проницаемости ε во всех направлениях, не перпендикулярных оптической оси, меньше ε_0 , а скорость распространения различным образом поляризованных волн $v_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ больше v_0 .

Такой кристалл называется **оптически отрицательным** (рис. 19.7, а). Если скорость обыкновенного луча v_0 больше скорости необыкновенного луча, такой кристалл называется **оптически положительным** (рис. 19.7, б).

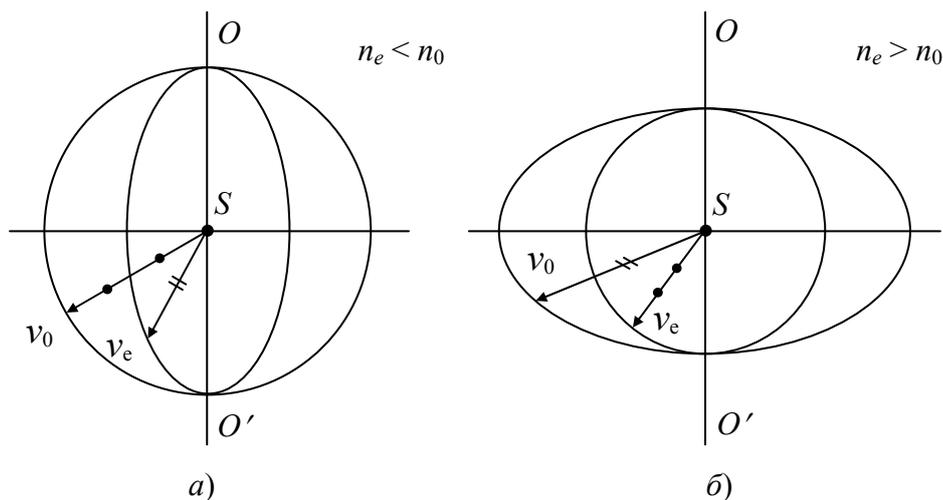


Рис. 19.7

В кристалле кварца $v_0 > v_e$, и он является примером положительного одноосного кристалла. В качестве примера построения обыкновенного и необыкновенного лучей рассмотрим преломление плоской волны на границе положительного кристалла. Пусть свет падает нормально к преломляющей грани кристалла, а оптическая ось OO' составляет с ней некоторый угол. Построим полусферические волновые поверхности с центрами в точках A и B , соответствующие обыкновенному лучу (скорость его во всех направлениях одинакова) (рис. 19.8). Для необыкновенного луча скорость распространения будет зависеть от положения луча по отношению к оптической оси OO' . Ему соответствует полуэллипсоид. Поскольку в направлении оптической оси скорости лучей одинаковы, то полуэллипсоид касается полусферы в точке пересечения оси OO' с полусферой (рис. 19.8).

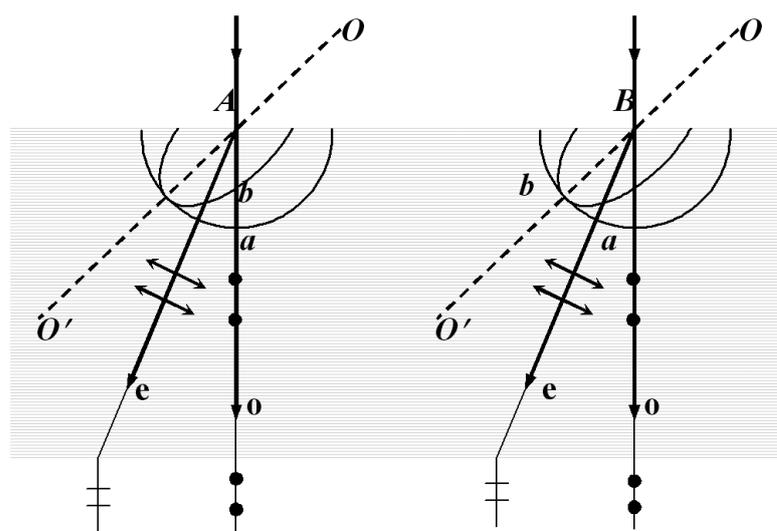


Рис. 19.8

Согласно принципу Гюйгенса, поверхность, касательная к сферам, будет фронтом ($a - a$) обыкновенной волны. Поверхность, касательная к эллипсоидам, будет фронтом ($b - b$) необыкновенной волны. Проведя к точкам касания указанных поверхностей прямые, получим направления распространения обыкновенного (o) и необыкновенного (e) лучей. Для необыкновенных лучей при нормальном падении ($i = 0$) угол преломления не равен нулю ($r \neq 0$).

Для необыкновенных лучей не выполняется закон преломления $\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21}$. По выходе из кристалла оба луча идут параллельно друг другу и падающему лучу. Но при этом они поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и некогерентны, если на кристалл падает естественный свет. Визуально эти лучи ничем не отличаются. Поскольку для луча, распространяющегося вдоль оптической оси, показатели преломления лучей одинаковы, то $v_o = v_e$ и вдоль оптической оси нет двойного лучепреломления.

Поляризационные призмы

Это специальные приборы для получения поляризованного света, в основе работы которых лежит явление двойного лучепреломления.

Например, из монокристаллов исландского шпата изготавливают призму Николя (или просто николю), названную именем шотландского ученого У. Николя (1768–1851).

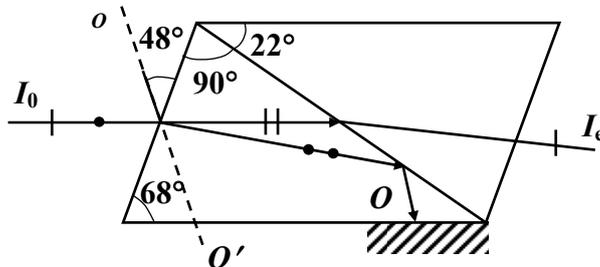


Рис. 19.9

Николю представляет собой двойную призму, склеенную канадским бальзамом (рис. 19.9). Призмы выкалываются из кристалла исландского шпата под такими углами, чтобы необыкновенный луч, падающий на переднюю грань, проходил насквозь, практически не преломляясь (рис. 19.9). При этом обыкновенный луч преломляется и падает на прослойку канадского бальзама под большим углом i . Показатель преломления клея ($n_6 = 1,55$) меньше показателя преломления обыкновенного луча ($n_o = 1,66$), так что $\sin i > \frac{n_6}{n_o}$. Поэтому обыкновенный луч испыты-

вает полное внутреннее отражение и поглощается зачерненной боковой поверхностью призмы. Таким образом, из призмы Николя выходит необыкновенный плоскополяризованный луч. Если обозначить интенсивность падающего естественного света как I_0 , то интенсивность I вышедшего света будет равна $I = 0,5I_0$. Если, конечно, не учитывать отражения и поглощения света внутри призмы.

Закон Малюса

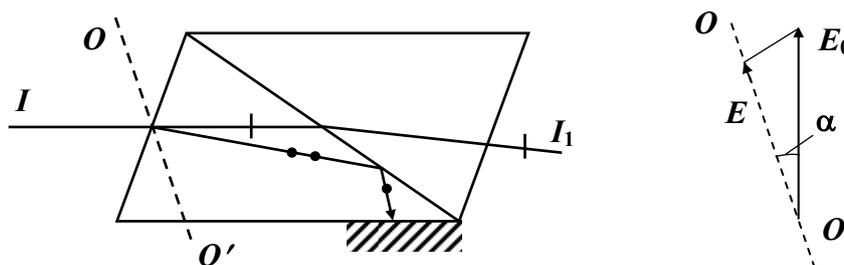


Рис. 19.10

Если теперь полученный с помощью николя (поляризатора) (рис. 19.10) плоскополяризованный свет направить еще на один николю, то последний будет служить анализатором. Второй николю позволяет выяснить направления поляризации падающего света.

Интенсивность I_1 вышедшего из анализатора света будет определяться по закону Малюса (Э. Малюс – французский ученый, 1775–1812):

$$I_1 = I \cdot \cos^2 \alpha,$$

здесь I – интенсивность поляризованного света, падающего на анализатор; α – угол между оптическими осями поляризатора и анализатора (или угол между их главными плоскостями). Поглощением и отражением света пренебрегаем. Таким образом, учитывая, что $I = 0,5 \cdot I_0$, получим

$$I_1 = 0,5 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \alpha,$$

здесь I_0 – интенсивность естественного света, падающего на поляризатор. Если $\alpha = 0$ (оптические оси призм параллельны), то интенсивность вышедшего света максимальна: $I_1 = 0,5 \cdot I_0$. Если $\alpha = \pi/2$ (призмы скрещены), то интенсивность света минимальна: $I_1 = 0$. Если указано, что в каждом николе потери на отражение и поглощение света составляют k долей единицы, то интенсивность I_1 света, прошедшего через два николя, равна

$$I_1 = (1-k)^2 \cdot 0,5 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \alpha.$$

Поляриды – это двоякопреломляющие кристаллы, обладающие свойством **дихроизма** – различного поглощения света в зависимости от

ориентации светового вектора волны E . Степень поглощения зависит еще и от длины волны, поэтому при освещении дихроичного кристалла белым светом он будет различно окрашенным по разным направлениям. Примером сильно дихроичного кристалла является турмалин, в котором из-за сильного поглощения обыкновенного луча уже при толщине пластинки 1 мм из нее выходит только необыкновенный луч.

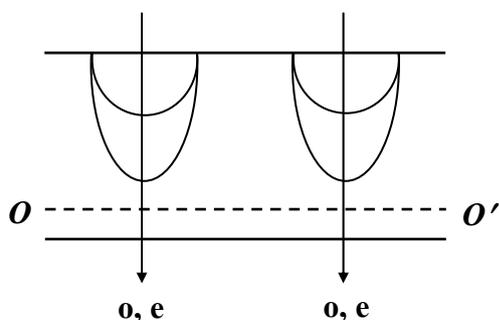


Рис. 19.11

Можно так направить луч в кристалл, чтобы обыкновенный и необыкновенный лучи пространственно не разделились, но вышли из кристалла в разное время. Для этого нужно вырезать кристалл так, чтобы его грань была параллельна оптической оси, а луч должен падать на грань перпендикулярно. Тогда обыкновенный и необыкновенный лучи не разделяются в пространстве, но имеют разные скорости (рис. 19.11 для отрицательного кристалла). В этом направлении значение n_e наиболее сильно отличается от величины n_o .

Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков

При отражении и преломлении света на границе двух сред, даже если обе среды оптически изотропны, условия отражения и преломления лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, различны. Вследствие этого отраженный и преломленный лучи в какой-то степени поляризованы. Здесь следует вспомнить, во-первых, что электромагнитные волны поперечны, во-вторых, что поляризация происходит вследствие анизотропии свойств среды. Степенью поляризации называется величина

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором. Для естественного света $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$, для плоскополяризованного $I_{\min} = 0$ и $P = 1$. Степень поляризации света в рассматриваемом случае зависит от угла падения лучей и показателей преломления диэлектриков.

Шотландский физик Д. Брюстер (1781–1868) установил закон, согласно которому отраженный луч полностью поляризован (плоскополяризован), если угол падения луча равен некоторому определенному для

данной среды углу (углу Брюстера). Угол Брюстера i_B определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

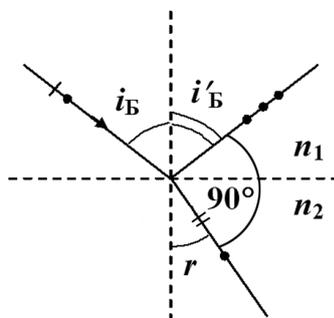


Рис. 19.12

Полностью поляризованный отраженный луч содержит только колебания, перпендикулярные плоскости падения (рис. 19.12).

Преломленный луч при угле падения $i = i_B$ поляризуется максимально, но не полностью. Поскольку степень поляризации P не может быть увеличена, постольку преломленный луч поляризован максимально. Так как он все-таки содержит колебания в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, то он поляризован не полностью.

Как видно из рис. 19.12, если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны:

$$i'_B + r = \frac{\pi}{2}.$$

Для полной поляризации преломленного луча используют **стопу Столетова**. Она состоит из ряда параллельных пластинок, ориентированных под углом Брюстера к падающему лучу. На каждой границе частично отражаются только лучи, поляризованные перпендикулярно плоскости падения, и в результате многократных преломлений выходящий из стопы луч практически полностью поляризован в плоскости падения.

Пластинки в четверть и полволны ($\frac{1}{4}\lambda_0$ и $\frac{1}{2}\lambda_0$)

Используя кристаллические пластины в $\frac{1}{4}\lambda_0$ и $\frac{1}{2}\lambda_0$, можно изменить поляризацию света. Между обыкновенным и необыкновенным лучами в пластинке, вырезанной параллельно оптической оси кристалла, возникает оптическая разность хода:

$$\Delta = (n_o - n_e) \cdot d = \pm(m + \frac{1}{4}) \cdot \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

здесь d – толщина пластинки. При нормальном падении обыкновенный и необыкновенный лучи пространственно не разделены, но движутся с разной скоростью. Такая пластинка называется пластинкой в четверть волны. Знак плюс соответствует отрицательным, а знак минус – поло-

жительным кристаллам. При этом минимальной толщине пластинки d_{\min} соответствует $m = 0$. Плоскополяризованный свет, пройдя пластинку $\lambda_0/4$, на выходе превращается в **эллиптически поляризованный** (то есть векторы \vec{E} и \vec{H} изменяются со временем так, что их концы описывают эллипсы).

В частном случае плоскополяризованный свет на выходе может превратиться в **циркулярно поляризованный** (концы векторов \vec{E} и \vec{H} описывают окружности). Пластика, для которой

$$(n_o - n_e)d = \pm(m + \frac{1}{2})\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

называется пластикой в полволны. Если на нее падает линейно поляризованный свет, то на выходе свет остается линейно поляризованным. Но направление колебаний переходит из 1–3 квадрантов в квадранты 2–4, повернувшись на угол $180^\circ - 2\alpha$ (рис. 19.13).

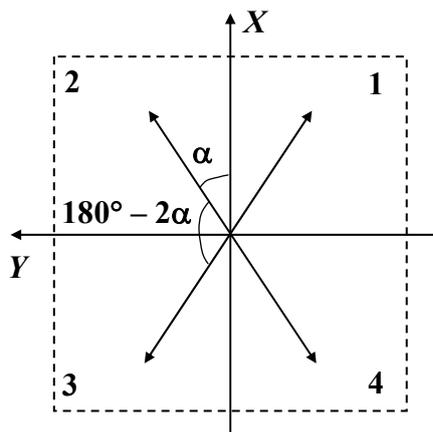


Рис. 19.13

Искусственная оптическая анизотропия

Оптически изотропные вещества становятся оптически анизотропными под действием следующих факторов:

1. **Одностороннего растяжения или сжатия** (кристаллы, стекла). Используется для исследований механических напряжений в прозрачных телах.

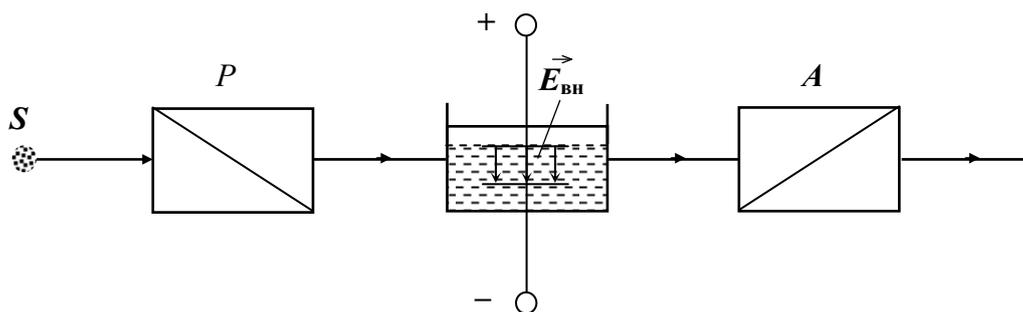


Рис. 19.14

2. **Электрического поля** (эффект Керра). Ячейка Керра представляет собой кювету с жидкостью (например, нитробензолом), в которую помещены пластины плоского конденсатора. Ячейка Керра помещается между скрещенными поляризатором P и анализатором A (рис. 19.14).

В отсутствие электрического поля свет через систему не проходит; при его наличии жидкость становится двоякопреломляющей. Это связано с тем, что поляризуемость диэлектрика в направлении внешнего поля отличается от его поляризуемости в перпендикулярном направлении. При этом ячейка Керра действует на свет так же, как плоскопараллельная пластинка. Она создает между обыкновенным и необыкновенным лучами сдвиг фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot l \cdot (n_0 - n_e)}{\lambda_0} = 2 \cdot \pi \cdot B \cdot l \cdot E_{\text{вн}}^2,$$

здесь l – длина ячейки; $E_{\text{вн}}$ – напряженность электрического поля; $B = k/\lambda_0$ – постоянная Керра (k – константа, характеризующая вещество).

Соответственно, разность хода выражается формулой

$$\Delta = l(n_0 - n_e) = k \cdot l \cdot E_{\text{вн}}^2.$$

Таким образом, в отсутствие поля нитробензол изотропен, и свет от источника S (рис. 19.14) полностью гасится скрещенными николями. Если поле включено, нитробензол становится двоякопреломляющим. При изменении разности потенциалов между электродами изменяется степень анизотропии жидкости, следовательно, и интенсивность света, прошедшего через анализатор. Это явление практически безынерционно. Поэтому ячейка Керра служит идеальным световым затвором и используется в звукозаписи, скоростной фото- и киносъемке, оптической локации и т. д.

3. Магнитного поля (эффект Коттона – Мутона). При помещении некоторых изотропных веществ (жидкостей, стекол, коллоидов) во внешнее магнитное поле они приобретают оптические свойства одноосных кристаллов. Разность показателей преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей равна

$$(n_0 - n_e) = C \cdot \lambda_0 \cdot H^2,$$

здесь C – постоянная Коттона – Мутона; H – напряженность внешнего магнитного поля.

Вращение плоскости поляризации

Некоторые вещества (кварц, сахар, киноварь, винная кислота, скипидар) обладают способностью поворачивать плоскость поляризации вокруг направления луча. Опыт показывает, что угол поворота φ плоскости поляризации для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha \cdot d,$$

здесь d – расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе; α – удельное вращение, равное углу поворота плоскости поляриза-

ции света слоем оптически активного вещества единичной толщины. Для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha] \cdot c \cdot l,$$

здесь l – длина трубки; $[\alpha]$ – удельное вращение; c – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе (кг/м^3). Вращение плоскости поляризации обусловлено наличием асимметрии молекул среды или самого раствора. Явление вращения плоскости поляризации лежит в основе метода определения концентрации растворов оптически активных веществ с помощью приборов – **поляриметров** или **сахариметров**.

Явление поляризации света, так же как и явления интерференции и дифракции, очень широко применяется в технике. Явление поляризации применяется также в поляризационном микроскопе для минералогического анализа (используется интерференция поляризованных лучей).

Подсказка

I. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол α между их главными плоскостями равен 60° . Определить: 1) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через один николю (N_1); 2) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через оба николя (рис. 19.15). Потери на отражение и поглощение в каждом николе составляют 5%. Ответ округлить до десятых.

Решение

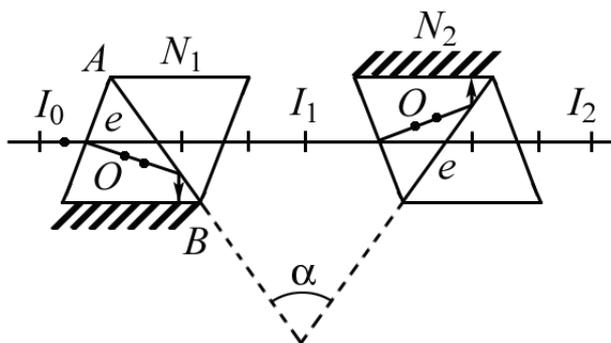


Рис. 19.15

1. Естественный свет, падая на грань николя вследствие двойного лучепреломления, разделяется на два луча: обыкновенный и необыкновенный. Оба луча одинаковы по интенсивности ($I_e = 0,5 \cdot I_0$ и $I_{\text{обыкновенный}} = 0,5 \cdot I_0$) и полностью поляризованы. Необыкновенный луч поляризован в плоскости чертежа (обозначен на рис. 19.15 черточками), обыкновенный – в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа (на

рис. 19.15 обозначен точками). Обыкновенный луч (О) вследствие полного отражения от границы AB отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный луч проходит через николю. При этом интенсивность света уменьшается вследствие поглощения в веществе. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через николю N_1 ,

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot (1 - k),$$

где $k = 0,05$ – относительная потеря интенсивности света в николе; I_0 – интенсивность естественного света, падающего на николю N_1 .

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_1 поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot (1 - k)} = \frac{2}{1 - k}.$$

Таким образом,
$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{1 - k}.$$

Подставив числовые данные, найдем $\frac{I_0}{I_1} = 2,1$.

Таким образом, интенсивность света при прохождении через николю уменьшается в 2,1 раза.

2) На николю N_2 падает пучок уже плоскополяризованного света интенсивности I_1 и тоже разделяется на обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный луч поглощается в николе, а интенсивность необыкновенного луча, вышедшего из николя, определяется законом Малюса (с учетом поглощения):

$$I_2 = I_1 \cdot (1 - k) \cdot \cos^2 \alpha,$$

где α – угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания николя N_2 . В результате

$$I_2 = 0,5 \cdot I_0 \cdot (1 - k)^2 \cdot \cos^2 \alpha.$$

Найдем отношение $\frac{I_0}{I_2}$:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{0,5 \cdot I_0 \cdot (1 - k)^2 \cdot \cos^2 \alpha}, \text{ или } \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - k)^2 \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Подставив числовые данные, получим $\frac{I_0}{I_2} = 8,86$.

II. Пучок частично поляризованного света рассматривается через николю. Первоначально николю установлен так, что его плоскость пропускания параллельна плоскости колебаний линейно поляризованного света. При повороте николя на угол $\alpha = 60^\circ$ интенсивность пропускаемого им света уменьшилась в $k = 2$ раза. Определить отношение I_e / I_n интенсивностей естественного и линейно поляризованного света, составляющих данный частично поляризованный свет, а также степень поляризации P пучка света.

Решение

Отношение интенсивностей I_e / I_n естественного и поляризованного света найдем из следующих соображений. При первоначальном положении николя он полностью пропустит линейно-поляризованный свет и половину интенсивности естественного света. Общая интенсивность прошедшего через николю света

$$I_1 = I_n + \frac{1}{2} I_e.$$

При втором положении николя интенсивность прошедшего через него поляризованного света определится по закону Малюса. Интенсивность естественного света, как и в первом случае, будет равна половине интенсивности естественного света, падающего на николю. Общая интенсивность во втором случае

$$I_2 = I_n \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} I_e.$$

В соответствии с условием $I_1 = k \cdot I_2$ (интенсивность уменьшилась в k раз) или $I_n + \frac{1}{2} I_e = k \cdot \left(I_n \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} I_e \right)$.

Подставим числовые данные:

$$I_n + \frac{1}{2} I_e = 2 \cdot \left(I_n \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} I_e \right), \quad I_n + \frac{1}{2} I_e = \frac{1}{2} I_n + I_e,$$

$$I_n - \frac{1}{2} I_n = I_e - \frac{1}{2} I_e, \quad \frac{1}{2} I_n = \frac{1}{2} I_e,$$

т. е.
$$I_n = I_e \text{ и } \frac{I_e}{I_n} = 1.$$

Таким образом, интенсивности естественного и поляризованного света равны между собой.

Максимальная интенсивность соответствует положению николя, при котором его главная плоскость параллельна плоскости колебаний линейно поляризованного света, т. е. $I_{\max} = I_1 = I_n + \frac{1}{2} I_e$ или, учитывая, что $I_n = I_e$, получим

$$I_{\max} = \frac{3}{2} I_n.$$

Минимальная интенсивность соответствует положению николя, при котором его главная плоскость (плоскость пропускания) перпендикулярна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При таком положении николя поляризованный свет будет полностью погашен, и через николю пройдет только половина интенсивности естественного света.

Таким образом,

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_e = \frac{1}{2} I_n.$$

Подставив найденные выражения I_{\max} и I_{\min} в выражение для степени поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

получим

$$P = \frac{\frac{3}{2} I_n - \frac{1}{2} I_n}{\frac{3}{2} I_n + \frac{1}{2} I_n} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Следовательно, степень поляризации пучка света $P = 0,5$.

III. Студенты ТПУ Егор и Лена, выполняя лабораторную работу, определили предельный угол $i_{\text{пред}}$ полного внутреннего отражения света на границе раздела некоторого вещества с воздухом, который оказался равен $i_{\text{пред}} = 43^\circ$. Определите угол Брюстера (i_B) для падения лучей из воздуха на поверхность этого вещества. Результат округлите до целого числа.

Решение

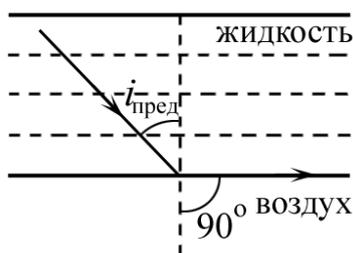


Рис. 19.16

Полное внутреннее отражение может возникнуть при переходе света из более плотной среды в менее плотную (рис. 19.16).

Если угол падения луча i равен $i_{\text{пред}}$, то угол преломления $r = \pi/2$, т. е. луч скользит по границе раздела двух сред. Закон преломления для данного случая:

$$\frac{\sin i_{\text{пред}}}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1},$$

поскольку $\sin r = 1$, то $\sin i_{\text{пред}} = \frac{1}{n_1}$ ($n_2 = 1$ для воздуха).

Таким образом, $n_1 = \frac{1}{\sin i_{\text{пред}}}$, здесь n_1 – показатель преломления вещества.

По закону Брюстера $\text{tg } i_{\text{Б}} = \frac{n_2}{n_1}$, но здесь n_2 – показатель преломления вещества, а n_1 – показатель преломления воздуха, т. к. теперь луч по условию падает из воздуха на поверхность вещества. Напомним, что отраженный луч в данном случае полностью поляризован (рис. 19.17).

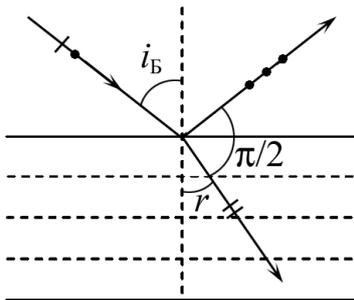


Рис. 19.17

Таким образом,

$$\text{tg } i_{\text{Б}} = \frac{n_{\text{вещества}}}{n_{\text{возд}}} = \frac{1}{\sin i_{\text{пред}}}.$$

Отсюда

$$i_{\text{Б}} = \arctg \frac{1}{\sin i_{\text{пред}}}.$$

Подставим числовые данные:

$$\sin 43^\circ = 0,682; \quad \text{tg } i_{\text{Б}} = \frac{1}{0,682} = 1,47; \quad i_{\text{Б}} = 56^\circ.$$

IV. Пластинка кварца толщиной $d_1 = 1$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 20^\circ$. Определить: 1) какова должна быть толщина d_2 кварцевой пластинки, помещенной между двумя «параллельными» николями, чтобы свет был полностью погашен (результат указать в мм); 2) какой длины l трубку с раствором сахара массовой концентрации $C = 0,4$ кг/л надо поместить между николями для получения того же эффекта. Удельное вращение $[\alpha]$ раствора сахара равно $0,665$ град/(м · кг · м³). Результат указать в дм.

Решение

1) Угол поворота плоскости поляризации кварцевой пластинкой определяется соотношением

$$\varphi = \alpha \cdot d.$$

Пользуясь им, выразим искомую толщину d_2 пластинки, которой соответствует угол поворота φ_2 :

$$d_2 = \frac{\varphi_2}{\alpha}, \quad (1)$$

здесь φ_2 – угол поворота плоскости поляризации, при котором свет будет полностью погашен. Это может произойти, если $\varphi_2 = \pi/2$, т. е. $\varphi_2 = 90^\circ$.

Постоянную вращения найдем также из соотношения $\varphi = \alpha \cdot d$, подставив в нее заданные в условии задачи значения φ_1 и d_1 :

$$\alpha = \frac{\varphi_1}{d_1}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$d_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \cdot d_1.$$

Подставим числовые данные: $d_2 = \frac{90}{20} \cdot 1 = 4,5$ мм.

2) Длину трубки с сахарным раствором найдем из соотношения

$$\varphi_2 = [\alpha] \cdot C \cdot l,$$

выражающего угол поворота плоскости поляризации раствором сахара, где l – длина трубки с раствором. Отсюда получим

$$l = \frac{\varphi_2}{[\alpha] \cdot C}.$$

Подставим сюда значения φ_2 , $[\alpha]$, C и произведем вычисления:

$$l = 90^\circ / [0,655] \cdot 400 = 3,4 \text{ дм.}$$

V. Определить степень поляризации P света, который представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность (I_n) поляризованного света в 5 раз больше интенсивности естественного (I_e). Ответ округлить до сотых.

Решение

Степень поляризации может быть найдена из соотношения

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Минимуму интенсивности соответствует полное гашение поляризованного света, т. е. $I_n = 0$ и половина интенсивности естественного света, поэтому

$$I_{\max} = \frac{1}{2} \cdot I_e.$$

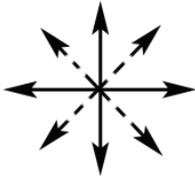
Максимуму интенсивности соответствует максимальное значение интенсивностей обеих составляющих, т. е.

$$I_{\max} = I_{n\max} + I_{e\max} = 5 \cdot I_e + \frac{1}{2} \cdot I_e.$$

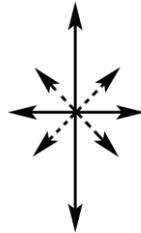
Таким образом, $P = \frac{5 \cdot I_e + \frac{1}{2} \cdot I_e - \frac{1}{2} \cdot I_e}{5 \cdot I_e + \frac{1}{2} \cdot I_e + \frac{1}{2} \cdot I_e} = \frac{5}{6} = 0,83.$

ТЕСТ

Вопросы



a)



б)



в)

Рис. 19.18

19.1. Направление колебаний вектора \vec{E} в естественном свете показано на рисунке ... (рис. 19.18).

- 1) а; 2) б; 3) в; 4) а и б.

19.2. Направление колебаний вектора \vec{E} в частично поляризованном свете показано на рисунке ... (рис. 19.18).

- 1) а; 2) б; 3) в 4) а и б.

19.3. Направление колебаний вектора \vec{E} в плоскополяризованном свете показано на рисунке ... (рис. 19.18).

- 1) а; 2) б; 3) в; 4) а и б.

19.4. Явление поляризации света может возникнуть в ... кристалле.

- 1) *изотропном*; 2) *однородном*;
3) *прозрачном*; 4) *анизотропном*.

19.5. Как соотносятся показатели преломления обыкновенного n_0 и необыкновенного n_e лучей в отрицательном кристалле?

1. $n_0 = n_e$. 2. $n_0 > n_e$. 3. $n_0 < n_e$. 4. $n_0 = n_e = 1$.

19.6. Как соотносятся показатели преломления обыкновенного n_0 и необыкновенного n_e лучей в положительном кристалле?

1. $n_0 = n_e$. 2. $n_0 > n_e$. 3. $n_0 < n_e$. 4. $n_0 = n_e = 1$.

19.7. Как соотносятся скорости распространения обыкновенного v_0 и необыкновенного v_e лучей в отрицательном кристалле?

1. $v_0 = v_e$. 2. $v_0 > v_e$. 3. $v_0 < v_e$. 4. $v_0 = v_e = c$.

19.8. Как соотносятся скорости распространения обыкновенного v_0 и необыкновенного v_e лучей в положительном кристалле?

1. $v_0 = v_e$. 2. $v_0 > v_e$. 3. $v_0 < v_e$. 4. $v_0 = v_e = c$.

19.9. Луч света распространяется вдоль оптической оси кристалла. Каково соотношение скоростей обыкновенного v_0 и необыкновенного v_e лучей?

1. $v_0 = v_e$. 2. $v_0 > v_e$. 3. $v_0 < v_e$. 4. $v_0 = v_e = c$.

19.18. Какое устройство не изменяет поляризацию линейно-поляризованного света?

1. *Пластинка в полволны.*
2. *Пластинка в четверть волны.*
3. *Ячейка Керра.*
4. *Поляризатор.*
5. *Анализатор.*

19.19. Какой свет падает на поляризатор, если при его повороте интенсивность вышедшего из него света не изменяется?

1. *Естественный.*
2. *Плоскополяризованный.*
3. *Линейно-поляризованный.*
4. *Эллиптически поляризованный.*
5. *Циркулярно поляризованный.*

19.20. Для получения анизотропии используют поляризацию диэлектрика в

- 1) *устройстве на основе эффекта Керра;*
- 2) *устройстве на основе эффекта Коттона – Мутона;*
- 3) *поляризаторе и анализаторе;*
- 4) *поляризаторе.*

19.21. При прохождении поляризованного света в оптически активных веществах происходит

- 1) *вращение плоскости поляризации;*
- 2) *изменение состояния поляризации;*
- 3) *двойное лучепреломление;*
- 4) *преломление.*

19.22. В основе устройства сахариметра лежит явление

- 1) *отражения;*
- 2) *преломления;*
- 3) *двойного лучепреломления;*
- 4) *вращения плоскости поляризации.*

19.23. Основным явлением в оптически активных веществах является

- 1) *отражение;*
- 2) *преломление;*
- 3) *вращение плоскости поляризации;*
- 4) *двойное лучепреломление.*

19.24. Оптически изотропные вещества становятся анизотропными под действием

- 1) *сжатия или растяжения;*
- 2) *гравитационного поля;*
- 3) *электрического поля;*
- 4) *магнитного поля.*

19.25. Можно практически полностью поляризовать преломленный луч с помощью

- 1) *поляризатора;*
- 2) *анализатора;*
- 3) *стопы Столетова;*
- 4) *пластинки в полволны;*
- 5) *пластинки в четверть волны.*

19.26. Луч естественного света интенсивностью I_0 проходит скрещенные поляризатор и анализатор. Интенсивность I света, вышедшего из анализатора (потерями на отражение и поглощение пренебречь), равна

- 1) $I = I_0$;
- 2) $I = 0,5 \cdot I_0$;
- 3) $I = 0$;
- 4) $I = 2 I_0$.

19.27. Луч естественного света интенсивностью I_0 проходит поляризатор и анализатор, оптические оси которых параллельны. Интенсивность I света, вышедшего из анализатора (потерями на отражение и поглощение пренебречь), равна

- 1) $I = I_0$;
- 2) $I = 0,5 \cdot I_0$;
- 3) $I = 0$;
- 4) $I = 2 I_0$.

19.28. Луч естественного света интенсивностью I_0 проходит поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых равен α . Интенсивность I света, вышедшего из анализатора (потерями на отражение и поглощение пренебречь) равна

- 1) $I = I_0$;
- 2) $I = 0,5 \cdot I_0$;
- 3) $I = 0$;
- 4) $I = 0,5 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \alpha$.

19.29. Интенсивность естественного света, прошедшего два поляризатора, уменьшилась вдвое. Как ориентированы поляризаторы?

1. *Поляризаторы скрещены.*
2. *Главные плоскости поляризаторов параллельны.*
3. *Угол между главными плоскостями поляризаторов равен 45° .*
4. *Угол между главными плоскостями поляризаторов равен 60° .*

19.30. Некогерентны необыкновенный и обыкновенный лучи, полученные в результате прохождения естественного света через двоякопреломляющий кристалл, потому что

- 1) *лучи имеют разные частоты;*
- 2) *лучи имеют разные амплитуды;*
- 3) *разность фаз колебаний изменяется во времени;*
- 4) *лучи имеют разные длины волн.*

19.31. Обыкновенный и необыкновенный лучи, полученные в результате прохождения поляризованного света через двоякопреломляющий кристалл,

- 1) *когерентны;*
- 2) *некогерентны;*
- 3) *поляризованы во взаимноперпендикулярных плоскостях;*
- 4) *поляризованы в одной плоскости.*

19.32. Поляризация возможна для ... волн.

- 1) *поперечных;*
- 2) *продольных;*
- 3) *упругих;*
- 4) *волн на поверхности жидкости.*

19.33. При каком направлении распространения луча в кристалле он не испытывает двойного лучепреломления?

1. *Вдоль оптической оси.*
2. *Перпендикулярно оптической оси.*
3. *Под произвольным углом к оптической оси.*
4. *Параллельно оптической оси.*

19.34. Законом Малюса является соотношение:

$$1. I_1 = I \cdot \cos^2 \alpha. \quad 2. \operatorname{tg} i = n_{21}. \quad 3. \frac{\sin i}{\sin r} = n_{21}. \quad 4. P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

19.35. Законом Брюстера является соотношение:

$$1. I_1 = I \cdot \cos^2 \alpha. \quad 2. \operatorname{tg} i = n_{21}. \quad 3. \frac{\sin i}{\sin r} = n_{21}. \quad 4. P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

19.36. Степень поляризации позволяет определить соотношение:

$$1. I_1 = I \cdot \cos^2 \alpha. \quad 2. \operatorname{tg} i = n_{21}. \quad 3. \frac{\sin i}{\sin r} = n_{21}. \quad 4. P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

19.37. В чем отличие действий на луч оптически активных веществ и призмы Николя?

1. *В оптически активных веществах происходит поворот плоскости поляризации, а в призме Николя – двойное лучепреломление.*

2. *В оптически активных веществах происходит двойное лучепреломление, а в призме Николя – поворот плоскости поляризации.*

3. *В оптически активных веществах происходит поглощение света, а в призме Николя – поляризация света.*

4. *В оптически активных веществах происходит отражение света, а в призме Николя – поляризация света.*

19.38. Как должна быть вырезана кристаллическая пластинка и как на нее должен падать свет, чтобы обыкновенный и необыкновенный лучи в пластинке пространственно не разделились, но двигались с разными скоростями?

1. *Пластинка вырезана параллельно оптической оси, свет падает нормально.*

2. *Пластинка вырезана перпендикулярно оптической оси, свет падает нормально.*

3. *Пластинка вырезана параллельно оптической оси, свет падает под произвольным углом.*

4. *Пластинка вырезана под произвольным углом к оптической оси, свет падает нормально.*

19.39. Угол поворота плоскости поляризации при прохождении света в кристаллах можно найти из соотношения:

1. $\varphi = \alpha \cdot d.$
2. $\varphi = [\alpha] \cdot c \cdot l.$
3. $\varphi = \alpha d.$
4. $\varphi = c \cdot l.$

19.40. Угол поворота плоскости поляризации при прохождении света в оптически активных растворах можно найти из соотношения:

1. $\varphi = \alpha \cdot d.$
2. $\varphi = [\alpha] \cdot c \cdot l.$
3. $\varphi = \alpha d.$
4. $\varphi = c \cdot l.$

19.41. Как определяется интенсивность линейно-поляризованного света I , прошедшего поляризатор, главное сечение (главная плоскость) которого составляет угол α с плоскостью поляризации падающего света? I_0 – интенсивность линейно поляризованного света, падающего на поляризатор.

1. $I = 0,5 \cdot I_0.$
2. $I = 0,5 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \alpha.$
3. $I = I_0 \cdot \cos^2 \alpha.$
4. $I = I_0 \cdot \sin^2 \alpha.$

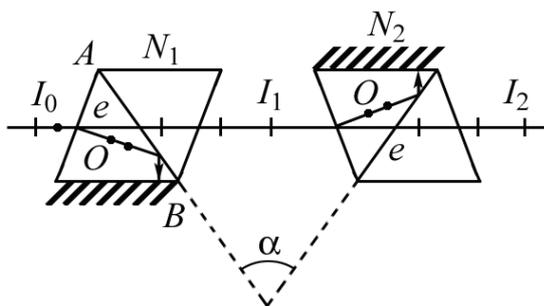


Рис. 19.20

Задачи

19.1. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол α между их главными плоскостями равен 60° (рис. 19.20). Определить: 1) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через один николь (N_1); 2) во сколько раз уменьшится интенсивность света при

прохождении через оба николя. Потери на отражение и поглощение в каждом николе составляют 5%. Ответ округлить до десятых.

19.2. Пучок частично поляризованного света рассматривается через николь. Первоначально николь установлен так, что его плоскость пропускания параллельна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При повороте николя на угол $\alpha = 60^\circ$ интенсивность пропускаемого им света уменьшилась в $k = 2$ раза. Определить отношение I_e / I_n интенсивностей естественного и линейно поляризованного света, составляющих данный частично поляризованный свет, а также степень поляризации P пучка света.

19.3. Студенты ТПУ Егор и Лена, выполняя лабораторную работу, определили предельный угол $i_{\text{пред}}$ полного внутреннего отражения света на границе раздела некоторого вещества с воздухом, который оказался равен $i_{\text{пред}} = 43^\circ$. Определите угол Брюстера (i_B) для падения лучей из воздуха на поверхность этого вещества. Ответ дать в градусах и округлить до целого числа.

19.4. Пластика кварца толщиной $d_1 = 1$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 20^\circ$. Определить: 1) какова должна быть толщина d_2 кварцевой пластинки, помещенной между двумя «параллельными» николями, чтобы свет был полностью поглощен (результат указать в мм); 2) какой длины l трубку с раствором сахара массовой концентрации $C = 0,4$ кг/л надо поместить между николями для получения того же эффекта. Удельное вращение $[\alpha]$ раствора сахара равно $0,665$ град/(м · кг · м³). Результат указать в дм.

19.5. Определить степень поляризации P света, который представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность (I_n) поляризованного света в пять раз больше интенсивности естественного (I_e). Ответ округлить до сотых.

19.6. Интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, уменьшилась в восемь раз. Пренебрегая поглощением света, определить угол между главными плоскостями николей.

19.7. Определить, во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через два николя, расположенные так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 60^\circ$, а в каждом из николей теряется 8 % интенсивности падающего на него света. Ответ округлить до сотых.

19.8. Степень поляризации частично поляризованного света составляет 0,75. Определить отношение максимальной интенсивности света, пропускаемого анализатором, к минимальной.

19.9. Определить показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч полностью поляризован при угле преломления 35° . Ответ округлить до сотых.

19.10. Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 589$ нм, падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно его оптической оси. Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1,66$ и $n_e = 1,49$, определить длины волн этих лучей в кристалле. Ответ дать в нм, округлить до целого числа.

19.11. Определить наименьшую толщину кристаллической пластинки в четверть волны для $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_o = 0,01$. Пластинкой в четверть волны называется кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, при прохождении через которую в направлении, перпендикулярном оптической оси, обыкновенный и необыкновенный лучи, не изменяя своего направления, приобретают разность хода, равную $\lambda/4$. Ответ дать в мкм и округлить до сотых.

19.12. Кристаллическая пластинка из исландского шпата с наименьшей толщиной $d = 0,86$ мкм служит пластинкой в четверть волны для $\lambda = 0,59$ мкм. Определить разность Δn показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Пластинкой в четверть волны называется кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, при прохождении через которую в направлении, перпендикулярном оптической оси, обыкновенный и необыкновенный лучи, не изменяя своего направления, приобретают разность хода, равную $\lambda/4$. Ответ округлить до сотых.

19.13. Пластинка кварца толщиной $d_1 = 2$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 30^\circ$. Определить толщину d_2 кварцевой пластинки, помещенной между параллельными николями, чтобы данный монохроматический свет гасился полностью. Ответ дать в мм.

19.14. Раствор глюкозы с массовой концентрацией $C_1 = 0,21$ г/см³, находящийся в стеклянной трубке, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света, проходящего через раствор, на угол $\varphi_1 = 24^\circ$. Определить массовую концентрацию C_2 глюкозы в другом растворе в трубке такой же длины, если он поворачивает плоскость поляризации на угол $\varphi_2 = 18^\circ$. Ответ дать в единицах Си и округлить до десятых.

19.15. Студенты ЕНМФ Егор и Лена наблюдают на берегу Томи закат Солнца. Под каким углом к горизонту находится Солнце, если лучи, отраженные от поверхности Томи, полностью поляризованы? Показатель преломления воды $n = 1,33$. Ответ округлить до целого числа.

19.16. Найти угол i_B полной поляризации при отражении света от стекла, показатель преломления которого $n = 1,57$.

19.17. Предельный угол полного внутреннего отражения для некоторого вещества $i = 45^\circ$. Найти для этого вещества угол i_B полной поляризации.

19.18. Под каким углом i_B к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были наиболее полно поляризованы?

19.19. Найти показатель преломления n стекла, если при отражении от него света отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления $\beta = 30^\circ$.

19.20. Найти коэффициент отражения ρ и степень поляризации P_1 отраженных лучей при падении естественного света на стекло ($n = 1,5$) под углом $i = 45^\circ$. Какова степень поляризации P_2 преломленных лучей?

ЗАНЯТИЕ 20 ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Теория

Излучение нагретых тел называется тепловым. Тепловое излучение – единственный вид излучения, который может быть равновесным. Это означает, что в результате непрерывного обмена энергией между телом и излучением наступает равновесие, то есть тело в единицу времени будет поглощать столько же энергии, сколько излучать. Излучение люминесцентной лампы и светлячков не является тепловым, следовательно, не является равновесным.

Для изучения теплового излучения тел вводится количественная характеристика, которая называется **спектральной плотностью энергетической светимости** (спектральной лучеиспускательной способностью), или **СПЭС**. СПЭС – это мощность излучения с единицы площади поверхности тела в интервале частот единичной ширины:

$$r_{\nu, T} = \frac{dW_{\nu, \nu+d\nu}}{d\nu}, \quad (1)$$

где $d\nu$ – интервал частот от ν до $\nu + d\nu$, $dW_{\nu, \nu+d\nu}$ – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени (мощность излучения) с единицы площади поверхности тела в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$. Заметим, что интервал $d\nu$ будет один и тот же, но он будет относиться к разным частотам ν , и функция $r_{\nu, T}$ будет иметь другую величину. Поэтому приходится «привязывать» $d\nu$ к определенным частотам ν . В системе СИ $[r_{\nu, T}] = \text{Дж/м}^2$.

Формулу (1) можно представить как функцию от длины волны:

$$dW_{\nu, \nu+d\nu} = r_{\nu, T} \cdot d\nu = r_{\lambda, T} \cdot d\lambda.$$

Так как $c = \lambda \cdot \nu$, то $\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c}$.

Знак минус указывает на то, что с возрастанием одной из величин (ν или λ) другая величина убывает. Поэтому знак минус опускаем. Таким образом,

$$r_{\nu, T} = r_{\lambda, T} \cdot \frac{\lambda^2}{c}. \quad (2)$$

С помощью соотношения (2) можно переходить от $r_{\nu, T}$ к $r_{\lambda, T}$ и наоборот.

Другая характеристика теплового излучения представляет собой энергию, испускаемую единицей поверхности тела за единицу времени (мощность излучения с единицы поверхности тела) во всем диапазоне длин волн или частот от $\nu = 0$ до $\nu = \infty$. Эта характеристика называется **энергетической светимостью** r_T , или интегральной лучеиспускательной способностью тела при данной температуре T . Понятно, что r_T равна сумме $r_{\nu,T}$ во всем диапазоне частот:

$$r_T = \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} r_{\nu,T} \cdot d\nu. \quad (3)$$

Заметим, что $r_{\nu,T}$ – лучистая энергия, излучаемая с единицы площади в единичном интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, а r_T – лучистая энергия, излучаемая телом во всем диапазоне частот при данной температуре T . Наглядно это можно представить на графике (рис. 20.1) зависимости $r_{\nu,T}$ от ν (при данной T).

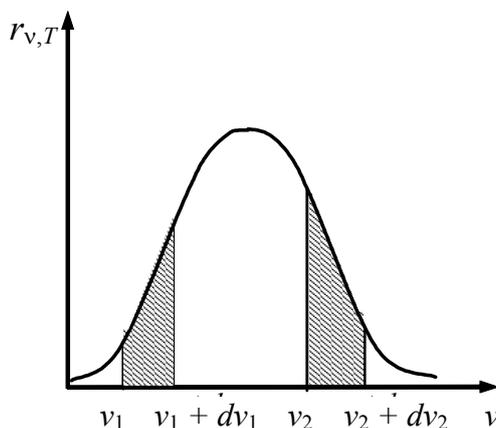


Рис. 20.1

Площадь узкой полосы равна $r_{\nu,T} \cdot d\nu$ и представляет собой энергию dW , излучаемую в данном интервале частот $d\nu$. Энергетическая светимость, или интегральная лучеиспускательная способность, r_T изображается на рис. 20.1 всей заштрихованной площадью. Каждое тело при данной температуре характеризуется своей кривой лучеиспускательной способности в различных частях спектра $r_{\nu,T}$ и своим значением интегральной лучеиспускательной способности r_T . В системе СИ $[r_T] = \text{Вт/м}^2$.

Следующая характеристика теплового излучения называется **спектральной поглощательной способностью** ($\alpha_{\nu,T}$). Она показывает, какая доля энергии электромагнитного излучения, падающей на единицу площади тела в единицу времени в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, поглощается телом:

$$\alpha_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\text{погл}}}{dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\text{падающ}}}.$$

Спектральная поглощательная способность $\alpha_{\nu,T}$ является безразмерной величиной и зависит от ν и T .

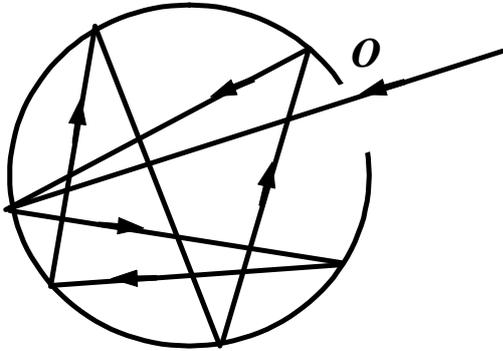


Рис. 20.2

Тело, способное при любой температуре полностью поглощать все падающее на него излучение любой частоты, называется *черным*. Для абсолютно черного тела $\alpha_{\text{ч}} = 1$. К абсолютно черному телу по своим свойствам близки сажа, платиновая чернь, черный бархат и т. д. Моделью абсолютно черного тела может служить замкнутая полость с небольшим отверстием O , внутренняя поверхность которого зачернена (рис. 20.2). Луч света, попавший внутрь такой полости, испытывает многократное отражение от стенок, в результате чего интенсивность вышедшего излучения оказывается практически равной нулю.

Наряду с понятием черного тела используют понятие *серого тела*, поглощательная способность которого $\alpha_{\text{с}} < 1$ и одинакова для всех частот, не зависит от температуры, материала и состояния поверхности тела.

Закон Кирхгофа

В 1859 году Кирхгоф установил, что отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности не зависит от природы тела, оно является универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры и равно спектральной плотности энергетической светимости черного тела при той же частоте и температуре ($R_{\nu,T}$):

$$\frac{r_{\nu,T}}{\alpha_{\nu,T}} = R_{\nu,T}. \quad (4)$$

В законе Кирхгофа эта универсальная функция не была найдена, поиски были весьма продолжительными. Поговорим о ней позднее.

Поскольку для абсолютно черного тела $\alpha_{\text{ч}} = 1$, а для других тел $\alpha_{\nu,T} < 1$, то из закона Кирхгофа вытекает важное утверждение. Излучение, которое тело сильнее поглощает, сильнее испускается. Отношение (4) является функцией частоты и температуры и называется универсальной функцией Кирхгофа.

Заметим, что тепловое излучение абсолютно черного тела во всех частях спектра интенсивнее, чем для нечерного тела, нагретого до той же температуры. Проведите такой опыт. Возьмите белую фарфоровую тарелку, нанесите на нее какой-нибудь узор сажей. Нагрейте теперь тарелку до высокой температуры и посмотрите на нее в темноте. Узор будет ярко выделяться на темном фоне (рис. 20.3).

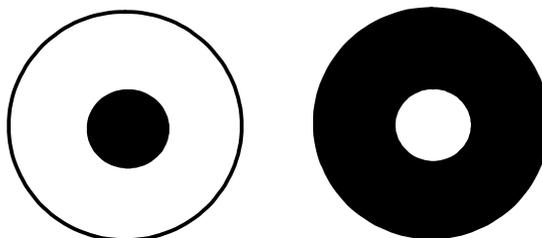


Рис. 20.3

Закон Стефана – Больцмана

Поиски универсальной функции Кирхгофа привели к установлению зависимости энергетической светимости черного тела от температуры:

$$R_T = \sigma T^4. \quad (5)$$

Отсюда следует, что энергетическая светимость черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры, σ – постоянная Стефана – Больцмана (закон был открыт австрийскими физиками Й. Стефаном и Л. Больцманом), $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴). Для серого тела, имеющего одинаковую поглощательную способность $\alpha_{\nu,T}$ во всем интервале частот, закон Стефана – Больцмана имеет вид

$$R_T^c = \alpha_c \cdot \sigma T^4.$$

Были получены экспериментальные кривые зависимости функции $R_{\lambda,T}$ от длины волны λ при различных температурах:

$$R_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} \cdot R_{\nu,T}.$$

Оказалось, что все кривые имеют четко выраженный максимум, который по мере повышения температуры смещается в сторону более коротких длин волн (или больших частот, так как $\lambda = c/\nu$) (рис. 20.4).

Немецкий физик В. Вин установил зависимость длины волны λ_{\max} , соответствующей максимуму функции $R_{\lambda,T}$ черного тела от температуры T . Согласно закону смещения Вина,

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (6)$$

здесь b – постоянная Вина ($b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К).

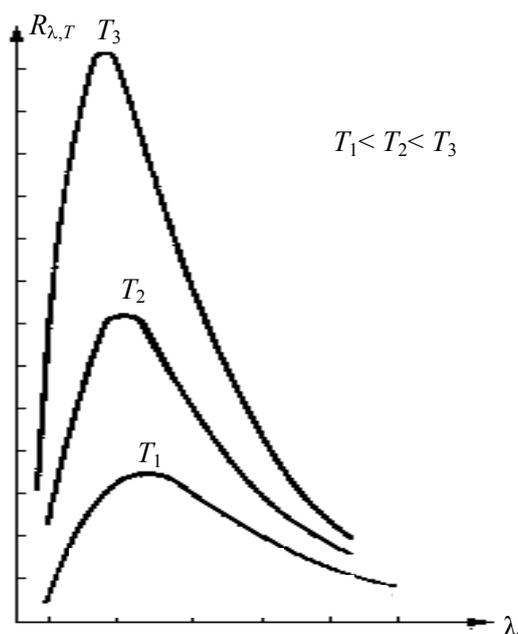


Рис. 20.4

Закон смещения Вина объясняет, почему излучение остывающего металла приобретает красный цвет. Английские ученые Д. Рэлей и Д. Джинс получили следующую зависимость для спектральной плотности энергетической светимости черного тела:

$$R_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT. \quad (7)$$

В дальнейшем выяснилось, что формула Рэля – Джинса согласуется с экспериментальными данными только в области малых частот и больших температур. На рис. 20.5 показана зависимость $R_{\nu, T}$ от ν согласно Рэлею – Джинсу (7) и Вину (6).

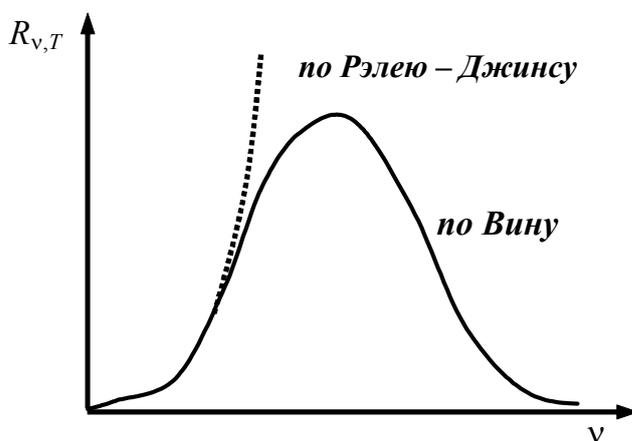


Рис. 20.5

При увеличении частоты функция $R_{\nu,T}$ возрастает до бесконечности согласно формуле Рэля – Джинса, энергетическая светимость абсолютно черного тела R_T также оказывается равной бесконечности. Это затруднение получило название «ультрафиолетовая катастрофа». Понятие катастрофы было введено, чтобы заострить внимание на расхождении теоретических и экспериментальных данных в области больших частот (малых длин волн), т. е. в ультрафиолетовой области спектра излучения. В области больших частот хорошее согласие с экспериментом дает формула Вина (закон излучения Вина). В современных обозначениях с использованием постоянной Планка, которая в то время еще не была известна, закон излучения Вина для абсолютно черного тела выглядит как

$$R_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}. \quad (8)$$

Соотношение (8) называется **интерполяционной формулой Вина**. Кроме законов смещения и излучения, Вин получил также зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости от температуры абсолютно черного тела:

$$(R_{\lambda,T})_{\max} = CT^5,$$

здесь $C = 1,3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³·К⁵). Иногда эту зависимость называют вторым законом Вина.

Выражение для спектральной плотности энергетической светимости черного тела (т. е. для функции Кирхгофа), согласующееся с опытными данными, было найдено немецким физиком М. Планком. Планк выдвинул квантовую гипотезу (она так и называется – гипотеза Планка).

Гипотеза Планка

Согласно этой гипотезе, атомные осцилляторы излучают энергию не непрерывно, как это было в классической физике, а определенными порциями – квантами. Энергия кванта пропорциональна частоте ν колебания:

$$\varepsilon_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Таким образом, энергия атомного осциллятора принимает дискретные значения, кратные целому числу элементарных квантов энергии ε_0 :

$$\varepsilon = nh\nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

По Планку, универсальная функция Кирхгофа (спектральная плотность энергетической светимости черного тела) зависит от частоты как

$$R_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} - \text{формула Планка.} \quad (9)$$

Или через длину волны:

$$R_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1},$$

здесь e – основание натурального логарифма; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура тела; c – скорость света в вакууме. Заметим, что закон излучения Вина (8) по внешним признакам наиболее близок к формуле Планка (9). Но в формуле (8), согласно классическим представлениям, средняя энергия осциллятора равна kT , а в (9) средняя энергия осциллятора по распределению Больцмана равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Формула Планка согласуется с экспериментальными данными по распределению энергии в спектрах излучения черного тела во всем интервале частот (длин волн) и температур. День (14 декабря 1900 года), когда Макс Планк изложил теоретический вывод формулы универсальной функции Кирхгофа на заседании Немецкого физического общества, считается днем рождения квантовой физики. Из формулы Планка (9) можно получить все ранее известные законы теплового излучения абсолютно черного тела как частные случаи. Например, в области малых частот (больших длин волн), то есть при $h\nu \ll kT$ для $R_{\nu,T}$ получим

$$R_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot kT - \text{формула Рэля – Джинса.}$$

Чтобы получить закон Стефана – Больцмана (5), надо взять интеграл:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} d\nu = \int_0^{\infty} \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} d\nu.$$

Закон смещения Вина можно получить, если перейти от $r_{\nu,T}$ к $r_{\lambda,T}$, взять частную производную $\frac{\partial R_{\nu,T}}{\partial \lambda}$ и приравнять к нулю.

В предельном случае больших частот можно пренебречь единицей в знаменателе, получим интерполяционную формулу Вина (8):

$$R_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}.$$

Значение формулы Планка (9) состоит также в том, что она позволяет вычислить постоянные в законах теплового излучения. Так, по известным экспериментальным значениям σ и b впервые было найдено численное значение постоянной Планка h . Можно также вычислить значение постоянной Больцмана k .

Подсказка

1. Максимум спектральной плотности энергетической светимости одной из ярких звезд нашей Галактики приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 500$ нм. Чему равна энергетическая светимость звезды, если ее поглощательная способность $\alpha = 0,9$? Звезду считать серым телом. Ответ дать в МВт/м² и округлить до целого числа.

Решение

Энергетическая светимость звезды может быть найдена из закона Стефана – Больцмана. С учетом того, что звезда является серым телом,

$$R_T^c = \alpha \sigma T^4,$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴); T – абсолютная температура звезды; α – поглощательная способность.

Неизвестную температуру звезды определим из закона смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

отсюда

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}}.$$

Постоянная в законе смещения Вина $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К.

Окончательно

$$R_T = \alpha \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4.$$

Подставим числовые данные, в результате получим: $R_T = 57,7 \cdot 10^6$ Вт/м² = 58 МВт/м².

2. Определить количество теплоты, теряемой $S = 50$ см² поверхности расплавленной платины за время $t = 1$ мин, если поглощательная способность платины $\alpha = 0,8$. Температура плавления $t_{\text{пл}}$ платины равна 1770 °С. Ответ дать в кДж и округлить до целого числа.

Решение

Количество теплоты, теряемое платиной, равно энергии, излучаемой ее раскаленной поверхностью:

$$Q = W = \alpha \cdot R_T \cdot S \cdot t, \quad (1)$$

где R_T – энергетическая светимость черного тела; S – поверхность излучения; t – время излучения.

Энергетическую светимость найдем из закона Стефана – Больцмана:

$$R_T = \sigma T^4, \quad (2)$$

σ – постоянная Больцмана, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴). Подставив (2) в (1), найдем количество теплоты, теряемой платиной:

$$Q = \alpha \sigma \cdot T^4 \cdot S \cdot t.$$

Подставив числовые данные, получим $Q = 237$ кДж.

3. Вследствие изменения температуры черного тела максимум спектральной плотности энергетической светимости $(R_{\lambda,T})_{\max}$ сместился с $\lambda_1 = 2,4$ мкм на $\lambda_2 = 0,8$ мкм. Найдите отношения энергетических светимостей R_{T_2} / R_{T_1} и максимальных спектральных плотностей энергетических светимостей $(R_{\lambda,T})_{\max 2} / (R_{\lambda,T})_{\max 1}$. Ответы округлить до целого числа.

Решение

Энергетическая светимость черного тела может быть найдена из закона Стефана – Больцмана:

$$R_T = \sigma T^4, \quad (1)$$

а максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости – из отношения Вина:

$$(R_{\lambda,T})_{\max} = CT^5. \quad (2)$$

Как следует из соотношений (1) и (2), для нахождения отношений (т. е. изменений этих величин вследствие изменения температуры) надо найти температуры, соответствующие указанным значениям длин волн, которые определяются из закона смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{\max 1}}; \quad (3)$$

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_{\max 2}}. \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (1) и (2), найдем искомые отношения:

$$\frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = \frac{\sigma(b/\lambda_{\max 2})^4}{\sigma(b/\lambda_{\max 1})^4} = \left(\frac{\lambda_{\max 1}}{\lambda_{\max 2}}\right)^4; \quad \frac{(R_{\lambda,T})_{\max 2}}{(R_{\lambda,T})_{\max 1}} = \left(\frac{\lambda_{\max 1}}{\lambda_{\max 2}}\right)^5.$$

Подставив числовые данные, получим:

$$R_{T_2} / R_{T_1} = 81; (R_{\lambda,T})_{\max 2} / (R_{\lambda,T})_{\max 1} = 243.$$

4. Определить с помощью формулы Планка энергетическую светимость ΔR_T абсолютно черного тела, приходящуюся на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 10 \text{ \AA}$, соответствующий максимуму спектральной плотности энергетической светимости при температуре тела $T = 3000 \text{ К}$.

1 \AA (ангстрем) = 10^{-10} м. Ответ дать в кВт/м и округлить до десятых.

Решение

Как это указано в стеке «Теория», энергетическая светимость абсолютно черного тела R_T определяется как

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} \cdot d\nu,$$

или как функция длины волны и температуры:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\lambda,T} \cdot d\lambda. \quad (1)$$

Из соотношения (1) для узкого интервала длин волн $\Delta\lambda$ следует:

$$\Delta R_T = (R_{\lambda,T})_{\max} \cdot \Delta\lambda,$$

где $(R_{\lambda,T})_{\max}$ – максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре. По формуле Планка

$$R_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что для определения $R_{\lambda,T}$ по формуле Планка надо, кроме температуры T , знать длину волны λ , соответствующую величине $R_{\lambda,T}$.

Длину волны найдем по закону смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}.$$

Подставим теперь это выражение для λ в формулу Планка (2), в результате получим

$$R_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(bk)} - 1}. \quad (3)$$

Умножив (3) на $\Delta\lambda$, найдем расчетную формулу для R_T :

$$R_T = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \cdot \frac{\Delta\lambda}{e^{hc/(bk)} - 1}. \quad (4)$$

Приступая к вычислению, обратим внимание, что уравнение (3), полученное нами из формулы Планка и закона смещения Вина, выражает пропорциональную зависимость между величинами $R_{\lambda,T}$ и T^5 , т. е. это зависимость, которую получил Вин:

$$(R_{\lambda,T})_{\max} = CT^5.$$

При этом выражение для константы

$$C = \frac{2\pi hc^2}{b^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(bk)} - 1}. \quad (5)$$

В стеке «Теория» значение константы $C = 1,3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³·К⁵), и Вам представляется возможность проверить это значение, подставив все постоянные в соотношение (5). В таком случае расчетная формула (4) упрощается:

$$\Delta R_T = CT^5 \cdot \Delta \lambda.$$

Подставив числовые данные, получим:

$$\Delta R_T = 1,3 \cdot 10^{-5} \cdot 3^5 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-9} = 3159 \text{ Вт/м}^2 = 3,2 \text{ кВт/м}^2.$$

ТЕСТ

Вопросы

20.1. Какое излучение является равновесным?

1. Излучение люминесцентной лампы.
2. Излучение лампы накаливания.
3. Излучение светлячков.

20.2. Какое излучение является тепловым?

1. Излучение люминесцентной лампы.
2. Излучение лампы накаливания.
3. Излучение светлячков.

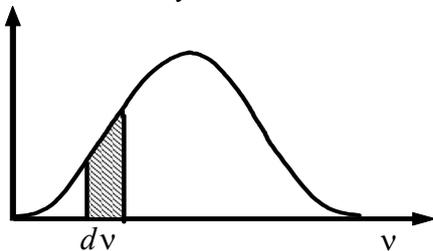


Рис. 20.6

20.3. Зависимость какой величины от ν показана на рис. 20.6?

1. $R_{\nu,T}$.
2. R_T .
3. $dW_{\nu, \nu+dv}$.

20.4. Чему равна площадь заштрихованной полоски (рис. 20.7)?

1. $R_{\nu,T}$.
2. $R_{\nu,T} dv$.
3. $dW_{\nu, \nu+dv}$.

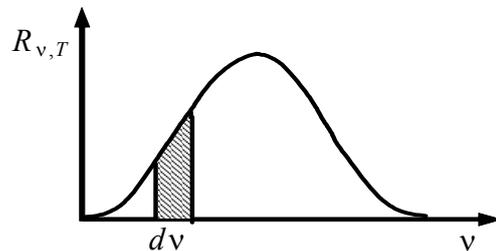


Рис. 20.7

20.5. Какую величину характеризует заштрихованная полоска на рис. 20.7?

1. Спектральную плотность энергетической светимости.
2. Полную лучеиспускательную способность.
3. Энергетическую светимость.
4. Интегральную лучеиспускательную способность.
5. Мощность, излучаемую с единицы площади тела в интервале частот от ν до $\nu + dv$.

20.6. Какую величину характеризует заштрихованная площадь на рис. 20.8?

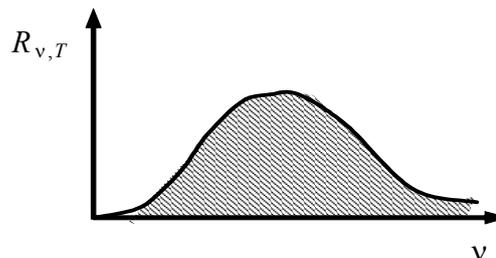


Рис. 20.8

1. *Спектральную плотность энергетической светимости.*

2. *Энергетическую светимость.*

3. *Спектральную лучеиспускательную способность.*

20.7. Какую величину характеризует заштрихованная площадь на рис. 20.8?

1. *Энергетическую светимость.*

2. *Интегральную лучеиспускательную способность.*

3. *Полную лучеиспускательную способность.*

4. *Спектральную лучеиспускательную способность.*

20.8. Какова единица измерения в СИ спектральной плотности энергетической светимости $R_{\nu,T}$?

1. Дж/м². 2. Дж/м³. 3. Вт/м².

20.9. Какова единица измерения в СИ энергетической светимости R_T ?

1. Вт/м². 2. Дж/м². 3. Дж/м³.

20.10. Какова единица измерения в СИ спектральной поглощательной способности?

1. $\alpha_{\nu,T}$ – *величина безразмерная.*

2. $[\alpha_{\nu,T}] = \text{Вт/м}^2$.

3. $[\alpha_{\nu,T}] = \text{Дж/м}^2$.

20.11. Какова единица измерения спектральной плотности энергетической светимости $R_{\lambda,T}$ (как функция длины волны λ)?

1. $R_{\lambda,T}$ – *величина безразмерная.*

2. $[R_{\lambda,T}] = \text{Вт/м}^3$.

3. $[R_{\lambda,T}] = \text{Вт/м}^2$.

4. $[R_{\lambda,T}] = \text{Дж/м}^2$.

20.12. Какое соотношение для поглощательной способности α относится к абсолютно черному телу?

1. $0 < \alpha < 1$. 2. $0 > \alpha > 1$.

3. $\alpha = 1$. 4. $\alpha = -1$.

20.13. Какое соотношение для поглощательной способности α справедливо для серого тела?

1. $0 < \alpha < 1$. 2. $0 > \alpha > 1$.

3. $\alpha = 1$. 4. $\alpha = -1$.

20.14. При повышении температуры максимум кривой зависимости $r_{\nu,T}$ от ν

1) *не смещается;*

2) *смещается в сторону больших частот;*

3) *смещается в сторону малых частот.*

20.15. Чему равна средняя энергия атомного осциллятора согласно классическим представлениям?

1. kT . 2. $h\nu$. 3. $\frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$. 4. $nh\nu$.

20.16. Чему равна средняя энергия атомного осциллятора согласно квантовым представлениям?

1. kT . 2. $h\nu$. 3. $\frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$. 4. $nh\nu$.

20.17. Какое соотношение для $R_{\nu,T}$ хорошо согласуется с экспериментальными данными в области малых частот?

1. $\frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}$. 2. CT^5 . 3. $\frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$. 4. σT^4 .

20.18. Какое соотношение для $R_{\nu,T}$ хорошо согласуется с экспериментальными данными в области больших частот?

1. $\frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}$. 2. CT^5 . 3. $\frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$. 4. σT^4 .

20.19. Какое соотношение для $R_{\nu,T}$ хорошо согласуется с экспериментальными данными во всем диапазоне частот (длин волн)?

1. $\frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}$. 2. CT^5 . 3. $\frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$. 4. $\frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$.

20.20. Какое соотношение известно как «интерполяционная формула Вина»?

1. $\frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}$. 2. CT^5 . 3. $\frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$. 4. $\frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$.

20.21. Какое соотношение известно как «формула Рэля – Джинса»?

1. $\frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}$. 2. CT^5 . 3. $\frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$. 4. $\frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$.

20.22. Какова размерность (в СИ) постоянной C в зависимости максимальной спектральной плотности энергетической светимости от температуры (по Вину)?

1. $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^5}$. 2. $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \text{К}^5}$. 3. $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \text{К}^5}$. 4. $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{К}^5}$.

20.23. Какое соотношение позволяет определить длину волны λ_{\max} , соответствующую максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости?

1. b/T . 2. CT^5 . 3. σT^4 .

20.24. Какое соотношение позволяет определить максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости при данной температуре?

1. b/T . 2. CT^5 . 3. σT^4 .

20.25. В интерполяционной формуле Вина максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости черного тела является функцией ...

- 1) *только температуры;*
2) *только частоты;*
3) *длины волны и температуры;*
4) *частоты и температуры.*

20.26. При возрастании температуры максимум кривой зависимости $R_{\lambda,T}$ от λ ...

- 1) *не смещается;*
2) *смещается в область коротких длин волн;*
3) *смещается в область длинных волн.*

20.27. Чему равна энергия кванта излучения по гипотезе Планка?

1. kT . 2. $h\nu$. 3. $n h\nu$.

20.28. Какое соотношение позволяет определить энергетическую светимость черного тела при данной температуре?

1. σT^4 . 2. $\alpha\sigma T^4$. 3. CT^5 . 4. b/T .

20.29. Какое соотношение позволяет определить энергетическую светимость серого тела при данной температуре?

1. σT^4 . 2. $\alpha\sigma T^4$. 3. CT^5 . 4. b/T .

20.30. Какое соотношение известно как «закон Кирхгофа»?

1. $\frac{r_{\nu,T}}{\lambda_{\nu,T}} = R_{\nu,T}$. 2. $R_{\nu} = \sigma T^4$. 3. $(R_{\lambda,T})_{\max} = CT^5$. 4. $\lambda_{\max} = b/T$.

20.31. Какое соотношение известно как «закон Стефана – Больцмана»?

1. $\frac{r_{\nu,T}}{\lambda_{\nu,T}} = R_{\nu,T}$; 2. $R_{\nu} = \sigma T^4$. 3. $(R_{\lambda,T})_{\max} = CT^5$. 4. $\lambda_{\max} = b/T$.

20.32. Какое соотношение известно как «закон смещения Вина»?

1. $\frac{r_{\nu,T}}{\lambda_{\nu,T}} = R_{\nu,T}$. 2. $R_{\nu} = \sigma T^4$. 3. $(R_{\lambda,T})_{\max} = CT^5$. 4. $\lambda_{\max} = b/T$.

20.33. Три тела нагреты до одинаковой температуры. Какое из них интенсивнее излучает?

1. *Абсолютно черное.* 2. *Серое.*
3. *Абсолютно белое (коэффициент поглощения такого тела равен нулю).*

20.34. Какое выражение для универсальной функции Кирхгофа согласуется с экспериментом во всем диапазоне частот?

1. *Формула Планка.*
2. *Закон Стефана – Больцмана.*
3. *формула Рэлея – Джинса.*
4. *Интерполяционная формула Вина.*

20.35. Найдите верные заключения:

1. *Излучение, которое тело сильнее поглощает, сильнее и испускается.*
2. *Излучение абсолютно черного тела во всех частях спектра интенсивнее, чем для нечерного, нагретого до той же температуры.*
3. *Излучение серого тела во всех частях спектра интенсивнее, чем для абсолютно черного, нагретого до той же температуры.*

20.36. В эксперименте была определена мощность теплового излучения в единичном интервале длин волн. Какая характеристика теплового излучения тела была найдена?

1. *Спектральная лучеиспускательная способность.*
2. *Полная, или интегральная, лучеиспускательная способность.*
3. *Поглощательная способность.*

20.37. В эксперименте была определена мощность электромагнитного излучения тела во всем диапазоне частот. Какая характеристика теплового излучения тела была найдена?

1. *Спектральная плотность энергетической светимости.*
2. *Энергетическая светимость.*
3. *Спектральная поглощательная способность.*

20.38. Какая характеристика теплового излучения является безразмерной величиной?

1. *Спектральная плотность энергетической светимости.*
2. *Энергетическая светимость.*
3. *Поглощательная способность.*

20.39. На поверхность с поглощательной способностью $\alpha = 0,5$, находящуюся в равновесии с излучением, падает поток лучистой энергии $\Phi_{\text{пад}}$. Какой поток Φ распространяется от поверхности по всем направлениям?

1. $\Phi = \Phi_{\text{пад}}$
2. $\Phi = 0$
3. $\Phi = 0,5 \cdot \Phi_{\text{пад}}$

20.40. Площадь, ограниченная графиком спектральной плотности энергетической светимости $R_{\lambda, T}$ черного тела при переходе от температуры T_1 к T_2 , увеличилась в два раза. Как изменилась энергетическая светимость тела?

1. *Увеличилась в два раза.*
2. *Уменьшилась в два раза.*
3. *Не изменилась.*

Задачи

20.1. Максимум спектральной плотности энергетической светимости одной из ярких звезд нашей Галактики приходится на длину волны $\lambda_{\max} = 500$ нм. Чему равна энергетическая светимость звезды, если ее поглощательная способность $\alpha = 0,9$? Звезду считать серым телом. Ответ дать в $\text{МВт}/\text{м}^2$ и округлить до целого числа.

20.2. Определить количество теплоты, теряемой $S = 50$ см^2 поверхности расплавленной платины за время $t = 1$ мин, если поглощательная способность платины $\alpha = 0,8$. Температура плавления $t_{\text{пл}}$ платины равна 1770 $^{\circ}\text{C}$. Ответ дать в кДж и округлить до целого числа.

20.3. Вследствие изменения температуры черного тела максимум спектральной плотности энергетической светимости $(R_{\lambda,T})_{\max}$ сместился с $\lambda_1 = 2,4$ $\mu\text{м}$ на $\lambda_2 = 0,8$ $\mu\text{м}$. Найдите отношения энергетических светимостей R_{T_2} / R_{T_1} и максимальных спектральных плотностей энергетических светимостей $(R_{\lambda,T})_{\max 2} / (R_{\lambda,T})_{\max 1}$. Ответы округлить до целого числа.

20.4. Определить с помощью формулы Планка энергетическую светимость ΔR_T абсолютно черного тела, приходящуюся на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 10$ \AA , соответствующий максимуму спектральной плотности энергетической светимости при температуре тела $T = 3000$ K . 1 \AA (ангстрем) = 10^{-10} м. Ответ дать в $\text{кВт}/\text{м}$ и округлить до десятых.

20.5. Температура внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии площадью 30 см^2 равна $1,3$ кК . Принимая, что отверстие печи излучает как черное тело, определить, какая часть мощности рассеивается стенками, если потребляемая печью мощность составляет $1,5$ кВт . Ответ округлить до тысячных долей единицы.

20.6. Энергетическая светимость черного тела $R_T = 10$ $\text{кВт}/\text{м}^2$. Определить длину волны, соответствующую максимуму спектральной плотности энергетической светимости этого тела. Ответ дать в $\mu\text{м}$ (1 $\mu\text{м} = 10^{-6}$ м) и округлить до сотых.

20.7. Определить, как и во сколько раз изменится мощность излучения черного тела, если длина волны, соответствующая максимуму его спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_1 = 720$ нм до $\lambda_2 = 400$ нм. Найти отношение R_{T_2} / R_{T_1} . Ответ округлить до десятых.

20.8. Черное тело находится при температуре $T_1 = 3$ кК . При остывании тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 8$ $\mu\text{м}$. Определить температуру T_2 , до которой тело охладилось. Ответ округлить до целого числа.

20.9. Площадь, ограниченная графиком спектральной плотности энергетической светимости $R_{\lambda,T}$ черного тела, при переходе от термодинамической температуры T_1 к температуре T_2 увеличилась в пять раз. Определить, как изменится при этом длина волны λ_{\max} , соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости черного тела. Найти отношение $\lambda_{\max 2}/\lambda_{\max 1}$.

20.10. Определить, какая длина волны соответствует максимальной спектральной плотности энергетической светимости $(R_{\lambda,T})_{\max}$, равной $1,3 \cdot 10^{11}$ (Вт/м²). Ответ дать в мкм и округлить до сотых.

20.11. Какую энергетическую светимость R_T имеет затвердевающий свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры $k = 0,6$. Температура затвердевания свинца 327 °С. Ответ дать в кВт/м² и округлить до десятых.

20.12. Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 34$ кВт. Найти температуру T этого тела, если известно, что его поверхность $S = 0,6$ м². Результат округлить до целого числа.

20.13. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке $T = 2450$ К. Отношение энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре $\alpha = 0,3$. Найти площадь S излучающей поверхности спирали. Ответ дать в см² и округлить до десятых.

20.14. Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 10$ кВт. Найти площадь S излучающей поверхности тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 700$ нм. Ответ дать в см² и округлить до целого числа.

20.15. При нагревании абсолютно черного тела длина волны λ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась с 690 до 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела? Ответ округлить до десятых.

20.16. На какую длину волны λ приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, имеющего температуру, равную температуре $t = 37$ °С человеческого тела, т. е. $T = 310$ К? Ответ дать в мкм и округлить до сотых.

20.17. Абсолютно черное тело имеет температуру $T_1 = 2900$ К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

20.18. Зачерненный шарик остывает от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 293$ К. На сколько изменилась длина волны λ , соответствующая максимуму спектральной плотности его энергетической светимости? Ответ дать в мкм и округлить до сотых.

20.19. Считая никель черным телом, определить мощность, необходимую для поддержания температуры расплавленного никеля $1453\text{ }^{\circ}\text{C}$ неизменной, если площадь его поверхности равна $0,5\text{ см}^2$. Потерями энергии пренебречь. Ответ округлить до десятых.

20.20. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка плавильной печи, $\Phi = 34\text{ Вт}$. Определить температуру печи, если площадь отверстия $S = 6\text{ см}^2$.

20.21. На сколько уменьшится масса Солнца за год вследствие излучения? Температура поверхности Солнца $T = 5800\text{ К}$. Излучение Солнца считать постоянным. Принять радиус Солнца $r = 7 \cdot 10^8\text{ м}$, год – 365 дней.

20.22. Принимая коэффициент поглощения α угля при температуре $T = 600\text{ К}$ равным $0,8$, определить: 1) энергетическую светимость r_T угля; 2) энергию W , излучаемую с поверхности угля с площадью $S = 5\text{ см}^2$ за время $t = 10\text{ мин}$. Ответ дать в кВт/м^2 и кВт и округлить до сотых.

20.23. С поверхности сажи площадью $S = 2\text{ см}^2$ при температуре $T = 400\text{ К}$ за время $t = 5\text{ мин}$ излучается энергия $W = 83\text{ Дж}$. Определить коэффициент поглощения α сажи.

20.24. Муфельная печь потребляет мощность $P = 1\text{ кВт}$. Температура T внутренней поверхности при открытом отверстии площадью $S = 25\text{ см}^2$ равна $1,2\text{ кК}$. Считая, что отверстие печи излучает как черное тело, определить, какая часть ω мощности рассеивается стенками.

20.25. Можно условно принять, что Земля излучает как серое тело, находящееся при температуре $T = 280\text{ К}$. Определить коэффициент поглощения α Земли, если энергетическая светимость r_T поверхности равна $325\text{ кДж/(м}^2 \cdot \text{ч)}$.

20.26. Мощность N излучения шара радиусом $R = 10\text{ см}$ при некоторой постоянной температуре T равна 1 кВт . Найти эту температуру, считая шар серым телом с коэффициентом поглощения $\alpha_T = 0,25$.

20.27. Эталон единицы силы света – кандела – представляет собой полный (излучающий волны всех длин) излучатель, поверхность которого площадью $S = 0,5305\text{ мм}^2$ имеет температуру t затвердевания платины, равную $1063\text{ }^{\circ}\text{C}$. Определить мощность N излучателя. Ответ дать в мВт ($1\text{ мВт} = 10^{-3}\text{ Вт}$).

20.28. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(R_{\lambda,T})_{\text{max}}$ черного тела равна $4,16 \cdot 10^{11}\text{ (Вт/м}^2)$. На какую длину волны λ_{max} она приходится?

ЗАНЯТИЕ 21

ФОТОЭФФЕКТ. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

Теория

В этом занятии мы переходим к изучению эффектов, в которых наиболее полно проявляются корпускулярные свойства электромагнитного излучения и которые не объясняются волновой теорией. В предыдущих занятиях было рассказано о победе волновой теории Френеля – Юнга над корпускулярной теорией Ньютона.

Из курса физики средней школы Вам известно о двойственной природе электромагнитного излучения, но для установления данного научного факта был проделан долгий путь исследований различных явлений, которые свидетельствовали то в пользу волновой, то в пользу корпускулярной теории. После детального знакомства с названными эффектами мы вернемся к природе света.

Фотоэффект

Различают три вида фотоэффекта:

- 1) внешний;
- 2) внутренний;
- 3) вентильный.

Внешний фотоэффект заключается в испускании электронов вещества под действием электромагнитного излучения.

Внутренний фотоэффект – это вызванные электромагнитным излучением переходы внутри полупроводника или диэлектрика из связанных состояний в свободные без вылета наружу. При этом концентрация носителей тока внутри вещества увеличивается, то есть при освещении полупроводника или диэлектрика повышается их электропроводность, что приводит к возникновению **фотопроводимости** (фотосопротивления) или к возникновению ЭДС.

Вентильный фотоэффект – это разновидность внутреннего фотоэффекта, приводит к возникновению фотоЭДС при освещении контакта двух различных полупроводников или полупроводника и металла. Внешнее электрическое поле при этом отсутствует. Это прямой путь для преобразования солнечной энергии в электрическую (солнечные батареи на космических станциях).

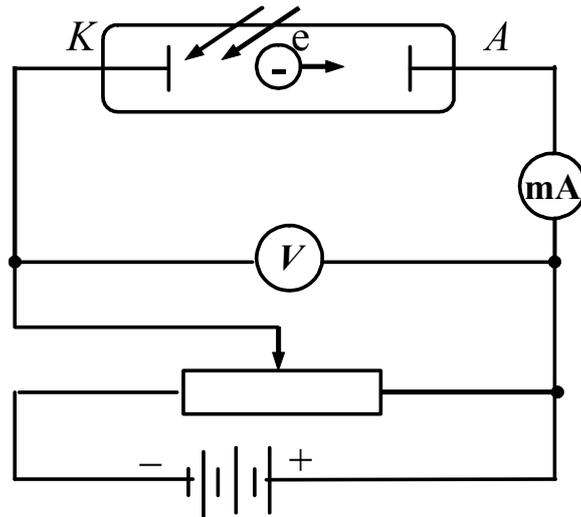


Рис. 21.1

Установка для исследования внешнего фотоэффекта приведена на рис. 21.1. Она позволила определить зависимость фототока I , вызванного потоком вырванных из катода K электронов, от напряжения U между электродами вакуумной трубки. Зависимость $I(U)$ называется вольтамперной характеристикой фотоэффекта.

На рис. 21.2 показана вольтамперная характеристика, соответствующая двум различным освещенностям фотокатода $E_{\text{к}}$, а частота излучения в обоих случаях одинакова. По мере увеличения напряжения U между электродами фототок возрастает. Наконец, при некотором значении U все электроны, испускаемые катодом, достигают анода. Ток I перестает увеличиваться. Максимальное значение тока называется током насыщения $I_{\text{нас}}$ (рис. 21.2). Из вольтамперной характеристики следует, что при $U = 0$ фототок не исчезает. Это означает, что электроны, выбитые из катода, обладают начальной скоростью и некоторой кинетической энергией, то есть могут достигнуть анода без внешнего поля.

Для того чтобы фототок стал равным нулю, необходимо приложить задерживающее напряжение U_3 . Поскольку при $U = U_3$ ни один электрон не достигает анода ($I = 0$), то

$$\frac{m v_{\text{max}}^2}{2} = e U_3,$$

здесь v_{max} – максимальная скорость фотоэлектрона.

Таким образом, если измерить задерживающее напряжение, можно определить максимальное значение скорости и кинетической энергии фотоэлектрона.

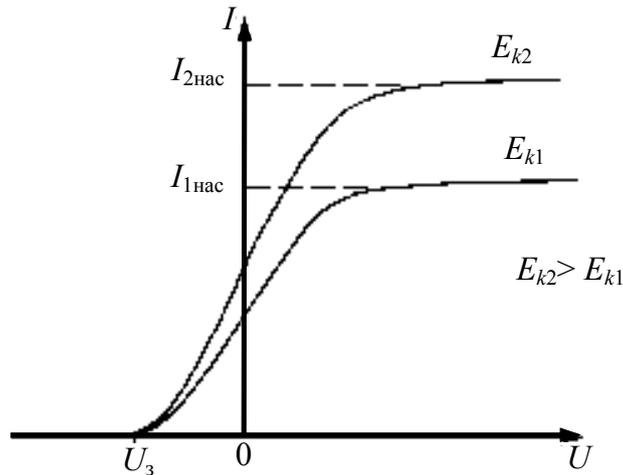


Рис. 21.2

Законы фотоэффекта

Опытным путем были установлены следующие законы внешнего фотоэффекта:

1. Число фотоэлектронов n , вырываемых из катода за единицу времени при данной частоте излучения, пропорционально интенсивности света. Фототок насыщения $I_{\text{нас}}$ пропорционален энергетической освещенности E катода (закон С.Г. Столетова).

2. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов определяется частотой света и не зависит от его интенсивности.

3. Для каждого вещества существует красная граница фотоэффекта, то есть минимальная частота ν_0 света, при которой еще возможен внешний фотоэффект. Частота ν_0 зависит от химической природы вещества и состояния его поверхности.

Опыты показывают, что фотоэффект практически безынерционен. С объяснения законов фотоэффекта начались трудности волновой теории света. Согласно волновой теории, электроны вещества под действием падающей электромагнитной волны совершают вынужденные колебания. Амплитуда этих колебаний пропорциональна амплитуде волны. При достаточно высокой интенсивности колебаний связь электрона с веществом нарушается, и электроны будут вылетать наружу. В таком случае непонятно, почему максимальная скорость фотоэлектронов зависит от частоты света, а не от амплитуды колебаний вектора напряженности \vec{E} электрического поля волны.

Что означает понятие «начальная скорость фотоэлектрона»? Если электрон освобождается не у самой поверхности, а на некоторой глубине, то часть энергии электрона W' может быть потеряна, например,

вследствие столкновений. Скорость фотоэлектрона и его кинетическая энергия будет максимальной, если $W' = 0$.

Согласно волновой теории, не должно существовать красной границы фотоэффекта. Используя волновую теорию, невозможно объяснить безынерционность фотоэффекта.

Квантовая теория внешнего фотоэффекта

В 1905 году А. Эйнштейн выдвинул квантовую теорию внешнего фотоэффекта, основные положения которой можно изложить кратко в виде нескольких тезисов:

1. Свет частотой ν не только испускается (как это предполагал М. Планк, см. занятие «Тепловое излучение»), но и распространяется в пространстве и поглощается веществом отдельными порциями – квантами. Энергия одного кванта равна

$$\varepsilon_0 = h\nu, \quad \nu = c/\lambda$$

Частицы, несущие квант электромагнитного излучения, были названы **фотонами**.

2. Каждый квант поглощается только одним электроном. Электроны в металле движутся независимо друг от друга (отсутствуют силы взаимодействия), поэтому передача фотоном энергии одному из электронов не изменяет энергии остальных электронов. Теория, основанная на этом предположении, называется **одноэлектронной**, а взаимодействие – **двухчастичным: фотон–электрон**.

3. Энергия падающего фотона $h\nu$ расходуется на совершение электроном работы выхода A из металла и сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии $m\nu_{\max}^2/2$, т. е.

$$h\nu = \frac{m\nu_{\max}^2}{2} + A. \quad (1)$$

Кинетическая энергия фотоэлектрона может быть определена по формуле классической механики $m\nu^2/2$, если энергия фотона меньше 5 КэВ ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$). Если энергия фотона больше, то для вычисления кинетической энергии E электрона следует воспользоваться соотношением

$$E = (m - m_0)c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right); \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Работа выхода электронов обычно не превышает нескольких электронвольт. Поэтому если энергия фотона $h\nu > 1 \text{ КэВ}$, то работой выхода

электрона A можно пренебречь (обычно в условии задачи на это указывается). Энергия фотонов видимой части спектра может быть вычислена по формуле классической механики.

Уравнение (1) по существу является законом сохранения энергии при фотоэффекте и называется **уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта**. Квантовая теория фотоэффекта позволяет объяснить его законы.

1. Общее число n фотоэлектронов, вылетающих из катода в единицу времени, пропорционально числу фотонов n' , падающих за то же время на поверхность вещества, то есть интенсивности электромагнитного излучения на катоде (первый закон фотоэффекта).

2. Из уравнения (1) следует, что максимальная скорость фотоэлектрона зависит от частоты света и работы выхода A (второй закон фотоэффекта):

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = h\nu - A.$$

3. Внешний фотоэффект возможен только в том случае, когда энергия фотона $h\nu$ больше или в крайнем случае равна A .

Следовательно, соответствующая красной границе фотоэффекта частота ν_0 равна

$$\nu_0 = A/h \text{ или } c/\lambda_0 = A/h.$$

Она зависит только от работы выхода A , т. е. от химической природы металла и состояния его поверхности (третий закон фотоэффекта).

Безынерционность фотоэффекта объясняется тем, что передача энергии при столкновении фотона с электроном происходит почти мгновенно. Если интенсивность света очень велика, т. е. используется лазерное излучение, то возможен многофотонный (нелинейный) фотоэффект, при котором электрон, испускаемый металлом, может поглотить не один, а несколько фотонов (N фотонов). Уравнение Эйнштейна для многофотонного фотоэффекта записывается как

$$Nh\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}, \quad (N = 2 \dots 7).$$

Учитывая, что $\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_3$, а $A = h\nu_0$ уравнение Эйнштейна можно записать в виде

$$h\nu = eU_3 + h\nu_0.$$

Применение фотоэффекта

Невозможно указать отрасль производства, где бы не использовались фотоэлементы – приемники излучения, работающие на основе фотоэффекта и преобразующие энергию излучения в электрическую энергию.

Явление фотоэффекта используется:

- 1) для регистрации излучения и быстропеременных процессов в вакуумных, газонаполненных фотоэлементах и фотоумножителях;
- 2) для изготовления солнечных батарей с вентильными фотоэлементами;
- 3) для контроля, управления и автоматизации различных процессов, в военной технике для сигнализации и локации невидимым излучением, в технике звукового кино, в различных системах связи.

Эффект Комптона

Фотоэффект и эффект Комптона есть результат двухчастичного взаимодействия фотон – электрон, и объясняются они только квантовой теорией, поэтому сравнительный анализ этих эффектов углубляет знания и развивает логическое мышление.

Американский физик А. Комптон наблюдал рассеяние монохроматического рентгеновского излучения веществами с легкими атомами: парафин, бор, графит. Рентгеновское излучение представляет собой электромагнитные волны с длиной волны меньшей, чем длина волны ультрафиолетового излучения. Схема опыта изображена на рис. 21.3.

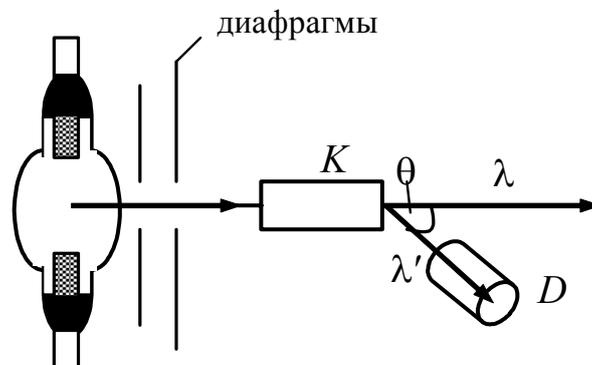


Рис. 21.3

Узкий диафрагмированный пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на легкое рассеивающее вещество К. После прохождения вещества кроме первоначального излучения с длиной волны λ с помощью рентгеновского спектрографа D обнаружили излучение с длиной волны λ' . Последнее отклонилось на угол θ от первоначального направления (рассеянное рентгеновское излучение). При этом λ' оказалось больше λ .

Опыты показали, что разность длин волн равна

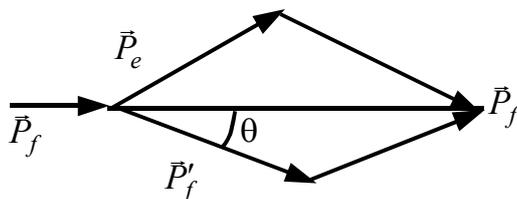
$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_k \cdot \sin^2(\theta/2),$$

где λ_k – комптоновская длина волны. Она равна

$$\lambda_k = \frac{h}{m_0 c}. \quad (2)$$

При рассеянии фотона на электроне комптоновская длина волны, рассчитанная по формуле (2), будет равна $\lambda_k = 2,426$ пм.

Согласно классической волновой теории, рассеяние электромагнитного излучения связано с возникновением в веществе под действием падающего излучения вторичных волн той же частоты (длины волны). Квантовая теория рассеяния излучения объясняет эффект Комптона, так же как и фотоэффект, взаимодействием фотонов падающего на вещество излучения с электронами этого вещества. При падении фотона на покоящийся почти свободный (слабо связанный с атомом) электрон легкого вещества фотон передает электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения. Обозначим энергию фотона до столкновения $h\nu$, импульс P_f после столкновения $h\nu'$ и P_f' . Энергия электрона до столкновения $m_0 c^2$, импульс равен 0. Энергия электрона после столкновения $E = \sqrt{P_e^2 c^2 + m_0 c^4}$, а импульс равен P_e .



При упругом столкновении выполняются законы сохранения импульса и энергии:

$$h\nu + m_0 c^2 = E + h\nu'; \quad \vec{P}_f = \vec{P}_e + \vec{P}_f'.$$

Из этих уравнений после преобразований можно получить выражение для смещения длины волны:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_k \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \lambda_k (1 - \cos\theta).$$

Таким образом, фотон, упруго столкнувшись со свободным электроном, передаст ему часть своей энергии и импульса и изменит направление движения (рассеется). Уменьшение энергии фотона означает увеличение длины волны рассеянного излучения ($\lambda' > \lambda$).

В теории занятий по электричеству говорилось, что в металлах электроны свободно перемещаются. Здесь утверждается, что свободными считаются электроны легких веществ, т. к. они слабо связаны с атомом. Электрон в металле свободно перемещается внутри решетки ме-

талла, но чтобы выйти на поверхность, электрон, поглотивший фотон, часть энергии затрачивает на совершение работы выхода, поэтому мы не можем его назвать свободным.

*Единство корпускулярных и волновых свойств
электромагнитного излучения*

Тепловое излучение, фотоэффект, эффект Комптона служат доказательством того, что свет ведет себя как поток фотонов (частиц), т. е. обнаруживает корпускулярные свойства. Такие явления, как интерференция, дифракция, поляризация, убедительно подтверждают волновую природу света. Так что же такое свет? «Неужели мы должны считать свет состоящим из корпускул в понедельник, вторник и среду, пока мы проводим опыты с фотоэффектом и эффектом Комптона, и представлять себе его волнами в четверг, пятницу и субботу, когда мы работаем с явлениями дифракции и интерференции?» – вопрошал себя и своих коллег У. Брэгг.

Свет представляет собой диалектическое единство корпускулярных и волновых свойств (корпускулярно-волновой дуализм) света, а следовательно, и электромагнитного излучения. Энергия и импульс фотона связаны с его частотой и длиной волны:

$$E_f = h\nu; P_f = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

В то же время свет, имея двойственную природу, обнаруживает определенные закономерности в проявлении этих свойств. С уменьшением длины волны все более отчетливо проявляются квантовые свойства. Наоборот, у длинноволнового излучения квантовые свойства проявляются в малой степени, и основную роль играют его волновые свойства. При этом корпускулярные свойства обусловлены тем, что энергия, импульс и масса излучения локализованы в дискретных частицах – фотонах, а волновые свойства – статистическим распределением фотонов в пространстве. Имеется в виду вероятность нахождения фотона в различных точках пространства. Так как речь идет о «вероятности попадания фотона в данную точку пространства», то ясно, что фотоны – это не корпускулы Ньютона.

Подсказка

1. Красная граница фотоэффекта для цезия $\lambda_0 = 6530 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$). Определить скорость фотоэлектронов при облучении цезия фиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 4000 \text{ \AA}$. Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$, масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

Решение

Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = \frac{m\mathbf{v}_{\max}^2}{2} + A$$

(поскольку излучение в видимой части спектра, то $m\mathbf{v}_{\max}^2/2$). Чтобы найти скорость фотоэлектронов \mathbf{v}_{\max} (в дальнейшем будем обозначать просто \mathbf{v}), надо выразить через известные в условии задачи данные $h\nu$ и A .

Запишите выражение для $h\nu$ и найдите среди нижеприведенных правильный ответ:

1. $h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. 2. $h\nu = h\frac{c}{\lambda_0}$. 3. $h\nu = h\frac{\lambda_0}{c}$. 4. $h\nu = h\frac{\lambda}{c}$.

Если ответ правильный, то продолжим решение задачи. Если нет, то вернемся к ответам и снова повторим операцию, пока правильный ответ не будет найден.

Теперь найдем выражение для работы выхода A через указанные в условии задачи данные. Запишите выражение для A и найдите среди приведенных ответов правильный:

1. $A = \frac{hc}{\lambda_0}$. 2. $A = \frac{hc}{\lambda}$. 3. $A = \frac{h\lambda}{c}$. 4. $A = \frac{h\lambda_0}{c}$.

Если Вы получили правильный ответ, то запишите теперь полностью выражение для уравнения Эйнштейна и сравните с тем, что на экране:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{m_e\mathbf{v}^2}{2} + \frac{hc}{\lambda_0}$$

Проведите необходимые преобразования и выразите скорость \mathbf{v} фотоэлектрона. Для этого член уравнения hc/λ_0 перенесите в левую часть уравнения, приведите к общему знаменателю левую часть уравнения. Выразите \mathbf{v}^2 , затем \mathbf{v} . Найдите среди приведенных ниже ответов правильное выражение для \mathbf{v} :

1. $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{2hc(\lambda_0 - \lambda)}{m_0\lambda\lambda_0}}$. 2. $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{m_0\lambda\lambda_0}{2hc(\lambda_0 - \lambda)}}$.
3. $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{hc(\lambda_0 - \lambda)}{m_0\lambda\lambda_0}}$. 4. $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{m_0(\lambda_0 - \lambda)}{hc\lambda\lambda_0}}$.

Если ответ правильный, то подставьте числовые данные в полученное выражение и найдите числовое значение.

$$\mathbf{v} = 6,5 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Если ответ неправильный, то постарайтесь найти ошибку и продолжите операцию по выведению формулы для \mathbf{v} и сравните ее с приведенными выражениями.

2. На поверхность металла падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 3100 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов не менее 1,7 В. Определить работу выхода A . Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. Ответ дать в электронвольтах.

Решение

Запишем уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$h\nu = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + A. \quad (1)$$

Из предыдущей задачи Вы уже знаете, как выразить энергию фотона через длину волны. Следовательно, энергия фотона Вам известна. Чтобы найти работу выхода электронов из металла, необходимо выразить через известные в условии задачи величины энергию фотоэлектрона. Вспомните, как связана энергия фотоэлектрона с задерживающим потенциалом, запишите формулу этой связи и найдите среди указанных ответов правильный вариант (e – заряд электрона):

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = U_3. & 2. \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = eU_3. \\ 3. \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{U_3}{e}. & 4. \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{U_3}{2}. \end{array}$$

Если Вы правильно выбрали ответ, то замените выражение $\frac{m\mathbf{v}^2}{2}$ в уравнении (1) и выразите через известные из условия задачи величины работу выхода A . Если нет, то найдите ошибку и продолжите поиск.

Среди приведенных ниже выражений найдите верное для работы выхода:

$$1. A = h\frac{c}{\lambda} - eU_3. \quad 2. A = h\frac{c}{\lambda} + eU_3. \quad 3. A = eU_3 - h\frac{c}{\lambda}.$$

Если ответ правильный, то подставьте числовые значения и введите ответ. Если нет, то найдите ошибку в полученном выражении и снова найдите правильный ответ: $A = 2,3 \text{ эВ}$.

3. В результате эффекта Комптона фотон при соударении со свободным покоящимся электроном был рассеян на угол $\theta = 60^\circ$. Энергия фотона до рассеяния равна $E_f = 0,75 \text{ МэВ}$. Найти энергию рассеянного фотона E'_f . $\lambda_k = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ м}$, $1 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

Решение

Воспользуемся формулой Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Из этого соотношения мы можем найти длину волны λ' фотона после рассеяния: выразим λ' из этого соотношения, заменив $\frac{h}{m_e c} = \lambda_k$.

Среди нижеприведенных найдите правильное для λ' :

1. $\lambda' = \lambda_k(1 - \cos \theta) + \lambda$.
2. $\lambda' = \lambda_k(1 - \cos \theta) - \lambda$.
3. $\lambda' = \lambda - \lambda_k(1 - \cos \theta)$.

Если нашли правильный ответ, то выразите λ через известную в условии задачи энергию фотона E_f и запишите окончательное выражение для λ' .

Найдите правильное выражение:

1. $\lambda' = \frac{hc}{E_f} + \lambda_k(1 - \cos \theta)$.
2. $\lambda' = \frac{E_f}{hc} - \lambda_k(1 - \cos \theta)$.
3. $\lambda' = hc \cdot E_f - \lambda_k(1 - \cos \theta)$.

Найдем теперь E'_f . Среди нижеприведенных найдите правильное выражение:

1. $E'_f = \frac{hc}{\lambda'}$;
2. $E'_f = \frac{hc}{\lambda}$;
3. $E'_f = \frac{\lambda}{hc}$;
4. $E'_f = \frac{\lambda'}{hc}$.

Если ответ правильный, то продолжим решение. Запишем теперь E'_f через полученное для λ' выражение:

$$E'_f = \frac{\lambda'}{hc} = \frac{hc}{hc / E_f + \lambda_k(1 - \cos \theta)}.$$

Приведем к общему знаменателю и произведем преобразования. Среди нижеприведенных найдите правильное выражение для E'_f .

1. $E'_f = \frac{hc \cdot E_f}{hc + E_f(1 - \cos \theta) \cdot \lambda_k}$.
2. $E'_f = \frac{hc - E_f(1 - \cos \theta) \cdot \lambda_k}{hc \cdot E_f}$.
3. $E'_f = \frac{E_f(1 - \cos \theta) \cdot \lambda_k}{hc}$.

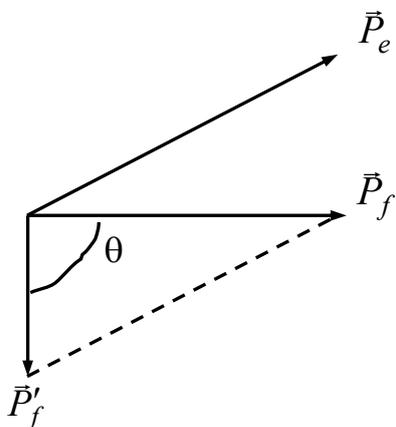
Если ответ правильный, то можно подставить числовые данные. $E'_f = 0,692 \cdot 10^{-13}$ Дж (или 0,43 МэВ).

4. Гамма-квант с энергией E_f 1 МэВ рассеивается под углом $\theta = 90^\circ$ на свободном покоящемся протоне. Определить: 1) какую кинетиче-

скую энергию E_k сообщает гамма-квант протону (ответ дать в кэВ); 2) с какой скоростью v_p будет двигаться протон после соударения.

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}; m_p c^2 = 938,28 \text{ МэВ}, 1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Решение



1. Кинетическую энергию E_k протона найдем из закона сохранения энергии. Обозначим энергию рассеянного гамма-кванта через E'_f . Запишите закон сохранения энергии для двухчастичного взаимодействия протона и гамма-кванта. Учтем, что кинетическая энергия протона до взаимодействия равна нулю.

Среди указанных ответов найдите правильный:

1. $E_k = 0$.
2. $E_k = E_f - E'_f$.
3. $E_k = E_f + E'_f$.
4. $E_k = E'_f - E_f$.

Если получили неправильный ответ, то найдите ошибку и получите правильный ответ.

$$E_k = E'_f - E_f. \quad (1)$$

Первоначальная энергия гамма-кванта нам известна, а энергию гамма-кванта E'_f после рассеяния можно найти из соотношения

$$E'_f = \frac{hc}{\lambda'}.$$

Неизвестную нам λ' найдем из выражения для эффекта Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_p c} (1 - \cos \theta),$$

здесь m_p – масса протона.

Поскольку по условию $\theta = 90^\circ$, то $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_p c}$, отсюда

$$\lambda' = \frac{h}{m_p c} + \lambda. \quad (2)$$

Как найти λ ? Среди указанных ниже выражений найдите правильное:

1. $\lambda = \frac{hc}{E_f}$.
2. $\lambda = \frac{E_f}{hc}$.
3. $\lambda = \frac{hc}{E'_f}$.
4. $\lambda = \frac{E'_f}{hc}$.

Если ответ правильный, то запишите его в выражение (2), если нет, то найдите ошибку и повторите поиск. Запишите теперь выражение для E'_f , приведите к общему знаменателю и после сокращения среди приведенных ниже выражений найдите правильное:

$$1. E'_f = \frac{E_f \cdot m_p c^2}{E_f + m_p c^2}. \quad 2. E'_f = \frac{E_f + m_p c^2}{E_f \cdot m_p c^2}. \quad 3. E'_f = \frac{hc}{E_f + m_p c^2}.$$

Если ответ правильный, то запишем теперь выражение для E_k :

$$E_k = E_f - \frac{E_f \cdot m_p c^2}{E_f + m_p c^2}.$$

Приведем к общему знаменателю и после сокращения получим расчетную формулу для E_k . Найдите среди нижеприведенных выражений правильное:

$$1. E_k = E_f^2 / (E_f + m_p c^2). \quad 2. E_k = \frac{E_f + m_p c^2}{E_f^2}. \quad 3. E_k = E_f / m_p c^2.$$

Если ответ правильный, то подставим числовые данные:

$$E_k = 1,07 \text{ кэВ}.$$

2. Найдем скорость протона. Поскольку E_k протона меньше 5 кэВ (см. примечание в «Теории»), то можно воспользоваться нерелятивистской формулой для кинетической энергии протона:

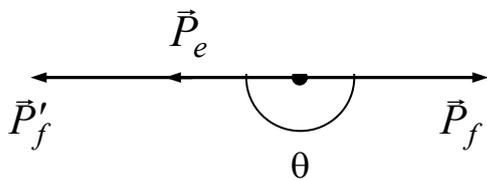
$$E_k = \frac{m_p v^2}{2}.$$

Отсюда $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_p}}.$

Подставим числовые данные: $v = 4,5 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$

5. Определить импульс P_e , электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол $\theta = 180^\circ$. $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}, E_f = m_e c^2$.

Решение



Запишем формулу Комптона, выразив λ и λ' через энергии падающего E_f и рассеянного E'_f фотонов. Учтем также, что $\cos 180^\circ = -1$. Среди нижеприведенных выражений найдите правильное:

$$1. \frac{hc}{E'_f} - \frac{hc}{E_f} = \frac{2h}{m_e c}. \quad 2. \frac{hc}{E_f} + \frac{hc}{E'_f} = \frac{2h}{m_e c}.$$

$$3. \frac{hc}{E_f} - \frac{hc}{E'_f} = \frac{2h}{m_e c}. \quad 4. \frac{hc}{E_f} + \frac{2h}{m_e c} = \frac{hc}{E'_f}.$$

Если ответ правильный, то продолжите решение, если нет, то найдите ошибку и повторите поиск.

Полученное выражение $\frac{hc}{E'_f} - \frac{hc}{E_f} = \frac{2h}{m_e c}$ разделим на hc .

Среди нижеприведенных выражений найдите правильное:

$$1. \frac{1}{E'_f} - \frac{1}{E_f} = \frac{2}{m_e c^2}. \quad 2. \frac{1}{E_f} - \frac{1}{E'_f} = \frac{2}{m_e c^2}. \quad 3. \frac{1}{E'_f} + \frac{1}{E_f} = \frac{2}{m_e c^2}.$$

Если ответ правильный, то приведем к общему знаменателю и перенесем в правую часть члены, содержащие E'_f . Если нет, то найдите ошибку и продолжите поиск. Среди нижеприведенных найдите правильное выражение:

$$1. E_f m_e c^2 = 2E_f E'_f + E'_f m_e c^2.$$

$$2. E_f m_e c^2 = E_f E'_f + E'_f m_e c^2.$$

$$3. E_f m_e c^2 = 2E_f E'_f - E'_f m_e c^2.$$

Если ответ правильный, то выразим E'_f , если нет, то найдите ошибку и получите правильный ответ. Среди нижеприведенных выражений найдите верное:

$$1. E'_f = \frac{E_f m_e c^2}{2E_f + m_e c^2}. \quad 2. E'_f = \frac{2E_f + m_e c^2}{E_f m_e c^2}. \quad 3. E'_f = \frac{m_e c^2}{2E_f + m_e c^2}.$$

Если ответ правильный, то учтите, что $E_f = m_e c^2$ (по условию задачи); если нет, то найдите ошибку и получите правильный ответ.

Среди нижеприведенных выражений найдите правильное:

$$1. E'_f = \frac{1}{3} m_e c^2. \quad 2. E'_f = m_e c^2. \quad 3. E'_f = \frac{2}{3} m_e c^2. \quad 4. E'_f = \frac{4}{3} m_e c^2.$$

Если ответ правильный, то продолжите решение, если нет, то найдите ошибку и получите правильный ответ.

Теперь можно найти кинетическую энергию E_k электрона отдачи. Среди нижеприведенных найдите правильное выражение для E_k :

$$1. E_k = \frac{2}{3} m_e c^2. \quad 2. E_k = \frac{4}{3} m_e c^2. \quad 3. E_k = \frac{1}{3} m_e c^2. \quad 4. E_k = m_e c^2.$$

Если ответ правильный, то продолжите решение, если нет, то найдите ошибку и получите правильный ответ. Оценим энергию электрона отдачи, чтобы выяснить, является электрон релятивистским (т. е. $E_k > 5$ кэВ, см. «Теорию») или нет. Энергия покоя электрона $m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ} \cdot 10^6 = 511 \text{ кэВ}$.

$$E_k = \frac{2}{3} \cdot 511 \text{ кэВ}.$$

Электрон релятивистский, следовательно, необходимо применить релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы. Полная энергия электрона и его импульс связаны соотношением

$$E^2 = m_e^2 c^4 + P_e^2 c^2. \quad (1)$$

Полная энергия электрона $E = m_e c^2 + E_k$.

$$E = m_e c^2 + \frac{2}{3} m_e c^2 = \frac{5}{3} m_e c^2. \quad (2)$$

Возведем в квадрат выражение (2) и приравняем правые части выражений (1) и (2).

Среди нижеприведенных выражений найдите правильное:

1. $\frac{25}{9} m_e^2 c^4 = m_e^2 c^4 + P_e^2 c^2$.

2. $\frac{5}{3} m_e c^2 = m_e c^2 + P_e^2 c^2$.

3. $\frac{5}{3} m_e c^2 = m_e^2 c^4 + P_e^2 c^2$.

Теперь найдем выражение для импульса P_e электрона отдачи. Среди нижеприведенных выражений найдите правильное:

1. $P = \frac{4}{3} m_e c$. 2. $P = \frac{1}{3} m_e c$. 3. $P = \frac{2}{3} m_e c$. 4. $P = m_e c$.

Подставим числовые данные и получим результат.

ТЕСТ

Вопросы

21.1. При замене одного металла с работой выхода A_1 другим (работа выхода A_2) длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта, уменьшается. Как соотносятся работы выхода металлов?

1. $A_1 = A_2$.
2. $A_1 > A_2$.
3. $A_1 < A_2$.

21.2. Максимальное значение скорости фотоэлектрона можно определить, если измерить

- 1) *задерживающее напряжение U_3 ;*
- 2) *фототок насыщения;*
- 3) *интенсивность падающего на катод излучения.*

21.3. Если известно задерживающее напряжение U_3 , то можно найти

- 1) *максимальное значение скорости фотоэлектронов;*
- 2) *максимальное значение кинетической энергии фотоэлектронов;*
- 3) *частоту, соответствующую красной границе фотоэффекта.*

21.4. Если известна работа выхода фотоэлектронов из металла, то можно определить

- 1) *максимальное значение скорости фотоэлектронов;*
- 2) *максимальное значение кинетической энергии фотоэлектронов;*
- 3) *частоту, соответствующую красной границе фотоэффекта.*

21.5. Как объяснить безынерционность внешнего фотоэффекта?

1. *Объяснить нельзя.*
2. *Передача энергии от фотона к электрону происходит практически мгновенно.*
3. *Электрон и фотон мгновенно разлетаются после столкновения.*

21.6. Среди приведенных закономерностей найдите закон сохранения энергии при внешнем фотоэффекте:

1. $h\nu = \frac{m\mathbf{v}_{\max}^2}{2} + A$.
2. $A = h\nu_0$.
3. $\frac{m\mathbf{v}_{\max}^2}{2} = A$.

21.7. Из какого соотношения можно найти частоту, соответствующую красной границе фотоэффекта?

1. $h\nu = \frac{m\mathbf{v}_{\max}^2}{2} + A$.
2. $A = h\nu_0$.
3. $\frac{m\mathbf{v}_{\max}^2}{2} = A$.

21.8. Укажите уравнение Эйнштейна для нелинейного фотоэффекта:

1. $h\nu = \frac{m\mathbf{v}_{\max}^2}{2} + A$.
2. $A = h\nu_0$.
3. $\frac{m\mathbf{v}_{\max}^2}{2} = eU_3$.
4. $Nh\nu = A + \frac{m\mathbf{v}_{\max}^2}{2}$.

21.9. Эффект Комптона наблюдается

1) при рассеянии рентгеновского излучения на свободных электронах легких веществ;

2) при рассеянии ультрафиолетового излучения на свободных электронах легких веществ;

3) при рассеянии света на свободных электронах легких веществ;

4) при рассеянии света на металлических пластинках.

21.10. Под действием какого излучения возможен многофотонный фотоэффект?

1. Ультрафиолетового. 2. Лазерного.

3. Инфракрасного. 4. Правильный ответ не указан.

21.11. Найдите верные заключения:

1. При фотоэффекте фотон поглощается электроном полностью.

2. При эффекте Комптона свободному электрону передается часть энергии и импульса фотона.

3. При фотоэффекте фотон передает электрону только часть своей энергии.

21.12. При эффекте Комптона электрон и фотон

1) сталкиваются упруго;

2) сталкиваются неупруго;

3) вообще не сталкиваются;

4) правильный ответ не указан.

21.13. Найдите верные заключения:

1. При фотоэффекте выполняется закон сохранения энергии.

2. При эффекте Комптона выполняется закон сохранения энергии и импульса.

3. При эффекте Комптона выполняется только закон сохранения импульса.

21.14. Как соотносятся длины волн падающего (λ) и рассеянного (λ') излучений при эффекте Комптона?

1. $\lambda' > \lambda$. 2. $\lambda' = \lambda$. 3. $\lambda' < \lambda$.

21.15. Чему равна энергия фотона?

1. $\frac{m_f c^2}{2}$. 2. $h\nu$. 3. $\frac{m_f v^2}{2}$. 4. $\frac{h\nu}{c}$.

21.16. Какой эффект будет наблюдаться при падении коротковолнового излучения на парафин?

1. Фотоэффект.

2. Эффект Комптона.

3. Эффект Холла.

4. Никакой эффект не будет наблюдаться.

21.17. На цинковую пластину падает свет от ртутной лампы. Какой эффект будет наблюдаться?

1. Фотозффект.
2. Эффект Комптона.
3. Эффект Холла.
4. Никакой эффект не будет наблюдаться.

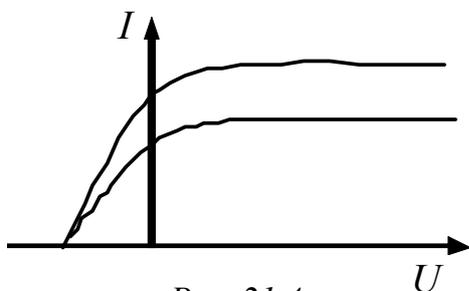


Рис. 21.4

21.18. На рис. 21.4 приведены две зависимости фототока от напряжения для одного и того же фотокатода. Чем отличаются кривые?

1. Частотой падающего излучения.
2. Освещенностью фотокатода.
3. Работой выхода для данного фотокатода.

21.19. На рис. 21.5 приведены зависимости фототока от напряжения для одного и того же катода. Чем отличаются кривые?

1. Освещенностью фотокатода.
2. Задерживающим напряжением.
3. Частотой падающего излучения.
4. Скоростью фотоэлектронов.

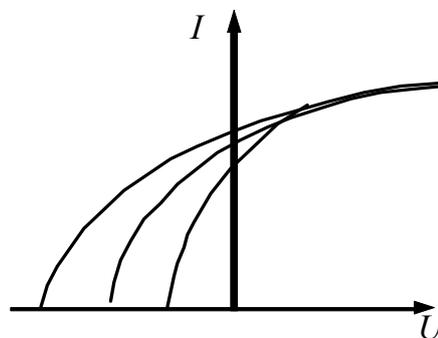


Рис. 21.5

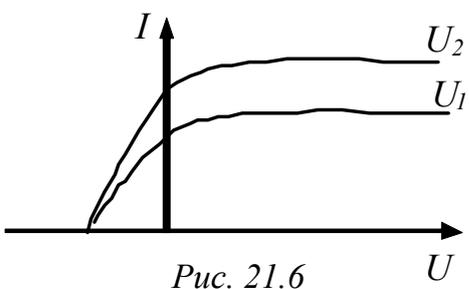


Рис. 21.6

21.20. На рис. 21.6 приведены две зависимости фототока от напряжения для одного и того же фотокатода (частота излучения одинакова). Как соотносятся освещенности фотокатода E_1 и E_2 ?

1. $E_1 = E_2$.
2. $E_1 < E_2$.
3. $E_1 > E_2$.

21.21. На рис. 21.7 приведены две зависимости фототока от напряжения для одного и того же фотокатода. Как соотносятся частоты падающего излучения ν_1 и ν_2 ?

1. $\nu_1 = \nu_2$.
2. $\nu_1 > \nu_2$.
3. $\nu_1 < \nu_2$.

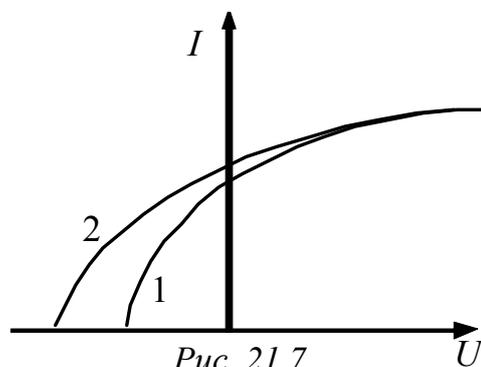


Рис. 21.7

- 21.22.** Может ли золотая пластинка служить фотосопротивлением?
1. Да, так как при освещении ее сопротивление падает.
 2. Нет, так как внутренний фотоэффект, сопровождающийся увеличением носителей тока, а следовательно, уменьшением сопротивления при освещении, наблюдается у полупроводников и диэлектриков.
 3. Да, так как при освещении сопротивление растёт.
- 21.23.** Какое вещество можно применить для создания солнечных батарей?
1. Кремний.
 2. Цинк.
 3. Медь.
 4. Железо.
- 21.24.** Благодаря какому свойству фотоэффект используется в технике звукового кино?
1. Безынерционность.
 2. Как единственные источники энергии.
 3. Как дешёвые источники энергии.
- 21.25.** Найдите верные заключения:
1. В одном и том же явлении свет может проявлять себя как частица и как волна.
 2. Чем больше длина волны, тем меньше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются квантовые свойства света.
 3. Чем больше частота, тем труднее обнаруживаются волновые свойства света.
- 21.26.** В каких явлениях проявляются волновые свойства света?
1. Дифракция.
 2. Поляризация.
 3. Интерференция.
 4. Тепловое излучение.
- 21.27.** В каких явлениях проявляются квантовые свойства света?
1. Дифракция.
 2. Поляризация.
 3. Интерференция.
 4. Тепловое излучение.
- 21.28.** В каких явлениях проявляются квантовые свойства света?
1. Эффект Комптона.
 2. Фотоэффект.
 3. Тепловое излучение.
 4. Поляризация.
- 21.29.** В каких явлениях проявляются волновые свойства света?
1. Эффект Комптона.
 2. Фотоэффект.
 3. Тепловое излучение.
 4. Поляризация.
- 21.30.** Почему при упругом соударении фотона со свободным электроном фотон не может передать электрону всю свою энергию?
1. Потому что такой процесс нарушал бы законы сохранения энергии и импульса.
 2. Электрон не поглощает энергии.
 3. Энергия фотона не может измениться.
- 21.31.** На каком веществе не может произойти эффект Комптона?
1. Бор.
 2. Парафин.
 3. Золото.

21.32. Как соотносятся частоты падающего (ν) и рассеянного (ν') излучений при эффекте Комптона?

1. $\nu' = \nu$.
2. $\nu' > \nu$.
3. $\nu' < \nu$.

21.33. От чего зависит работа выхода электронов из вещества?

1. *От материала фотокатода и степени обработки поверхности фотокатода.*

2. *От освещенности фотокатода.*

3. *От частоты падающего на фотокатод излучения.*

21.34. От чего зависит для данного фотокатода скорость фотоэлектронов?

1. *От освещенности фотокатода.*

2. *От частоты падающего на фотокатод излучения.*

3. *От напряжения между электродами.*

21.35. От чего зависит для данного фотокатода энергия фотоэлектронов?

1. *От освещенности фотокатода.*

2. *От напряжения между электродами.*

3. *От частоты падающего на фотокатод излучения.*

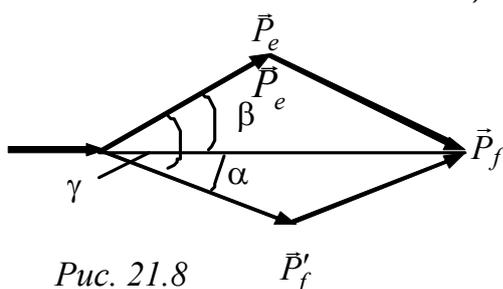


Рис. 21.8

21.36. Какой из указанных на рис. 21.8 углов называется углом рассеяния фотона при эффекте Комптона?

1. γ .

2. α .

3. β .

21.37. Изменяется ли и, если да, то как, длина волны рассеянных фотонов при эффекте Комптона?

1. *Не изменяется.*
2. *Увеличивается.*
3. *Уменьшается.*

21.38. Изменяется ли и, если да, то как, энергия рассеянных фотонов при эффекте Комптона?

1. *Не изменяется.*
2. *Уменьшается.*
3. *Увеличивается.*

21.39. Изменяется ли и, если да, то как, частота рассеянных фотонов при эффекте Комптона?

1. *Не изменяется.*
2. *Уменьшается.*
3. *Увеличивается.*

21.40. Какое соотношение соответствует эффекту Комптона (рассеяние на частице массой m)?

1. $\Delta\lambda = \lambda_k (1 - \cos \theta)$.

2. $\Delta\lambda = 2\lambda_k \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

3. $\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$.

4. $\Delta\lambda = 2\lambda_k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

21.41. От чего зависит длина волны рассеянного фотона при эффекте Комптона?

1. От угла рассеяния.
2. От энергии фотона падающего излучения.
3. От длины волны фотона падающего излучения.

Задачи

21.1. Красная граница фотоэффекта для цезия $\lambda_0 = 6530 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$). Определить скорость фотоэлектронов при облучении цезия фиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 4000 \text{ \AA}$. Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$, масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

21.2. На поверхность металла падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 3100 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов не менее $1,7 \text{ В}$. Определить работу выхода A . Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. Ответ дать в электронвольтах.

21.3. В результате эффекта Комптона фотон при соударении со свободным покоящимся электроном был рассеян на угол $\theta = 60^\circ$. Энергия фотона до рассеяния равна $E_f = 0,75 \text{ МэВ}$. Найти энергию рассеянного фотона E'_f . $\lambda_k = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ м}$, $1 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

21.4. Гамма-квант с энергией E_f 1 МэВ рассеивается под углом $\theta = 90^\circ$ на свободном покоящемся протоне. Определить: а) какую кинетическую энергию E_k сообщает гамма-квант протону (ответ дать в кэВ); б) с какой скоростью v_p будет двигаться протон после соударения. $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, $m_p c^2 = 938,28 \text{ МэВ}$, $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

21.5. Определить импульс P_e электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол $\theta = 180^\circ$.

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}, E_f = m_e c^2.$$

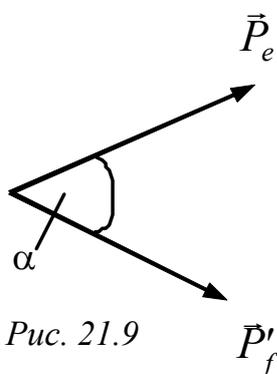


Рис. 21.9

21.6. Фотон с энергией $E_f = 2m_e c^2$ при рассеянии на покоящемся свободном электроном теряет половину своей энергии (m_e – масса электрона). Найти угол разлета α (рис. 21.9) между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Ответ дать в градусах. $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

21.7. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол $\theta = 180^\circ$. Энергия фотона до рассеяния равна $0,255 \text{ МэВ}$.

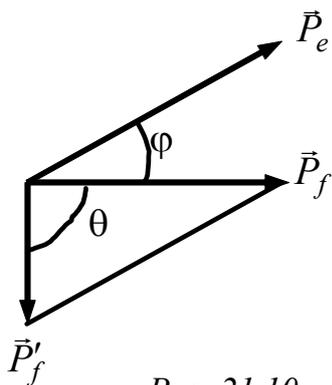


Рис. 21.10

21.8. Угол рассеяния фотона 90° , угол отдачи ϕ электрона 30° (рис. 21.10). Определить энергию E_f падающего фотона. Ответ дать в МэВ и округлить до сотых. $1 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \text{ Дж}$; $m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

21.9. Фотон ($\lambda = 1 \text{ пм}$) рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90^\circ$? Какую долю своей энергии фотон передал электрону? Ответ дать в %. $1 \text{ пм} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}$; $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

21.10. Длина волны λ фотона равна комптоновской длине волны λ_k электрона. Определить энергию и импульс P фотона. Энергию фотона определить в МэВ, импульс – в кг (м/с). $1 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \text{ Дж}$; $m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

21.11. Энергия рентгеновских лучей равна 0,6 МэВ. Найти энергию электрона отдачи, если известно, что длина волны после комптоновского рассеяния изменилась на 20 %.

21.12. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 3070 \AA и кинетическая энергия фотоэлектрона 1 эВ?

21.13. На поверхность лития падает монохроматический свет ($\lambda = 3100 \text{ \AA}$). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов не менее 1,7 В. Определить работу выхода. Ответ дать в эВ.

21.14. На платиновую пластинку падают ультрафиолетовые лучи. Для прекращения фотоэффекта нужно приложить задерживающую разность потенциалов 3,7 В. Если платиновую пластинку заменить пластинкой из другого металла, то задерживающую разность потенциалов нужно увеличить до 6 В. Определить работу выхода электронов с поверхности этой пластинки. Ответ дать в эВ. Работа выхода из платины $A_1 = 6,3 \text{ эВ}$.

21.15. На цинковую пластинку падает монохроматический свет длиной волны $\lambda = 2200 \text{ \AA}$. Определить максимальную скорость фотоэлектронов. Работа выхода из цинка $A = 4 \text{ эВ}$. Ответ дать в Мм/с и округлить до сотых ($1 \text{ Мм} = 10^6 \text{ м}$). $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

21.16. Максимальная скорость фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ квантами, равна $2,91 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Определить энергию γ квантов. Ответ дать в МэВ, округлить до десятых.

21.17. Длина волны света, соответствующего красной границе фотоэффекта для некоторого металла, $\lambda_0 = 275 \text{ нм}$ ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$). Найти

минимальную энергию E_{\min} фотона, вызывающего фотоэффект. Ответ дать в эВ.

21.18. Найти задерживающую разность потенциалов U для электронов, вырываемых при освещении калия светом с длиной волны $\lambda = 330$ нм ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$). Ответ округлить до сотых.

20.19. Найти частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов $U_3 = 3$ В. Фотоэффект начинается при частоте света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Найти работу выхода A из металла. Частоту разделить на 10^{14} и округлить до целого. Работу выхода дать в эВ и округлить до десятых, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

21.20. При освещении платиновой поверхности излучением ртутной дуги длиной волны $0,204 \cdot 10^{-6}$ м величина задерживающего потенциала оказалась равной $0,8$ В. Найти: 1) работу выхода электрона из платины; 2) максимальную длину волны, при которой еще возможен фотоэффект. Работу выхода дать в эВ.

21.21. Определить работу выхода электронов из вольфрама, если красная граница фотоэффекта для него $\lambda_0 = 275$ нм. Ответ дать в эВ.

20.22. На металлическую пластинку падает монохроматический свет ($\lambda = 0,413$ мкм). Поток фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, полностью задерживается, когда разность тормозящего электрического поля достигает $U = 1$ В. Определить работу выхода в эВ и длину волны, соответствующую красной границе фотоэффекта в мкм.

21.23. Определить максимальную скорость электронов, вылетающих из металла под действием γ -излучения длиной волны $\lambda = 0,03 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$).

21.24. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 500 нм. Определить минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект. Ответ дать в эВ.

21.25. Калий освещается монохроматическим светом с длиной волны 400 нм. Определить наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится. Работа выхода электронов из калия $A = 2,2$ эВ.

21.26. Фотоны с энергией $E = 5$ эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A = 4,7$ эВ. Определить максимальный импульс, передаваемый поверхности этого металла при вылете электрона.

21.27. Определить максимальную скорость v_{\max} фотоэлектронов с поверхности цинка (работа выхода $A = 4$ эВ) при облучении γ -излучением с длиной волны $\lambda = 2,47$ пм ($1 \text{ пм} = 10^{-12} \text{ м}$).

21.28. При освещении фотокатода светом с длиной волны $\lambda = 310$ нм фототок прекращается при некотором задерживающем напряжении.

При увеличении длины волны на 25 % задерживающее напряжение оказывается меньше на 0,8 В. Определить постоянную Планка.

21.29. Плоский серебряный электрод освещается монохроматическим излучением с длиной волны $\lambda = 83$ нм. Определить, на какое максимальное расстояние d от поверхности электрода может удалиться фотозлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью $E = 10$ В/см. Красная граница фотоэффекта для серебра $\lambda = 264$ нм.

21.30. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, если фототок прекращается при приложении задерживающего напряжения $U_3 = 3,7$ В.

21.31. При облучении фотокатода светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм фотоэлектроны полностью задерживаются при напряжении $U_3 = 1,2$ В. Определить красную границу фотоэффекта (для длины волны). Ответ дать в нм и округлить до целого.

21.32. Определить, до какого потенциала зарядится уединенный серебряный шарик при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 207$ нм. Работа выхода электронов из серебра $A = 4,7$ эВ ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

21.33. Рентгеновское излучение длиной волны $\lambda = 55,8$ пм рассеивается плиткой графита (эффект Комптона). Определить длину волны λ' света, рассеянного под углом 60° к направлению падающего пучка света.

21.34. Определить максимальное изменение длины волны при комптоновском рассеянии: 1) на свободных электронах; 2) на свободных протонах.

21.35. Определить угол θ рассеяния фотона, испытавшего соударение со свободным электроном, если изменение длины волны $\Delta\lambda$ при рассеянии равно 3,62 пм.

21.36. Фотон с энергией $E_f = 0,4$ МэВ рассеялся под углом $\theta = 90^\circ$ на свободном электроне. Определить энергию E'_f рассеянного фотона и кинетическую энергию E_k электрона отдачи. Ответ дать в МэВ, округлить до тысячных долей ($1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$, $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

ЗАНЯТИЕ 22

АТОМ ВОДОРОДА ПО БОРУ. ЛИНЕЙЧАТЫЕ СПЕКТРЫ

Теория

Ректор МГУ академик РАН В.А. Садовничий на съезде физиков 28 июня 2000 года в пленарном докладе высказал мысль, что «развитие физики – это снятие запретов». История развития представлений об атоме прекрасно согласуется с этим высказыванием. Согласно представлениям классической электродинамики и модели атома Резерфорда, спектры излучения атомов должны быть сплошными (т. е. атом может испускать любую энергию), а ускоренно движущиеся вокруг ядра атома электроны должны излучать электромагнитные волны, т. е. терять энергию и приближаться к ядру (т. е. атом Резерфорда оказался как бы неустойчивой системой).

Мы уже изучали гипотезу Планка, которую он высказал в начале XX века, о том, что свет излучается квантами, т. е. порциями энергии. И это было подтверждено такими эффектами, как фотоэффект и эффект Комптона. Но мы снова вернулись к временам, когда квантовая теория ещё не была разработана.

Следуя высказываниям В.А. Садовничего, мы можем выделить два «запрета»:

- 1) спектры излучения не должны быть линейчатыми;
- 2) электроны в атоме не должны двигаться ускоренно.

Однако исследования швейцарского учителя физики И. Бальмера (1885) со всей очевидностью доказывали, что спектр излучения атомарного водорода линейчатый; Бальмеру удалось подобрать эмпирическую формулу для определения длины волны спектральных линий атома водорода в видимой части:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \text{ – спектр водорода.}$$

Постоянная $R' = 1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ была определена шведским ученым Ридбергом и была названа его именем. Т. к. $\nu = c\lambda$, то формула Бальмера для частоты выглядит следующим образом:

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \text{ – спектр водорода.}$$

где $R = R' \cdot c = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ – также постоянная Ридберга (постоянные Ридберга R и R' можно различать по размерности).

В дальнейшем в спектре водорода было обнаружено еще несколько серий. В ультрафиолетовой области спектра находится **серия Лаймана**:

$$\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), (n = 2, 3, 4, \dots).$$

В инфракрасной области спектра:

$$\text{серия Пашена: } \nu = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), (n = 4, 5, 6, \dots);$$

$$\text{серия Брэкета: } \nu = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), (n = 5, 6, 7, \dots);$$

$$\text{серия Пфунда: } \nu = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right), (n = 6, 7, 8, \dots);$$

$$\text{серия Хэмфи: } \nu = R \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2} \right), (n = 7, 8, 9, \dots).$$

Все эти формулы похожи между собой, и их можно выразить одной формулой. Такая формула была получена, и она называется **обобщенной формулой Бальмера**:

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где m имеет в каждой серии постоянное значение (например, в серии Лаймана $m = 2$, Бальмера – $m = 2$ и т. д.), а n при заданном m принимает все целочисленные значения, начиная с $m + 1$. При этом число m определяет серию (например, $m = 1$ – серия Лаймана) а число n определяет отдельные линии этой серии. При возрастании n частота линии в каждой серии стремится к предельному значению R/m^2 , которое называется границей серии, т. е. $\nu_{\text{границ}} = R/m^2$.

Частота любой линии спектра водорода может быть представлена в виде разности двух чисел ряда:

$$\nu = \left(\frac{R}{m^2} - \frac{R}{n^2} \right) = T_1(m) - T_2(n).$$

Эти числа ($T_1(m)$ и $T_2(n)$) называют **спектральными термами, или просто термами**.

Постулаты Бора

В 1913 году датский физик Нильс Бор (1885–1962) поставил перед собой цель связать в единое целое и теоретически обосновать эмпирические закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер излучения и поглощения света.

Теория Бора содержит два постулата (иногда их делят на три постулата), противоречащих классическим представлениям.

1. Постулат стационарных состояний.

Из бесконечного множества электронных орбит, возможных в классической механике, осуществляются только некоторые дискретные стационарные орбиты, удовлетворяющие определенным квантовым условиям. Этим орбитам соответствуют стационарные состояния. Ускоренное движение электронов по стационарным орбитам не сопровождается излучением электромагнитных волн.

Для стационарных орбит момент импульса электрона равен целому кратному постоянной Планка \hbar :

$$m_e v r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

m_e – масса электрона; v – его скорость по n -й орбите радиуса r_n ; $\hbar = h/2\pi$.

Напомним, что момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}], \quad \vec{P} = m\vec{v}.$$

Модуль $[\vec{L}] = r \cdot mv \sin \alpha$ (угол между \vec{r} и \vec{v}).

При движении электрона в атоме по круговой орбите $\alpha = 90^\circ$, поэтому

$$L_n = m_e v r_n.$$

2. Второй постулат Бора (правило частот).

При переходе атома из одного стационарного состояния в другое (при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую) излучается или поглощается квант энергии

$$h\nu = E_n - E_m,$$

равный разности энергий соответствующих стационарных состояний (E_n и E_m). Если электрон переходит с более удаленной от ядра орбиты на более близлежащую (переход атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией), то происходит излучение фотона с энергией $h\nu$ ($E_m < E_n$).

Если $E_m > E_n$, то происходит поглощение фотона (переход атома в состояние с большей энергией, т. е. на более удаленную от ядра орбиту). Набор возможных дискретных частот $\nu = (E_n - E_m)/h$ квантовых переходов и определяет *линейчатый спектр атома*. Существование дискретных энергетических уровней у атомов, а также излучение квантов энергии (фотонов) при переходе атомов из одного стационарного состояния в другое было экспериментально подтверждено опытами Франка и Герца (1913).

Таким образом, постулаты (основополагающие допущения) Бора были экспериментально подтверждены, т. е. «запреты», о которых гово-

рилось ранее, были сняты. Но до окончательного формулирования квантовой теории ещё далеко.

Атом водорода по Бору

Постулаты, выдвинутые Бором, позволили рассчитать радиус n -й стационарной орбиты и энергию атома в состоянии n , а также спектр атома водорода и водородоподобных систем (систем, состоящих из ядра с зарядом Ze и одного электрона, например ионы H^+ , Li^{2+}), а также теоретически вычислить постоянную Ридберга.

Воспользовавшись постулатами Бора, найдем радиус n стационарной орбиты. Рассмотрим движение электрона в водородоподобной системе (заряд ядра Ze), ограничиваясь круговыми стационарными орбитами.

Уравнение движения электрона имеет вид

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1)$$

Учтем, что

$$m_e v r = n\hbar. \quad (2)$$

Исключив v из уравнений (1) и (2), получим выражение для радиусов допустимых орбит:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{m_e Ze^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Для атома водорода ($Z = 1$) радиус первой орбиты при $n = 1$, называемый первым боровским радиусом,

$$r_1 = \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} = 0,528 \cdot 10^{10} \text{ м} = 52,8 \text{ пм}.$$

Внутренняя энергия атома складывается из кинетической энергии электрона (ядро неподвижно) и энергии взаимодействия электрона с ядром (потенциальная энергия $(-Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r))$):

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Из выражения (1) $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

Получим $\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Окончательно для внутренней энергии (или для полной энергии электрона)

$$E = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Подставив сюда выражение для r , найдем дозволённые значения внутренней энергии атома:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где знак минус указывает, что электрон находится в связанном состоянии.

Из формулы (3) следует, что энергетические состояния атома изменяются в зависимости от значения n , которое называется **главным квантовым числом**.

Энергетическое состояние с $n = 1$ является основным (невозбуждённым) состоянием атома. Состояния с $n > 1$ являются возбуждёнными.

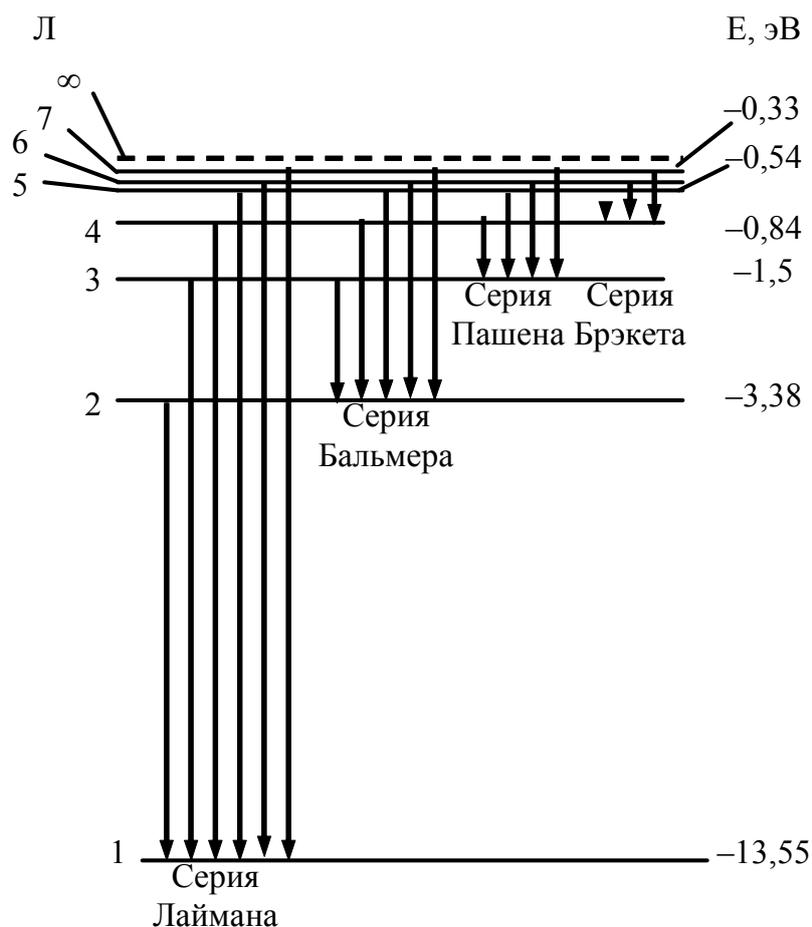


Рис. 22.1

Придавая n различные целочисленные значения, получим для атома водорода ($Z = 1$) возможные уровни энергии, которые могут быть подсчитаны по формуле (3) и схематически представлены на рис. 22.1.

Энергия атома с увеличением n возрастает, и энергетические уровни сближаются к границе, соответствующей $n = \infty$. Минимальной энергией атом водорода обладает в невозбужденном состоянии ($n = 1$), $E_1 = -13,55$ эВ, максимальной энергией ($E_\infty = 0$) при $n \rightarrow \infty$.

Значение $E_\infty = 0$ соответствует отрыву электрона от атома, т. е. его ионизации. Следовательно, энергия ионизации атома водорода $E_i = E_1$ ($E_1 = -13,55$ эВ).

Зная энергию ионизации, можно найти потенциал ионизации:

$$\varphi_i = \frac{E_i}{e}.$$

Чтобы найти, например, первый потенциал ионизации атома водорода, надо найти энергию, которую необходимо передать атому водорода для перехода атома из невозбужденного состояния ($n = 1$) в первое возбужденное ($n = 2$), и разделить ее на заряд электрона e

$$\varphi_1 = \frac{E_{(1-2)}}{e}.$$

Согласно второму постулату Бора, при переходе атома водорода ($Z = 1$) из стационарного состояния n в стационарное состояние m с меньшей энергией испускается квант

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

откуда частота излучения будет равна

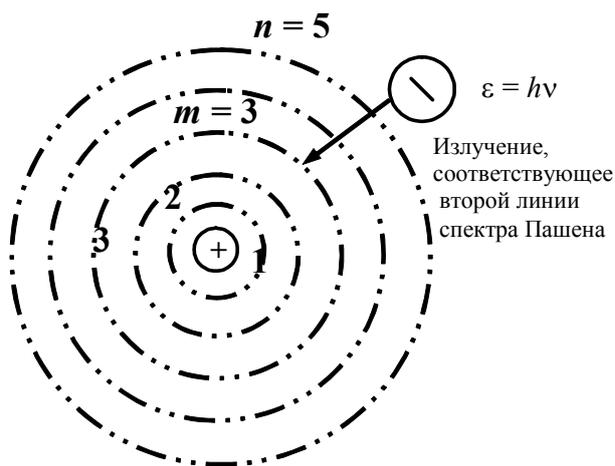
$$\nu = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (4)$$

где

$$R = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2}. \quad (5)$$

Мы получили обобщенную формулу Бальмера. Если R , вычисленное по формуле (5), совпадает с экспериментальным значением в серийных формулах, то это уже экспериментальное доказательство правильности теории Бора. Теперь мы можем сами вычислить R по формуле (5) и убедиться в этом.

Если в формулу (4) подставить $m = 1$, $n = 2, 3, 4, \dots$, получим группу линий, соответствующих серии Лаймана. Они возникают при переходе электрона с возбужденных уровней $n = 2, 3, 4, \dots$ на основной $m = 1$.



Главное квантовое число n фигурирует в выражениях для радиуса орбиты и энергии электрона в атоме. В серийных формулах m и n – просто набор целых чисел, зависимость между которыми мы ранее указывали и значения которых также ранее приводили. Было бы лучше для второго числа выбрать другую букву, например k , но в подавляющем большинстве учебников

выбраны именно эти обозначения. Аналогично можно получить остальные спектральные серии водорода (часть из них представлена на рис. 22.1).

Таким образом, спектральные серии возникают при переходе атома из возбужденного состояния в данное, расположенное на графике (рис. 22.1) ниже возбужденного. При этом число спектральных линий N , испускаемых атомарным водородом, возбужденным на n -й энергетический уровень,

$$N = n(n - 1)/2.$$

В занятии «Тепловое излучение» отмечалось, что электромагнитное излучение испускается и поглощается в виде квантов энергии. Поглощается квант при переходе атома из невозбужденного в возбужденное состояние (т. е. состояние с более высоким уровнем энергии).

Спектр поглощения атома водорода является также линейчатым, но содержит при нормальных условиях только серию Лаймана. Это также объясняется в теории Бора. Свободные атомы водорода обычно находятся в основном состоянии ($n = 1$), поэтому при сообщении атому извне определенной энергии могут наблюдаться лишь переходы атомов из основного состояния в возбужденное (т. е. серия Лаймана).

Теория Бора была крупным шагом в развитии теории атома. Но она не называется квантовой теорией, потому что эта теория не была ни последовательно классической, ни последовательно квантовой. С одной стороны, были применены законы классической физики, а с другой – квантовые постулаты. Пользуясь этой теорией, можно описать спектр атома водорода и водородоподобных систем, а спектр атома гелия – уже нельзя.

Из квантовой механики мы знаем, что состояние электрона в атоме характеризуется не одним, а несколькими квантовыми числами, а квантово-механический смысл боровского радиуса состоит в том, что элек-

трон может быть обнаружен с наибольшей вероятностью на расстоянии от ядра, равном боровскому радиусу.

Подсказка

1. Определить энергию фотона, соответствующего второй линии в первой инфракрасной серии атома водорода. Ответ дать в электронвольтах (эВ), округлить до сотых.

Решение

Энергия кванта света (фотона), испускаемого атомом водорода при переходе с одного энергетического уровня на другой (рис. 22.2),

$$\varepsilon = h\nu = hR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где m определяет серию, а n – номер линии.

Первой инфракрасной серией является серия Пашена $m = 3$; $n = 4, 5, 6, \dots$ Таким образом,

$$\varepsilon = hR \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right). \quad (1)$$

Поскольку ответ надо выразить в эВ, то для уменьшения вычислений можно воспользоваться понятием энергии ионизации. Энергия ионизации – это та энергия, которая необходима для удаления электрона из атома. Энергия ионизации атома водорода в электронвольтах $E_i = 13,55$ эВ.

Выразим энергию кванта через энергию ионизации. Для этого мы должны в соотношении (1) взять $m = 1$, а $n = \infty$ (удалить электрон с первого уровня на бесконечность), т. е. $E_i = hR$.

Поэтому:

$$\varepsilon = E_i \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) /$$

Подставив числовые данные, получим $\varepsilon = 13,55 \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right) = 0,97$ эВ.

2. Найти кинетическую энергию электрона на третьем энергетическом уровне (третьей боровской орбите). Ответ дать в эВ и округлить до десятых.

Решение

Кинетическая энергия электрона

$$\frac{mv_n^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}; \quad r_n = n^2 \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e Ze^2}.$$

Отсюда

$$E_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ze^2 m_e \cdot Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot n^2 \cdot \hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} = \frac{Z^2 m_e e^4}{8n^2 \hbar^2 \epsilon_0^2}.$$

Для водорода $Z = 1$, поэтому $E_n = \frac{m_e e^4}{8n^2 \hbar^2 \epsilon_0^2}$.

Чтобы упростить вычисления, можно числитель и знаменатель умножить на h , тогда $E_n = \frac{m_e e^4 \cdot h}{8n^2 \hbar^3 \epsilon_0^2}$, но $\frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2} = R$ (постоянная Ридберга).

$$R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

Окончательно $E_n = \frac{1}{n^2} \cdot R \cdot h$.

Подставив числовые данные, получим $E_3 = 1,5 \text{ эВ}$.

3. Определить скорость v движения электрона на третьей боровской орбите атома водорода.

Решение

Получим выражение для скорости движения электрона по круговой орбите согласно теории Бора. Воспользуемся для этого первым постулатом Бора и выражением для кинетической энергии электрона.

Выражение для кинетической энергии можно получить, применив II закон Ньютона для электрона, движущегося по окружности под действием кулоновской силы в атоме водорода:

$$\frac{e \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n},$$

сократив на r_n и разделив обе части на два, получим

$$\frac{m_e v_n^2}{2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}. \quad (1)$$

Из выражения для момента импульса найдем r_n :

$$m_e v_n r_n = n\hbar; \quad r_n = \frac{n\hbar}{m_e v_n}. \quad (2)$$

Подставим теперь (2) в (1), получим

$$\frac{m_e v_n^2}{2} = \frac{e^2 \cdot m_e \cdot v_n}{4\pi\epsilon_0 \cdot n\hbar},$$

сократив на v_n и m_e , выразим v_n :

$$v_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar}.$$

Подставив числовые данные, получим

$$v_n = 0,727 \cdot 10^6 = 0,73 \text{ Мм/с.}$$

4. Найти наибольшую и наименьшую длину волны в первой инфракрасной серии спектра водорода.

Решение

Первая инфракрасная серия в спектре атома водорода – это серия Пашена.

Длину волны мы можем найти из сериальной формулы

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (1)$$

здесь $R' = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга; m определяет серию (для серии Пашена $m = 3$); n – отдельные линии серии, при этом $n = m + 1, m + 2, \dots$.

Чтобы выяснить, как найти наибольшую и наименьшую длину волны, надо выразить из (1) λ и проанализировать полученное соотношение:

$$\lambda = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что λ_{\max} получим, если $n = n_{\min}$, т. е. $n = 4$, а λ_{\min} – если $n = n_{\max}$, т. е. $n = \infty$, что будет соответствовать границе серии.

Таким образом,

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{1,1 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right)} = 1,87 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{1,1 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{9}} = 0,82 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Для частоты $\nu = R' \cdot c \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ условия максимального и минимального значения ν будут:

ν_{\max} , если $n = n_{\max}$, т. е. $n = \infty$,

ν_{\min} , если $n = n_{\min}$, т. е. $n = 4$.

ТЕСТ

Вопросы

22.1. Укажите правильное выражение для термов первой линии серии Лаймана:

1. $T(1) - T(2)$. 2. $T(2) - T(3)$. 3. $T(3) - T(4)$.
4. $T(4) - T(5)$. 5. $T(5) - T(6)$. 6. $T(6) - T(7)$.

22.2. Укажите правильное выражение для термов первой линии серии Бальмера:

1. $T(1) - T(2)$. 2. $T(2) - T(3)$. 3. $T(3) - T(4)$.
4. $T(4) - T(5)$. 5. $T(5) - T(6)$. 6. $T(6) - T(7)$.

22.3. Укажите правильное выражение для термов первой линии серии Пашена:

1. $T(1) - T(2)$. 2. $T(2) - T(3)$. 3. $T(3) - T(4)$.
4. $T(4) - T(5)$. 5. $T(5) - T(6)$. 6. $T(6) - T(7)$.

22.4. Укажите правильное выражение для термов первой линии серии Брэкета:

1. $T(1) - T(2)$. 2. $T(2) - T(3)$. 3. $T(3) - T(4)$.
4. $T(4) - T(5)$. 5. $T(5) - T(6)$. 6. $T(6) - T(7)$.

22.5. Укажите правильное выражение для термов первой линии серии Пфунда:

1. $T(1) - T(2)$. 2. $T(2) - T(3)$. 3. $T(3) - T(4)$.
4. $T(4) - T(5)$. 5. $T(5) - T(6)$. 6. $T(6) - T(7)$.

22.6. Укажите правильное выражение для термов первой линии серии Хэмфри:

1. $T(1) - T(2)$. 2. $T(2) - T(3)$. 3. $T(3) - T(4)$.
4. $T(4) - T(5)$. 5. $T(5) - T(6)$. 6. $T(6) - T(7)$.

22.7. Какая из нижеприведенных формул называется обобщенной формулой Бальмера?

1. $\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$. 2. $\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$. 3. $\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$.

22.8. Укажите размерность постоянной Ридберга (в СИ) R' :

1. м^{-1} . 2. с^{-1} . 3. м . 4. с .

22.9. Укажите размерность постоянной Ридберга R (в СИ):

1. м^{-1} . 2. с^{-1} . 3. м . 4. с .

22.10. В каждой серии

- 1) m имеет постоянное значение, а $n = m + 1, m + 2, \dots$
2) n имеет постоянное значение, а $m = n + 1, n + 2, \dots$
3) m и n имеют постоянные значения.

22.11. Атом водорода находится в состоянии с $n = 5$. Сколько линий содержит его спектр излучения (по Бору)?

1. 4. 2. 2. 3. 3. 4. 10. 5. 5.

22.12. Атом водорода находится в основном состоянии ($n = 1$). Сколько линий содержит его спектр излучения (по Бору)?

1. 0. 2. 1. 3. 2. 4. 3.

22.13. Атом водорода находится в состоянии с $n = 6$. Сколько линий содержит его спектр излучения (по Бору)?

1. 10. 2. 2. 3. 3. 4. 4. 5. 15.

22.14. Атом водорода находится в состоянии с $n = 4$. Сколько линий содержит его спектр излучения (по Бору)?

1. 1. 2. 2. 3. 6. 4. 4.

22.15. Атом водорода находится в состоянии с $n = 3$. Сколько линий содержит его спектр излучения (по Бору)?

1. 1. 2. 3. 3. 2. 4. 4.

22.16. Атом водорода находится в состоянии с $n = 2$. Сколько линий содержит его спектр излучения (по Бору)?

1. 1. 2. 2. 3. 3. 4. 4.

22.17. Как называется состояние атома водорода с $n = 0$?

1. Нет правильного ответа. 2. Невозбужденное.
3. Возбужденное. 4. Стационарное.

22.18. Атом водорода находится в состоянии с $n = 2$. Какое это состояние?

1. Невозбужденное.
2. Возбужденное.
3. Нестационарное.

22.19. Какая серия наблюдается в видимой части спектра?

1. Лаймана. 2. Бальмера. 3. Пашена.
4. Брэкета. 5. Пфунда. 6. Хэмфри.

22.20. Какую серию содержит спектр поглощения атома водорода?

1. Лаймана. 2. Бальмера. 3. Пашена.
4. Брэкета. 5. Пфунда. 6. Хэмфри.

22.21. Какая серия спектра излучения водорода находится в ультрафиолетовой области спектра?

1. Лаймана. 2. Бальмера. 3. Пашена.
4. Брэкета. 5. Пфунда. 6. Хэмфри.

22.22. Какая серия спектра излучения водорода находится в инфракрасной области спектра?

1. Лаймана. 2. Бальмера. 3. Пашена.
4. Брэкета. 5. Пфунда. 6. Хэмфри.

22.23. Какая серия наблюдается как в спектре излучения, так и в спектре поглощения атома водорода?

1. Лаймана.
2. Бальмера.
3. Пашена.
4. Брэкета.
5. Пфунда.
6. Хэмфри.

22.24. В обобщенной формуле Бальмера

1) число t определяет серию, а число n – отдельные линии этой серии;

2) число n определяет серию, а число t – отдельные линии этой серии;

3) числа t и n определяют серию;

4) числа t и n определяют отдельные линии серии.

22.25. Как найти потенциал ионизации ϕ_i атома, если известна энергия ионизации E_i и заряд электрона e ?

1. $\phi_i = \frac{E_i}{e}$.
2. $\phi_i = E_i \cdot e$.
3. $\phi_i = E_i$.
4. Нет верного ответа.

22.26. Какая величина принимает квантовые значения, равные $n\hbar$?

1. Импульс электрона в атоме.
2. Момент импульса электрона в атоме.
3. Энергия электрона в атоме.

22.27. Из каких энергий складывается энергия атома по теории Бора?

1. Кинетическая энергия электрона.
2. Энергия взаимодействия ядра и электрона.
3. Кинетическая энергия ядра.
4. Кинетическая энергия электрона и потенциальная энергия взаимодействия электрона и ядра.

22.28. Что определяет главное квантовое число n ?

1. Энергетические уровни атома.
2. Число электронов в атоме.
3. Число протонов в атоме.
4. Число нейтронов в атоме.

22.29. Спектры каких атомов позволяет описать теория Бора?

1. Спектр атома водорода.
2. Спектр водородоподобной системы.
3. Спектр атома лития.
4. Спектр дважды ионизованного атома лития.

22.30. При каком значении числа n в обобщенной формуле Бальмера можно найти границу серии?

1. $n = \infty$.
2. $n = 0$.
3. $n = 1$.
4. $n = 2$.

22.31. Какое значение главного квантового числа n соответствует невозбужденному состоянию атома?

1. $n = 1$.
2. $n = 0$.
3. $n = 2$.
4. $n = 3$.

22.32. Какое значение n соответствует возбужденному состоянию атома?

1. $n = 1$.
2. $n = 2$.
3. $n = 3$.
4. $n = 4$.

22.33. Что является характерным для стационарного состояния атома (по Бору)?

1. Атом не излучает энергии.
2. Электроны движутся по стационарным круговым орбитам.
3. Момент импульса электрона должен иметь дискретные квантованные значения.
4. Атом поглощает энергию.

22.34. Когда происходит излучение энергии?

1. Если электрон переходит с более удаленной от ядра орбиты на более близкую.
2. Если электрон движется по стационарной орбите.
3. Если электрон переходит на более удаленную от ядра орбиту.

22.35. Когда происходит поглощение энергии?

1. Если электрон переходит с более удаленной от ядра орбиты на более близкую.
2. Если электрон движется по стационарной орбите.
3. Если электрон переходит на более удаленную от ядра орбиту.

22.36. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 1$ на уровень $n = 2$?

1. Излучение.
2. Поглощение.
3. Ничего не произойдет.

22.37. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 1$ на уровень $n = 3$?

1. Излучение.
2. Поглощение.
3. Ничего не произойдет.

22.38. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 1$ на уровень $n = 4$?

1. Излучение.
2. Поглощение.
3. Ничего не произойдет.

22.39. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 1$ на уровень $n = 5$?

1. Излучение.
2. Поглощение.
3. Ничего не произойдет.

22.40. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 1$ на уровень $n = 6$?

1. Излучение.
2. Поглощение.
3. Ничего не произойдет.

22.41. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 2$ на уровень $n = 1$?

1. Излучение.
2. Поглощение.
3. Ничего не произойдет.

22.42. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$?

1. *Излучение.* 2. *Поглощение.* 3. *Ничего не произойдет.*

22.43. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 4$ на уровень $n = 2$?

1. *Излучение.* 2. *Поглощение.* 3. *Ничего не произойдет.*

22.44. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 5$ на уровень $n = 2$?

1. *Излучение.* 2. *Поглощение.* 3. *Ничего не произойдет.*

22.45. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 6$ на уровень $n = 2$?

1. *Излучение.* 2. *Поглощение.* 3. *Ничего не произойдет.*

22.46. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 4$ на уровень $n = 3$?

1. *Излучение.* 2. *Поглощение.* 3. *Ничего не произойдет.*

22.47. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 5$ на уровень $n = 3$?

1. *Излучение.* 2. *Поглощение.* 3. *Ничего не произойдет.*

22.48. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 6$ на уровень $n = 3$?

1. *Излучение.* 2. *Поглощение.* 3. *Ничего не произойдет.*

22.49. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 7$ на уровень $n = 3$?

1. *Излучение.* 2. *Поглощение.* 3. *Ничего не произойдет.*

22.50. Что произойдет, если электрон перешел с уровня $n = 5$ на уровень $n = 4$?

1. *Излучение.* 2. *Поглощение.* 3. *Ничего не произойдет.*

Задачи

22.1. Определить энергию фотона, соответствующего третьей линии в первой инфракрасной серии атома водорода.

22.2. Определить энергию фотона, соответствующего первой линии видимой серии спектра атома водорода.

22.3. Определить энергию фотона, соответствующего второй линии видимой серии спектра атома водорода.

22.4. Определить энергию фотона, соответствующего третьей линии видимой серии спектра атома водорода.

22.5. Определить энергию фотона, соответствующего первой линии во второй инфракрасной серии атома водорода.

22.6. Определить энергию фотона, соответствующего первой линии в третьей инфракрасной серии атома водорода.

22.7. Определить энергию фотона, соответствующего четвертой линии видимой серии атома водорода.

22.8. Определить энергию фотона, соответствующего пятой линии видимой серии атома водорода.

22.9. Определить энергию фотона, соответствующего первой линии в четвертой инфракрасной серии атома водорода.

22.10. Определить энергию фотона, соответствующего первой линии в ультрафиолетовой серии атома водорода.

22.11. Найти кинетическую энергию электрона на первом энергетическом уровне.

22.12. Найти кинетическую энергию электрона на втором энергетическом уровне.

22.13. Найти кинетическую энергию электрона на четвертом энергетическом уровне.

22.14. Найти кинетическую энергию электрона на пятом энергетическом уровне.

22.15. Найти кинетическую энергию электрона на шестом энергетическом уровне.

22.16. Найти кинетическую энергию электрона на седьмом энергетическом уровне.

22.17. Найти кинетическую энергию электрона на восьмом энергетическом уровне.

22.18. Найти кинетическую энергию электрона на девятом энергетическом уровне.

22.19. Найти кинетическую энергию электрона на десятом энергетическом уровне.

22.20. Найти кинетическую энергию электрона на 11-м энергетическом уровне.

22.21. Найти скорость v движения электрона на первой борновской орбите атома водорода.

22.22. Найти скорость v движения электрона на второй борновской орбите атома водорода.

22.23. Найти скорость v движения электрона на четвертой борновской орбите атома водорода.

22.24. Найти скорость v движения электрона на пятой борновской орбите атома водорода.

22.25. Найти скорость v движения электрона на шестой борновской орбите атома водорода.

22.26. Найти скорость v движения электрона на седьмой борновской орбите атома водорода.

22.27. Найти скорость v движения электрона на восьмой борвской орбите атома водорода.

22.28. Найти скорость v движения электрона на девятой борвской орбите атома водорода.

22.29. Найти скорость v движения электрона на десятой борвской орбите атома водорода.

22.30. Найти скорость v движения электрона на 11-й борвской орбите атома водорода.

22.31. Найти наибольшую и наименьшую частоту в первой инфракрасной серии спектра водорода.

22.32. Найти наибольшую и наименьшую длину волны во второй инфракрасной серии спектра водорода.

22.33. Найти наибольшую и наименьшую длину волны в третьей инфракрасной серии спектра водорода.

22.34. Найти наибольшую и наименьшую длину волны в видимой части спектра атома водорода.

22.35. Найти наибольшую и наименьшую длину волны в ультрафиолетовой серии атома водорода.

22.36. Найти наибольшую и наименьшую длину волны в четвертой инфракрасной серии атома водорода.

22.37. Найти наибольшую и наименьшую частоту во второй инфракрасной серии спектра атома водорода.

22.38. Найти наибольшую и наименьшую частоту в ультрафиолетовой серии спектра атома водорода.

22.39. Найти наибольшую и наименьшую частоту в видимой серии спектра атома водорода.

22.40. Найти наибольшую и наименьшую частоту в четвертой инфракрасной серии спектра атома водорода.

22.41. Найти первый потенциал возбуждения атома водорода.

22.42. Определить длину волны, соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.

22.43. Определить энергию ϵ фотона, испускаемого при переходе электрона с третьего энергетического уровня на первый.

22.44. Определить, на сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 4,86 \cdot 10^{-7}$ м.

22.45. Определить длину волны λ спектральной линии, излучаемой при переходе с более высокого энергетического уровня на более низкий уровень, если при этом энергия атома уменьшилась на $\Delta\epsilon = 10$ эВ.

22.46. Определить потенциальную энергию электрона на первой борвской орбите.

22.47. Определить частоту f обращения электрона, находящегося на первой боровской орбите.

22.48. Используя теорию Бора, определить радиус ближайшей к ядру орбиты.

22.49. Используя теорию Бора, определить орбитальный магнитный момент p_m электрона, движущегося по третьей орбите атома водорода.

Примечание: $|p_m| = (e/2m) \cdot L_e$, здесь e и m – заряд и масса электрона; L_e – механический момент импульса электрона.

22.50. Определить изменение орбитального механического момента электрона при переходе его из возбужденного состояния в основное с испусканием фотона с длиной волны $\lambda = 1,02 \cdot 10^{-7}$ м.

22.51. Определить полную энергию электрона, находящегося на первой боровской орбите в атоме водорода.

22.52. Определить частоту обращения электрона по третьей орбите в атоме водорода.

22.53. Определить число N спектральных линий, испускаемых атомарным водородом, возбужденным на 8-й энергетический уровень.

22.54. Определить число N спектральных линий, испускаемых атомарным водородом, возбужденным на 12-й энергетический уровень.

22.55. Определить, на сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 1,21 \cdot 10^{-7}$ м.

22.56. Определить, на сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 18,7 \cdot 10^{-7}$ м.

22.57. Определить, на сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 0,97 \cdot 10^{-7}$ м.

22.58. Определить частоту обращения электрона по второй боровской орбите в атоме водорода.

22.59. Определить частоту обращения электрона по четвертой боровской орбите в атоме водорода.

22.60. Определить частоту обращения электрона по пятой боровской орбите в атоме водорода.

ЗАНЯТИЕ 23

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ

Теория

Мы проделали долгий путь от классической физики Ньютона – Галилея до ее современных разделов – квантовой механики. Двойственная корпускулярно-волновая природа света (занятие «Фотоэффект. Эффект Комптона»), а также существующая в природе симметрия послужили основанием для гипотезы французского ученого Луи де Бройля (1923) об универсальности корпускулярно-волнового дуализма. Де Бройль утверждал, что не только частицы света – фотоны, – но и электроны и любые другие частицы материи наряду с корпускулярными обладают также волновыми свойствами. Но это нужно было доказать, т. е. необходимо было опытным путем установить, что наблюдаются явления, свидетельствующие о волновой природе частиц – интерференция или дифракция, например, электронов.

В последующие 30–40-е годы XIX века во многочисленных опытах была обнаружена дифракция электронных пучков и отдельных электронов, а позднее и для нейтронов, протонов, атомных и молекулярных пучков. Ранее полученное для фотонов соотношение $P_f = h/\lambda$ де Бройль обобщил для любых волновых процессов, связанных с частицами, обладающими импульсом P :

$$\lambda = h/P. \quad (1)$$

В нерелятивистском случае связь импульса P с кинетической энергией E_k ($E_k \ll E_0$, E_0 – энергия покоя частицы)

$$P = \sqrt{2m_0 E_k}.$$

Для релятивистского случая (E_k сравнима с E_0):

$$P = \frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + E_k)E_k}.$$

Тогда соотношение (1) для длины волны

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}}$$

Энергия покоя электрона $E_0 = m_0 c^2 = 0,51$ МэВ; (1 эВ = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж; 1 МэВ = 10^6 эВ). Справедлива для любых свободных частиц (т. е. частица движется по инерции в отсутствие внешнего силового поля) также и связь между энергией ε и частотой ν волн де Бройля:

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega,$$

($\hbar = h/2\pi$; ω – циклическая частота).

Некоторые свойства волн де Бройля

Свойствам электромагнитных и упругих волн было посвящено занятие «Колебания. Волны». Здесь мы рассматриваем волны особого рода – волны де Бройля. Вычислим для свободной частицы массой m и движущейся со скоростью v фазовую и групповую скорости волн де Бройля.

Фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k},$$

здесь $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Учитывая, что $\varepsilon = \hbar\omega$, $P = \hbar k$, получим:

$$v_{\phi} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{P} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}. \quad (2)$$

Т. к. $c > v$, то фазовая скорость (т. е. скорость перемещения фазы волны) волн де Бройля больше скорости света в вакууме. Как ранее указывалось, фазовая скорость волн может быть как больше, так и меньше c в отличие от групповой скорости.

Если в соотношение (2) поставить $v = \frac{h}{m\lambda}$, то

$$v_{\phi} = \frac{c^2 m}{h} \cdot \lambda.$$

Из этого следует, что фазовая скорость волн де Бройля зависит от длины волны и, следовательно, они испытывают дисперсию.

Групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dP}.$$

Для свободной частицы:

$$E = c\sqrt{P^2 + m_0 c^2} \quad \text{и} \quad \frac{dE}{dP} = \frac{cP}{\sqrt{P^2 + m_0 c^2}} = \frac{c^2 P}{E} = \frac{c^2 m v}{mc^2} = v.$$

Следовательно, групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы:

$$u = \frac{dE}{dP} = v.$$

Групповая скорость фотона

$$u = \frac{Pc^2}{E} = \frac{mc \cdot c^2}{mc^2} = c,$$

т. е. равна скорости света в вакууме.

Для тел, масса которых несоизмеримо велика по сравнению с массой атомов, молекул и элементарных частиц (объектов квантовой меха-

ники), никакие волновые свойства не проявляются. Например, для пули массой $m = 10^{-3}$ кг при скорости $v = 10^2$ м/с длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{10^{-3} \cdot 10^2} = 6,62 \cdot 10^{-33} \text{ м.}$$

Легко сообразить, что такая длина волны никакими дифракционными опытами не может быть обнаружена. Поэтому можно считать, что волновые свойства у макроскопических тел практически отсутствуют. На этом особенности объектов квантовой механики (микрочастиц) не исчерпываются. Соотношения неопределенностей Гейзенберга устанавливают границы применимости понятий классической физики в микромире.

Соотношения неопределенностей Гейзенберга

В. Гейзенберг, учитывая волновые свойства микрочастиц, пришел к выводу (1927), что объект микромира невозможно одновременно и с заданной точностью характеризовать координатой и импульсом. В классической механике частица движется по определенной траектории, и в любой момент точно фиксированы координата и импульс. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга, микрочастица не может иметь одновременно и определенную координату (x, y, z), и определенную соответствующую проекцию импульса (P_x, P_y, P_z), причем неопределенности этих величин удовлетворяют условиям

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar; \quad \Delta y \cdot \Delta P_y \geq \hbar; \quad \Delta z \cdot \Delta P_z \geq \hbar.$$

Если выразить соотношения неопределенностей в виде

$$\Delta x \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m}; \quad \Delta y \Delta v_y \geq \frac{\hbar}{m}; \quad \Delta z \Delta v_z \geq \frac{\hbar}{m},$$

то можно заключить, что чем больше масса частицы, тем меньше неопределенность (т. е. произведение $\Delta x \Delta v_x$) координаты и скорости и с тем большей точностью можно применить к этой частице понятие траектории.

Например, для пылинки массой 10^{-13} кг и линейными размерами 10^{-6} м, координата которой определена с точностью до 1/100 ее размера (т. е. $\Delta x \cong 10^{-8}$ м), неопределенность скорости

$$\Delta v_x = (6,62 \cdot 10^{-34}) / (10^{-8} \cdot 10^{-13}) = 6,62 \cdot 10^{-14} \text{ м/с.}$$

Таким образом, координата и скорость макроскопических тел могут быть измерены точно.

Все это хорошо, конечно, но в конкретном случае Вы должны решить, оставаясь один на один с условием задачи, как соотносятся координата и неопределенность, импульс и его неопределенность. Для такого случая есть «Подсказка». Заметим, что если рассматривается атом, то

неопределенность Δx нахождения электрона внутри атома определяется как $\Delta x = l/2$, где l – линейные размеры атома. Неопределенность импульса ΔP принимается равной импульсу P (в нерелятивистском случае, когда $E_k < 5$ кэВ).

Соотношение неопределенностей существует также и для энергии. Например, если частица находится в нестационарном (т. е. возбужденном) состоянии в течение времени t и обладает некоторой энергией E , то энергия определяется с ограниченной степенью точности. Если обозначить ΔE неопределенность в задании E , то $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$, или $\Delta E = \hbar/\Delta t$.

Это означает, что разброс энергии ΔE возрастает с уменьшением среднего времени жизни системы в данном состоянии. Этим, например, объясняется естественная ширина спектральных линий.

Волновая функция и статистический вероятностный смысл волн де Бройля

Дифракционная картина, наблюдаемая для микрочастиц, характеризуется неодинаковым распределением потоков частиц по различным направлениям, так же как и потоков фотонов при дифракции света. В максимумах наблюдается большее число частиц, чем в минимумах. Наличие максимумов в дифракционной картине означает, что эти направления соответствуют наибольшей интенсивности волн, следовательно, и волн де Бройля. Но это также означает, что в максимумах наблюдается большее число частиц, т. е. интенсивность волн де Бройля в данной точке пространства определяет число частиц, попавших в эту точку.

Таким образом, дифракционная картина для микрочастиц является проявлением статистической (вероятностной) закономерности, согласно которой частицы попадают в те места, где интенсивность волн де Бройля наибольшая.

Согласно статистической интерпретации, волны де Бройля следует рассматривать как волны вероятности. Более определенно: интенсивность волн де Бройля в каком-либо месте пространства связана с вероятностью обнаружить частицу в этом месте.

Поскольку интенсивность волн пропорциональна квадрату амплитуды, то квадрат модуля амплитуды волн де Бройля в данной точке является мерой вероятности того, что частица обнаруживается в этой точке.

Принимается ли это за амплитуду волн де Бройля? В качестве амплитуды вероятности немецкий физик М. Борн предложил так называемую ψ -функцию (или волновую функцию). Определим: вероятность $d\omega$ того, что частица находится в элементе объема dV , пропорциональна $|\psi|$ и элементу объема dV :

$$d\omega = |\psi|^2 dV = |\psi|^2 dx dy dz.$$

Физический смысл имеет не сама ψ -функция, а квадрат модуля, т. е. $|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$, где ψ^* – функция, комплексно сопряженная с ψ . Величина $|\psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности:

$$\rho_\omega = \frac{d\omega}{dV} = |\psi|^2,$$

т. е. определяет вероятность нахождения частицы в единичном объеме в окрестности точки с координатами x, y, z . Если учесть, что ψ -функция является амплитудой, то квадрат $|\psi|^2$ есть интенсивность волн де Бройля.

Вероятность в обыденном смысле нам в общем-то знакома: вероятность того, что можно получить миллион долларов, равна нулю, а того, что день сменит ночь, равна единице. Как же дать понятие вероятности?

Вы знаете, что пределы изменения вероятности – от нуля до единицы, а вероятность – это отношение числа событий, благоприятствующих данному, к общему числу событий. Учитывая, что частица находится где-то в бесконечном пространстве, необходимо выполнить условие

нормировки вероятностей $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1$, где данный интеграл вычис-

ляется по всему бесконечному объему. Кроме того, ψ -функция должна быть конечной (вероятность не может быть больше единицы), однозначной (вероятность не может быть неоднозначной функцией) и непрерывной (вероятность не может изменяться скачком).

Подсказка

1. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 510$ кВ. Найти длину волны де Бройля.

Решение

Длина волны де Бройля определяется из соотношения

$$\lambda = \frac{h}{P}. \quad (1)$$

Импульс P в зависимости от кинетической энергии частицы может определяться по двум соотношениям:

$$P = \sqrt{2m_0 E_k} \quad (\text{нерелятивистский случай}); \quad (2)$$

$$P = -\frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + E_k)E_k} \quad (\text{релятивистский случай}). \quad (3)$$

Чтобы решить, какое соотношение применить в данном случае, надо вычислить кинетическую энергию электрона и сравнить значение с

энергией покоя электрона $E_0 = 0,51$ МэВ. Кинетическая энергия электрона, прошедшего разность потенциалов U (как это уже известно Вам из раздела «Электричество»), равна

$$E_k = |e| \cdot U$$

$$E_k = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 510 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

или, учитывая, что $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

$$E_k = 510 \cdot 10^3 \text{ эВ} = 0,51 \text{ МэВ},$$

т. е. равна энергии покоя электрона. Следовательно, для вычисления импульса нужно применить релятивистскую формулу (3). Учтем, что $E_k = E_0$:

$$\lambda = \frac{h}{\frac{1}{c} \sqrt{(2m_0c^2 + m_0c^2)m_0c^2}} = \frac{h}{\sqrt{3}m_0c}. \quad (4)$$

Но $h/m_0c = \lambda_k$ (комptonовская длина волны), $\lambda_k = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м. Подставив это значение в выражение (4), получим

$$\lambda = \frac{\lambda_k}{\sqrt{3}} = \frac{2,43 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{3}} = 1,4 \cdot 10^{-12} = 1,4 \text{ пм}.$$

2. Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределенности Δx координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 %?

Решение

Длину волны де Бройля определим из соотношения

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{P}. \quad (1)$$

Неопределенность координаты Δx с соответствующей неопределенностью проекции импульса P_x связана соотношением неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar, \text{ или } \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta P_x}. \quad (2)$$

Отношение $\frac{\Delta x}{\lambda}$ найдем, поделив выражение (2) на (1):

$$\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{100}{2\pi} = \frac{100}{6,28} = 15,9 \text{ (учли, что } \frac{P}{\Delta P} = 100).$$

После округления $\frac{\Delta x}{\lambda} = 16$, т. е. дебройлевская длина волны меньше неопределенности Δx в 16 раз.

3. Кинетическая энергия E_k электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные размеры атома. Ответ дать в пм (1 пм = 10^{-12} м).

Решение

Неопределенность координаты и неопределенность соответствующей проекции импульса электрона связаны соотношением

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar, \quad (1)$$

где Δx – неопределенность координаты электрона; ΔP_x – неопределенность проекции импульса. Из этого соотношения следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Обозначим линейные размеры атома буквой l , тогда электрон в атоме будет находиться в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2$. Соотношение неопределенностей (1) запишем теперь в виде

$$\frac{l}{2} \cdot \Delta P \geq \hbar, \quad (2)$$

откуда

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta P}.$$

Неопределенность импульса не может превышать значения самого импульса, т. е. $\Delta P \leq P$, поскольку $E_k \ll 5$ кэВ, то можно принять $\Delta P = P$. В нерелятивистском случае $P = \sqrt{2mE_k}$ (см. «Теорию»), отсюда

$$\Delta P = \sqrt{2mE_k}$$

Перейдя в выражении (2) к равенству

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mE_k}},$$

подставим числовые значения:

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = \frac{2,1 \cdot 10^{34}}{\sqrt{291,2 \cdot 10^{-50}}} = \frac{2,1 \cdot 10^{34}}{17,06 \cdot 10^{-25}} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 123 \text{ пм}.$$

4. На грань кристалла никеля падает параллельный пучок электронов. Кристалл поворачивают так, что угол скольжения θ изменяется. Когда угол делается равным 64° , наблюдается максимальное отражение электронов, соответствующее дифракционному максимуму первого порядка. Принимая расстояние d между атомными плоскостями кристалла, равным 200 пм, определить длину волны де Бройля λ электронов и их скорость v .

Применить для расчета дифракции от кристаллической решетки формулу Вульфа – Брэггов:

$$2d \sin \theta = k\lambda, \quad (1)$$

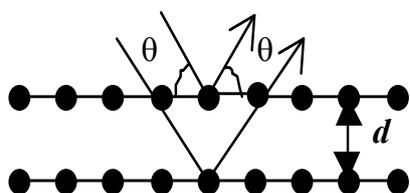


Рис. 23.1

здесь k – порядок дифракционного максимума; θ – угол скольжения; d – расстояние между атомными плоскостями (рис. 23.1). Ответ дать в пм и Мм/с.

Решение

Из уравнения (1) $\lambda = \frac{2d \sin \theta}{k}$, подставив числовые данные, получим

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \cdot 200 \cdot 10^{-12} \cdot \sin 64^\circ = 400 \cdot \sin 64^\circ \cdot 10^{-12} = 0,8988 \cdot 400 \cdot 10^{-12} = \\ &= 359,52 \cdot 10^{-12} = 360 \text{ пм.} \end{aligned}$$

Скорость электрона выразим из формулы длины волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m\mathbf{v}} = \frac{h}{m\mathbf{v}}; \quad \mathbf{v} = \frac{h}{m\lambda}.$$

Подставим числовые данные:

$$\mathbf{v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 360 \cdot 10^{-12}} = \frac{6,63 \cdot 10^6}{9,1 \cdot 0,36} = 2,02 \cdot 10^6 \text{ м/с} = 2 \text{ Мм/с.}$$

5. На грань некоторого кристалла под углом $\alpha = 60^\circ$ к поверхности падает параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью. Определить скорость v электронов, если они испытывают интерференционное отражение первого порядка. Расстояние d между атомными плоскостями равно 0,2 нм.

Решение

Вспомним интерференцию в тонких пленках (рис. 23.2). Условие интерференционного максимума для разности хода Δ равно

$$\Delta = \pm k\lambda. \quad (1)$$

Поскольку оба луча отражаются от более плотной среды (луч 2 отражается от атомной плоскости внутри кристалла), они испытывают потерю полуволны, отсюда разность хода равна

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}. \quad (2)$$

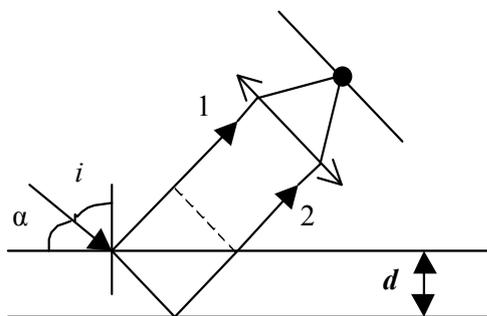


Рис. 23.2

Ввиду того, что отражение идет между атомными плоскостями, показатель преломления $n = 1$. Окончательно, приравняв правые части (1) и (2), получим

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = k\lambda, \quad k = 1 \text{ (по условию).}$$

Отсюда

$$2d\sqrt{1 - \sin^2 i} = \lambda.$$

Скорость электронов найдем из соотношения де Бройля для длины волны:

$$\lambda = \frac{h}{mv}; \quad v = \frac{h}{\lambda m},$$

или

$$v = \frac{h}{2d\sqrt{1 - \sin^2 i} \cdot m}.$$

Подставим числовые данные:

$$v = \frac{6,33 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-9} \sqrt{1 - 0,25} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = \frac{6,63 \cdot 10^6}{0,4 \cdot 9,1 \cdot 0,86} = 2,1 \text{ Мм/с.}$$

ТЕСТ

Вопросы

- 23.1.** У какой частицы практически отсутствуют волновые свойства?
1. Электрона. 2. Пылинки ($m = 10^{-9}$ кг).
3. Атома. 4. Протона.
- 23.2.** Какая частица может иметь точно определенную координату и импульс?
1. Электрон. 2. Протон.
3. Атом. 4. Пылинка ($m = 10^{-10}$ кг).
- 23.3.** Укажите объект изучения квантовой механики:
1. Земля. 2. Солнце. 3. Электрон.
4. Луна. 5. Пылинка ($m = 10^{-12}$ кг).
- 23.4.** К какой частице с наибольшей точностью можно применить понятие траектории?
1. Пылинка. 2. Протон. 3. Электрон. 4. Атом.
- 23.5.** Какая величина является интенсивностью волн де Бройля?
1. ψ . 2. ψ^2 . 3. $1/\psi$. 4. $|\psi|^2$.
- 23.6.** Какая величина имеет смысл плотности вероятности волн де Бройля?
1. ψ . 2. ψ^2 . 3. $1/\psi$. 4. $|\psi^2|$.
- 23.7.** Какое заключение о природе волн де Бройля правильное?
Волны де Бройля – это
1) волны вероятности;
2) электромагнитные волны;
3) упругие волны.
- 23.8.** Укажите соотношение для определения фазовой скорости волн де Бройля.
1. $\frac{\omega}{k}$. 2. $v_{\phi} = \frac{c^2 m}{h} \cdot \lambda$. 3. $\frac{dE}{dP}$.
- 23.9.** Какова связь между энергией и частотой волн де Бройля для свободной частицы, движущейся по инерции?
1. $\varepsilon = h\nu$. 2. $\varepsilon = \hbar\omega$. 3. $\varepsilon = \hbar\nu$.
- 23.10.** Какова связь между импульсом частицы и длиной волны де Бройля данной частицы?
1. $\lambda = 2\pi\hbar/P$. 2. $\lambda = h/P$. 3. $P = h/\lambda$. 4. $P = h \cdot \lambda$.
- 23.11.** Каким соотношением определяется волновое число k ?
1. $k = \omega/v_{\phi}$. 2. $k = 2\pi/\lambda$. 3. $k = P/\hbar$. 4. $k = \lambda/2\pi$.

23.12. Каким соотношением определяется импульс частицы?

1. $P = \hbar \cdot k$. 2. $P = mv$. 3. $P = h/\lambda$. 4. $P = h \cdot \lambda$.

23.13. Групповая скорость фотона

- 1) равна фазовой скорости волны;
2) равна скорости распространения света в вакууме;
3) превышает скорость распространения света в вакууме.

23.14. В соотношении неопределенностей Гейзенберга $\Delta x \cdot \Delta P \geq \hbar$.

Укажите все входящие в него величины.

1. Δx – погрешность определения координаты x .
2. ΔP_x – неточность определения проекции импульса P_x .
3. $\hbar = h/2\pi$.
4. Δx – изменение координаты x частицы при движении по траектории.

23.15. Укажите все входящие в соотношение неопределенностей для энергии $\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar$ величины.

1. ΔW – разброс в задании энергии в течение времени Δt .
2. Δt – время, в течение которого частица находится в нестационарном состоянии и обладает энергией W .
3. ΔW – изменение энергии частицы при движении в силовом поле.

23.16. В максимумах дифракционной картины наблюдается

- 1) большее число частиц, чем в минимумах;
2) большая интенсивность волн, чем в минимумах;
3) светлое пятно при дифракции электронов;
4) наибольшая вероятность обнаружить частицу в данном месте.

23.17. Найдите верные заключения о ψ -функции.

1. Физический смысл имеет не сама ψ -функция, а квадрат модуля.
2. Физический смысл имеет не сама ψ -функция, а функция ψ^* , комплексно сопряженная с ψ .

3. Величина $|\psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности, т. е. определяет вероятность нахождения частицы в единичном объеме в окрестности точки с координатами x, y, z .

4. Функция $|\psi|^2$ есть интенсивность волн де Бройля.

23.18. Из какого соотношения можно найти импульс нерелятивистской частицы?

1. $P = \sqrt{E^2 / c^2 - m_0 c^2}$. 2. $P = \frac{2E}{v}$. 3. $P = mc$. 4. $P = m_0 c$.

23.19. Из какого соотношения можно найти импульс релятивистской частицы?

1. $P = \sqrt{E^2 / c^2 - m_0 c^2}$ 2. $P = m \mathbf{v}$. 3. $P = \frac{2E}{v}$. 4. $P = m_0 c$.

23.20. Чему равен интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV$?

1. 1. 2. 0. 3. -1.

23.21. Что определяет выражение $|\psi|^2 dV$?

1. Вероятность нахождения частицы в объеме dV .
2. Плотность вероятности нахождения частицы в объеме dV .
3. Физического смысла не имеет.

23.22. Что определяет величина $|\psi|^2$?

1. Плотность вероятности. 2. Вероятность.
3. Физического смысла не имеет.

23.23. Плотность вероятности

1) определяет вероятность обнаружения частицы в единичном объеме;

2) определяет вероятность обнаружения частицы в объеме dV ;

3) определяет ψ -функцию.

23.24. Каковы пределы изменения вероятности?

1. От 0 до 1.
2. От -1 до +1.
3. От 0 до ∞ .
4. От $-\infty$ до $+\infty$.

23.25. Укажите неверное заключение: ψ -функция должна быть

- 1) конечной; 2) неоднозначной; 3) непрерывной.

23.26. Какое из представленных выражений является условием нормировки вероятностей?

1. $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1$. 2. $|\psi|^2 dV = d\omega$. 3. $P_\omega = |\psi|^2$.

23.27. ψ -функция должна быть

- 1) бесконечной; 2) однозначной; 3) прерывистой.

23.28. Де Бройль утверждал, что волновыми свойствами обладают

- 1) электроны; 2) фотоны; 3) кванты.

23.29. Де Бройль утверждал, что волновыми свойствами обладают

- 1) электроны; 2) протоны; 3) нейтроны; 4) фотоны.

23.30. Какие явления свидетельствуют о волновой природе света?

1. Интерференция. 2. Дифракция.
3. Поляризация. 4. Эффект Комптона.

23.31. Какие явления свидетельствуют о корпускулярной природе света?

1. Интерференция. 2. Фотоэффект. 3. Эффект Комптона.

23.32. Согласно каким ограничениям микрообъект не может иметь одновременно определенную координату (x, y, z) и определенную соответствующую проекцию импульса (P_x, P_y, P_z)?

1. Согласно соотношениям неопределенностей Гейзенберга.
2. Согласно гипотезе де Бройля.
3. Согласно теории вероятностей.
4. Согласно статистическим закономерностям.

Задачи

23.1. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 510$ кВ. Найти длину волны де Бройля.

23.2. Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределенности Δx координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 %?

23.3. Кинетическая энергия E_k электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные размеры атома.

23.4. На грань кристалла никеля падает параллельный пучок электронов. Кристалл поворачивают так, что угол скольжения θ изменяется. Когда угол делается равным 64° , наблюдается максимальное отражение электронов, соответствующее дифракционному максимуму первого порядка. Принимая расстояние d между атомными плоскостями кристалла равным 200 пм, определить длину волны де Бройля λ электронов и их скорость v .

23.5. На грань некоторого кристалла под углом $\alpha = 60^\circ$ к поверхности падает параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью. Определить скорость v электронов, если они испытывают интерференционное отражение первого порядка. Расстояние d между атомными плоскостями равно 0,2 нм.

23.6. Найти длину волны де Бройля λ электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 700 кВ.

23.7. Электрон с кинетической энергией $E_k = 15$ эВ находится в металлической пылинке диаметром $d = 1$ мкм. Оценить относительную неточность Δv , с которой может быть определена скорость электрона.

23.8. Предполагая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определить относительную неточность $\Delta P/P$ импульса этой частицы.

23.9. Электрон движется по окружности радиусом $r = 0,5$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 8$ мТл. Определить длину волны де Бройля электрона.

23.10. Электрон движется со скоростью $v = 200$ Мм/с. Определить длину волны де Бройля λ , учитывая изменения массы электрона в зависимости от скорости.

23.11. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна $0,1$ нм?

23.12. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \Delta P \geq \hbar$, оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \approx 0,1$ нм.

23.13. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов 206 В, имеет длину волны де Бройля, равную $0,02 \cdot 10^{-10}$ м. Найти массу этой частицы, если известно, что заряд численно равен заряду электрона.

23.14. Найти длину волны шарика массой 1 г, движущегося со скоростью 1 см/с.

23.15. Найти длину волны атома водорода, движущегося со скоростью, равной средней квадратичной скорости при температуре 300 К.

23.16. Длина волны излучаемого атомом фотона составляет $\lambda = 0,6$ мкм. Принимая время жизни возбужденного состояния $\Delta t = 10^{-8}$ с, определить отношение естественной ширины энергетического уровня, на котором был возбужден электрон, к энергии, излученной атомом $\Delta E/E$.

23.17. Принимая, что электрон находится внутри атома диаметром $d = 0,3$ нм, определить (в электронвольтах) неопределенность энергии этого электрона. Принять $\Delta E \cong E$; $\Delta P \cong P$; $\Delta x = d/2$.

23.18. Оценить нижнюю границу кинетической энергии E_k протона в ядре, предполагая, что радиус ядра $r = 10^{-12}$ см.

23.19. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину Γ энергетического уровня в атоме водорода, находящегося в основном состоянии (время пребывания бесконечно велико).

23.20. Используя соотношение неопределенностей, оценить размерность энергетического уровня в атоме водорода для возбужденного состояния (время жизни равно 10^{-8} с).

23.21. Найти отношение длин волн де Бройля λ_4 / λ_2 электронов в атоме водорода при переходе его с четвертой боровской орбиты на вторую.

ЗАНЯТИЕ 24

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА. ЧАСТИЦА В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

Теория

Задача настоящего занятия – познакомить Вас с уравнением, которое играет в квантовой механике такую же роль, как, к примеру, уравнение II закона Ньютона в классической механике. Уравнение движения частицы

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot m = \vec{F}, \quad (\vec{r} = \sqrt{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}})$$

позволяет в каждый момент времени определять координаты точки пространства, где находится частица, т. е. определять положение частицы в пространстве.

В предыдущем занятии говорилось, что в квантовой механике надо перейти к вероятностному подходу, т. е. определять только вероятность нахождения частицы в окрестности точки x, y, z .

Уравнение квантовой механики должно быть уравнением относительно квадрата модуля волновой функции $|\psi|^2$ (т. к. эта величина и определяет вероятность пребывания частицы), кроме того, оно должно быть волновым, т. к. описывает волновые свойства частиц. Например, волновое уравнение

$$\Delta S = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

для электромагнитных волн выглядит следующим образом:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad \Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – это оператор Лапласа; v – фазовая скорость; \vec{E} и \vec{H} – напряженности электрического и магнитного полей.

Точное решение таких уравнений сопряжено со значительными трудностями, поэтому в физике используют всевозможные приближения. В этом мы убедимся чуть позже. А сейчас мы должны познакомиться с основным уравнением нерелятивистской квантовой механики. Это уравнение было найдено Шредингером в 1926 году:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = i\hbar\frac{d\Psi}{dt}, \quad (1)$$

где $\hbar = h/2\pi$; m – масса частицы; Δ – оператор Лапласа; i – мнимая единица (т. е. $i = \sqrt{-1}$); $U(x, y, z, t)$ – потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется; $\Psi(x, y, z, t)$ – искомая волновая функция частицы.

Это уравнение Вам покажется упавшим с неба. Конечно, со II законом Ньютона сравнивать трудно, но в квантовой механике и не следует ожидать таких ясных и наглядных представлений, как в классической физике. А вот с электродинамикой Максвелла связь, как мы видели, обнаруживается благодаря волновому уравнению. Мы не можем представить здесь весь путь, каким Э. Шредингер пришел к этому уравнению (оно, как уравнение Ньютона и Максвелла, не выводится, а постулируется), но чтобы уравнение Шредингера не казалось упавшим с неба, покажем очень кратко, как к нему можно прийти.

Во-первых, нужно учесть, что функция Ψ принципиально комплексна (т. е. физический смысл выражается через вещественную ее часть). Ранее для одномерного случая мы рассматривали уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x :

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx),$$

или в комплексной форме

$$\xi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}.$$

Следовательно, для плоской волны де Бройля

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (2)$$

Заменим: $\omega = E/\hbar$, $k = P/\hbar$, получим

$$\Psi = \Psi_0 e^{-(i/\hbar)(Et - Px)}. \quad (3)$$

В квантовой механике показатель экспоненты должен быть со знаком минус.

Во-вторых, уравнения (2) и (3) являются решением дифференциального уравнения, которое можно найти, взяв первую производную от Ψ по t и вторую производную по x . Надо также выразить E и P^2 , а затем, используя связь между E и P ($E = P^2/(2m_0)$), получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{\hbar^2\partial^2\Psi}{2m\partial x^2} = i\cdot\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (4)$$

которое совпадает с вышеприведенным уравнением Шредингера для свободной частицы ($U = 0$) и одномерного случая.

Уравнение (1) является общим уравнением Шредингера, или уравнением Шредингера, зависящим от времени (временное уравнение Шредингера). Особое значение в квантовой механике имеют стацио-

нарные состояния. Это такие состояния, в которых все наблюдаемые физические параметры не меняются с течением времени. Сама волновая функция Ψ принципиально ненаблюдаема.

Для стационарных состояний уравнение (1) можно упростить, исключая зависимость Ψ от времени (то, о чем мы говорили в самом начале), т. е. найти уравнение Э.Шредингера для состояний с фиксированными (наблюдаемыми) значениями энергии. Это возможно, если частица движется в стационарном силовом поле, т. е. функция $U = U(x, y, z)$ не зависит явно от времени и имеет смысл потенциальной энергии.

В данном случае решение уравнения Шредингера может быть представлено в виде произведения двух функций, одна из которых есть функция только координат, а другая – только времени, причем зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t} = e^{-i(E/\hbar)t}$. Поэтому

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \cdot e^{-i(E/\hbar)t}, \quad (5)$$

где E – полная энергия частицы, постоянная в случае стационарного поля.

Подставив (5) в (1), и после соответствующих преобразований получим

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E - U)\Psi = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется уравнением Шредингера для стационарных состояний. Оно имеет решения, отражающие определенный физический смысл, только при определенном наборе значений энергии E , характерном для данной задачи. Эти значения энергии называются собственными, а соответствующие им решения – собственными функциями.

Хочется напомнить, что уравнение Шредингера является нерелятивистским, релятивистское уравнение квантовой механики было найдено П. Дираком годом позже. Но это уравнение мы записывать не будем, это не входит в нашу задачу. А вот уравнение Шредингера для свободной частицы нам необходимо записать.

Движение свободной частицы

Свободная частица – частица, движущаяся в отсутствие внешних полей.

Пусть свободная частица движется вдоль оси x . Поскольку силовое поле отсутствует, то потенциальная энергия частицы $U(x) = \text{const}$ и ее можно принять равной нулю (за нулевой уровень потенциальной энергии). Тогда полная энергия частицы совпадает с ее кинетической энергией. В этом случае уравнение Шредингера для стационарных состояний (и свободной частицы) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi = 0.$$

*Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме»
с бесконечно высокими «стенками»*

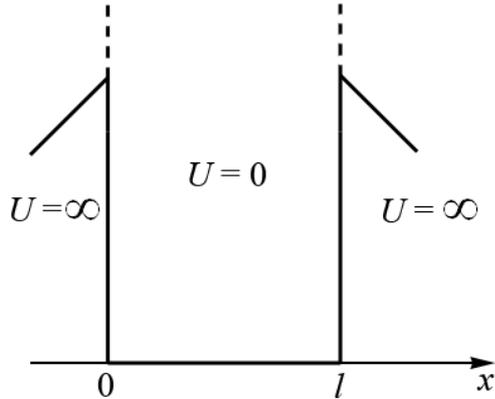


Рис. 24.1

Одномерной «потенциальной ямой» прямоугольной формы называется потенциальная функция $U(x)$, принимающая на интервале $0, 0 \leq x \leq l$ постоянное значение, равное нулю ($U=0$) и $U(x) = \infty$ при $x = 0$ и $x = l$ (рис. 24.1), здесь l – ширина «ямы».

Значение потенциальной ямы заключается в возможности получения точного решения уравнения Шредингера для свободной частицы (это как раз те упрощения, о которых мы говорили в самом начале и которые позволяют получить не только качественный, но и

количественный результат).

Уравнение Шредингера для одномерной задачи:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0. \quad (7)$$

Поскольку «стенки ямы» бесконечно велики, частица не может проникнуть за пределы ямы, поэтому вероятность ее обнаружения за пределами ямы равна нулю, следовательно, и волновая функция также равна нулю. Т.е. граничные условия для функции Ψ имеют вид

$$\Psi(0) = \Psi(l) = 0.$$

В пределах ямы ($0 \leq x \leq l$) уравнение Шредингера ($U = 0$) сведется к уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k^2 \Psi = 0, \quad (8)$$

где $k^2 = 2mE/\hbar^2$ – волновое число ($k = 2\pi/\lambda$). Общее решение дифференциального уравнения (8):

$$\Psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

Поскольку $\Psi(0) = 0$, то при $A \neq 0$ и $\sin kx \neq 0$ $B = 0$ и наоборот, но оказывается, что для дальнейших рассуждений неважно, какой выбрать вариант ($B = 0$ или $A = 0$), мы выберем $B = 0$. Тогда

$$\Psi(x) = A \sin kx. \quad (9)$$

Если $x = l$, то условие $\Psi(l) = A \sin kl = 0$ выполняется только при $kl = n\pi$, где n – целые числа, т. е. необходимо, чтобы

$$k = n\pi/l.$$

Подставив в выражение $k^2 = 2mE/\hbar^2$ соотношение $k = n\pi/l$, для энергии E_n получим

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad (n = 1, 2, 3).$$

Это означает, что энергия E_n частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими «стенками» принимает лишь определенные дискретные значения (энергия квантуется). Квантованные значения энергии E_n называются уровнями энергии, а число n , определяющее энергетические уровни частицы, – главным квантовым числом. Постоянную A найдем из условия нормировки Ψ -функции

$$\int_0^l |\Psi|^2 dx = 1 \quad (\text{частица находится внутри ямы}).$$

Подставим в (9) выражение $k = n\pi/l$, получим

$$\Psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

По условию нормировки

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx = 1. \quad (10)$$

Известно, что

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax.$$

Интегрируя, придем к выражению

$$\int_0^l \sin^2 \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx = \frac{1}{2}x \Big|_0^l - \frac{1}{4\pi n} \sin 2 \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^l,$$

но $\sin n \cdot 2\pi = 0$, поэтому

$$\int_0^l \sin^2 \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx = \frac{l}{2}. \quad (11)$$

Подставим (11) в (10) и получим $A^2 \cdot \frac{l}{2} = 1$.

Отсюда $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$,

а собственные функции $\Psi_n(x)$ будут иметь вид

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x; \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (12)$$

Ранее мы характеризовали Ψ -функцию, как связанную с вероятностью нахождения частицы. Пока непонятно, как можно судить по выражению (12) о вероятности нахождения частицы, например, в середине ямы.

Для этого нужно построить графики собственных функций $\Psi_n(x)$, а также графики $(\Psi_n(x))^2 = \Psi_n(x) \cdot \Psi_n^*(x)$ для различных $n = 1, 2, \dots$ (рис. 24.2), $\Psi_n^*(x)$ – функция, комплексно сопряженная с $\Psi_n(x)$.

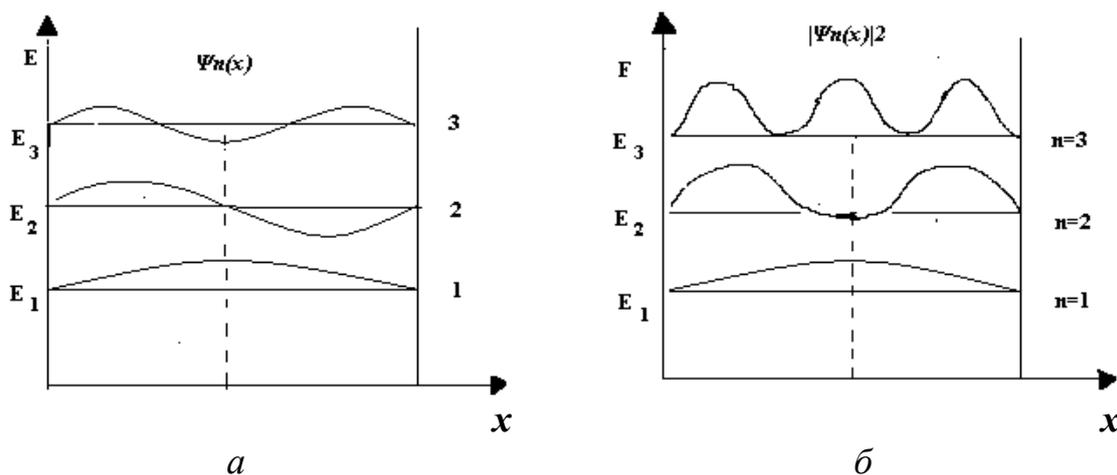


Рис. 24.2

Из рис. 24.2, б можно сделать очень интересный вывод: число максимумов $|\Psi_n(x)|^2$ равно числу n !

По величине плотности вероятности $|\Psi_n(x)|^2$, соответствующей различным расстояниям от «стенок» ямы, теперь можно судить о возможности обнаружения частицы на данном расстоянии. Для состояния $n = 1$ частица с наибольшей вероятностью может быть обнаружена в центре ямы, а в квантовом состоянии с $n = 2$ в середине ямы частица вообще не может находиться, зато одинаково часто может пребывать в левой и правой ее частях. Для состояния $n = 3$ характерно, что частица с одинаковой вероятностью может пребывать уже в трех ее частях. То есть о траектории здесь уже говорить не приходится.

Зная энергии в двух состояниях (например, в n и $n + 1$), можно найти энергетический интервал между двумя соседними уровнями:

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1).$$

Анализируя это соотношение, можно заключить, что если l велико по сравнению с размерами атома (10^{-10} м), то ΔE_n очень мало, т. е. энергетический спектр можно считать непрерывным.

Посмотрим, как влияет теперь величина квантового числа n на величину ΔE_n . Для этого найдем отношение

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2}.$$

При больших n ($n \gg 1$) $2n + 1 \approx 2n$ и $\Delta E_n/E_n \approx 2/n$, т. е. ΔE_n становится малой по сравнению с E_n , происходит относительное сближение энергетических уровней.

В этом состоит **принцип соответствия**, установленный Бором в 1923 году: при больших квантовых числах выводы и результаты квантовой механики соответствуют результатам классической механики.

И из теории Бора, и из предыдущих рассуждений о решениях уравнения Шредингера, мы знаем только об одном квантовом числе n . Мы уже имеем информацию о вероятности нахождения частицы в «яме», дискретных уровнях энергии. Кроме того, огромное значение уравнения Шредингера состоит в том, что для водородоподобной системы все соотношения, полученные Бором, исходя из постулатов (т. е. бездоказательно), следуют непосредственно из уравнения Шредингера для этой системы. А благодаря квантовым числам удается описать состояния электрона не только в водородоподобной системе, но и в других атомах! Сейчас мы познакомимся с другими квантовыми числами.

Из решения уравнения Шредингера следует три квантовых числа: главное (уже известное нам) квантовое число n , орбитальное l и магнитное m_l .

Главное квантовое число n определяет энергетические уровни электрона в атоме ($E_n = n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2ml^2$) и может принимать целочисленные значения, начиная с единицы: $n = 1, 2, 3$.

Орбитальное квантовое число l определяет момент импульса электрона в атоме. Из решения уравнения Шредингера вытекает, что момент импульса (механический орбитальный момент импульса) квантуется, т. е. может принимать дискретные значения:

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}.$$

Орбитальное квантовое число l при заданном n может принимать значения $l = 0, 1, \dots, (n-1)$.

Например, если $n = 3$, то $l = 0, 1, 2$ (т. е. всего n значений).

Магнитное квантовое число m_l

Оказалось, что квантуется не только момент импульса L_l , но и его проекция на направление Z , например, внешнего магнитного поля (рис. 24.3). Вектор \vec{L}_l может иметь лишь такие ориентации в простран-

стве, при которых его проекция L_{lz} на направление Z внешнего магнитного поля принимает квантованные значения, кратные \hbar :

$$L_{lz} = \hbar m_l,$$

где m_l – магнитное квантовое число, которое при заданном l может принимать значения $m_l = 0, \pm 1; \pm 2; \dots, \pm l$ (т. е. всего $2l + 1$ значений).

Учитывая, что орбитальное квантовое число при данном n может изменяться от 0 до $(n - 1)$, а каждому l соответствует $(2l + 1)$ значений m_l , то число различных состояний, соответствующих данному n , равно

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2.$$

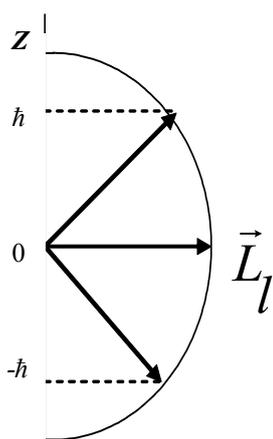


Рис. 24.3

Таким образом, вектор \vec{L}_l может принимать $(2l + 1)$ ориентаций в пространстве. Это приводит к «расщеплению» энергетического уровня электрона на ряд подуровней.

Кажется, Пифагор утверждал, что Вселенная есть гармония чисел. Здесь уже столько указано чисел, вот только непонятен их физический смысл!

Пифагор еще говорил, что мир состоит из треугольников, и в философском смысле это понятно. А физический смысл квантовых чисел можно пояснить (в дополнение к вышесказанному) следующим образом.

Вероятность обнаружения электрона в различных частях атома различна. Электрон при своём движении как бы «размазан» по всему объему, образуя электронное облако, плотность которого характеризует вероятность нахождения электрона в различных точках объема атома. Квантовые числа n и l характеризуют размер и форму электронного облака, а квантовое число m характеризует ориентацию электронного облака в пространстве. По аналогии со спектроскопией в атомной физике состояние электрона, обладающего различными значениями орбитального квантового числа l , принято обозначать следующим образом: $l = 0$ – s -состояние, $l = 1$ – p -состояние, $l = 2$ – d -состояние, $l = 3$ – f -состояние и т. д.

Значение главного квантового числа указывается перед условным обозначением орбитального квантового числа. Например, электроны в состоянии $n = 2$ и $l = 0$ и 1 обозначаются соответственно символами $2s$ и $2p$.

Спин электрона. Спиновое квантовое число

Когда мы рассматривали магнетики (занятие «Закон Био – Савара – Лапласа. Магнитные свойства веществ»), отмечали, что в опытах Эйнштейна и де Гааза было обнаружено аномальное значение гиромангнитного отношения $q_l = \frac{\vec{P}_m}{\vec{L}_l}$, \vec{P}_m – магнитный момент электрона; \vec{L}_l – его орбитальный момент.

Для объяснения этого результата нужно было предположить, что у электрона помимо орбитального момента импульса \vec{L}_l и соответствующего ему магнитного момента \vec{P}_m имеется собственный механический момент импульса \vec{L}_s , называемый спином электрона.

Но спин – это веретено! Как же возникло это название? Согласно представлениям Уленбека и Гоудсмита (они высказали предположение о существовании спина), спин рассматривался как момент импульса, связанный с вращением электрона. В дальнейшем от такого представления пришлось отказаться. Спин электрона и других элементарных частиц следует рассматривать как некоторое особое свойство этих частиц: подобно тому, как частицы имеют массу, а заряженные – заряд, они имеют ещё и спин.

П. Дираку удалось показать, что существование спина вытекает из полученного им релятивистского волнового уравнения. Так же как и орбитальный момент импульса, спин квантуется:

$$L_s = \sqrt{S(S+1)} \cdot \hbar,$$

здесь S – спиновое квантовое число, которое может принимать только одно значение $S = 1/2$ (т. е. спиновое квантовое число не является целым).

По аналогии с пространственным квантованием \vec{L}_l проекция L_{sz} спина квантуется так, что вектор \vec{L}_s может принимать $2S + 1$ ориентаций, при этом

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

здесь m_s – магнитное спиновое квантовое число, оно может принимать только два значения:

$$m_s = \pm 1/2.$$

В квантовой механике очень важно знать **принцип Паули**: в атоме в одном состоянии, определяемом четырьмя квантовыми числами (n, l, m, m_s), не может быть более одного электрона.

Подведем итог по теме «Квантовые числа»:

1. Главное квантовое число $n = 1, 2, 3, \dots$.
2. Орбитальное квантовое число $l = 0, 1, \dots, (n - 1)$.
3. Магнитное квантовое число $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.
4. Спиновое квантовое число $S = 1/2$.
5. Магнитное спиновое квантовое число $m_s = \pm 1/2$.

Историческая справка

*Нет без явно усиленного трудолюбия
ни талантов, ни гениев.*

Д.И. Менделеев

Эрвин Шредингер (1887–1961) – австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики, иностранный член-корреспондент (1928) и иностранный почетный член (1934) АН СССР. Разработал (1926) так называемую волновую механику, сформулировал ее основное уравнение (уравнение Шредингера), доказал ее идентичность матричному варианту квантовой механики. Труды по кристаллографии, математической физике, теории относительности, биофизике. Нобелевская премия (1933 г., совместно с П.А.М. Дираком создал релятивистское уравнение квантовой механики).



Эрвин Шредингер родился 12 августа 1887 года в Вене.

До 11 лет ребенка учили дома, а в 1898 году, успешно выдержав вступительные экзамены, он поступил в Академическую гимназию, которую окончил в 1906 году. Эта гимназия пользовалась репутацией престижного учебного заведения, но в основном гуманитарного профиля. Тем не менее после блестяще сданных выпускных экзаменов (Эрвин вообще неизменно был первым учеником в классе), когда пришла пора выбора дальнейшего пути, без колебаний предпочтение было отдано математике и физике.

Осенью 1906 года Шредингер поступил в Венский университет, где еще недавно, до своей трагической гибели, работал Людвиг Больцман. Но этот выбор Эрвина не сделал его узким специалистом. Круг интересов Шредингера всегда оставался удивительно широким. Он владел шестью иностранными языками, хорошо знал немецких поэтов, сам писал стихи.

Все же на первый план все определеннее выступали дисциплины физико-математического цикла. Во многом это было заслугой преподавателей, в частности Фрица Газенроля, о котором в 1929 году в Нобелевской лекции Шредингер говорил: «Тогда (во время Первой мировой войны) погиб Газенроль, и чувство подсказывает мне, что не случись этого, он стоял бы здесь вместо меня». Именно этот яркий человек помог второкурснику Шредингеру понять, что его призванием является теоретическая физика.

После защиты докторской диссертации (аналога современной дипломной работы) Шредингеру была предложена экспериментальная работа, которая была не только успешно защищена, но и удостоилась опубликования в «Докладах» Венской академии наук. После сдачи выпускных экзаменов 23-летнему Эрвину Шредингеру была присуждена степень доктора философии.

По австрийским законам тех дней выпускник университета Эрвин Шредингер должен был год отслужить в армии.

В 1914 году началась война, и Эрвин Шредингер был мобилизован. Но ему еще повезло: его часть находилась на сравнительно тихом участке, так что можно было даже иногда выкроить время для чтения физической литературы. Именно тогда Шредингер познакомился с только что появившимися работами Альберта Эйнштейна по основам общей теории относительности.

После окончания войны, в ноябре 1918 года Э. Шредингер вернулся в Венский физический институт.

После нескольких переездов Шредингер получил приглашение возглавить кафедру теоретической физики Политехникума в Цюрихе, которую до этого занимали такие светила, как Альберт Эйнштейн и Макс фон Лауэ. Это приглашение поднимало Шредингера на высшую ступень академической «табели о рангах». В 1921 году он перебрался в Цюрих.

Уравнение Шредингера

По складу ума Эрвин Шредингер, подобно Планку, Эйнштейну и ряду других физиков того времени, тяготел к классическим представлениям в физике и не принял копенгагенской вероятностной интерпретации корпускулярно-волнового дуализма. В 1925–1926 годах Шредингером были выполнены работы, выдвинувшие его в первый ряд создателей волновой механики.

Наличие волновых свойств у электронов Шредингер принял как фундаментальный экспериментальный факт. Для физики волны далеко не были чем-то новым. Было хорошо известно, что в описании волн

различной физической природы есть много общего – математически они описываются похожими методами (так называемыми волновыми дифференциальными уравнениями в частных производных). И здесь проявляется любопытнейшее обстоятельство, которое можно проиллюстрировать на примере звуковой волны в органной трубе.

Все величины, относящиеся к звуковой волне, – распределение плотностей, давлений, температур и т. д. – в такой «стоячей» волне являются обычными, описываемыми классической теорией, но в то же время существуют и определенные дискретные «резонансные» состояния: каждая из труб в зависимости от ее длины «настроена» на определенную частоту. Это наводит на мысль, что, например, и различные квантовые дискретные состояния электронов в атомах имеют такую же «резонансную» природу. Таким образом, волны де Бройля становятся в ряд «обычных» классических волн, а квантовые дискретные состояния – в ряд «обычных» резонансных. Конечно, для описания электронных (и других подобных им) волн необходимо располагать уравнением такой же степени общности, как и уравнения Исаака Ньютона в классической механике, и в 1926 году Шредингер предложил такое уравнение – знаменитое уравнение Шредингера, явившееся математической основой волновой (по другой терминологии – квантовой) механики.

Эта серия работ была опубликована Эрвином Шредингером в 1926 году под общим названием «Квантование как задача о собственных значениях». Уравнение Шредингера заняло лидирующее место в квантовой теории и не утратило его и поныне.

Уравнение Шредингера – основное уравнение нерелятивистской квантовой механики; позволяет определить возможные состояния системы, а также изменение состояния во времени. Сформулировано Э. Шредингером в 1926 году.

Но предложенная Шредингером «классическая» интерпретация той величины, которая определяется этим уравнением, – волновой функции – не удержалась. После напряженнейших дискуссий с датским физиком Нильсом Бором, доведших Шредингера до изнеможения и до отчаяния, ему пришлось признать необходимость отказа от ее классического истолкования в пользу вероятностного. Это был тяжелый удар. Перед отъездом из Копенгагена от Бора Шредингер сказал ему: «Если мы собираемся сохранить эти проклятые квантовые скачки, то мне приходится пожалеть, что я вообще занялся квантовой теорией». Негативное отношение к «копенгагенской интерпретации» квантовой теории у Шредингера (как и у Эйнштейна, Планка, де Бройля, Лауэ) так и не изменилось до конца его дней.

После ухода в почетную отставку Макса Планка кафедра теоретической физики в Берлинском университете оказалась незанятой, и вопрос о его преемнике должна была решить специально созданная комиссия. Она предложила список кандидатов, в котором на втором месте (после Арнольда Зоммерфельда) значилась фамилия Шредингера. Зоммерфельд отказался переехать в Берлин, и возможность занять весьма престижное место открылась перед Шредингером. Он колебался и, может быть, не покинул бы прекрасный Цюрих, если бы не узнал, что Планк «...был бы рад ...» видеть его преемником.

Это решило дело, и в конце лета 1927 года Эрвин Шредингер переселился в Берлин. Тепло принятый новыми коллегами, он быстро освоился на новом месте, и годы жизни и продуктивной работы в Берлине он потом вспоминал как прекрасные. На следующий год после переезда из Цюриха Шредингер был единогласно (что бывало чрезвычайно редко!) избран членом Берлинской академии наук. Но основным полем деятельности оставался университет. Хотя Шредингер был типичным одиночкой и не создал школы, его научный и нравственный авторитет играл важную роль.

Все рухнуло в 1933 году, когда к власти пришли фашисты. Началось массовое бегство из Германии лучших ученых. Под предлогом творческого отпуска он уехал в Южный Тироль, а оттуда в октябре 1933 года вместе с женой перебрался в Оксфорд. Вскоре Эрвин Шредингер получил известие, что он удостоен Нобелевской премии по физике за 1933 год.

После нескольких переездов через Италию, Швейцарию и Бельгию Шредингер в 1939 году опять вернулся в Англию, где он был защищен от непосредственной фашистской угрозы. В это время глава правительства Ирландии И. де Валера, математик по образованию, занимался организацией в Дублине института, подобного Принстонскому, и Шредингер стал его главой. Здесь он проработал 17 лет, активно занимаясь не только физикой, но и философией, поэзией и даже биологией.

В 1944 году вышла его известная книга «Что такое жизнь? С точки зрения физика», в 1949 году – сборник стихов, а в 1954 году – книга «Природа и греки». Как физик, Эрвин Шредингер в эти годы много работал в области теории гравитации и, подобно Эйнштейну, прилагал большие усилия для построения единой теории поля.

После окончания войны Шредингер не раз получал приглашения вернуться в Австрию и в Германию. Но он полюбил Ирландию, и только поверив, что угрозы новых политических потрясений миновали, ре-

шился вернуться на родину. Его возвращение было триумфальным. Шредингер проработал в Венском университете два года и еще один «год почета». Последние годы его жизни прошли в живописной тирольской деревне Альпбах.

Эрвин Шредингер скончался 4 января 1961 года в Вене.

Подсказка

1. Задачи по теме «Уравнения Шредингера. Частица в потенциальной яме» весьма непростые. Поэтому разобьем их решение на несколько этапов.

Этап первый. Задача: научиться записывать нормированную собственную волновую функцию для данного состояния электрона в потенциальной яме (шириной l).

1. Укажите собственную волновую функцию для электрона в состоянии $n = 1$.

1. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x.$ 2. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x.$

3. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} x.$ 4. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{4\pi}{l} x.$

2. Укажите собственную волновую функцию для электрона в состоянии $n = 2$.

1. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x.$ 2. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x.$

3. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} x.$ 4. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{4\pi}{l} x.$

3. Укажите собственную волновую функцию для электрона в состоянии $n = 3$.

1. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x.$ 2. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x.$

3. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} x.$ 4. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{4\pi}{l} x.$

4. Укажите собственную волновую функцию для электрона в состоянии $n = 4$.

1. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x.$ 2. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x.$

3. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} x.$ 4. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{4\pi}{l} x.$

5. Укажите собственную волновую функцию для электрона в состоянии $n = 5$.

1. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x$. 2. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} x$.

3. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{6\pi}{l} x$. 4. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{5\pi}{l} x$.

6. Укажите собственную волновую функцию для электрона в состоянии $n = 6$.

1. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x$. 2. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} x$.

3. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{6\pi}{l} x$. 4. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{5\pi}{l} x$.

7. Укажите собственную волновую функцию для электрона в состоянии $n = 7$.

1. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} x$. 2. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{6\pi}{l} x$.

3. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{7\pi}{l} x$. 4. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{8\pi}{l} x$.

8. Укажите собственную волновую функцию для электрона в состоянии $n = 8$.

1. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} x$. 2. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{6\pi}{l} x$.

3. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{7\pi}{l} x$. 4. $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{8\pi}{l} x$.

Этап второй. Задача: научиться находить выражение для вероятности ω обнаружения частицы в состоянии n в потенциальной яме в интервале от x_1 до x_2 . Напомним, что вероятность $d\omega$ обнаружить частицу в интервале от x до $x + dx$ (в одномерном случае) выражается формулой

$$d\omega = |\psi(x)|^2 dx,$$

где $|\psi(x)|$ – собственная волновая функция.

1. Укажите выражение для вероятности ω обнаружить частицу в состоянии $n = 1$ в первой трети потенциальной ямы.

1. $\omega = \frac{2}{l} \int_0^{1/3} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx$. 2. $\omega = \frac{2}{l} \int_{1/3}^{2/3} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx$.

3. $\omega = \frac{2}{l} \int_{1/3}^{2/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx$. 4. $\omega = \frac{2}{l} \int_0^{1/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx$.

2. Укажите выражение для вероятности ω обнаружить частицу в состоянии $n = 2$ в первой трети потенциальной ямы.

$$1. \omega = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx. \quad 2. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx.$$

$$3. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx. \quad 4. \omega = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx.$$

3. Укажите выражение для вероятности ω обнаружить частицу в состоянии $n = 3$ во второй трети потенциальной ямы.

$$1. \omega = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx. \quad 2. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{3\pi}{l} x dx.$$

$$3. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx. \quad 4. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{4\pi}{l} x dx.$$

4. Укажите выражение для вероятности ω обнаружить частицу в состоянии $n = 4$ во второй трети потенциальной ямы.

$$1. \omega = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx. \quad 2. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{3\pi}{l} x dx.$$

$$3. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx. \quad 4. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{4\pi}{l} x dx.$$

5. Укажите выражение для вероятности ω обнаружить частицу в состоянии $n = 5$ во второй трети потенциальной ямы.

$$1. \omega = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{5\pi}{l} x dx. \quad 2. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{5\pi}{l} x dx.$$

$$3. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{6\pi}{l} x dx. \quad 4. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{7\pi}{l} x dx.$$

6. Укажите выражение для вероятности ω обнаружить частицу в состоянии $n = 6$ во второй трети потенциальной ямы.

$$1. \omega = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{5\pi}{l} x dx. \quad 2. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{5\pi}{l} x dx.$$

$$3. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{6\pi}{l} x dx. \quad 4. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{7\pi}{l} x dx.$$

7. Укажите выражение для вероятности ω обнаружить частицу в состоянии $n = 7$ во второй трети потенциальной ямы.

$$1. \omega = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{5\pi}{l} x dx. \quad 2. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{5\pi}{l} x dx.$$

$$3. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{6\pi}{l} x dx. \quad 4. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{7\pi}{l} x dx.$$

8. Укажите выражение для вероятности ω обнаружить частицу в состоянии $n = 8$ во второй трети потенциальной ямы?

$$1. \omega = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{8\pi}{l} x dx. \quad 2. \omega = \frac{2}{l} \int_{2l/3}^l \sin^2 \frac{8\pi}{l} x dx.$$

$$3. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{8\pi}{l} x dx. \quad 4. \omega = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{4\pi}{l} x dx.$$

Этап третий. Объединим теперь задачи 1 и 2. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l . Вычислить вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ($n = 2$), будет обнаружен в средней трети ящика.

Примечание: произвести замену $\sin^2 \frac{n\pi}{l} x = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x \right)$.

Решение

Мы уже знаем, как записать выражение для вероятности ω обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$:

$$\omega = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx, \quad (1)$$

здесь $\psi_n(x)$ – нормированная собственная волновая функция, отвечающая данному состоянию n . Знаем также и выражение для собственной волновой функции $\psi_n(x)$, описывающей состояние электрона в потенциальной яме:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Возбужденному состоянию ($n = 2$) отвечает собственная функция

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x. \quad (2)$$

Подставим $\psi_2(x)$ в подинтегральное выражение формулы (1) и вынесем постоянные величины за знак интеграла, в результате получим

$$\omega = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx. \quad (3)$$

Нам также известно, как выглядит график $|\psi_n(x)|^2$ от x (рис. 24.4).

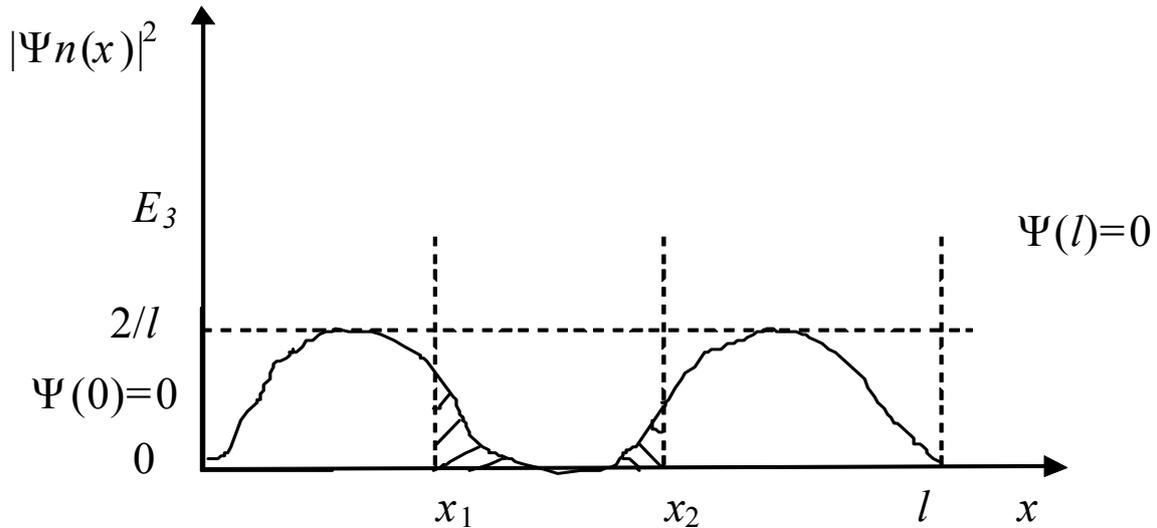


Рис. 24.4

Согласно условию задачи $x_1 = \frac{l}{3}$ и $x_2 = \frac{2l}{3}$ (рис. 24.4). Подставим эти пределы интегрирования в формулу (3), произведем замену $\sin^2 \frac{2\pi}{l} x =$

$= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi}{l} x \right)$ и разобьем интеграл на два:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx = \frac{1}{l} \left(\int_{l/3}^{2l/3} dx - \int_{l/3}^{2l/3} \cos \frac{4\pi}{l} x dx \right) = \\ &= \frac{1}{l} \left(\frac{l}{3} - \frac{l}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{l} x \Big|_{l/3}^{2l/3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что $\sin \frac{8\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$, а $\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3}$, получим $\omega = 0,195$.

2. Электрон находится в одномерном потенциальном поле $U(x)$ в стационарном состоянии $\psi = Ae^{-\beta x^2}$, где A и β – постоянные ($\beta > 0$). Найти энергию E частицы, если $U(0) = 0$.

Решение

Найдем вторую производную от $\psi(x)$ по x :

$$\psi' = -2A\beta x e^{-\beta x^2};$$

$$\psi'' = -2Ae^{-\beta x^2} + x e^{-\beta x^2} \cdot (-2\beta x) = -2A\beta(1 - 2\beta x^2) e^{-\beta x^2}.$$

Подставим ψ'' и ψ в уравнение Шредингера:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

После сокращения на экспоненту получим

$$-2\beta + 4\beta^2 x^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U) = 0.$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$ и, соответственно, $U(0) = 0$, имеем

$$-2\beta + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0,$$

отсюда

$$E = \frac{\beta\hbar^2}{m}.$$

ТЕСТ

Вопросы

24.1. Уравнение Шредингера

1) постулируется; 2) имеет строгий вывод; 3) нет верного ответа.

24.2. Какое уравнение является основным в квантовой механике?

1. Уравнение Шредингера.
2. Уравнение II закона Ньютона.
3. Уравнение Максвелла.

24.3. Какое уравнение квантовой механики является релятивистским?

1. Уравнение П. Дирака.
2. Уравнение Шредингера.
3. Такое уравнение ещё не получено.

24.4. Какова связь между энергией E и импульсом P в уравнении Э. Шредингера?

1. $E = P^2/2m_0$.
2. $E = \sqrt{P^2 c^2 + m_0^2 c^4}$.
3. $E = P^2 c^2$.

24.5. Как зависит энергия E_n частицы в прямоугольной потенциальной яме от главного квантового числа n ?

1. Прямо пропорционально n .
2. Пропорционально n^2 .
3. Обратно пропорционально n .
4. Обратно пропорционально n^2 .

24.6. Как зависит энергия E_n частицы в прямоугольной потенциальной яме от ширины ямы l ?

1. Прямо пропорционально l .
2. Пропорционально l^2 .
3. Обратно пропорционально l .
4. Обратно пропорционально l^2 .

24.7. Какое уравнение называется основным временным уравнением квантовой механики?

1.
$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi - U(x, y, z, t) \Psi = -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

2.
$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0.$$

3.
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0.$$

24.8. Какое уравнение называется уравнением Шредингера для стационарных состояний?

1. $\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi - U(x, y, z, t)\Psi = -i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}$.

2. $\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0$.

3. $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0$.

24.9. Какое уравнение является уравнением Шредингера для стационарных состояний свободной частицы?

1. $\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi - U(x, y, z, t)\Psi = -i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}$.

2. $\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0$.

3. $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0$.

24.10. Где чаще всего может находиться частица в потенциальной яме в состоянии $n = 1$?

1. В середине ямы. 2. В левой половине ямы.

3. В правой половине ямы.

24.11. Где чаще всего может находиться частица в потенциальной яме в состоянии $n = 2$?

1. В середине ямы. 2. В левой половине.

3. В правой половине. 4. В левой и правой ее частях.

24.12. Где чаще всего может находиться частица в потенциальной яме в состоянии $n = 3$?

1. В середине ямы. 2. В левой половине.

3. В правой половине.

4. С одинаковой вероятностью в трех частях ямы.

24.13. Частица находится в потенциальной яме шириной $l = 10^{-8}$ м, энергетический спектр ее можно считать ...

1) дискретным; 2) квантовым; 3) непрерывным.

24.14. Частица находится в потенциальной яме шириной $l = 10^{-2}$ м, энергетический спектр ее можно считать ...

1) дискретным; 2) квантовым; 3) непрерывным.

24.15. Сколько состояний будет иметь электрон при $n = 3$?

1. 3. 2. 6. 3. 9. 4. 2.

24.16. Сколько значений может принимать магнитное квантовое число m_l при $n = 2$?

1. 2. 2. 1. 3. 3. 4. 4.

24.17. Какие значения может принимать магнитное квантовое число m_l при $n = 2$?

1. $m_l = 0, \pm 1$. 2. $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$. 3. $m_l = 0$. 4. $m_l = \pm 1$.

24.18. Какие значения может принимать орбитальное квантовое число l при $n = 3$?

1. $l = 0; 1; 2$. 2. $l = 0; 1$. 3. $l = 0$. 4. $l = 0; 1; 2; 3$.

24.19. Сколько значений может принимать орбитальное квантовое число l при $n = 3$?

1. 3. 2. 2. 3. 6. 4. 4.

24.20. Из какой теории следуют три квантовых числа: n, l, m_l ?

1. Теории Бора.
2. Квантовой нерелятивистской теории.
3. Нет верного ответа.

24.21. Из какой теории следует только одно главное квантовое число n ?

1. Теории Бора.
2. Квантовой нерелятивистской теории.
3. Нет верного ответа.

24.22. Сколько состояний имеет электрон при $n = 1$?

1. 1. 2. 2. 3. 3. 4. 4.

24.23. Что определяет главное квантовое число n ?

1. Энергетические уровни электрона.
2. Момент импульса электрона в атоме.
3. Проекцию момента импульса на внешнее направление.

24.24. Сколько состояний будет иметь электрон при $n = 4$?

1. 16. 2. 4. 3. 8. 4. 6.

24.25. Какие значения может принимать орбитальное квантовое число l при $n = 4$?

1. $l = 0, 1, 2, 3$. 2. $l = 0$. 3. $l = 0, 1$. 4. $l = 0, 1, 2$.

24.26. Какие значения может принимать магнитное квантовое число m_l при $n = 4$?

1. $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. 2. $T = 0$.
3. $m_l = 0, \pm 1$. 4. $T = 0, \pm 1, \pm 2$.

24.27. Сколько значений может принимать магнитное квантовое число m_l при $n = 4$?

1. 7. 2. 6. 3. 9. 4. 8.

24.28. Сколько значений может принимать орбитальное квантовое число l при $n = 4$?

1. 4. 2. 2. 3. 3. 4. 8.

24.29. Укажите значения квантовых чисел для электрона в состоянии $3p$.

1. $n = 3, l = 1$.
2. $n = 1, l = 3$.
3. $n = 0, l = 3$.
4. $n = 2, l = 2$.

24.30. Укажите значения квантовых чисел для электрона в состоянии $3f$.

1. $n = 3, l = 3$.
2. $n = 3, l = 2$.
3. $n = 2, l = 3$.
4. $n = 3, l = 1$.

24.31. Укажите значения квантовых чисел для электрона в состоянии $2d$.

1. $n = 2, l = 2$.
2. $n = 1, l = 2$.
3. $n = 2, l = 1$.
4. $n = 2, l = 3$.

24.32. Найдите верные заключения:

1. Квантовые числа n и l характеризуют размер и форму электронного облака.
2. Главное квантовое число n определяет энергетические уровни электрона в атоме.
3. Магнитное квантовое число m_l характеризует ориентацию электронного облака в пространстве.
4. Орбитальное квантовое число l определяет проекцию момента импульса электрона на заданное направление.

24.33. Какая величина называется спином электрона?

1. Орбитальный механический момент импульса.
2. Магнитный момент.
3. Собственный механический момент импульса.

24.34. Какова размерность спина?

1. Спин – величина безразмерная.
2. $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$.
3. $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.
4. $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

24.35. Какое квантовое число может принимать только одно значение $1/2$?

1. Спиновое квантовое число (S).
2. Магнитное квантовое число (m_l).
3. Орбитальное квантовое число (l).
4. Магнитное спиновое квантовое число (m_s).

24.36. Какое квантовое число может принимать только два значения $\pm 1/2$?

1. Спиновое квантовое число (S).
2. Магнитное квантовое число (m_l).
3. Орбитальное квантовое число (l).
4. Магнитное спиновое квантовое число (m_s).

24.37. Какое квантовое число определяет собственный механический момент импульса частицы?

1. Спиновое квантовое число (S).
2. Магнитное квантовое число (m_l).
3. Орбитальное квантовое число (l).
4. Магнитное спиновое квантовое число (m_s).

24.38. Какое квантовое число определяет проекцию собственного механического момента импульса частицы?

1. Спиновое квантовое число (S).
2. Магнитное квантовое число (m_l).
3. Орбитальное квантовое число (l).
4. Магнитное спиновое квантовое число (m_s).

Задачи

24.1. Электрону в потенциальной яме шириной $l = 10^{-9}$ м отвечает волновое число $k = \pi n/l$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Используя связь энергии E электрона с волновым числом k , получите выражение для собственных значений энергии E_n и рассчитайте E_n для $n = 2$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E}}$). Масса

электрона $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

24.2. Частица находится в потенциальной яме. Найти отношение разности соседних энергетических уровней $\Delta E_{n+1,n}$ к энергии E_n частицы в случае $n = 2$.

24.3. Электрон находится в потенциальной яме шириной $l = 0,5$ нм. Определить наименьшую разность ΔE энергетических уровней электрона. Ответ выразить в электронвольтах.

ЗАНЯТИЕ 25

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

**Ядро. Дефект массы. Радиоактивность. Ядерные реакции.
Элементарные частицы**

Теория

Задача данного занятия познакомить Вас с закономерностями, открытие которых, как теперь говорят, выпустило джина из бутылки.

Фермионы и бозоны

Фермионы – это электроны и другие частицы, у которых проекция спина L_{sz} равна нечетному числу $\pm\hbar/2$. Фермионы подчиняются статистике Ферми – Дирака. Согласно принципу Паули в системе одинаковых фермионов любые два из них не могут находиться в одинаковых состояниях (т. е. иметь одинаковые квантовые числа).

Частицы, у которых L_{sz} равна нулю или четному числу $\pm\hbar/2$, называются **бозонами**, или частицами с целым спином (такой частицей является фотон). Бозоны подчиняются статистике Бозе – Эйнштейна. Сложные частицы (например, атомные ядра), составленные из нечетного числа фермионов, также являются фермионами (суммарный L_{sz} – полуцелый), а из четного – бозонами (суммарный спин целый). Бозоны не подчиняются принципу Паули, т. е. в одинаковом состоянии может находиться произвольное число частиц. Например, накопление в одном состоянии атомов хрома в лазере ${}_{52}^{24}\text{Cr}$.

Фундаментальные взаимодействия

Взаимодействие – основная причина движения материи, оно присуще всем материальным объектам. К настоящему времени экспериментально подтверждено четыре типа фундаментальных взаимодействий (табл. 2., указаны по увеличению интенсивности):

- 1) гравитационное,
- 2) слабое,
- 3) электромагнитное,
- 4) сильное.

Гравитационное взаимодействие свойственно всем телам Вселенной. Эти силы обуславливают существование звезд, планетных систем и т. п. Гравитационное взаимодействие предельно слабое по интенсивно-

сти и в мире элементарных частиц при обычных энергиях непосредственной роли не играет. Здесь гравитация становится существенной лишь при энергиях $\sim 10^{28}$ эВ ($1 \text{ эВ} = 10^{-19}$ Дж), которые соответствуют расстояниям $R \sim 10^{-35}$ м. Хотя по современным представлениям к элементарным, т. е. неделимым, можно отнести кварки и электроны (из частиц в составе атома), по традиции к элементарным относят составные микрообъекты: молекулы, атомы, ядра, адроны. Данный термин повторил историю слова «атом», которое в переводе с греческого означает «неделимый».

Слабое взаимодействие присуще всем частицам, кроме фотонов, и сосредоточено внутри ядра. Наиболее известное его проявление – бета-превращения атомных ядер. Оно же обеспечивает нестабильность многих элементарных частиц, например нейтрона. Хотя слабое взаимодействие существенно сосредоточено внутри ядра, оно имеет определенные макроскопические проявления. Кроме бета-превращений атомных ядер, слабое взаимодействие играет важную роль в так называемых термоядерных реакциях, ответственных за механизм энерговыделения в звездах. Нейтрино – уникальные частицы, они могут участвовать только в слабом взаимодействии (если не считать гравитационное).

В электромагнитном взаимодействии, наиболее известном и наиболее изученном, непосредственно участвуют только электрически заряженные частицы и фотоны. Одно из его проявлений – кулоновские силы, обуславливающие существование атомов. Именно электромагнитное взаимодействие ответственно за подавляющее большинство макроскопических свойств вещества (как уже ранее указывалось, силы трения, упругости и силы Кулона имеют электромагнитную природу).

Сильное взаимодействие свойственно адронам (как уже указывалось, к адронам относятся протоны и нейтроны). Наиболее известное его проявление – ядерные силы, обеспечивающие существование атомных ядер. Примеры процессов, вызываемых сильным взаимодействием: реакция рождения антипротона и антинейтрона.

В настоящее время предполагают, что эти взаимодействия носят обменный характер, т. е. взаимодействие осуществляется путем обмена частицами (они называются переносчиками взаимодействий): электромагнитное взаимодействие – обмен фотонами; сильное взаимодействие – обмен глюонами (от англ. *glue* – «клей»); гравитационное поле – обмен гравитонами (частицы пока не найдены); слабое взаимодействие – обмен промежуточными бозонами, имеющими заряд $q = \pm e$ и обладающими большими массами $m \approx (81 \dots 93) \text{ ГэВ}$ ($1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$).

Фундаментальные взаимодействия

Тип взаимодействия	Источник (участник) взаимодействия	Переносчики	Относительная интенсивность взаимодействия	Радиус действия силы
Гравитационное	Масса	Гравитоны	$\sim 10^{-38}$	Сколько угодно далеко
Слабое	Все элементарные частицы	Промежуточные бозоны	$\sim 10^{-15}$	$< 10^{-18}$ м
Электромагнитное	Электрические заряды	Фотоны	$\sim 10^{-2}$	Сколько угодно далеко
Ядерное (сильное)	Адрон (протоны, нейтроны, мезоны)	Глюоны	1	$< 10^{-15}$ м

Промежуточные бозоны зарегистрированы во встречных протон-антипротонных пучках. Бозонами называют частицы, способные накапливаться в одном и том же квантовом состоянии (т. е. в состоянии с одинаковыми квантовыми числами). Другой вид частиц, фермионы, в отличие от бозонов, «индивидуалисты», т. е. в определенном квантовом состоянии может находиться только одна частица (например, электроны в атоме).

Ядро атома

Все атомные ядра состоят из протонов и нейтронов. До недавнего времени они считались элементарными (неделимыми) частицами. В настоящее время предполагают, что протоны и нейтроны состоят из гипотетических (не полученных экспериментально в свободном состоянии) частиц – кварков. Обозначение ядра совпадает с обозначениями химических элементов в таблице Д.И. Менделеева. Например, ядро ${}_{29}^{63}\text{Cu}$, здесь $Z = 29$ – зарядовое число (равно числу протонов и порядковому номеру элемента в таблице), $A = 63$ – массовое число, равное числу нуклонов в ядре, т. е. $A = Z + N$, где N – число нейтронов.

Нуклонам (протону и нейтрону) приписывается массовое число, равное единице, электрону – нулевое значение A . Масса атомного ядра практически совпадает с массой атома (масса электрона составляет 1/1836 массы протона).

Массы атомов принято измерять в атомных единицах массы: а. е. м. За атомную единицу массы принята $1/12$ массы изотопа углерода ${}^{12}_6\text{C}$. $1 \text{ а. е. м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

Дефект массы и энергия связи ядра

Точные масс-спектрометрические измерения масс ядер показывают, что масса ядра меньше, чем суммарная масса составляющих его нуклонов. Уменьшение суммарной массы нуклонов при образовании из них ядра можно объяснить выделением энергии связи. Из закона сохранения энергии вытекает и обратное: для разделения ядра на составные части необходимо затратить такое же количество энергии, которое выделяется при его образовании. Энергию, которую необходимо затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны, называют энергией связи ядра $E_{\text{св}}$:

$$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2.$$

Если ядро с массой $m_{\text{я}}$ образовано из z протонов с массой m_p и из $(A - Z)$ нейтронов с массой m_n , то величина Δm равна

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}.$$

Поскольку в таблицах обычно приводятся не массы ядер, а массы m_a атомов, то

$$E_{\text{св}} = [Zm_p - (A - Z)m_n - m_a] \cdot c^2,$$

где m_p – масса атома водорода. Величина $\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}$ называется дефектом массы ядра.

На эту величину уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра.

Энергия связи, отнесенная к одному нуклону, называется удельной энергией связи ($\delta E_{\text{св}}$).

Примечание: если энергия выражена в МэВ, а масса в а. е. м., то $c^2 = 931,4 \text{ МэВ/а. е. м.}$ (Это облегчает вычисление энергии связи $E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2$). Она характеризует устойчивость (прочность) атомных ядер. Удельная энергия связи зависит от массового числа A элемента (рис. 25.1).

Она возрастает до максимальной величины 8,7 МэВ у элементов с $A = 50 \dots 60$, а потом постепенно уменьшается.

Уменьшение удельной энергии связи при переходе к тяжелым элементам объясняется возрастанием протонов в ядре, т. к. при этом увеличивается энергия их кулоновского отталкивания. Поэтому связь между нуклонами становится менее сильной, а сами ядра менее прочными. Из рис. 25.1 следует, что наиболее устойчивыми с энергетической точки зрения являются ядра средней части таблицы Менделеева, легкие и тяжелые ядра менее устойчивы. Это означает, что энергетически выгодны два процесса:

- 1) слияние легких ядер друг с другом в более тяжелые;
- 2) деление тяжелых ядер на более легкие.

При обоих процессах выделяется огромное количество энергии. Эти процессы имеют широкое практическое применение: это термоядерные реакции синтеза и реакции деления ядер.

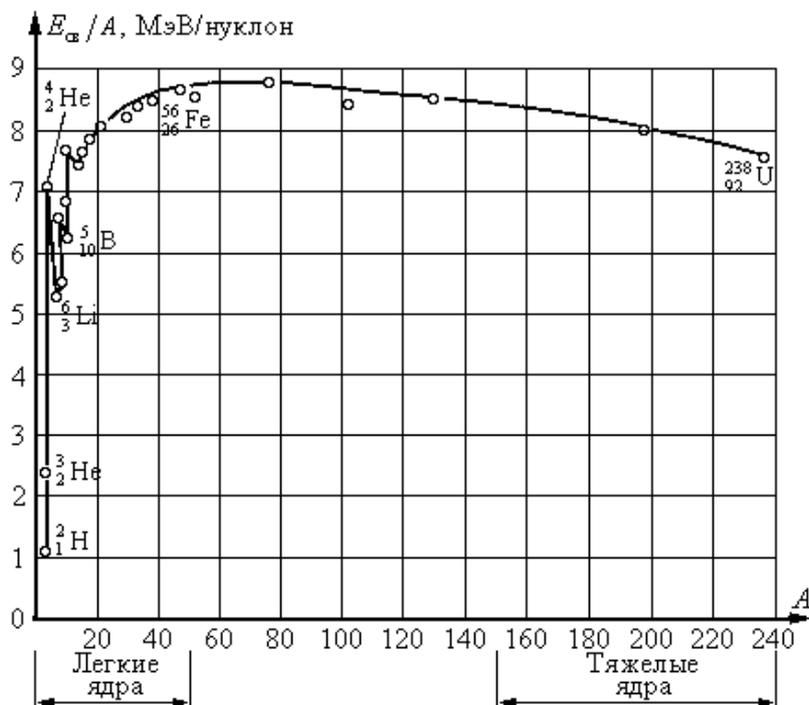


Рис. 25.1

Ядерные силы

Какие же силы обеспечивают такую огромную энергию связи нуклонов? Ни электромагнитное (частные случаи: электрическое и магнитное), ни гравитационное взаимодействия не могут обеспечить такую энергию связи. Эти специфические силы были названы **ядерными**, а взаимодействие – **сильным взаимодействием** (как уже указывалось ранее). В настоящее время предполагают, что все взаимодействия имеют обменный характер. Это означает, что в качестве элементарных актов каждого взаимодействия выступают процессы испускания и поглощения данной частицей другой частицы, которая и определяет характер (или тип) данного взаимодействия. Так, переносчиками (частицами, которыми обмениваются взаимодействующие частицы) сильного взаимодействия являются глюоны. Пока их восемь, они электрически нейтральны ($q = 0$) и не имеют массы ($m = 0$).

Переносчики электромагнитного взаимодействия – фотоны, а гравитационного – гравитоны (пока не найдены).

Ядерные силы – особые силы, которые не сводятся ни к одному из типов сил, известных из классической физики (гравитационных и электромагнитных).

Свойства ядерных сил

1. Ядерные силы являются короткодействующими. Они проявляются лишь в пределах ядра ($r = (1,5 \dots 2,2) \cdot 10^{-15}$ м – радиус действия ядерных сил).

2. Ядерным силам свойственна зарядовая независимость. Они являются только силами притяжения, сила притяжения между протоном и нейтроном, протоном и протоном, нейтроном и нейтроном одинакова.

3. Ядерные силы обладают насыщенностью, которая проявляется в том, что нуклон в ядре взаимодействует лишь с ограниченным числом ближайших к нему соседних нуклонов.

4. Ядерные силы зависят от ориентации спинов взаимодействующих между собой нуклонов.

5. Ядерные силы не являются центральными, т. е. действующими по линии, соединяющей центры взаимодействующих нуклонов.

Радиоактивное излучение

Явлением естественной радиоактивности называется самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождающееся испусканием различных видов радиоактивных излучений и элементарных частиц. Радиоактивность подразделяется на *естественную* (наблюдается у неустойчивых изотопов, изотопы – ядра с одинаковыми Z , но разными A) и *искусственную* (наблюдается у изотопов, полученных посредством ядерных реакций). Между этими двумя типами радиоактивности нет принципиального различия (законы радиоактивного превращения в обоих случаях одинаковы).

Радиоактивное излучение, как это известно нашему юному коллеге, бывает трех типов: α , β и γ -излучения.

α -излучение – поток ядер гелия (${}^4_2\text{He}$); заряд α -частицы равен $+2e$, а масса совпадает с массой ядра изотопа гелия ${}^4_2\text{He}$. Оно отклоняется электрическим и магнитными полями (что вполне объяснимо!), обладает высокой ионизирующей способностью и малой проникающей способностью (поглощается слоем алюминия толщиной примерно 0,05 мм).

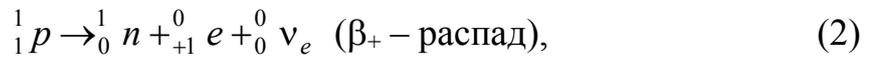
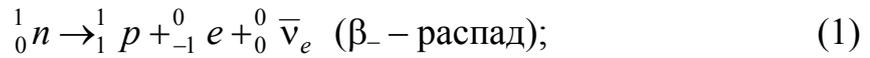
β -излучение представляет собой поток ускоренных электронов, отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает на два порядка меньшей ионизирующей способностью, чем α -излучение, а проникающая способность больше (поглощается слоем алюминия толщиной примерно 2 мм).

γ -излучение – поток γ -квантов или фотонов, поэтому не отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает слабой ионизирующей способностью и очень большой проникающей способностью. Это коротковолновое электромагнитное излучение с длиной волны порядка $\lambda < 10^{-10}$ м.

Недавно открытое **нейтринное излучение** обладает двумя преимуществами перед вышеуказанными излучениями:

- практически абсолютная проникаемость;
- практически неограниченная мощность.

Нейтрино и антинейтрино возникают при превращениях одного вида нуклона в ядре в другой: нейтрона в протон (1) или протона в нейтрон (2) по схеме



где 1_0n – нейтрон; 1_1p – протон; ${}^0_{-1}e$ – электрон; ${}^0_{+1}e$ – позитрон; ${}^0_0\nu_e$ – электронное нейтрино; ${}^0_0\bar{\nu}_e$ – электронное антинейтрино.

Нейтринное излучение открыто в космосе (излучение нейтронных звезд и др.).

Закон радиоактивного распада

Под радиоактивным распадом, или просто распадом, понимают естественное радиоактивное превращение ядер. Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется **материнским**, возникающее ядро – **дочерним**.

Так как отдельные ядра распадаются независимо друг от друга, то можно считать, что число ядер dN , распавшихся в среднем за интервал времени от t до $t + dt$, пропорционально промежутку времени dt и числу N нераспавшихся ядер к моменту времени t :

$$dN = -\lambda N dt,$$

где λ – постоянная радиоактивного распада, знак минус указывает, что число радиоактивных ядер в процессе распада уменьшается. Разделяя переменные и интегрируя, получим закон радиоактивного распада, согласно которому число нераспавшихся ядер N убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

где N_0 – начальное число нераспавшихся к моменту $t = 0$ ядер;

$$\lambda = \frac{-dN / N}{dt}.$$

Постоянная радиоактивного распада λ характеризует долю ядер, распавшихся за единицу времени, т. е. определяет скорость радиоактивного распада. Для оценки продолжительности жизни данного радиоактивного изотопа вводится понятие о периоде полураспада T . Так называется время, в течение которого первоначальное количество ядер данного вещества распадается наполовину. По определению, если $t = T$, то $N = N_0/2$.

Следовательно,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T}.$$

Отсюда

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693\tau,$$

где τ – величина, обратная постоянной радиоактивного распада λ , называется средним временем жизни радиоактивного ядра.

Правила смещения

Радиоактивный распад происходит в соответствии с так называемыми правилами смещения, которые являются следствием двух законов сохранения, выполняющихся при радиоактивных распадах:

1. Сумма зарядов возникающих ядер и частиц равна заряду исходного ядра.
2. Сумма массовых чисел возникающих ядер и частиц равна массовому числу исходного ядра.

Правило смещения (правило Фаянса и Содди) при α и β распадах:

при α -распаде: ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He};$

при β -распаде: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e.$

Здесь ${}^A_Z X$ – материнское ядро; Y – символ дочернего ядра; ${}^4_2 \text{He}$ – ядро гелия; ${}^0_{-1} e$ – символическое обозначение электрона, для которого $A = 0$ и $Z = -1$.

Если дочернее ядро также оказывается радиоактивным, то возникает цепочка радиоактивных превращений, которая заканчивается образованием стабильного элемента.

Ядерные реакции, к изучению которых мы переходим, широко используются и в мирных целях: известные Вам атомные электростанции, большой объем физических исследований по созданию антивещества выполняется в ускорителях, где происходят ядерные реакции.

Ядерные реакции

Ядерные реакции – это превращения атомных ядер, вызванные взаимодействием их друг с другом или с элементарными частицами.

Мы уже указывали, что энергетически выгодны два процесса: деление тяжелых ядер (реакция деления тяжелых ядер) и синтез легких ядер (термоядерные реакции синтеза). Тот и другой тип ядерных реакций сопровождаются большим выделением энергии, причем в реакции синтеза эта энергия значительно больше. Однако реакции синтеза легких ядер, связанные с преодолением потенциальной энергии их отталкивания, могут протекать лишь при сверхвысоких температурах ($10^8 \dots 10^9$ К), превышающих температуру центральных областей Солнца ($T = 1,3 \cdot 10^7$ К).

Поэтому цепные ядерные реакции деления, осуществление которых в земных условиях оказалось возможным, применяются в ядерных реакторах. В таких реакциях тяжелое ядро под действием нейтронов делится на несколько более легких ядер (осколков). Причем это деление сопровождается испусканием двух-трех вторичных нейтронов, которые называются нейтронами деления. Нейтроны деления, взаимодействуя с соседними ядрами делящегося вещества, вызывают лавинообразное нарастание числа актов деления – цепную реакцию деления. Условием возникновения цепной реакции является наличие размножающихся нейтронов.

Коэффициентом размножения нейтронов k называется отношение числа нейтронов, возникающих в некотором звене реакции, к числу таких нейтронов в предшествующем звене. Условие развития цепной реакции: $k \geq 1$.

Коэффициент размножения зависит от природы делящегося вещества, а для данного изотопа – от его количества, а также размеров и формы активной зоны (пространство, где протекает цепная реакция). Минимальные размеры активной зоны, при которых возможно осуществление цепной реакции, называются **критическими размерами**. Минимальная масса делящегося вещества, находящегося в системе критических размеров, необходимая для осуществления цепной реакции, называется **критической массой**.

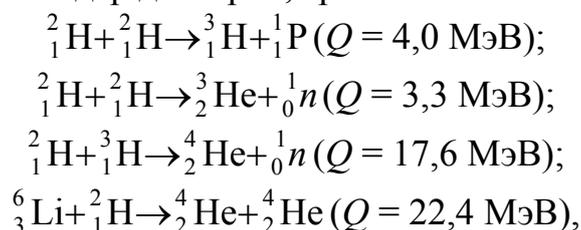
Цепные реакции делятся на управляемые и неуправляемые. Взрыв атомной бомбы, например, является неуправляемой реакцией. Чтобы атомная бомба при хранении не взорвалась, в ней ${}_{92}^{235}\text{U}$ делится на две удаленные друг от друга части с массами ниже критических. Затем с помощью обычного взрыва эти массы сближаются, общая масса делящегося вещества становится больше критической, и возникает взрывная

цепная реакция, сопровождающаяся мгновенным выделением огромного количества энергии. Управляемые цепные реакции осуществляются в ядерных реакторах.

Реакции синтеза. Термоядерные реакции

Удельная энергия связи ядер резко увеличивается при переходе от ядер тяжелого водорода (дейтерия ${}^2_1\text{H}$ и трития ${}^3_1\text{H}$) к литию ${}^6_3\text{Li}$ и особенно к гелию ${}^4_2\text{He}$, т. е. реакция синтеза ядер в более тяжелые сопровождается выделением большого количества энергии. При делении ядра ${}^{238}_{92}\text{U}$ выделяется энергия приблизительно 0,84 МэВ на один нуклон, а в реакциях, приведенных ниже, эта величина равна 3,5 МэВ на один нуклон.

Реакции синтеза ядер дейтерия, трития и лития:



где Q – энергосвязь.

Реакции синтеза легких атомных ядер в более тяжелые, происходящие при сверхвысоких температурах (примерно 10^8 К и выше), называются **термоядерными реакциями**.

Термоядерные реакции также могут быть управляемыми и неуправляемыми. Неуправляемой термоядерной реакцией является взрыв водородной бомбы, взрывчатой веществе в ней служила смесь лития и дейтерия, а запалом – атомная бомба, при взрыве которой возникает необходимая для протекания термоядерной реакции температура.

Подсказка

1. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}^9_4\text{Be}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

Решение

Как указывается в разделе «Теория», дефект массы найдем из соотношения

$$\Delta m = Zm_{1\text{H}} + (A - Z)m_n - m_a. \quad (1)$$

Вычисление дефекта массы выполним во внесистемных единицах (а. е. м.). Для ядра ${}^9_4\text{Be}$ $Z = 4$, $A = 9$. Массы нейтральных атомов ${}^1_1\text{H}$ и ${}^9_4\text{Be}$, а также нейтрона (m_n):

m_{H}^1 (или масса протона) = 1,00783 а. е. м;

$m_n = 1,00867$ а. е. м; $m_{\text{Be}}^9 = 9,01219$ а. е. м.

Подставим найденные массы в выражение (1) и произведем вычисления: $\Delta m = [4 \cdot 1,00783 + (9 - 4) \cdot 1,00867 - 9,01219] = 0,05828$ а. е. м. Энергию связи найдем в МэВ. Для этого дефект массы (Δm) подставим в выражение для энергии связи (в а. е. м.):

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2, \text{ где } c^2 = 931,4 \text{ МэВ/а. е. м.}$$

Подставим все данные в выражение и получим

$$E = 931,4 \cdot 0,05828 = 54,28 \text{ МэВ.}$$

2. Найти энергию реакции (Q) ${}^9_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^6_3\text{Li}$, если известно, что кинетические энергии протона $E_{\text{H}} = 5,45$ МэВ, ядра гелия $E_{\text{He}} = 4$ МэВ и что ядро гелия вылетело под углом 90° к направлению движения протона. Ядро-мишень ${}^9_4\text{Be}$ неподвижно.

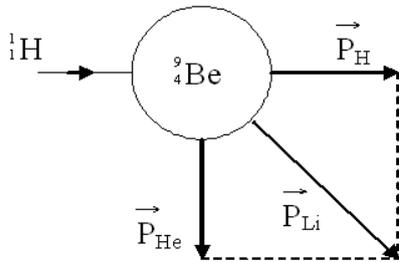


Рис. 25.2

Решение

Энергия реакции Q равна разности между суммой кинетических энергий ядер – продуктов реакции и кинетической энергией налетающего ядра:

$$Q = E_{\text{Li}} + E_{\text{He}} - E_{\text{H}}. \quad (1)$$

Для определения неизвестной кинетической энергии E_{Li} воспользуемся законом сохранения импульса:

$$\vec{P}_{\text{H}} = \vec{P}_{\text{He}} + \vec{P}_{\text{Li}}. \quad (2)$$

Векторы \vec{P}_{H} и \vec{P}_{He} по условию задачи взаимно перпендикулярны (рис. 25.2). Поэтому

$$(\vec{P}_{\text{Li}})^2 = (\vec{P}_{\text{He}})^2 + (\vec{P}_{\text{H}})^2. \quad (3)$$

Выразим импульсы ядер через их кинетические энергии. Поскольку кинетические энергии ядер много меньше энергий покоя этих ядер ($E_{0\text{He}} = 3733$ МэВ, $E_{0\text{H}} = 938$ МэВ), то можно воспользоваться классическим соотношением между E и P :

$$P^2 = 2mE. \quad (4)$$

Заменив в уравнении (3) квадраты импульсов ядер их выражениями (4), получим (сократив на 2)

$$m_{\text{Li}} E_{\text{Li}} = m_{\text{He}} E_{\text{He}} + m_{\text{H}} E_{\text{H}},$$

откуда

$$E_{\text{Li}} = \frac{m_{\text{He}} E_{\text{He}} + m_{\text{H}} E_{\text{H}}}{m_{\text{Li}}}.$$

Из раздела «Справка» найдем массы изотопов:

$$\begin{aligned}m_{\text{H}} &= 1,00783 \text{ а. е. м;} \\m_{\text{He}} &= 4,00260 \text{ а. е. м;} \\m_{\text{Li}} &= 6,01513 \text{ а. е. м.}\end{aligned}$$

Подставив массы изотопов ядер и их энергии в (5), получим

$$E_{\text{Li}} = \frac{4,00260 \cdot 5,45 + 1,00783 \cdot 4}{6,01513} = 3,58 \text{ МэВ.}$$

Из формулы (1) найдем энергию реакции Q :

$$Q = E_{\text{He}} + E_{\text{Li}} - E_{\text{H}} = 2,13 \text{ МэВ.}$$

3. Сколько атомов радона распадается за время $\Delta t = 1$ сутки из $N_0 = 10^6$ атомов?

Решение

За время t распадается $\Delta N = N_0 - N$ атомов. Согласно закону радиоактивного распада, начальное N_0 число и конечное N число атомов связаны зависимостью

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

здесь λ – постоянная распада.

Поскольку постоянная распада $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{T}$, то соотношение (1)

можно записать как $N = N_0 e^{\left(\frac{-0,693}{T}\right)t}$, откуда $\Delta N = N_0 \cdot \left(1 - e^{(-0,693 \cdot t / T)}\right)$.

Период полураспада радона $T = 3,82$ сут. Подставляя числовые данные, получим

$$\Delta N = N_0 \left(1 - e^{(-0,693 \cdot t / T)}\right) = 10^6 \cdot \left(1 - e^{\left(\frac{-0,693 \cdot 1}{3,82}\right)}\right) = 1,67 \cdot 10^5 \text{ сут}^{-1}.$$

4. Найти постоянную распада λ радиоактивного вещества, если известно, что число атомов этого вещества уменьшается за время $t = 1$ сутки на $x = 18,2$ %.

Решение

Число атомов радиоактивного вещества dN , распадающихся за время dt , пропорционально числу имеющихся атомов и определяется соотношением

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

откуда, разделяя переменные, получим

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt.$$

Интегрируя $\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$, найдем

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t. \quad (1)$$

Из соотношения (1) выразим

$$\lambda = \frac{\ln(N/N_0)}{t}.$$

Уменьшение числа атомов ΔN равно $\Delta N = N_0 - N$, разделим на N_0 , $\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0}$, поскольку $\frac{\Delta N}{N_0} = x$, то $x = 1 - \frac{N}{N_0}$, или $\frac{N}{N_0} = 1 - x$, откуда

$$N = N_0(1 - x). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим $\lambda = \frac{\ln(1-x)}{t}$.

Окончательно $\lambda = \frac{\ln(1-0,182)}{24 \cdot 3600} = 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$.

5. Кинетическая энергия α -частицы, вылетающей из ядра атома радия ${}_{88}^{226}\text{Ra}$ при радиоактивном распаде, $E_\alpha = 4,78 \text{ МэВ}$. Найти скорость v α -частицы и полную энергию E , выделяющуюся при вылете α -частицы. Ответ для E дать в МэВ ($1 \text{ МэВ} = 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$).

Решение

Кинетическая энергия α -частицы мала по сравнению с ее энергией покоя (3733 МэВ), поэтому скорость α -частицы найдем из соотношения

$$E_\alpha = \frac{m_\alpha v^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha}},$$

где $m_\alpha = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (масса ${}^4_2\text{He}$ – α -частицы). Подставив числовые данные, получим

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,78 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,6 \cdot 10^{-27}}} = 1,52 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Полная энергия E , выделяющаяся при вылете α -частицы, складывается из кинетической энергии остаточного ядра $E_{\text{я}}$ и кинетической энергии α -частицы, т. е.

$$E = E_\alpha + E_{\text{я}}. \quad (1)$$

Согласно закону сохранения импульса,

$$m_{\alpha} \cdot v_{\alpha} = m_{\text{я}} \cdot v_{\text{я}}. \quad (2)$$

Проведем преобразования:

$$(m_{\alpha} \cdot v_{\alpha})^2 = \frac{m_{\alpha} \cdot v_{\alpha}^2 \cdot 2m_{\alpha}}{2} = E_{\alpha} \cdot 2m_{\alpha}.$$

Аналогично $(m_{\text{я}} \cdot v_{\text{я}})^2 = \frac{m_{\text{я}} \cdot v_{\text{я}}^2 \cdot 2m_{\text{я}}}{2} = E_{\text{я}} \cdot 2m_{\text{я}}.$

Поскольку $(m_{\alpha} \cdot v_{\alpha})^2 = (m_{\text{я}} \cdot v_{\text{я}})^2$, или $E_{\alpha} \cdot 2m_{\alpha} = E_{\text{я}} \cdot 2m_{\text{я}}$, отсюда

$$E_{\text{я}} = \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{я}}} \cdot E_{\alpha}. \quad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$E = E_{\alpha} + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{я}}} \cdot E_{\alpha} = E_{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{я}}}\right) = E_{\alpha} \cdot \left(\frac{m_{\text{я}} + m_{\alpha}}{m_{\text{я}}}\right).$$

Для ядра ${}_{88}^{226}\text{Ra}$: $Z = 88$, $A = 226$, $N = 138$. Остаток ядра ${}_{86}^{222}\text{X}$ (радон), его масса: $m_{\text{я}} = 222$ а. е. м., $m_{\alpha} = 4$ а. е. м. Подставляя числовые данные, получим

$$E = 4,87 \cdot \left(\frac{222 + 4}{222}\right) = 4,87 \text{ МэВ}.$$

ТЕСТ

Вопросы

25.1. Ядро какого элемента относится к бозонам?

1. Ядро водорода ${}^1_1\text{H}$.
2. Ядро гелия ${}^4_2\text{He}$.
3. Ядро меди ${}^{63}_{29}\text{Cu}$.
4. Ядро цинка ${}^{65}_{30}\text{Zn}$.

25.2. Ядро какого элемента относится к фермионам?

1. ${}^{20}_{10}\text{Ne}$.
2. ${}^{18}_9\text{F}$.
3. ${}^{26}_{13}\text{Al}$.
4. ${}^1_1\text{H}$.

25.3. Ядро какого элемента относится к бозонам?

1. ${}^{63}_{29}\text{Cu}$.
2. ${}^{28}_{14}\text{Si}$.
3. ${}^{131}_{54}\text{Xe}$.
4. ${}^{137}_{56}\text{Ba}$.

25.4. Какие частицы являются переносчиками сильного взаимодействия?

1. Глюоны.
2. Протоны.
3. Нейтроны.
4. Фотоны.

25.5. Какие частицы являются переносчиками электромагнитного взаимодействия?

1. Глюоны.
2. Протоны.
3. Нейтроны.
4. Фотоны.

25.6. Какие силы являются только силами притяжения? Найдите неверный ответ.

1. Ядерные силы.
2. Сила тяготения.
3. Сила Кулона.

25.7. Какое взаимодействие из действующих в ядре создает энергию связи ядра?

1. Сильное.
2. Гравитационное.
3. Электромагнитное.

25.8. Какие силы не являются центральными?

1. Силы Кулона.
2. Силы тяготения.
3. Ядерные силы.

25.9. Какое излучение не отклоняется электрическим и магнитным полями?

1. β -излучение.
2. α -излучение.
3. γ -излучение.

25.10. Какое излучение обладает очень большой проникающей способностью?

1. β -излучение.
2. α -излучение.
3. γ -излучение.

25.11. Какое излучение обладает наиболее высокой ионизирующей способностью?

1. β -излучение.
2. α -излучение.
3. γ -излучение.

25.12. Какова единица измерения постоянной радиоактивного распада?

1. s^{-1} .
2. m^{-1} .
3. м/с.
4. λ – величина безразмерная.

25.13. Какая величина определяет скорость радиоактивного распада?

1. Постоянная радиоактивного распада λ .
2. Среднее время жизни радиоактивного ядра τ .
3. Период полураспада T .

25.14. Какая величина определяет время, в течение которого первоначальное количество ядер уменьшается наполовину?

1. Постоянная радиоактивного распада λ .
2. Среднее время жизни радиоактивного ядра τ .
3. Период полураспада T .

25.15. Условие развития цепной реакции:

1. Наличие нейтронов.
2. Наличие размножающихся нейтронов.
3. Условие развития цепной реакции не установлено.

25.16. При каком значении коэффициента размножения k развивается цепная реакция деления?

1. $K \geq 1$.
2. $K = 0$.
3. $K < 1$.

25.17. Какая из нижеприведенных реакций использовалась в водородной бомбе?

1. ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{P}$.
2. ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$.
3. ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$.
4. ${}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$.

25.18. Найдите верно записанные реакции:

1. ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{P}$.
2. ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$.
3. ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$.

25.19. Какая реакция находит широкое применение в энергетике?

1. Управляемая реакция деления тяжелых ядер под действием нейтронов.

2. Неуправляемая реакция деления тяжелых ядер.

3. Управляемая термоядерная реакция синтеза легких ядер.

4. Неуправляемая термоядерная реакция синтеза легких ядер.

25.20. Какая реакция для широкого применения в энергетике требует дальнейших исследований?

1. Управляемая реакция деления тяжелых ядер под действием нейтронов.

2. Неуправляемая реакция деления тяжелых ядер.

3. Управляемая термоядерная реакция синтеза легких ядер.

4. Неуправляемая термоядерная реакция синтеза легких ядер.

25.21. Какие законы сохранения, выполняющиеся при радиоактивном распаде, называются правилами смещения?

1. Сумма зарядов и массовых чисел возникающих ядер и частиц равна заряду и массовому числу соответственно исходного ядра.

2. Закон сохранения импульса.

3. Закон сохранения момента импульса.

25.22. При какой реакции выделяется наибольшая энергия в расчете на один нуклон?

1. В реакции деления тяжелых ядер.

2. В реакции синтеза легких ядер.

3. Во всех видах ядерных реакций выделяется приблизительно одинаковая энергия.

25.23. Что называется критической массой?

1. Минимальная масса делящегося вещества, находящегося в системе критических размеров.

2. Максимальная масса делящегося вещества, которая может разместиться в активной зоне.

3. Верный ответ не указан.

25.24. Ядерные силы ...

1) короткодействующие;

2) зарядонезависимые;

3) являются силами притяжения;

4) могут быть как силами притяжения, так и силами отталкивания.

25.25. Что представляет собой α -излучение?

1. Поток фотонов. 2. Поток электронов.

3. Поток нейтронов. 4. Поток ядер гелия.

25.26. Что представляет собой γ -излучение?

1. Поток фотонов. 2. Поток электронов.

3. Поток нейтронов. 4. Поток ядер гелия.

25.27. Что представляет собой β -излучение?

1. Поток фотонов. 2. Поток электронов.

3. Поток нейтронов. 4. Поток ядер гелия.

25.28. Что понимается под радиоактивностью?

1. Способность атомных ядер самопроизвольно превращаться в другие ядра с испусканием излучений и частиц.

2. Способность атомных ядер самопроизвольно превращаться в другие атомы с испусканием излучений и частиц.

3. Способность молекул самопроизвольно превращаться в другие молекулы с испусканием излучений и частиц.

25.29. Укажите закон радиоактивного распада (N_0 – начальное число нераспавшихся ядер; N – число нераспавшихся ядер в момент времени t ; λ – постоянная радиоактивного распада).

1. $N = N_0 e^{-\lambda t}$.
2. $N_0 = N \cdot e^{-\lambda t}$.
3. $N = N_0 e^{\lambda t}$.
4. $N_0 = N \cdot e^{\lambda t}$.

25.30. Как подсчитать период полураспада T радиоактивного ядра, если известна постоянная распада λ ?

1. $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.
2. $T = \frac{0,693}{\lambda}$.
3. $T = \ln 2 \cdot \lambda$.

25.31. Что называется периодом полураспада?

1. *Время, в течение которого исходное число радиоактивных ядер уменьшается вдвое.*

2. *Время, в течение которого все радиоактивные ядра испытают распад.*

3. *Величина, пропорциональная постоянной радиоактивного распада.*

25.32. Какая величина называется средним временем жизни радиоактивного ядра?

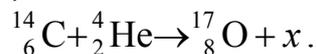
1. *Величина, обратная постоянной радиоактивного распада.*

2. *Величина, обратная периоду полураспада.*

3. *Величина, равная постоянной радиоактивного распада.*

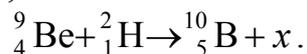
4. *Величина, равная периоду полураспада.*

25.33. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x , в символической ядерной реакции



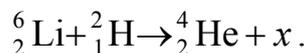
1. ${}^1_1\text{P}$.
2. ${}^1_0\text{n}$.
3. ${}^4_2\text{He}$.
4. ${}^0_{-1}\text{e}$.

25.34. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x , в символической ядерной реакции



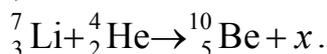
1. ${}^1_1\text{P}$.
2. ${}^1_0\text{n}$.
3. ${}^4_2\text{He}$.
4. ${}^0_{-1}\text{e}$.

25.35. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x , в символической ядерной реакции



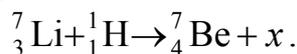
1. ${}^1_1\text{P}$.
2. ${}^1_0\text{n}$.
3. ${}^4_2\text{He}$.
4. ${}^0_{-1}\text{e}$.

25.36. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x , в символической ядерной реакции



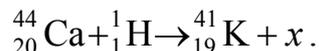
1. ${}^1_1\text{P}$.
2. ${}^1_0\text{n}$.
3. ${}^4_2\text{He}$.
4. ${}^0_{-1}\text{e}$.

25.37. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x , в символической ядерной реакции



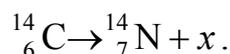
1. ${}^1_1\text{P}$. 2. 1_0n . 3. ${}^4_2\text{He}$. 4. ${}^0_{-1}e$.

25.38. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x , в символической ядерной реакции



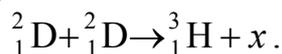
1. ${}^1_1\text{P}$. 2. 1_0n . 3. ${}^4_2\text{He}$. 4. ${}^0_{-1}e$.

25.39. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x , в символической ядерной реакции



1. ${}^1_1\text{P}$. 2. 1_0n . 3. ${}^4_2\text{He}$. 4. ${}^0_{-1}e$.

25.40. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x , в символической ядерной реакции



1. ${}^1_1\text{P}$. 2. 1_0n . 3. ${}^4_2\text{He}$. 4. ${}^0_{-1}e$.

Задачи

25.1. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}^9_4\text{Be}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

25.2. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}^{11}_5\text{B}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

25.3. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}^{12}_6\text{C}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

25.4. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}^{14}_7\text{N}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

25.5. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}^{18}_8\text{O}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

25.6. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}^{19}_9\text{F}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

25.7. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}^{20}_{10}\text{Ne}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

25.8. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}^{23}_{11}\text{Na}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

25.9. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи ядра ${}_{12}^{23}\text{Mg}$. Ответ для Δm дать в а. е. м., для $E_{\text{св}}$ – в МэВ.

25.10. Найти энергию реакций (Q) ${}^9_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^6_3\text{Li}$, если известно, что кинетические энергии протона $E_{\text{H}} = 5,45$ МэВ, ядра гелия $E_{\text{He}} = 4$ МэВ и что ядро гелия вылетело под углом 90° к направлению движения протона. Ядро-мишень ${}^9_4\text{Be}$ неподвижно.

25.11. Сколько атомов радона распадается за время $\Delta t = 1$ сутки из $N_0 = 10^6$ атомов.

25.12. Найти постоянную распада λ радиоактивного вещества, если известно, что число атомов этого вещества уменьшается за время $t = 1$ сутки на $x = 18,2\%$.

25.13. Кинетическая энергия α -частицы, вылетающей из ядра атома радия ${}_{88}^{226}\text{Ra}$ при радиоактивном распаде, $E_\alpha = 4,78$ МэВ. Найти скорость v α -частицы и полную энергию E , выделяющуюся при вылете α -частицы. Ответ для E дать в МэВ ($1 \text{ МэВ} = 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

25.14. Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Через какое время t распадется 75 % первоначальной массы m атомов? Ответ дать в сутках.

25.15. Какая доля (в %) первоначальной массы радиоактивного изотопа распадается за среднее время жизни (τ) этого изотопа?

25.16. Неподвижный нейтральный π -мезон, распадаясь, превращается в два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого фотона. Масса покоя π -мезона $m_0(\pi) = 264,2m_0$, m_0 – масса покоя электрона. Ответ дать в МэВ; $m_0c^2 = 0,511$ МэВ; $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг.

25.17. Позитрон и электрон соединяются, образуя два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого фотона, считая, что начальная энергия частиц ничтожно мала. Какова длина волны λ этих фотонов? Ответ для $h\nu$ дать в МэВ.

25.18. Найти порог E ядерной реакции ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{P}$. Порогом ядерной реакции называется минимальная кинетическая энергия бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция. Ответ дать в МэВ.

Указание: E_{min} можно найти из соотношения
$$E_{\text{min}} = |Q| \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1},$$

m_1 – масса покояющегося ядра; m_2 – масса бомбардирующей частицы; Q – энергия ядерной реакции.

25.19. Определить энергию ядерной реакции ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0n$.

- 25.20.** Определить энергию ядерной реакции ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + {}^1_0\text{n}$.
- 25.21.** Радиоактивный изотоп радия ${}^{225}_{88}\text{Ra}$ претерпевает четыре α -распада и два β -распада. Определить для конечного ядра: 1) зарядовое число Z ; 2) массовое число A .
- 25.22.** Определить, сколько β - и α -частиц выбрасывается при превращении ядра таллия ${}^{210}_{81}\text{Tl}$ в ядро свинца ${}^{206}_{82}\text{Pb}$.
- 25.23.** Определить, какая необходима энергия, чтобы разделить ядро ${}^{12}_6\text{C}$ на три α -частицы.
- 25.24.** Определить массу изотопа ${}^{15}_7\text{N}$, если изменение массы при образовании ядра ${}^{15}_7\text{N}$ составляет $\Delta m = 0,2508 \cdot 10^{-27}$ кг.
- 25.25.** При отрыве нейтрона от ядра гелия ${}^4_2\text{He}$ образуется ядро ${}^3_2\text{He}$. Определить энергию связи, которую необходимо для этого затратить.
- 25.26.** Энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра, состоящего из трех протонов и четырех нейтронов, равна 39,3 МэВ. Определить массу m нейтрального атома, обладающего этим ядром.
- 25.27.** Определить массу (в кг) нейтрального атома хрома ${}^{52}_{24}\text{Cr}$.
- 25.28.** При бомбардировке изотопа лития ${}^6_3\text{Li}$ дейтронами ${}^2_1\text{H}$ образуются две α -частицы ${}^4_2\text{He}$ и выделяется энергия $\Delta E = 22,3$ МэВ. Определить массу изотопа лития (в кг).
- 25.29.** Постоянная радиоактивного распада радиоактивного изотопа ${}^{210}_{82}\text{Pb}$ равна 10^{-9} с^{-1} . Определить время (в годах), в течение которого распадается $2/5$ начального количества ядер этого радиоактивного изотопа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Физические константы

Скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6,67 \cdot 10^{11}$ Н·м ² /кг ²
Молярный объем идеального газа ($T_0 = 273,15$ К, $P_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па)	$V_{\mu} = 22,4138$ л/моль
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,314$ Дж/(К·моль)
Постоянная Фарадея	$F = 96\ 485$ Кл/моль
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Заряд электрона	$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Заряд протона	$e_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Заряд α – частицы	$q_{\alpha} = 2e$
Масса α – частицы	$m_{\alpha} = 2m_p$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Удельное сопротивление проводников ρ :	
алюминий	$\rho = 2,53 \cdot 10^{-8}$ Ом·м
медь	$\rho = 1,71 \cdot 10^{-8}$ Ом·м
Диэлектрическая проницаемость диэлектриков ϵ :	
керосин	$\epsilon = 2$
масло	$\epsilon = 2,2$
парафин	$\epsilon = 2$
Площадь S поверхности сферы радиуса R	$S = 4\pi R^2$
Длина волны в вакууме	$\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$
Длина волны в среде	$\lambda = \frac{v}{\nu}$
Показатель преломления	$n = \frac{c}{v}$

Здесь c – скорость света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с)

ν – скорость света в среде

Если угол α мал и выражен в радианах, то в первом приближении можно принять $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \alpha$ (рад)

Масса нейтральных атомов

Элемент	Порядковый номер	Изотоп	Масса, а. е. м.
(Нейтрон)	0	n	1,00867
Водород	1	^1H	1,00783
		^2H	2,01410
		^3H	3,01605
Гелий	2	^3He	3,01603
		^4He	4,00260
Литий	3	^6Li	6,01513
		^7Li	7,01601
Бериллий	4	^7Be	7,01693
		^9Be	9,01219
		^{10}Be	10,01354
Бор	5	^9B	9,01333
		^{10}B	10,01294
		^{11}B	11,00931
Углерод	6	^{10}C	10,00168
		^{12}C	12,00000
		^{13}C	13,00335
		^{14}C	14,00324
Азот	7	^{13}N	13,00574
		^{14}N	14,00307
		^{15}N	15,00011
Кислород	8	^{16}O	15,99491
		^{17}O	16,99913
		^{18}O	17,99916
Фтор	9	^{19}F	18,99840
Натрий	11	^{22}Na	21,99444
		^{23}Na	22,98977
Магний	12	^{23}Mg	22,99414
Алюминий	13	^{30}Al	29,99817
Кремний	14	^{31}Si	30,97535
Фосфор	15	^{31}P	30,97376
Калий	19	^{41}K	40,96184
Кальций	20	^{44}Ca	43,95549
Свинец	82	^{206}Pb	205,97446
Полоний	84	^{210}Po	209,98297

**Масса и энергия покоя некоторых элементарных частиц
и легких ядер**

Частица	Масса		Энергия	
	m_0 , кг	m_0 , а. е. м.	E_0 , Дж	E_0 , МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Нейтральный мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14526	...	135
Протон	$1,67 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,5 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,68 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733

Период полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ изотопа	Тип распада	Период полураспада
Актиний	${}_{89}^{225}\text{Ac}$	α	10 сут.
Йод	${}_{53}^{131}\text{I}$	β^- , γ	8 сут.
Иридий	${}_{77}^{192}\text{Ir}$	β^- , γ	75 сут.
Кобальт	${}_{27}^{60}\text{Co}$	β^- , γ	5,3 года
Магний	${}_{12}^{27}\text{Mg}$	β^-	10 мин
Радий	${}_{88}^{219}\text{Ra}$	α	10^{-3} с
Радий	${}_{88}^{226}\text{Ra}$	α , γ	$1,62 \cdot 10^3$ лет
Радон	${}_{86}^{222}\text{Rn}$	α	3,8 сут.
Стронций	${}_{38}^{90}\text{Sr}$	β^-	28 лет
Торий	${}_{90}^{229}\text{Th}$	α , γ	$7 \cdot 10^3$ лет
Уран	${}_{92}^{238}\text{U}$	α , γ	$4,5 \cdot 10^9$ лет
Фосфор	${}_{15}^{32}\text{P}$	β^-	14,3 сут.
Натрий	${}_{11}^{22}\text{Na}$	γ	2,6 года

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятие 1. Кинематика материальной точки	24
Занятие 2. Кинематика твердого тела.....	36
Занятие 3. Динамика.....	48
Занятие 4. Законы сохранения	64
Занятие 5. Законы идеального газа. Законы распределения.....	79
Занятие 6. Первое начало термодинамики. Теплоемкость. Энтропия. Тепловые двигатели. Реальные газы.....	92
Занятие 7. Специальная теория относительности (СТО).....	112
Занятие 8. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Теорема Гаусса	126
Занятие 9. Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Потенциал. Связь напряженности и потенциала. Емкость	144
Занятие 10. Законы постоянного тока	161
Занятие 11. Электромагнетизм. Сила Ампера. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц	175
Занятие 12. Закон Био – Савара – Лапласа и его применение к расчету магнитной индукции и напряженности магнитных полей. Магнитные свойства веществ	189
Занятие 13. Эффект Холла. Закон электромагнитной индукции. Уравнения Максвелла.....	214
Занятие 14. Механические колебания и волны	237
Занятие 15. Электромагнитные колебания и волны	259
Занятие 16. Геометрическая оптика	280
Занятие 17. Интерференция.....	298
Занятие 18. Дифракция света	321
Занятие 19. Поляризация	344
Занятие 20. Тепловое излучение.....	369
Занятие 21. Фотоэффект. Эффект Комптона.....	388
Занятие 22. Атом водорода по Бору. Линейчатые спектры	412
Занятие 23. Элементы квантовой механики. Волновые свойства частиц	430
Занятие 24. Уравнение Шредингера. Частица в потенциальной яме ...	444
Занятие 25. Физика атомного ядра и элементарных частиц	468
Приложение.....	489

Учебное издание

ЕРОФЕЕВА Галина Васильевна
КРЮЧКОВ Юрий Юрьевич
СКЛЯРОВА Елена Александровна
ЧЕРНОВ Иван Петрович

**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ
ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ
НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Учебник

Выпускающий редактор *Д.В. Заремба*

Редактор *С.Н. Карапотин*

Компьютерная верстка *Н.Н. Чернова, В.П. Аршинова*

Дизайн обложки *Т.В. Буланова*

Подписано к печати 24.11.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл. печ. л. 28,67. Уч.-изд. л. 25,93.

Заказ 1183-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета

сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru