МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
(с решениями)

Молекулярная физика.
Термодинамика

Допущено Научно-методическим советом по физике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям

Издательство
Томского политехнического университета
2013

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я73
Ф50

Авторы

Ю.И. Тюрин, В.В. Ларионов, Н.Д. Толмачева, Н.А. Антропов,
Б.В. Горячев, С.И. Кузнецов, О.Ю. Петрова, Т.В. Смекалина,
Е. Н. Степанова, Э.Б. Шошин

Ф50 **Физика. Сборник задач (с решениями). Молекулярная физика. Термодинамика:** учебное пособие / Ю.И. Тюрин, В.В. Ларионов, Н.Д. Толмачева и др.; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 174 с.

ISBN 978-5-4387-0361-7

Пособие включает примерно 640 задач по разделам теоретического курса физики «Молекулярная физика. Термодинамика» (авторы: Ю.И. Тюрин, Ю.Ю. Крючков, И.П. Чернов). Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения в виде основных формул, около 55 задач с решениями и примерно 585 задач для аудиторных занятий и самостоятельного внеаудиторного анализа. Основное внимание уделено методике решения задач, их подробному анализу и применению полученных решений в технических устройствах.

Предназначено для преподавателей и студентов технических университетов.

УДК 53(076.5)
ББК 22.3я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор заведующий кафедрой
физико-математических дисциплин Норильского индустриального института

С.Х. Шигалугов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики
Приазовского государственного технического университета

В.П. Гранкин

ISBN 978-5-4387-0361-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач (Часть 1) является дополнением к второму тому теоретического курса «Молекулярная физика. Термодинамика, Т.2» (авторы: Ю.И.Тюрин, Ю.Ю.Крючков, И.П.Чернов). Сборник задач содержит примерно 640 задач, около 55 из которых имеют подробные решения и анализ. Часть задач составлена по публикациям известных российских физиков и носит оригинальный характер.

Задачи располагаются в строгой логической последовательности. В каждом разделе приведены 75 задач для самостоятельного решения, которые разделены по степени сложности на три части по 25 задач. В конце каждой задачи приведен ответ в виде расчетной формулы. Некоторые разделы содержат также качественные задачи с краткими примерами ответов к ним. Такие подсказки формируют логическую базу для самостоятельного анализа, с их помощью обучение физике приносит наибольшую пользу, т. к. являет собой вид творчества, которое проявляет себя при индивидуальной работе с задачами.

Инновационное образование требует от студентов владеть навыками технических решений хотя бы в игровом варианте. Этому в немалой степени соответствует изучение физики, что хорошо проявляется при решении задач.

Учебник может быть полезен как студентам, так и преподавателям физики при подготовке и проведении практических занятий и для организации самостоятельной работы студентов технических университетов.

По отдельным темам авторами глав являются: Н.А.Антропов (7), Б.В.Горячев (4,5), С.И.Кузнецов (3), В.В.Ларионов (1−3, 7), О.Ю.Петрова (3), Т.В.Смекалина (1), Е.Н.Степанова (2), Н.Д.Толмачева (6, Приложения), Ю.И.Тюрин (2, 4), Э.Б.Шошин (6).

Замечания, предложения, а также сообщения об обнаруженных опечатках просим направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, ТПУ, кафедра общей физики или по адресу tyurin@tpu.ru, tnd@tpu.ru.

1. ДАВЛЕНИЕ ГАЗА. ТЕМПЕРАТУРА И СРЕДНЯЯ ЭНЕРГИЯ ТЕПЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ МОЛЕКУЛ. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение Клапейрона–Менделеева

$$pV = \frac{m}{M}RT\,,$$

где p – давление газа; V – объем данной массы газа; m – масса газа; M – молярная масса газа; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура.

Закон Дальтона. Давление смеси газов p равно сумме парциальных давлений p_i газов, составляющих смесь

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_N.$$

Закон Бойля – Мариотта (изотермический процесс, T = const, m = const)

$$pV = \text{const}.$$

Закон Гей-Люссака (изобарический процесс, p = const, m = const)

$$V/T = \text{const}.$$

Закон Шарля (изохорический процесс, V = const, m = const)

$$p/T = \text{const}.$$

Плотность газа

$$\rho = n \cdot m_0,$$

где n – концентрация молекул газа; m_0 – масса одной молекулы.

Зависимость давления p от концентрации n и абсолютной температуры T

$$p = nkT,$$

где $k = R/N_A$ – постоянная Больцмана; N_A – постоянная Авогадро.

Основное уравнение кинетической теории газов (уравнение Клаузиуса)

$$p = \frac{2}{3}n \cdot \langle E_k \rangle \quad \text{или} \quad p = \frac{1}{3}m_0 n v_{\text{кв}}^2,$$

где $\langle E_k \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы; $v_{\text{кв}}$ – средняя квадратичная скорость молекулы.

Средняя кинетическая энергия одной молекулы

$$\langle E_k \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где $i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{кол}$ – суммарное число степеней свободы (число возможных независимых направлений движения молекулы), равное сумме поступательного ($i_{пост}$), вращательного ($i_{вр}$) и удвоенного колебательного ($i_{кол}$) числа степеней свободы.

Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$C_V = (i/2)R; \quad C_p = (i/2 + 1)R.$$

Фазовая скорость распространения продольных волн в газах

$$v = \sqrt{\gamma RT/M} \text{ или } v = \sqrt{\gamma p/\rho},$$

где $\gamma = C_p/C_V$; p и ρ – давление и плотность газа соответственно.

Абсолютная влажность $\rho = m/V$.

Относительная влажность воздуха

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_н} \cdot 100\% \text{ или } \varphi = \frac{p}{p_н} \cdot 100\%,$$

где ρ, $\rho_н$ – абсолютная влажность ненасыщенного и насыщенного водяного пара, p, $p_н$ – парциальное давление ненасыщенного и насыщенного водяного пара, соответственно.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. В сосуде объемом V = 10 л находится m = 4 г гелия при температуре °t = 17 °С. Найдите давление p гелия.

Дано:
$V = 1 \cdot 10^{-2}$ м^3
$m = 4 \cdot 10^{-3}$ кг
T = 290 К
R = 8,31 Дж/(моль·К)

p – ?

Решение. Предположим, что давление гелия невелико, тогда начальные условия соответствуют модели идеального газа. Идеальные газы подчиняются уравнению Клапейрона – Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT, \qquad (1)$$

где p – давление газа; V – объем газа; T – абсолютная температура; m – масса и M – молярная масса.

Из уравнения (1) найдем величину давления p гелия

$$p = \frac{m}{M}\cdot\frac{RT}{V} = \frac{4\cdot 10^{-3}\cdot 8,31\cdot 290}{4\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-2}} = 2,41\cdot 10^{5}\ \text{Па}.$$

Следовательно, модель идеального газа вполне применима.

Ответ: $p = 241$ кПа.

Задача 2. Найдите массу киломоля смеси m_{CO} = 10 г угарного газа и m_{O_2} = 40 г кислорода.

Дано:
$m_{CO} = 1\cdot 10^{-2}$ кг
$m_{O_2} = 4\cdot 10^{-2}$ кг
$M_{CO} = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$M_{O_2} = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$M_{см}$ – ?

Решение. Начнем решение с ответа на поставленный вопрос. Для этого запишем определение для числа молей смеси

$$\nu_{см} = \frac{m_{см}}{M_{см}}. \quad (1)$$

Из (1) находим молярную массу смеси

$$M_{см} = \frac{m_{см}}{\nu_{см}}. \quad (2)$$

Масса $m_{см}$ смеси равна сумме масс компонент смеси

$$m_{см} = m_{CO} + m_{O_2}. \quad (3)$$

Количество молей смеси также выражается через сумму числа молей отдельных газов

$$\nu_{см} = \nu_{CO} + \nu_{O_2}. \quad (4)$$

С учетом (1) из (4) имеем

$$\nu_{см} = \frac{m_{CO}}{M_{CO}} + \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}}. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (2), (3) и (5) относительно $M_{см}$, получим

$$M_{см} = \frac{m_{CO} + m_{O_2}}{m_{CO}/M_{CO} + m_{O_2}/M_{O_2}} = 31,1\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}} = 31,1\ \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}.$$

Ответ: $M_{см}$ = 31,1 кг/кмоль.

Задача 3. В баллоне находилось m_1 = 8 кг газа при давлении $p_1 = 10^6$ Па. Найдите массу Δm газа, которую выпустили из баллона, если окончательное давление стало равно $p_2 = 2,5\cdot 10^5$ Па. Температуру T газа считать постоянной.

Дано:
m_1 = 8 кг
$p_1 = 10^6$ Па
$p_2 = 2,5\cdot 10^5$ Па
Δm – ?

Решение. Процесс изотермический, однако закон Бойля – Мариотта pV = const неприменим, т.к. масса газа в данном процессе не постоянна.

Массу выпущенного из баллона газа определим из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$m_1 = \frac{p_1 VM}{RT}; \quad (1)$$

$$m_2 = \frac{p_2 VM}{RT}, \quad (2)$$

где m_2 – масса газа, которая осталась в баллоне.

Из (1) и (2) получим массу Δm газа, которую выпустили из баллона

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{VM}{RT}\left(p_2 - p_1\right). \quad (3)$$

Неизвестный сомножитель в (3) найдем из уравнения (1)

$$\frac{VM}{RT} = \frac{m_1}{p_1}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\Delta m = m_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = 8 \cdot \left(\frac{2,5 \cdot 10^5}{10 \cdot 10^5} - 1\right) = -6 \text{ кг}.$$

Знак «минус» показывает, что масса газа в баллоне уменьшилась.

Ответ: $|\Delta m| = 6$ кг.

Задача 4. Какое количество N молекул воздуха находится в комнате объемом $V = 80$ м^3 при температуре $°t = 17$ °С и давлении $p = 1$ атм.

Дано:
$V = 80$ м^3
$T = 290$ К
$p = 1 \cdot 10^5$ Па
$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/ К

N – ?

Решение. Воспользуемся уравнением

$$p = nkT,$$

из которого определим концентрацию n молекул воздуха

$$n = \frac{p}{kT}. \quad (1)$$

Так как по определению $n = N/V$, то

$$N = nV, \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получим

$$N = \frac{pV}{kT} = \frac{10^5 \cdot 80}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290} = 2 \cdot 10^{27}.$$

Ответ: $N = 2 \cdot 10^{27}$.

Задача 5. Найдите число i степеней свободы молекулы газа, если при нормальных условиях плотность газа $\rho = 1,3$ мг/см^3 и скорость распространения звука в нем v = 328 м/с.

Дано:	**Решение.** Скорость звуковых волн в газе равна
$\rho = 1{,}3$ кг/м^3 v = 328 м/с	
i – ?	

$$v = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p}{\rho}}, \qquad (1)$$

где p и ρ – давление и плотность невозмущенного волной газа.

Показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{i+2}{i}, \qquad (2)$$

где i – число степеней свободы.

Подставляя (2) в (1), после несложных преобразований получим

$$v = \sqrt{\frac{i+2}{i} \cdot \frac{p}{\rho}}; \qquad v^2 = \frac{i+2}{i} \cdot \frac{p}{\rho}; \qquad \frac{\rho v^2}{p} - 1 = \frac{2}{i};$$

$$i = \frac{2}{\frac{\rho v^2}{p} - 1} = \frac{2}{\frac{1{,}3 \cdot 328^2}{10^5} - 1} = 5.$$

Ответ: $i = 5$.

Задача 6. В баллоне находится азот под давлением p = 200 кПа. Концентрация молекул $n = 4{,}1 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$. Вычислить среднюю энергию $\langle E_{ст} \rangle$, приходящуюся на одну степень свободы. Результат представить в электронвольтах (эВ).

Дано:	**Решение.** Средняя энергия молекул газа вычисляется по формуле
$p = 2 \cdot 10^5$ Па $n = 4{,}1 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$	
$\langle E_{ст} \rangle$ – ?	

$$\langle E_k \rangle = \frac{i}{2} kT, \qquad (1)$$

где i – сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы. «Размороженными» являются колебательные степени свободы, следовательно, i = 5. На одну степень свободы приходится $kT/2$.

Известно, что

$$p = nkT. \qquad (2)$$

Так как $\langle E_{ст} \rangle = \langle E_k \rangle / i$, то из (1) и (2) получим

$$\langle E_{ст} \rangle = \frac{1}{2} kT = \frac{p}{2n} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 4{,}1 \cdot 10^{25}} = 2{,}4 \cdot 10^{-21} \text{Дж} = 0{,}015 \text{ эВ}.$$

Значению энергии $\langle E_{ст} \rangle$ соответствует температура $T \approx 348$ К.

Ответ: $\langle E_{ст} \rangle$ = 0,015 эВ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Вычислить число N молекул, содержащихся в единице массы m углекислого газа (CO_2), найти массу m_0 одной молекулы и среднее расстояние d между молекулами для нормальных условий (p_0, T_0).

Ответ: $N = N_A m/M = 1{,}37 \cdot 10^{25}$, где M – молярная масса CO_2; $m_0 = M/N_A = 7{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг; $d = \sqrt[3]{kT_0/p_0} = 3{,}3 \cdot 10^{-9}$ м.

2. Объем V_1 цилиндра поршневого насоса равен 0,5 л. Насос соединяется с баллоном, содержащим воздух при нормальных условиях. Объем баллона V_2 = 3,0 л. Найдите давление p воздуха в баллоне после n = 5 ходов поршня: если а) воздух нагнетают, б) воздух выкачивают. Процесс считать изотермическим.

Ответ: а) $p_{наг} = p_0 \left(\dfrac{nV_1}{V_2} + 1 \right) = 183$ кПа; б) $p_{вык} = p_0 \cdot \left(\dfrac{V_2}{V_1 + V_2} \right)^n \approx 46$ кПа.

3. Найдите число i степеней свободы молекулы газа, если скорость распространения звука в нем v = 360 м/с, а плотность ρ при давлении $p = 2{,}9 \cdot 10^5$ Па равна 3,7 кг/м^3.

Ответ: $i = 2p/(\rho v^2 - p) = 3$.

4. Найдите среднюю кинетическую энергию $\langle E_{вр} \rangle$ вращательного движения одной молекулы водорода при температуре T = 296 К, а также кинетическую энергию E вращательного движения всех молекул, содержащихся в m = 4 г водорода.

Ответ: $\langle E_{вр} \rangle = (i_{вр}/2)kT = 4{,}09 \cdot 10^{-21}$ Дж, где $i_{вр} = 2$; $E = (N_A m/M) \cdot \langle E_{вр} \rangle = 4{,}92$ кДж.

5. Баллон емкостью V = 30 л содержит смесь водорода и гелия при температуре T = 300 К и давлении p = 8,2 атм. Масса смеси m = 24 г. Определите массу m_1 водорода и массу m_2 гелия.

Ответ: $m_1 = \left(\dfrac{pV}{RT} - \dfrac{m}{M_2} \right) \dfrac{M_1 M_2}{M_2 - M_1} = 15{,}5$ г; $m_2 = m - m_1 = 8{,}5$ г.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1.1. Современные высоковакуумные насосы позволяют получать давления $p = 4 \cdot 10^{-15}$ атм. Считая, что газом является азот (при комнатной температуре), найти число N его молекул в объеме V = 1 см^3.

Ответ: $N = pV/(kT) \approx 1 \cdot 10^5$.

1.1.2. Воздух в аудитории находится при нормальных условиях (p_0, T_0). Найдите число N его молекул в объеме $V = 1$ см^3.

Ответ: $N = p_0 V/(kT_0) \approx 2{,}7 \cdot 10^{19}$.

1.1.3. Определите давление p, при котором объем $V = 1$ м^3 в газа содержит $N = 2{,}4 \cdot 10^{26}$ молекул. Температура газа равна $°t = 0$ °С.

Ответ: $p = NkT/V = 9 \cdot 10^5$ Па.

1.1.4. Давление газа при $T_1 = 293$ К равно $p_1 = 107$ кПа. Каково будет давление p_2 газа, если его нагреть при постоянном объеме до $T_2 = 423$ К?

Ответ: $p_2 = p_1 T_2/T_1 = 1{,}54 \cdot 10^5$ Па.

1.1.5. Давление газа при $T_1 = 293$ К равно $p_1 = 107$ кПа. Каково будет давление p_2 газа, если его охладить при постоянном объеме до $T_2 = 250$ К?

Ответ: $p_2 = p_1 T_2/T_1 = 9{,}1 \cdot 10^4$ Па.

1.1.6. Баллон электрической лампы при изготовлении заполняют азотом под давлением $p_1 = 50{,}65$ кПа при температуре $T_1 = 288$ К. Какова температура T_2 газа в горящей лампе, если давление в ней повысилось до $p_2 = 1{,}11 \cdot 10^5$ Па. Объясните практическое значение пониженного давления при изготовлении ламп.

Ответ: $T_2 = T_1 p_2/p_1 = 631$ К.

1.1.7. Давление в баллоне с газом $p_1 = 284$ кПа. При понижении температуры на $\Delta T = 85$ К давление стало равным $p_2 = 101$ кПа. Найдите значения температуры в обоих случаях.

Ответ: $T_1 = \Delta T \cdot p_1/(p_1 - p_2) = 132$ K; $T_2 = T_1 - \Delta T = 47$ K.

1.1.8. Манометр на баллоне с кислородом показывает давление $p_1 = 0{,}23$ МПа в помещении с температурой $°t_1 = 24$ °С. Когда баллон вывесили на улицу ($°t_2 = -12$ °С), манометр показал $p_2 = 0{,}19$ МПа. Не было ли утечки газа?

Ответ: $m_1/m_2 = p_1 T_2/(p_2 T_1) = 1$, утечки газа нет.

1.1.9. Находившийся в закрытом баллоне нагрели от $T_1 = 300$ до $T_2 = 360$ К, при этом давление возросло на $\Delta p = 81$ кПа. Определите первоначальное давление p_1.

Ответ: $p_1 = \Delta p \cdot T_1/(T_2 - T_1) = 0{,}41$ МПа.

1.1.10. Давление p_1 в рентгеновской трубке при $°t_1 = 15$ °С равно 1,2 мПа. Каково будет давление в работающей трубке при $°t_2 = 80$ °С и $t_3° = 150$ °С?

Ответ: $p_2 = p_1 T_2/T_1 = 1{,}47 \cdot 10^{-3}$ Па; $p_3 = p_1 T_3/T_1 = 1{,}76 \cdot 10^{-3}$ Па.

1.1.11. В баллоне содержится газ при температуре $°t_1 = 100$ °С. До какой температуры $°t_2$ нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в $n = 2$ раза?

Ответ: $T_2 = nT_1 = 746$ К; $t_2° = 473$ °С.

1.1.12. В цилиндр длиной $l = 1,6$ м, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении p_0, начали медленно вдвигать поршень площадью $S = 200$ см^2. Определите силу F, которая будет действовать на поршень, если его остановить на расстоянии $h = 10$ см от дна цилиндра.

Ответ: $F = \frac{p_0}{S} \cdot \frac{h}{l-h} = 338 \text{ кН}$.

1.1.13. Полый шар объемом $V = 10$ см^3, заполненный воздухом при температуре $T_1 = 573$ К, соединили с чашкой, заполненной водой. Определите массу m воды, вошедшей в шар при остывании воздуха в нем до температуры $T_2 = 293$ К. Изменением объема шара пренебречь.

Ответ: $m = \rho_{\text{вод}} V(1 - T_2/T_1) = 4,9$ г.

1.1.14. В сосуде A объемом $V_1 = 2$ л находится газ под давлением $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па, а в сосуде B объемом $V_2 = 4$ л находится тот же газ под давлением $p_2 = 1 \cdot 10^5$ Па. Температура обоих сосудов одинакова и постоянна. Под каким давлением p будет находиться газ после соединения сосудов A и B трубкой.

Ответ: $p = (p_1V_1 + p_2V_2)/(V_1+V_2) = 1,7 \cdot 10^5$ Па.

1.1.15. Плотность ρ некоторого газа при температуре $t° = 14$ °С и давлении $p = 4 \cdot 10^5$ Па равна 0,68 кг/м^3. Определите молярную массу M этого газа.

Ответ: $M = \rho RT/p = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

1.1.16. Найдите давление p смеси газа в сосуде объемом $V = 5$ л, если в нем находится $N_1 = 2 \cdot 10^{15}$ молекул кислорода, $N_2 = 8 \cdot 10^{15}$ молекул азота и $m_{\text{Ar}} = 1 \cdot 10^{-9}$ кг аргона. Температура смеси $T = 290$ К.

Ответ: $p = \frac{RT}{V} \cdot \left(\frac{N_1}{N_A} + \frac{N_2}{N_A} + \frac{m_{\text{Ar}}}{M_{\text{Ar}}} \right) = 20 \text{ мПа}$.

1.1.17. Определите наименьший объем $V_{\min}$ баллона, вмещающего $m = 6$ кг кислорода, если его стенки при температуре $°t = 27$ °С выдерживают давление $p = 15$ МПа.

Ответ: $V_{\min} = mRT/(pM) = 31,2$ л.

1.1.18. Имеется два сосуда объемом $V_1 = 4$ л и $V_2 = 5$ л. Какое давление будет иметь газ, если сосуды соединить, выполнив условие $T = \text{const}$. Давление в первом $p_1 = 2$ атм; во втором – $p_2 = 1$ атм.

Ответ: $p = (p_1V_1 + p_2V_2)/(V_1+V_2) = 1{,}44\cdot10^5$ Па.

1.1.19. Под каким давлением p находится $m = 0{,}1$ кг метана (CH_4) в баллоне объемом $V = 15$ л и температуре $°t = 27$ °C? Какова средняя энергия $\langle E_0\rangle$ одной молекулы?

Ответ: $p = mRT/(MV) = 10^6$ Па; $\langle E_0\rangle = (i/2)kT = 1{,}24\cdot10^{-20}$ Дж, где $i = 6$.

1.1.20. В закрытом сосуде емкостью $V = 2$ м^3 находятся $m_{N_2} = 1{,}4$ кг азота (N_2) и $m_{O_2} = 2$ кг кислорода (O_2). Найдите давление p газовой смеси в сосуде, если температура $T = 300$ К.

Ответ: $p = \dfrac{RT}{V}\cdot\left(\dfrac{m_{N_2}}{M_{N_2}} + \dfrac{m_{O_2}}{M_{O_2}}\right) = 1{,}4\cdot10^5$ Па.

1.1.21. Емкость закрытого объема $V = 4$ м^3, температура $T = 600$ К. Найдите давление p газовой смеси, состоящей из $m_{CO_2} = 2{,}2$ кг углекислого газа и $m_{O_2} = 2$ кг кислорода.

Ответ: $p = \dfrac{RT}{V}\cdot\left(\dfrac{m_{CO_2}}{M_{CO_2}} + \dfrac{m_{O_2}}{M_{O_2}}\right) = 1{,}4\cdot10^5$ Па.

1.1.22. Сухой атмосферный воздух при нормальных условиях (p_0, T_0) содержит в основном 23,1 % O_2, 75,6 % азота и 1,3 % аргона. Определите парциальное давление каждого газа.

Ответ: $p_{O_2} = \eta_{O_2} p_0 M_{\text{воз}}/M_{O_2} = 0{,}21$ атм, где $\eta_{O_2} = m_{O_2}/m = 0{,}231$;

$p_{N_2} = \eta_{N_2} p_0 M_{\text{воз}}/M_{N_2} = 0{,}783$ атм, где $\eta_{N_2} = m_{N_2}/m = 0{,}756$;

$p_{Ar} = \eta_{Ar} p_0 M_{\text{воз}}/M_{Ar} = 0{,}01$ атм, где $\eta_{Ar} = m_{Ar}/m = 0{,}013$.

1.1.23. В колбе объемом $V = 2$ л содержится газ при температуре $°t = 17$ °C. Каково давление p газа, если в колбе находится $N = 3{,}3\cdot10^{22}$ молекул.

Ответ: $p = NkT/V = 6{,}6\cdot10^4$ Па.

1.1.24. Определите давление p смеси окиси азота (NO) и азота (N_2) в баллоне емкостью $V = 2$ м^3, если масса окиси азота $m_{NO} = 13{,}5$ кг, масса азота $m_{N_2} = 0{,}5$ кг, температура $T = 300$ К.

Ответ: $p = \dfrac{RT}{V}\cdot\left(\dfrac{m_{NO}}{M_{NO}} + \dfrac{m_{N_2}}{M_{N_2}}\right) = 5{,}8\cdot10^5$ Па.

1.1.25. При какой температуре T кислород O_2, находясь под давлением $p = 2\cdot10^5$ Па, имеет плотность $\rho = 1,2$ кг/м^3.

Ответ: $T = pM/(\rho R) = 642$ К.

1.2.1. В баллоне емкостью $V = 0,05$ м^3 находятся $\nu = 0,12$ кмоль газа при давлении $p = 6\cdot10^6$ Па. Определите среднюю кинетическую энергию $\langle E_{кин}\rangle$ теплового движения молекулы газа.

Ответ: $\langle E_{кин}\rangle = \dfrac{i_{пост}}{2}\cdot\dfrac{pV}{\nu N_A} = 6,2\cdot10^{-21}$ Дж, $i_{пост} = 3$.

1.2.2. Масса крупной молекулы органического вещества $m_0 = 10^{-18}$ г. Найдите полную кинетическую энергию $\langle E_k\rangle$ теплового движения такой молекулы, взвешенной в воздухе при температуре $°t = 27$ °С. Колебательное движение молекулы «заморожено».

Ответ: $\langle E_k\rangle = (i/2)kT = 1,24\cdot10^{-20}$ Дж, где $i = i_{пост} + i_{вр} = 6$.

1.2.3. Масса легкой молекулы органического вещества $3,6\cdot10^{-24}$ кг. Найдите полную кинетическую энергию $\langle E_k\rangle$ теплового движения такой молекулы, взвешенной в воздухе при температуре $°t = 127$ °С. Колебательное движение молекулы «заморожено».

Ответ: $\langle E_k\rangle = (i/2)kT = 1,66\cdot10^{-20}$ Дж, где $i = i_{пост} + i_{вр} = 6$.

1.2.4. Найдите полную среднюю кинетическую энергию $\langle E_k\rangle$ молекул аммиака при температуре $°t = 0$ °С.

Ответ: $\langle E_k\rangle = (i/2)kT = 1,13\cdot10^{-20}$ Дж, где $i = i_{пост} + i_{вр} = 6$.

1.2.5. Кислород массой $m = 8$ г занимает объем $V = 560$ л. Определите давление p этого газа в том же объеме при температуре $T_1 = 820$ К и температуре T_2, когда все молекулы кислорода полностью распались на атомы. Известно, что при температуре T_2 кинетическая энергия атомов кислорода $\langle E_{кин}\rangle = 10$ эВ.

Ответ: $p_1 = \dfrac{m}{M_{O_2}}\cdot\dfrac{RT_1}{V} = 3,0\cdot10^3$ Па; $p_2 = \dfrac{m}{M_O}\cdot\dfrac{2E_{кин}R}{3kV} = 5,7\cdot10^5$ Па.

1.2.6. Вычислить, исходя из классических представлений, средние энергии поступательного и вращательного движения двухатомной молекулы при $T = 4500$ К.

Ответ: $\langle E_{пост}\rangle = \dfrac{i_{пост}}{2}\cdot kT = 9,3\cdot10^{-20}$ Дж; $\langle E_{вр}\rangle = \dfrac{i_{вр}}{2}\cdot kT = 6,2\cdot10^{-20}$ Дж,

где $i_{пост} = 3$; $i_{вр} = 2$.

1.2.7. Вычислить, исходя из классических представлений, угловую скорость ω вращения молекулы кислорода при температуре $°t$ = 27 °C. Диаметр d молекулы кислорода принять равным 3 Е.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{2i_{\text{вр}}RT}{M_{\text{O}_2}d^2}} = 1{,}86 \cdot 10^{12}$ рад/с, где $i_{\text{вр}} = 2$.

1.2.8. Вычислить, исходя из классических представлений, угловую скорость ω вращения молекулы азота при температуре $°t$ = 27 °C. Диаметр d молекулы азота принять равным 3 Е.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{2i_{\text{вр}}RT}{M_{\text{N}_2}d^2}} = 1{,}99 \cdot 10^{12}$ рад/с, где $i_{\text{вр}} = 2$.

1.2.9. Найдите энергию $\langle E_k \rangle$ теплового движения молекул аммиака (NH_3), находящихся в баллоне объемом V = 40 л при давлении p = = 2,45 кПа. Какую часть $\eta = \langle E_{\text{пост}} \rangle / \langle E_k \rangle$ этой энергии составляет энергия поступательного движения? Колебательное движение «заморожено».

Ответ: $\langle E_k \rangle = \dfrac{i}{2} \cdot pV = 294$ Дж; $\eta = i_{\text{пост}}/i = 0{,}5$, где $i = 6$; $i_{\text{пост}} = 3$.

1.2.10. Найдите энергию $\langle E_k \rangle$ теплового движения молекул метана CH_4, находящихся в баллоне объемом V = 5 л при давлении p = 4,9 кПа. Какую часть $\eta = \langle E_{\text{вр}} \rangle / \langle E_k \rangle$ этой энергии составляет энергия вращательного движения? Колебательное движение «заморожено».

Ответ: $\langle E_k \rangle = \dfrac{i}{2} \cdot pV = 73{,}5$ Дж; $\eta = i_{\text{вр}}/i = 0{,}5$, где $i = 6$; $i_{\text{вр}} = 3$.

1.2.11. Найдите энергию теплового движения молекул воздуха, находящегося в баллоне объемом V = 10 л при давлении p = 2,45 кПа. Какую часть $\eta = \langle E_{\text{пост}} \rangle / \langle E_k \rangle$ этой энергии составляет энергия поступательного движения. Дать анализ полученного результата.

Ответ: $\langle E_k \rangle = \dfrac{i}{2} \cdot pV = 61{,}25$ Дж; $\eta = i_{\text{пост}}/i = 3/5$, где $i = 5$; $i_{\text{пост}} = 3$.

1.2.12. Азот N_2 нагрет до температуры T, при которой у молекул возбуждены все степени свободы. Вычислить молярную теплоемкость C_V, C_p и $\gamma = C_p/C_V$.

Ответ: $C_V = (i/2)R = 29{,}1$ Дж/(моль·К);
$C_p = (i/2 + 1)R = 37{,}4$ Дж/(моль·К); $\gamma = C_p/C_V = 9/7$,
где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}} = 3 + 2 + 2 = 7$.

1.2.13. Углекислый газ (CO_2) нагрет до температуры T, при которой у молекул возбуждены все степени свободы. Найдите C_V и C_p газа при этих условиях.

Ответ: $C_V = (i/2)R = 33{,}2$ Дж/(моль·К);
$C_p = (i/2 + 1)R = 41{,}6$ Дж/(моль·К),
где $i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{кол} = 3 + 3 + 2 = 8$.

1.2.14. Найдите молярную теплоемкость C_V для смеси газов, содержащей $m_1 = 10$ г гелия и $m_2 = 4$ г водорода при постоянном объеме.

Ответ: $C_V = (R/2)\cdot(i_1 w_1 + i_2 w_2) = 16{,}2$ Дж/(моль·К), где

$$w_1 = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2};\; w_2 = \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2};\; \nu_1 = \frac{m_1}{M_1} = 2{,}5;\; \nu_2 = \frac{m_2}{M_2} = 2;\; i_1 = 3;\; i_2 = 5$$

1.2.15. Вычислить среднюю энергию поступательного $\langle E_{пост}\rangle$, вращательного $\langle E_{вр}\rangle$ и колебательного $\langle E_{кол}\rangle$ движения двухатомной молекулы газа при температуре $T = 3000$ К.

Ответ: $\langle E_{пост}\rangle = \frac{i_{пост}}{2}\cdot kT = 6{,}2\cdot10^{-20}$ Дж; $\langle E_{вр}\rangle = \frac{i_{вр}}{2}\cdot kT = 4{,}1\cdot10^{-20}$ Дж;
$\langle E_{кол}\rangle = i_{кол}\cdot kT = 4{,}1\cdot10^{-20}$ Дж, где $i_{пост} = 3$; $i_{вр} = 2$; $i_{кол} = 1$.

1.2.16. Вычислить энергию теплового движения молекул двухатомного газа, занимающего объем $V = 2{,}5$ л при давлении $p = 20$ Па. Молекулы считать жесткими. Что произойдет, если колебательные степени свободы будут «разморожены»?

Ответ: $\langle E_k\rangle = \frac{i_{пост} + i_{вр}}{2}\cdot pV = 0{,}125$ Дж, где $i_{пост} = 3$; $i_{вр} = 2$.

1.2.17. Баллон содержит азот (N_2) массой $m = 2$ г при температуре $T = 280$ К. Определите суммарную кинетическую энергию $\langle E_{пост}\rangle$ поступательного движения всех молекул газа. Сделать анализ решения.

Ответ: $\langle E_{пост}\rangle = \frac{i_{пост}}{2}\cdot\frac{m}{M}RT = 249$ Дж, где $i_{пост} = 3$.

1.2.18. Газ занимает объем $V = 2$ л под давлением $p = 5\cdot10^5$ Па. Определите примерную кинетическую энергию $\langle E_{пост}\rangle$ поступательного движения молекул газа.

Ответ: $\langle E_{пост}\rangle = \frac{i_{пост}}{2}\cdot pV = 1{,}5$ кДж, где $i_{пост} = 3$.

1.2.19. Теплота диссоциации (энергия, необходимая для расщепления молекул на атомы) водорода $Q = 4{,}19\cdot10^8$ Дж/кмоль. При какой температуре T средняя кинетическая энергия $\langle E_{пост}\rangle$ поступательного движения молекул достаточна для их расщепления.

Ответ: $T = 2Q/\left(i_{пост}kN_A\right) = 3{,}36 \cdot 10^4$ К.

1.2.20. Определите среднее значение полной кинетической энергии $\langle E_k\rangle$ молекулы гелия (He), кислорода (O_2) и водяного пара (H_2O) при $T = 400$ К.

Ответ: $\langle E_{k1}\rangle = \frac{i_1}{2} \cdot kT = 8{,}28 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\langle E_{k2}\rangle = \frac{i_2}{2} \cdot kT = 1{,}38 \cdot 10^{-20}$ Дж;

$\langle E_{k3}\rangle = \frac{i_3}{2} \cdot kT = 1{,}66 \cdot 10^{-20}$ Дж, где $i_1 = 3$; $i_2 = 5$; $i_3 = 6$.

1.2.21. Известно, что теплоемкость является функцией числа степеней свободы молекулы и согласно формуле $C_p = \frac{i+2}{2}R$ не зависит от температуры. В экспериментах, как известно, такую зависимость легко определяют. Чем это объяснить?

1.2.22. Баллон содержит водород массой m = 10 г при температуре T = 280 К. Определите кинетическую энергию $\langle E_{пост}\rangle$ поступательного движения и полную кинетическую энергию $\langle E_k\rangle$ всех молекул газа.

Ответ: $\langle E_{пост}\rangle = \frac{i_{пост}}{2} \cdot \frac{m}{M}kT = 17{,}45$ кДж, где $i_{пост} = 3$;

$\langle E_k\rangle = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M}kT = 29{,}1$ кДж, где $i = 5$.

1.2.23. Газ, состоящий из N-атомных молекул газа, имеет температуру T, при которой у молекул возбуждены все степени свободы (поступательные, вращательные, колебательные). Найдите среднюю энергию $\langle E_k\rangle$ молекулы такого газа. Молекулу считать линейной.

Ответ: $\langle E_k\rangle = \frac{i}{2} \cdot kT$, где $i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{кол} = 3 + 2 + 2 = 7$.

1.2.24. Газ состоит из N-атомных нелинейных молекул. Какую часть η полной энергии $\langle E_k\rangle$ одной молекулы газа составляет «колебательная энергия» $\langle E_{кол}\rangle$.

Ответ: $\langle E_k\rangle = \frac{i}{2} \cdot kT$; $\langle E_{кол}\rangle = kT$; $\eta = \langle E_{кол}\rangle/\langle E_k\rangle = 2i_{кол}/i = 1/4$,

где $i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{кол} = 3 + 3 + 2 = 8$.

1.2.25. Найдите число i степеней свободы молекулы газа, молярная теплоемкость которого при постоянном давлении C_p = 29 Дж/(моль·К).

Ответ: $i = 2(C_p/R - 1) = 5$.

1.3.1. В сосуде объемом $V = 30$ л содержится идеальный газ при температуре $°t = 0$ °С. После того как часть газа без изменения температуры была выпущена наружу, давление в сосуде понизилось на $\Delta p = 0{,}78$ атм. Найдите массу Δm выпущенного газа. Плотность ρ_0 данного газа при нормальных условиях 1,3 кг/м^3, давление $p_0 = 1$ атм.

Ответ: $\Delta m = \rho_0 V \cdot \Delta p / p_0 = 30$ г.

1.3.2. Смесь объемом $V = 20$ л содержит смесь водорода и гелия при температуре $°t = 20$ °С и давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Па. Масса смеси $m = 4{,}9$ г. Найдите отношение массы m_1 водорода к массе m_2 гелия в данной смеси.

Ответ: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{M_1}{M_2} \cdot \left(\dfrac{M_1 - M_2}{M_2 - M_1} \right) \cdot \dfrac{M_2 - mRT/pV}{M_1 - mRT/pV} \approx 0{,}5$

1.3.3. В сосуде находится смесь $m_1 = 7{,}0$ г азота (N_2) и $m_2 = 11$ г углекислого газа (CO_2) при температуре $T = 290$ К и давлении $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па. Найдите плотность этой смеси.

Ответ: $\rho = \dfrac{p_0}{RT} \cdot \dfrac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2} = 1{,}5$ кг/м^3.

1.3.4. В сосуде находится идеальный газ массой m_1. После того, как из сосуда выпустили часть газа, его давление уменьшилось в $n = 4$ раз, а температура в $k = 3$ раз. Определите, какая часть газа $\Delta m/m_1$ была выпущена из сосуда?

Ответ: $\Delta m/m_1 = 1 - k/n = 0{,}25$.

1.3.5. Найдите изменение давления в сосуде объемом $V = 30$ л, из которого выпустили $\Delta m = 50$ г. Плотность газа $\rho = 1{,}8$ кг/м^3, температура $°t = 0$ °С, давление p_0 атмосферное.

Ответ: $\Delta p = p_0 \Delta m / (\rho V) = 0{,}93$ атм.

1.3.6. Поршневым воздушным насосом откачивают сосуд объемом V. За один ход поршня насос захватывает объем ΔV. Сколько следует сделать циклов n, чтобы давление в сосуде уменьшилось в η раз. Процесс изотермический.

Ответ: $n = \ln\eta / \ln(1 + \Delta V/V)$.

1.3.7. В баллоне вместимостью $V = 30$ л находится кислород при давлении $p_1 = 7{,}3$ МПа и температуре $T_1 = 264$ К. Затем часть газа из баллона выпустили, причем температура газа повысилась до $\Delta T = 290$ К, а давление упало до Δp = 2,94 МПа. Найдите массу Δm кислорода, выпущенного из баллона.

Ответ: $\Delta m = \frac{VM}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) = 2{,}3$ кг, где $p_2 = p_1 - \Delta p$; $T_2 = T_1 + \Delta T$.

1.3.8. В стеклянной, запаянной с одного конца трубке находится водород, «закрытый» столбиком ртути длиной l = 10,0 см. Первоначально трубка была повернута открытым концом вверх, и газ в ней имел температуру $°t_1$ = 16 °С. Какова была длина l_1 столбика водорода, если после перевертывания трубки открытым концом вниз и нагревании газа до $°t_2$ = 39 °С ртутный столбик переместился на Δl = 7,0 см? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Ответ: $l_1 = \frac{T_1 \Delta l\left(p_0 - \rho g l\right)}{T_2\left(p_0 + \rho g l\right) - T_1\left(p_0 - \rho g l\right)} = 17$ см.

1.3.9. В объем (V = 0,3 м^3), содержащий m_1 = 16 г водорода, проник воздух. Найдите массу m_2 этого воздуха, если при $°t$ = 6 °С в объеме установилось давление p = 93 кПа.

Ответ: $\Delta m_2 = M_2\left(\frac{pV}{RT} - \frac{m_1}{M_1}\right) = 0{,}117$ кг.

1.3.10. Определите температуру T_2 горючей смеси в цилиндре двигателя внутреннего сгорания в конце такта сжатия, если давление до сжатия p_1 = 76 кПа, в конце сжатия p_2 = 851 кПа, начальная температура до сжатия T_1 = 315 К, степень сжатия $\eta = V_1/V_2$, т.е. отношение объемов, занимаемых газом в цилиндре двигателя при крайних положениях поршня, равна 6,3.

Ответ: $T_2 = \frac{T_1}{\eta} \cdot \frac{p_2}{p_1} = 560$ К.

1.3.11. Найдите максимальную температуру T_{max} идеального газа в следующем процессе $p = p_0 - \alpha/V^2$. Указания: Значение p поставить в уравнение Клапейрона – Менделеева, выразить T и продифференцировать полученное выражение по V. Найденное таким образом значение объема подставить в формулу для T.

Ответ: $T_{max} = \frac{2}{3}\frac{p_0}{R} \cdot \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}$.

1.3.12. Найдите максимальную температуру T_{max} идеального газа в следующем процессе: $p = p_0 e^{-\beta V}$, где p_0, β – постоянные.

Ответ: $T_{max} = p_0/(e\beta R)$.

1.3.13. В баллоне находился идеальный газ при давлении p_1 = 40 МПа и температуре T_1 = 300 К. После того как η = 3/5 газа выпустили, температура понизилась до T_2 = 240 К. Определите давление p_2 в баллоне.

Ответ: $p_2 = (1 - \eta)\, p_1 T_2 / T_1$ = 13 МПа.

1.3.14. Определите наименьшее возможное давление $p_{\min}$ идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0, α – положительные постоянные; V – объем газа. Изобразить данный процесс в параметрах p, V. Использовать указания к задаче 8.3.12.

Ответ: $p_{\min} = 2R\sqrt{\alpha T_0}$.

1.3.15. Определите наименьшее возможное давление $p_{\min}$ идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, T_0 = 330 К; α = 30 К/м^6. Изобразить данный процесс в координатах p, V.

Ответ: $p_{\min} = 2R\sqrt{\alpha T_0} = 1654$ Па.

1.3.16. В баллоне находится смесь идеальных газов: ν_1 = 0,1 моля азота (N_2), ν_2 = 0,2 моля углекислого газа (CO_2), ν_3 = 0,2 моля угарного газа (CO). Найдите молярную массу $M_{см}$ смеси.

Ответ: $M_{см} = \dfrac{\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = 34{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

1.3.17. В баллоне объемом V = 30 л при температуре T = 300 К находится смесь 3 идеальных газов: азота, кислорода и угарного газа. Количество азота в баллоне m_{N_2} = 2,8 г, кислорода m_{O_2} = 9,6 г. Найдите массу m_{CO} угарного газа, если общее давление газов в баллоне p = 50 кПа.

Ответ: $m_{CO} = M_{CO}\left(\dfrac{pV}{RT} - \dfrac{m_{N_2}}{M_{N_2}} - \dfrac{m_{O_2}}{M_{O_2}}\right) = 5{,}64$ г.

1.3.18. Определите плотность $\rho_н$ насыщенного водяного пара в воздухе при температуре T = 300 К. Давление водяного пара при этой температуре $p_н$ = 3,55 кПа.

Ответ: $\rho_н = \dfrac{p_н M_{H_2O}}{RT} = 25{,}6$ г/м^3.

1.3.19. В баллоне объемом V = 25 л находится водород при температуре T = 290 К. Часть водорода израсходовали, при этом давление понизилось на $\Delta p = 4 \cdot 10^5$ Па. Определите массу Δm израсходованного водорода.

Ответ: $\Delta m = \Delta p V M_{H_2} / (RT)$ = 8,3 г.

1.3.20. Сосуд емкостью V = 10 л содержит азот массой m_{N_2} = 7 г и водород массой m_{H_2} = 1 г при температуре T = 280 К. Определите давление p смеси газов.

Ответ: $p = \frac{RT}{V} \cdot \left(\frac{m_{N_2}}{M_{N_2}} + \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} \right) = 1,75 \cdot 10^5$ Па .

1.3.21. Определите удельный объем (V/m) смеси идеальных газов, содержащей кислород массой m_{O_2} = 10 г и азот m_{N_2} = 15 г при давлении p = 0,15 МПа и температуре T = 300 К.

Ответ: $\frac{V}{m} = \frac{RT}{pm} \cdot \left(\frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} + \frac{m_{N_2}}{M_{N_2}} \right) = 0,56$ м^3/кг, где $m = m_{O_2} + m_{N_2}$.

1.3.22. Найдите максимальную температуру T_{max} идеального газа в процессе, где давление изменяется по закону $p = p_0 - \beta V^2$, где p_0 и β – положительные постоянные. Определите размерность β и изобразите процесс на p, T диаграмме.

Ответ: $T_{max} = 2p_0 \cdot \sqrt{p_0/(3\beta)}\Big/(3R)$.

1.3.23. Давление воздуха в цилиндре дизеля в начале такта сжатия равно p_1 = 86 кПа, в конце такта сжатия p_2 = 3,45 МПа, при этом температура повышается с T_1 = 323 до T_2 = 923 К. Определите степень сжатия $\eta_д$ в дизельном моторе. Сравнить полученный результат со степенью сжатия $\eta_К = V_1/V_2$ = 5,6 карбюраторного двигателя автомобиля ГАЗ.

Ответ: $\eta_Д = p_2T_1/(p_1T_2) = 14$; $\eta_Д/\eta_К = 2,5$.

1.3.24. До какой температуры T нужно нагреть запаянный шар, содержащий m = 9 г воды, чтобы шар разорвался, если известно, что стенки шара выдерживают давление p не более 4 МПа, а его объем V = 1,2 л.

Ответ: $T = pVM/(mR)$ = 1155 К.

1.3.25. Метеорологический зонд-шар запускают с поверхности Земли при температуре T_1 = 290 К. Давление в шаре p_1 = 116 кПа. На некоторой высоте температура и давление атмосферного воздуха T_2 = 253 К и p_2 = 85 кПа. На сколько $\Delta V/V_1$ изменится объем шара на высоте, если давление, создаваемое за счет упругости оболочки шара, p = 5 кПа.

Ответ: $\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{p_1}{p_2 + p} \cdot \frac{T_2}{T_1} - 1 = 0,12$.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Функция распределения молекул по компонентам скорости

$$f\left(v_x\right)=\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}},$$

где m_0 – масса молекулы; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; v_x – проекция скорости v молекулы на ось Ox.

Функция распределения молекул по абсолютным значениям скорости (распределение Максвелла)

$$f\left(v\right)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2\cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Распределение Максвелла в приведенном виде

$$dN\left(u\right)=\frac{4N}{\sqrt{\pi}}\, e^{-u^2}u^2du,$$

где $u = v/v_в$; $v_в=\sqrt{2kT/m_0}$ – наиболее вероятная скорость; N – общее число молекул.

Наиболее вероятная скорость $v_в=\sqrt{2RT/M}$; средняя квадратичная скорость $v_{кв}=\sqrt{3RT/M}$; средняя арифметическая скорость молекулы $\langle v\rangle=\sqrt{8RT/\left(\pi M\right)}$, где M – молярная масса.

Функция распределения молекул по энергиям

$$f\left(E\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi k^3T^3}}\, E^{1/2}\cdot e^{-\frac{E}{kT}},$$

где $E = m_0v^2/2$ – кинетическая энергия молекулы.

Функция распределения Больцмана во внешнем потенциальном поле

$$n=n_0 e^{-\frac{U-U_0}{kT}},$$

где n и n_0 – концентрация молекул в точках поля, где их потенциальная энергия равна U и U_0 соответственно.

Барометрическая формула

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}},$$

где h – высота над поверхностью, где давление равно p_0.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. 1) Какие данные необходимо иметь, чтобы ответить на вопрос: найти относительное число молекул газа, обладающих некоторым значением скорости v.

2) Найдите отношение числа молекул газа, скорости которых лежат в интервале от v до v + Δv при температуре T_1, к числу молекул, скорости которых лежат в том же интервале при температуре $T_2 = 2T_1$.

Рассмотреть случаи: а) $v = v_{вер1}/2$; б) $v = v_{вер1}$; в) $v = 2v_{вер2}$, где $v_{вер1}$ и $v_{вер2}$ – наиболее вероятные скорости молекул, соответствующие температурам T_1 и T_2 ($\Delta v \ll v$).

Дано:	
а) $v = v_{вер1}/2$	**Решение:** Число молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до v + *d*v
б) $v = v_{вер1}$	$$dN(v) = N f(v) dv = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv, \quad (1')$$
в) $v = 2v_{вер2}$	где $f(v)$ – распределение Максвелла по абсолютным значениям скоростей; N – общее число молекул газа.
$T_2 = 2T_1$	
$\Delta v \ll v$	
$\Delta N = ?$	

Решение: Известно, что доли молекул ΔN, скорости которых при данной температуре T лежат в интервале от v до v + Δv, находят из физического смысла функции $f(v)$. Так как по условию задачи $\Delta v \ll v$, то (1′) можно записать в виде

$$\Delta N = N \cdot f(v) \Delta v. \quad (1)$$

где значение $f(v)$ на данном интервале Δv можно считать постоянным.

Следовательно, из (1) имеем право записать

$$\Delta N_1 = N \cdot f_1(v) \Delta v; \quad (2)$$

$$\Delta N_2 = N \cdot f_2(v) \Delta v. \quad (3)$$

Поделив выражение (2) на (3), окончательно имеем

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{f_1(v)}{f_2(v)}, \quad (4)$$

где

$$f_1(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT_1}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{m_0v^2}{2kT_1}}v^2; \tag{5}$$

$$f_2(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT_2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{m_0v^2}{2kT_2}}v^2. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{m_0v^2}{2kT_1}+\frac{m_0v^2}{2kT_2}\right). \tag{7}$$

а) по условию задачи $v = v_{вер1}/2$:

$$v_{вер1}=\sqrt{\frac{2kT_1}{m_0}};\qquad v^2_{вер1}=\frac{2kT_1}{m_0};$$

$$v^2=\frac{1}{4}v^2_{вер1};\qquad v^2=\frac{1}{4}\frac{2kT_1}{m_0}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) и учитывая, что $T_2 = 2T_1$, найдем

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=2^{2/3}\cdot\exp\left(-\frac{m_0 2kT_1}{4m_0 2kT_1}+\frac{m_0 2kT_1}{4m_0 4kT_1}\right)=2\sqrt{2}\cdot\exp\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=2{,}5.$$

Итак, если $v = v_{вер1}/2$, то число молекул, обладающих скоростями в заданном интервале вблизи исследуемой скорости v при температуре T_1, в 2,5 раза превышает число молекул, обладающих теми же значениями скоростей при температуре $T_2 = 2T_1$.

Увеличиваем значение скорости, то есть положение интересующего нас интервала Δv и переходим к условию б), когда $v = v_{вер1}$.

Применим формулу (7) и учитывая, что $v^2 = 2kT_1/m_0$., получим

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=2^{3/2}\exp\left(-1+\frac{1}{2}\right)\cong 1{,}72.$$

Аналогично для в), когда $v = 2v_{вер2}$ и $v^2=4\cdot 2kT_2/m_0$, получим

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=2^{3/2}\cdot\exp\left(-\frac{2m_0}{2kT_2}\cdot\frac{8kT_2}{m_0}+\frac{m_0}{2kT_2}\cdot\frac{8kT_2}{m_0}\right)=2^{3/2}\cdot\exp(-4)=0{,}052.$$

Нарисуем график $f(v)$ при двух температурах T_1 и T_2, рис. 2.1.

Учтем предварительно, что $T_2 > T_1$, следовательно, $v_{вер2} > v_{вер1}$. В точке кривой распределения, где $v = v_{вер1}$ и $v = v_{вер2}$ должно выполняться условие $f(v_1)_{max} > f(v_2)_{max}$. Докажем это.

Учитывая, что $v_1^2 = v_{\text{вер}1}^2 = \dfrac{2kT_1}{m_0}$ и $v_2^2 = v_{\text{вер}2}^2 = \dfrac{2kT_2}{m_0}$, запишем функ-

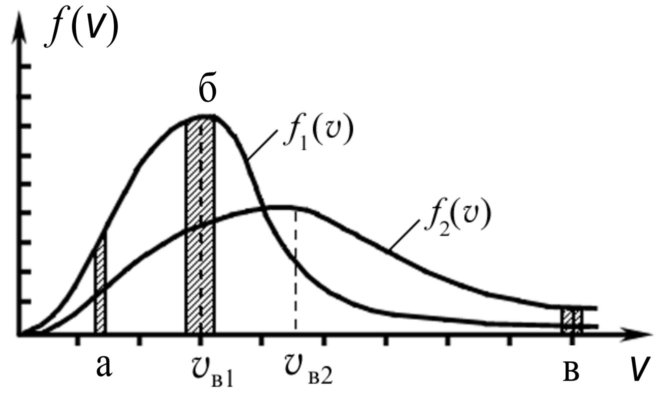

Рис. 2.1

цию распределения молекул по абсолютным значениям скорости для $v = v_{\text{вер}1}$ и $v = v_{\text{вер}2}$ в виде

$$f\left(v_{\text{вер}1}\right) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT_1}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-1}\cdot\frac{2kT_1}{m_0}; \quad f\left(v_{\text{вер}2}\right) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT_2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-1}\cdot\frac{2kT_2}{m_0};$$

$$\frac{f\left(v_1\right)}{f\left(v_2\right)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}\cdot\frac{T_1}{T_2} = 2^{3/2}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{2}\ \text{раз}.$$

Следовательно, функция $f\,(v_1)_{max} > f\,(v_2)_{max}$ примерно в 1,4 раза.

График имеет вид, представленный на рис. 2.1. Численные данные задачи позволяют грамотно изобразить кривые $f_1(v)$ и $f_2(v)$.

Действительно, площадка под кривой 1 в случае «а» должна быть в 2,5 раза больше площадки под кривой 2, а для случая «в» площадка под кривой 2 превышает площадку под кривой 1 в ~ 20 раз.

Ответ: а) 2,5; б) 1,72; в) 0,052 раза.

Задача 2. Используя функцию распределения молекул по энергиям, определите наиболее вероятное значение энергии $E_{\text{в}}$.

Решение: Функция распределения молекул по энергиям или плотность вероятности

$$f\left(E\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\left(kT\right)^{3/2}}\cdot\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\cdot E^{1/2}. \tag{1}$$

где E – кинетическая энергия молекулы.

При $E = E_{\text{в}}$, $f\,(E) = f\,(E_{\text{в}})_{max}$ и в максимуме $\dfrac{df}{dE_{E=E_{\text{в}}}} = 0$.

Дифференцируем (1), подставляем $E = E_в$ и, приравняв полученное выражение нулю, определим $E_в$

$$\frac{df}{dE} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\left(kT\right)^{3/2}}\left(E^{1/2}\cdot e^{-\frac{E}{kT}}\cdot\left(-\frac{1}{kT}\right)+e^{-\frac{E}{kT}}\cdot\frac{1}{2}E^{-1/2}\right).$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}\left(kT\right)^{3/2}}\cdot e^{-\frac{E_в}{kT}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{E_в}}{kT}+\frac{1}{2\sqrt{E_в}}\right)=0.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{E_в}}-\frac{\sqrt{E_в}}{kT}=0;\qquad \frac{1}{2\sqrt{E_в}}=\frac{\sqrt{E_в}}{kT};\qquad kT=2E_в;\qquad E_в=\frac{1}{2}kT.$$

Ответ: $E_в = kT/2$.

Задача 3. Водород находится при нормальных условиях и занимает объем V = 1 см^3. Определите число ΔN молекул в этом объеме, обладающих скоростями, меньшими некоторого значения v_{max} = 1 м/с.

Дано:	**Решение:** Число молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до v + dv
$p = p_0 \approx 10^5$ Па	$$dN(v) = Nf(v)dv = 4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{m_0v^2}{2kT}}v^2dv, \quad (1')$$
$T = T_0 = 273$ К	где f(v) – распределение Максвелла по абсолютным значениям скоростей; N – общее число молекул газа.
$V = 10^{-6}$ м^3	
$v_{max} = 1$ м/с	
$M_{H_2} = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль	
R = 8,31 Дж/(моль·К)	
ΔN – ?	

Рассматривая газ как идеальный, определим наиболее вероятную скорость молекул в данных условиях

$$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{M_{H_2}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 8,31\cdot 273}{0,002}} \approx 1,5\cdot10^3 \text{ м/с}.$$

$$\frac{v_{max}}{v_в} = \frac{1}{1,5\cdot10^3} \approx 6,67\cdot10^{-4}, \text{ т. е. } v_{max} \ll v_в. \qquad (2)$$

Поэтому для решения задачи удобно воспользоваться распределением молекул по относительным скоростям $u = v/v_в$. Согласно (1) и соотношения $v_в = \sqrt{2kT/m_0}$, число $dN(u)$ молекул, относительные скорости u которых заключены в интервале от u до $u + du$, определяется формулой

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}u^2du, \qquad (3)$$

где N – общее число молекул.

Из (2) имеем

$$u_{max} = v_{max}/v_в \approx 6{,}67\cdot 10^{-4}. \qquad (4)$$

Для таких значений u выражение (3) можно существенно упростить. В самом деле, для $u \ll 1$ имеем $e^{-u^2} \approx 1 - u^2$. Пренебрегая значением $u^2 \approx 4{,}45\cdot 10^{-7}$, по сравнению с единицей, запишем выражение (3) в виде

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \cdot u^2 du.$$

Интегрируя от $u = 0$ до $u = u_{max}$, получим

$$\Delta N = \int_0^{u_{max}} dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{u_{max}} u^2 du = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u^3}{3}\Bigg|_0^{u_{max}} = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} \cdot u_{max}^3. \qquad (5)$$

Общее число молекул газа массой m:

$$N = \frac{m}{m_0} = \frac{m}{M_{H_2}} \cdot N_A, \qquad (6)$$

где m_0 – масса молекулы H_2; N_A – число Авогадро ($N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$).

Из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT \text{ имеем } \frac{m}{M_{H_2}} = \frac{p_0 V}{RT_0}. \qquad (7)$$

Подставив (7) в (6), имеем

$$N = \frac{p_0 V}{RT_0} N_A = \frac{10^5 \cdot 10^{-6}}{8{,}31 \cdot 273} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 2{,}65 \cdot 10^{19}. \qquad (8)$$

С учетом (4) и (8) из (5), получим

$$\Delta N = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} \cdot u_{max}^3 = \frac{4 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{19}}{3 \cdot \sqrt{3{,}14}} \cdot \left(6{,}67 \cdot 10^{-4}\right)^3 = 5{,}9 \cdot 10^9.$$

Ответ: $\Delta N = 5{,}9\cdot 10^9$.

Задача 4. Барометр в кабине летящего вертолета показывает давление p = 90 кПа. На какой высоте h летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывает давление p_0 = 100 кПа? Считайте, что температура воздуха T = 290 К и не изменяется с высотой.

Дано:	**Решение:** Распределение давления в однородном поле силы тяжести определяется барометрической формулой
$p = 9\cdot 10^4$ Па $p_0 = 10^5$ Па $T = 290$ К $M = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль	$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}$$
h - ?	или

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mgh}{RT}}; \qquad \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{Mgh}{RT}; \qquad \ln\frac{p_0}{p} = \frac{Mgh}{RT};$$

$$h = \frac{RT}{Mg} \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) = \frac{8{,}31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} \cdot \ln\left(\frac{10^5}{9 \cdot 10^4}\right) = 893 \text{ м}.$$

Ответ: h = 893 м.

Задача 5. В центрифуге с ротором радиусом r_0 = 0,5 м, при температуре T = 300 К находится в газообразном состоянии органическое вещество с молярной массой M = 1 кг/моль. Определите отношение n_r/n_0 концентраций молекул у стенок ротора и в центре его, если ротор вращается с частотой ν = 30 с$^{-1}$.

Дано:	
r_0 = 0,5 м	
T = 300 К	
M = 1 кг/моль	
ν = 30 с$^{-1}$.	
R = 8,31 Дж/(моль·К)	
n_{r0}/n_0 = ?	

Решение: Распределение частиц по энергиям в силовом поле определяется законом Больцмана:

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{U_п}{kT}\right), \qquad (1)$$

где $U_п$ – потенциальная энергия частиц в силовом поле; n_0 – концентрация молекул в центре ротора, где $U_п$ = 0; T – температура газа.

Сила $F(r)$, которая действует в центрифуге на молекулу массы m_0 на расстоянии r от оси вращения, обусловлена перепадом давления и играет роль центростремительной силы и равна

$$F(r) = m_0 \frac{v^2}{r} = m_0 \omega^2 r,$$

где ω = 2πν – угловая скорость вращения молекул; v – линейная скорость молекул газа на расстоянии r от оси OO' (рис. 2.2) вращения.

Элементарная работа dA этой силы на пути dr, связанная с убылью потенциальной энергии $dU_п$, определится как

$$dA = F(r)dr = m_0\,(2\pi\nu)^2 r\,dr.$$

Тогда $dU_п = -m_0(2\pi\nu)^2 r\,dr$, а потенциальная энергия

$$U_п = \int dU_п = -\int m_0 (2\pi\nu)^2 r dr = -4\pi^2\nu^2 m_0 \frac{r^2}{2} + \text{const}.$$

Так как при r = 0, $U_п$ = 0 и const равна нулю. Следовательно,

$$U_п(r) = -4\pi^2\nu^2 m_0 \frac{r^2}{2} = -2\pi^2\nu^2 m_0 r^2 . \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$n = n_0 \cdot \exp\left(\frac{2\pi^2\nu^2 m_0 r^2}{kT}\right),$$

где n_0 – концентрация молекул на оси ротора (в центре ротора).

При $r = r_0$ получаем выражение для концентрации молекул у стенок ротора

$$n_{r_0} = n_0 \cdot \exp\left(\frac{2\pi^2\nu^2 m_0 r_0^2}{kT}\right). \qquad (3)$$

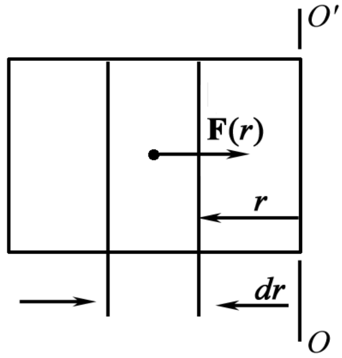

Рис. 2.2

Из (3) имеем

$$\frac{n_{r_0}}{n_0} = \exp\left(\frac{2\left(\pi\nu r_0\right)^2 m_0}{kT}\right), \qquad (4)$$

где $k = R/N_А$, а масса молекулы $m_0 = M/N_А$.

Учитывая выражения для k и m_0, из (4) получим

$$\frac{n_{r_0}}{n_0} = \exp\left(\frac{2\left(\pi\nu r_0\right)^2 M}{RT}\right) = \exp\left(\frac{2\cdot\left(3{,}14\cdot 30\cdot 0{,}5\right)^2}{8{,}31\cdot 300}\right) = e^{1{,}78} = 5{,}93 .$$

Ответ: $n_{r0}/n_0 = 5{,}93$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Какая часть молекул воздуха при температуре $°t = 17$ °С обладает скоростями, отличающимися не больше чем на $\Delta v = 0{,}5$ м/с от скорости, равной: а) $v_1 = v_в$; б) $v_2 = 0{,}1 v_в$.

Ответ: а) $\dfrac{\Delta N_1}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u_1^2} u_1^2 \Delta u = 0{,}1\,\%$; б) $\dfrac{\Delta N_2}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u_2^2} u_2^2 \Delta u = 2{,}7\cdot 10^{-3}\,\%$;

где $u_1 = v_1/v_в = 1$; $u_2 = v_2/v_в = 0{,}1$; $v_в = \sqrt{2RT/M} = 407{,}7$ м/с.

2. Найдите число молекул гелия в $V = 1$ см^3, скорости которых лежат в интервале от $v_1 = 2{,}39\cdot 10^3$ до $v_2 = 2{,}41\cdot 10^3$ м/с. Температура гелия $°t = 690$ °С, его плотность $\rho = 2{,}16\cdot 10^{-4}$ кг/м^3.

Ответ $\Delta N = \dfrac{4\rho N_A V}{\sqrt{\pi} M}\cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u = 2{,}5\cdot 10^{14}$ см$^{-3}$,

где $u = (v_1 + v_2)/(2v_в)$; $\Delta u = (v_2 - v_1)/v_в$; $v_в = \sqrt{2RT/M} = 2\cdot 10^3$ м/с.

3. В баллоне, объем которого $V = 10{,}5$ л, находится водород. При температуре $°t_0 = 0$ °С давление водорода $p = 1 \cdot 10^5$ Па. Найдите число молекул водорода, скорость которых лежат в интервале от $v_1 = 1190$ до $v_2 = 1210$ м/с при $T_1 = 273$ К и $T_2 = 3000$ К. Каким образом, не произведя вычислений, можно сравнить искомые числа молекул? Найдите относительное положение интервала на оси скоростей

Ответ: а) $\Delta N_1 = \dfrac{4pVN_A}{\sqrt{\pi} \cdot RT_0} \cdot e^{-u_1^2} u_1^2 \Delta u_1 = 2{,}8 \cdot 10^{21}$;

б) $\Delta N_2 = \dfrac{4pVN_A}{\sqrt{\pi} \cdot RT_0} \cdot e^{-u_2^2} u_2^2 \Delta u_2 = 1{,}2 \cdot 10^{19}$.

где $u = \dfrac{v_1 + v_2}{2v_{\text{в}}}$; $\Delta u = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{\text{в}}}$; $v_{\text{в}1} = \sqrt{\dfrac{2RT_1}{M}} = 1506$ м/с; $v_{\text{в}2} = \sqrt{\dfrac{2RT_2}{M}} = 4993$ м/с.

4. При каком значении скорости v пересекаются кривые распределения Максвелла для температур T_1 и $T_2 = 2T_1$. Исследуйте, сколько точек пересечения имеют данные кривые?

Ответ: $v = v_{\text{в}2} \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2} \cdot \ln 2} = 1{,}02 \cdot v_{\text{в}2}$ или $v = v_{\text{в}1} \cdot \sqrt{3 \cdot \ln 2} = 1{,}44 \cdot v_{\text{в}1}$.

Одна точка пересечения.

5. Найдите относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не больше чем на $\Delta n = 0{,}5$ % от: а) наиболее вероятной скорости; б) средней скорости; в) средней квадратичной скорости. Чему равна ширина интервала в каждом случае. Какая часть энергии приходится на долю этих молекул, если газ – водород, находящийся при нормальных условиях в объеме $V = 10$ л (используйте теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы). Как соотносятся результаты расчетов с использованием теоремы Больцмана и с учетом распределения Максвелла? Почему должно наблюдаться различие в результатах?

Ответ: а) $\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{8}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-1} \Delta n = 0{,}83$ %; б) $\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{64}{\pi^2} \cdot e^{-4/\pi} \Delta n = 0{,}90$ %;

в) $\dfrac{\Delta N}{N} = 12\sqrt{\dfrac{3}{2\pi}} \cdot e^{-3/2} \Delta n = 0{,}93$ %.

6. Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найдите давление газа как функцию высоты z, если при $z = 0$ давление $p = p_0$, а температура изменяется с высотой как $T = T_0(1 + \alpha z)$, где α – положительная постоянная.

Ответ: $p = p_0/(1 + \alpha z)^n$, где $n = Mg/(\alpha R T_0)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1.1. Плотность некоторого газа $\rho = 3\cdot10^{-3}$ кг/м^3. Найдите давление p газа, которое он оказывает на стенки сосуда, если средняя квадратичная скорость молекул газа $v_{кв} = 500$ м/с.

Ответ: $p = \rho\cdot v_{кв}^2/3 = 250$ Па.

2.1.2. Найдите отношение η средних квадратичных скоростей молекул водорода и кислорода при одинаковых температурах.

Ответ: $\eta = \sqrt{M_{O_2}/M_{H_2}} = 4$.

2.1.3. Найдите отношение η средних арифметических скоростей молекул водорода и азота при $T = \text{const}$ для обоих газов.

Ответ: $\eta = \sqrt{M_{N_2}/M_{H_2}} \approx 3,7$.

2.1.4. Найдите отношение η наиболее вероятных скоростей молекул водорода и углекислого газа при одинаковых температурах.

Ответ: $\eta = \sqrt{M_{CO_2}/M_{H_2}} = 4,7$.

2.1.5. Найдите отношение η наиболее вероятных скоростей атомов водорода и гелия при одинаковых температурах.

Ответ: $\eta = \sqrt{M_{He}/M_{H}} = 2$.

2.1.6. Найдите отношение η средних арифметических скоростей атомов водорода и азота при одинаковых температурах.

Ответ: $\eta = \sqrt{M_{N}/M_{H}} \approx 3,7$.

2.1.7. Найдите среднюю квадратичную скорость молекул водорода при температуре кипения водорода $T_1 = 20$ К и при $T_2 = 5000$ К, когда почти все молекулы диссоциированы на атомы.

Ответ: $v_{кв} = \sqrt{3RT_1/M_{H_2}} \approx 0,5$ км/с; $v_{кв} = \sqrt{3RT_2/M_{H}} \approx 11,2$ км/с.

2.1.8. Найдите среднюю арифметическую скорость молекулы водорода при температуре кипения водорода $T = 20$ К и при $T = 5000$ К, когда почти все молекулы диссоциированы на атомы.

Ответ: $\langle v_1\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT_1}{\pi M_{H_2}}} \approx 460$ м/с; $\langle v_2\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT_2}{\pi M_{H}}} \approx 10,3$ км/с.

2.1.9. При какой температуре T средняя квадратичная скорость атомов гелия станет равной второй космической скорости $v_2 = 11,2$ км/с.

Что можно сказать об этой температуре? Достаточно ли этой энергии, чтобы ионизовать газ гелий.

Ответ: $T = v_2^2 M_{\text{He}} / (3R) = 20{,}1$ кК; энергии недостаточно.

2.1.10. При какой температуре T молекулы кислорода имеют такую же среднюю квадратичную скорость, как молекулы водорода при температуре $T_1 = 100$ К.

Ответ: $T = T_1 \cdot M_{\text{O}_2} / M_{\text{H}_2} = 1600$ К.

2.1.11. Взвешенные в воздухе мельчайшие пылинки движутся так, как если бы они были очень крупными молекулами. Какова средняя квадратичная скорости пылинки массой $m_0 = 10^{-10}$ г, если температура воздуха $°t = 23$ °С?

Ответ: $v_{\text{кв}} = \sqrt{3kT/m_0} \approx 350$ мкм/с.

2.1.12. Во сколько η раз средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше средней квадратичной скорости пылинки массой $m_0 = 10^{-8}$ г, находящейся среди молекул кислорода?

Ответ: $\eta = \sqrt{N_A m_0 / M_{\text{O}_2}} = 1{,}4 \cdot 10^7$.

2.1.13. Определите среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул газа, если известно, что их средняя квадратичная скорость $v_{\text{кв}} = 1$ км/с.

Ответ: $\langle v \rangle = v_{\text{кв}} \cdot \sqrt{8/(3\pi)} \approx 0{,}92$ км/с.

2.1.14. Вычислить среднюю квадратичную скорость $v_{\text{кв}}$ молекул азота при температуре $°t = 23$ °С. Считать азот идеальным газом.

Ответ: $v_{\text{кв}} = \sqrt{3RT/M_{\text{N}_2}} = 513$ м/с.

2.1.15. Вычислить при температуре $°t = 17$ °С среднюю квадратичную скорость $v_{\text{кв}}$ движения молекулы кислорода.

Ответ: $v_{\text{кв}} = \sqrt{3RT/M_{\text{O}_2}} = 475$ м/с.

2.1.16. Вычислить наиболее вероятную скорость $v_{\text{в}}$ молекул газа, у которого при нормальном атмосферном давлении p_0 плотность $\rho = 1$ г/л.

Ответ: $v_{\text{в}} = \sqrt{2p_0/\rho} \approx 450$ м/с.

2.1.17. Вычислить среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул газа, у которого при нормальном атмосферном давлении p_0 плотность $\rho = 2$ г/л.

Ответ: $\langle v \rangle = \sqrt{8p_0/(\pi\rho)} \approx 359$ м/с.

2.1.18. Вычислить среднеквадратичную скорость $v_{кв}$ молекул газа, у которого при нормальном атмосферном давлении p_0 плотность $\rho = 1,55$ г/л.

Ответ: $v_{кв} = \sqrt{3p_0/\rho} \approx 442$ м/с.

2.1.19. Азот массы $m = 15$ г находится в закрытом сосуде при температуре $T_1 = 300$ К. Какое количество теплоты ΔQ необходимо сообщить азоту, чтобы средняя квадратичная скорость $v_{кв}$ его молекул возросла в $\eta = 2$ раза.

Ответ: $\Delta Q = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT_1\left(\eta^2 - 1\right) = 10$ кДж, где $i = 5$.

2.1.20. Вычислить при температуре $°t = 17$ °C среднюю квадратичную скорость $v_{кв}$ капельки воды диаметром $d = 0,1$ мкм, взвешенной в воздухе. Сделайте анализ решения задачи.

Ответ: $v_{кв} = \sqrt{18kT/\left(\pi d^3 \rho_{H_2O}\right)} = 0,15$ м/с.

2.1.21. Вычислить при температуре $°t = 17$ °C среднюю квадратичную скорость $v_{кв}$ и среднюю кинетическую энергию $\langle E_{пост}\rangle$ поступательного движения молекулы кислорода.

Ответ: $v_{кв} = \sqrt{3RT/M_{O_2}} = 475$ м/с; $\langle E_{пост}\rangle = \frac{3}{2}kT = 6 \cdot 10^{-21}$ Дж.

2.1.22. Во сколько раз надо расширить адиабатически газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, чтобы их средняя квадратичная скорость $v_{кв}$ уменьшилась в $\eta = 1,5$ раза.

Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = \eta^i = 7,6$ раза, где $i = 5$ – число степеней свободы.

2.1.23. Во сколько раз надо расширить адиабатически газ, состоящий из одноатомных молекул, чтобы их средняя квадратичная скорость $v_{кв}$ уменьшилась в $\eta = 1,5$ раза.

Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = \eta^i = 3,4$ раза, где $i = 3$ – число степеней свободы.

2.1.24. Во сколько раз надо сжать адиабатически газ, состоящий из одноатомных молекул, чтобы их средняя квадратичная скорость $v_{кв}$ увеличилась в $\eta = 2$ раза.

Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = \eta^i = 8$ раз, где $i = 3$ – число степеней свободы.

2.1.25. Вычислить наиболее вероятную $v_в$, среднюю $\langle v\rangle$ и среднюю квадратичную $v_{кв}$ скорости молекул газа, у которого при давлении $p = 2\cdot10^5$ Па плотность $\rho = 2$ кг/м^3.

Ответ: $v_в = \sqrt{\dfrac{2p}{\rho}} \approx 450$ м/с; $\langle v\rangle = 1{,}13\cdot v_в \approx 508$ м/с; $v_{кв} = 1{,}22\cdot v_в \approx 550$ м/с.

2.2.1. При какой температуре газа, состоящего из смеси азота и кислорода, наиболее вероятные скорости молекул азота и кислорода будут отличаться друг от друга на $\Delta v = 30$ м/с.

Ответ: $T = (\Delta v)^2 M_{N_2} \Big/ \left[2R\left(1 - \sqrt{M_{N_2}/M_{O_2}}\right)^2\right] \approx 363$ K.

2.2.2. При какой температуре газа, состоящего из смеси водорода и гелия, наиболее вероятные скорости молекул этих газов будут отличаться друг от друга на $\Delta v = 20$ м/с.

Ответ: $T = (\Delta v)^2 M_{H_2} \Big/ \left[2R\left(1 - \sqrt{M_{H_2}/M_{He}}\right)^2\right] \approx 0{,}56$ K.

2.2.3. При какой температуре средняя квадратичная скорость $v_{кв}$ молекул азота больше их наиболее вероятной скорости $v_в$ на $\Delta v = 50$ м/с.

Ответ: $T = (\Delta v)^2 M_{N_2} \Big/ \left[R\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2\right] \approx 83$ K.

2.2.4. Наиболее вероятные скорости $v_в$ молекул смеси азота и кислорода отличаются друг от друга на $\Delta v = 40$ м/с. При какой температуре смеси это возможно?

Ответ: $T = (\Delta v)^2 M_{N_2} \Big/ \left[2R\left(1 - \sqrt{M_{N_2}/M_{O_2}}\right)^2\right] \approx 646$ K.

2.2.5. Вывести формулу наиболее вероятного импульса $p_в$ молекул идеального газа, имеющего температуру T и массу m.

Ответ: $p_в = \sqrt{2kTm}$.

2.2.6. При какой температуре газа число молекул со скоростями в интервале от v до $v + dv$ будет максимально? Указание: вычислить производную dN/dT. Оценить данную температуру, если газ гелий и $v = 1000$ м/с.

Ответ: $T = M_{He} v^2 / (2R) \approx 241$ K.

2.2.7. Определите температуру газа, для которой средняя квадратичная скорость $v_{кв}$ молекул водорода больше их наиболее вероятной скорости на Δv = 400 м/с.

Ответ: $T = (\Delta v)^2 M_{H_2} \Big/ \left[R\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 \right] \approx 380$ К.

2.2.8. При температуре 880 К число молекул кислорода со скоростями в интервале от v до v + *d*v максимально. Найдите данную скорость.

Ответ: $v = \sqrt{2RT/M_{O_2}} = 676$ м/с.

2.2.9. Среднеарифметические скорости $\langle v \rangle$ молекул смеси азота и углекислого газа отличаются друг от друга на Δv = 40 м/с. При какой температуре это возможно? Возможен ли данный результат? Ответ обосновать.

Ответ: $T = (\Delta v)^2 \pi M_{N_2} \Big/ \left[8R\left(1-\sqrt{M_{N_2}/M_{CO_2}}\right)^2 \right] \approx 52$ К.

Невозможен, т. к. CO_2 при T = 52 К находится в твердом состоянии.

2.2.10. Среднеарифметические скорости $\langle v \rangle$ молекул кислорода и окиси углерода CO отличаются друг от друга на Δv = 50 м/с. При какой температуре возможно наблюдать данное различие скоростей?

Ответ: $T = (\Delta v)^2 \pi M_{O_2} \Big/ \left[8R\left(1-\sqrt{M_{O_2}/M_{CO}}\right)^2 \right] \approx 793$ К.

2.2.11. Смесь водорода и гелия находится при температуре T = 300 К. При каком значении скорости $\langle v \rangle$ молекул функции распределения Максвелла f(v) будут равны для данных газов?

Ответ: $v = \sqrt{3kT \cdot \ln(m_2/m_1)/(m_2 - m_1)} = 1610$ м/с,

где m_1 и m_2 – масса молекулы H_2 и He соответственно.

2.2.12. Смесь гелия и неона находится при температуре T = 350 К. При каком значении скорости $\langle v \rangle$ молекул функции распределения Максвелла f(v) будут равны. Нарисуйте примерные графики функции и дайте качественный анализ этих графиков.

Ответ: $v = \sqrt{3kT \cdot \ln(m_2/m_1)/(m_2 - m_1)} = 930$ м/с,

где m_1 и m_2 – масса молекулы He и Ne соответственно.

2.2.13. При какой температуре кислорода функции распределения молекул озона по скоростям имеют одинаковые значения для скоростей v_1 = 300 м/с и v_2 = 600 м/с.

Ответ: $T = M_{O_3}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \Big/ \left[4R \cdot \ln(v_2/v_1)\right] \approx 562$ К.

2.2.14. Найдите для азота температуру, при которой скоростям молекул v_1 = 300 м/с и v_2 = 600 м/с соответствуют одинаковые значения функции распределения Максвелла f(v). Нарисуйте поясняющие графики.

Ответ: $T = M_{N_2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)/\left[4R \cdot \ln\left(v_2/v_1\right)\right] \approx 330\text{ К}$.

2.2.15. Определите температуру кислорода, при которой функция f(v) будет иметь максимум при скорости v_2 = 500 м/с.

Ответ: $T_{max} = M_{O_2} v_2^2/\left(2R\right) \approx 481\text{ К}$.

2.2.16. При какой температуре функция распределения f(v) молекул водорода имеет максимум при скорости v_2 = 500 м/с.

Ответ: $T_{max} = M_{H_2} v_2^2/\left(2R\right) \approx 30\text{ К}$.

2.2.17. На высоте h = 3 км концентрация пылинок в воздухе $n_0 = 10^8$ м$^{-3}$, у поверхности Земли – примерно 10^{11} м$^{-3}$. Определите среднюю массу m_0 пылинки, если температура воздуха T = 300 К.

Ответ: $m_0 = kT \cdot \ln\left(n_0/n\right)/\left(gh\right) \approx 1 \cdot 10^{-24}$ кг.

2.2.18. Найдите относительное число молекул, скорости которых отличаются не более чем на 1 % от значения наиболее вероятной скорости $v_в$.

Ответ: $\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \Delta u = 0{,}83\%$.

2.2.19. Какая часть молекул кислорода при 0 °С обладает скоростью от v_1 = 100 до v_2 = 110 м/с?

Ответ: $\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \Delta u = 0{,}4\%$.

2.2.20. Какая часть молекул азота при 150 °С обладает скоростями от v_1 = 310 до v_2 = 315 м/с?

Ответ: $\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \Delta u = 0{,}6\ \%$.

2.2.21. Какая часть молекул водорода при 0 °С обладает скоростями от v_1 = 2000 до v_2 = 2100 м/с.

Ответ: $\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \Delta u = 4{,}5\ \%$.

2.2.22. При какой температуре T энергия теплового движения атомов гелия будет достаточной для преодоления земного тяготения и большинство из них навсегда покинут атмосферу Земли?

Ответ: $T = 2gR_З M_{He}/(3R) = 2\cdot 10^4$ К, где $R_З$ – радиус Земли.

2.2.23. Частицы гуммигута диаметром d = 1 мкм участвуют в броуновском движении. Плотность гуммигута ρ = 1 г/см^3. Найти среднеквадратичную скорость $v_{кв}$ частиц гуммигута при температуре $°t$ = 0 °С.

Ответ: $v_{кв} = \sqrt{18kT/(\pi d^3 \rho)} = 4,6\cdot 10^{-3}$ м/с.

2.2.24. Плотность некоторого газа равна ρ = 0,082 кг/м^3 при давлении p = 100 кПа и $°t$ = 17 °С. Найти среднюю квадратичную скорость $v_{кв}$ молекул газа. Какова молярная масса M этого газа?

Ответ: $v_{кв} = \sqrt{3p/\rho} \approx 1900$ м/с; $M = \rho RT/p = 2\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

2.2.25. Средняя квадратичная скорость $v_{кв}$ молекул некоторого газа равна 450 м/с. Давление газа p = 50 кПа. Найти плотность газа при эти условиях.

Ответ: $\rho = 3p/v_{кв}^2 = 0,74$ кг/м^3.

2.3.1. Какая часть молекул азота, находящегося при T = 400 К, имеет скорости, лежащие в интервале от $v_{нв}$ до $v_{нв} + \Delta v$, где Δv = 20 м/с?

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \Delta u = 3,4$ %,

где $u = (2v_в + \Delta v)/(2v_в)$; $\Delta u = \Delta v/v_в$; $v_в = \sqrt{2RT/M_{N_2}} = 487$ м/с.

2.3.2. Как будет изменяться доля молекул гелия, лежащих в интервале от $\langle v \rangle$ до $\langle v \rangle + \Delta v$, где Δv = 10 м/с, при увеличении температуры с T_1 = 300 до T_2 = 500 К? Нарисуйте графики и дайте графическое толкование решения.

Ответ: $\Delta N_1/\Delta N_2 = \sqrt{T_2/T_1} \approx 1,3$.

2.3.3. Какая часть общего числа N молекул имеет скорости, большие наиболее вероятной скорости $v_в$ и меньше наиболее вероятной скорости? Проанализируйте решение задачи.

При больших интервалах скоростей распределение Максвелла нельзя использовать; из справочника $\Delta N_x/N = f(u)$ при $u = v/v_в = 1$;

Ответ: $\Delta N_1/N \approx 57$ %; $\Delta N_2/N \approx 43$ %.

2.3.4. В баллоне находится m = 2,5 г кислорода. Найдите число N_1 молекул кислорода, скорости которых превышают значение средней квадратичной скорости $v_{кв}$.

При больших интервалах скоростей распределение Максвелла нельзя использовать; из справочника $\Delta N_x/N = f(u)$ при $u = v/v_в = \sqrt{3/2}$;

$\Delta N_1/N \approx 0{,}405$, где $N = N_A m/M_{O_2}$ – общее число молекул кислорода,

Ответ: $N_1 = 1{,}9 \cdot 10^{22}$.

2.3.5. Найдите относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более чем на 2 % от значения среднеквадратичной скорости.

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \Delta u \approx 3{,}7\ \%$.

2.3.6. В сосуде находится m = 5,0 г азота. Найдите число ΔN молекул азота, скорости которых отличаются не более чем на 1 % от значения наиболее вероятной скорости.

Ответ: $\Delta N = \frac{4mN_A}{\sqrt{\pi}M} \cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u = 8{,}9 \cdot 10^{20}$.

2.3.7. Какая часть молекул углекислого газа при T = 300 К обладает скоростью от v_1 = 200 до v_2 = 210 м/с?

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \Delta u = 1{,}66\ \%$.

2.3.8. В сосуде находится кислород при температуре 1600 К. Какое число молекул кислорода имеет кинетическую энергию E больше, чем $6{,}65 \cdot 10^{-20}$ Дж?

Из справочника $\Delta N_x/N = f(u)$, где $u = \sqrt{E/(kT)} \approx 1{,}7$.

Ответ: $\Delta N/N \approx 12\ \%$.

2.3.9. Во сколько раз число молекул ΔN_1, скорости которых лежат в интервале от $v_{кв}$ до $v_{кв} + \Delta v$, меньше числа молекул ΔN_2, скорости которых лежат в интервале от $v_в$ до $v_в + \Delta v$?

Ответ: $\frac{\Delta N_2}{\Delta N_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{-1}}{e^{-3/2}} = 1{,}1$.

2.3.10. Во сколько раз число молекул ΔN_1, скорости которых лежат в интервале от $v_{кв}$ до $v_{кв} + \Delta v$, больше числа молекул ΔN_2, скорости которых лежат в интервале от $\langle v \rangle$ до $\langle v \rangle + \Delta v$?

Ответ: $\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{-1}}{e^{-4/\pi}} = 1{,}03$.

2.3.11. Найдите относительное число молекул гелия, скорости которых лежат в интервале от $v_1 = 1990$ м/с до $v_2 = 2010$ м/с при температуре $T = 300$ К.

Ответ: $\dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u \approx 0{,}53\ \%$;

где $u = (v_1 + v_2)/(2v_в)$; $\Delta u = (v_2 - v_1)/v_в$; $v_в = \sqrt{2RT/M_{He}} = 1116$ м/с.

2.3.12. При какой температуре T наиболее вероятная скорость молекул азота меньше их среднеквадратичной скорости на $\Delta v_1 = 50$ м/с; на $\Delta v_2 = 20$ м/с.

Ответ: $T = (\Delta v)^2 M_{N_2} \Big/ \left[R\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2\right]$; $T_1 \approx 83$ К; $T_2 \approx 13$ К.

2.3.13. Какая часть молекул азота при температуре $°t = 230$ °С обладает скоростями в интервале: а) от $v_1 = 290$ м/с до $v_2 = 310$ м/с; б) от $v_3 = 690$ м/с до $v_4 = 710$ м/с. Нарисовать графики и объяснить полученные результаты.

Ответ: $\dfrac{\Delta N_1}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u_1^2} \cdot u_1^2 \Delta u_1 \approx 1{,}8\ \%$; $\dfrac{\Delta N_2}{N} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u_2^2} \cdot u_2^2 \Delta u_2 \approx 2{,}7\ \%$.

2.3.14. Газ состоит из молекул массы m и находится при температуре T. Запишите распределения молекул по кинетическим энергиям E. Определите наиболее вероятное значение кинетической энергии $E_{вер}$.

Ответ: $\dfrac{dN}{N} = 2\pi(\pi kT)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot \sqrt{E} dE$; $E_{вер} = \dfrac{1}{2} kT$.

2.3.15. Как будет изменяться доля молекул гелия, имеющих скорости, лежащие в интервале от $\langle v \rangle$ до $\langle v \rangle + \Delta v$, где $\Delta v = 20$ м/с, при увеличении температуры с $T_1 = 300$ до $T_2 = 600$ К?

Ответ: $\Delta N_1 / \Delta N_2 = \sqrt{T_2/T_1} \approx 1{,}41$.

2.3.16. Найдите для газообразного азота температуру, при которой скоростям молекул $v_1 = 400$ м/с и $v_2 = 700$ м/с соответствуют одинаковые значения функции распределения Максвелла. Нарисовать график с указанием полученных результатов.

Ответ: $T = M_{CO_2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \Big/ \left(4R \cdot \ln(v_2/v_1)\right) = 497$ К.

2.3.17. Для газообразного углекислого газа найти температуру, при которой скоростям молекул $v_1 = 350$ м/с и $v_2 = 900$ м/с соответствуют равные значения функции распределения Максвелла. Нарисуйте качественный график и объясните полученный результат.

Ответ: $T = M_{CO_2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)\Big/\left(4R \cdot \ln(v_2/v_1)\right) = 964$ K.

2.3.18. Смесь газов H_2 и He находится при температуре T = 600 К. При каком значении скорости v молекул значения функции распределения Максвелла будут одинаковыми для обоих газов? Нарисуйте графики функций f(v) и обсудите полученный результат.

Ответ: $v = \sqrt{3kT \cdot \ln\left(m_2/m_1\right)\Big/\left(m_2 - m_1\right)} = 2277$ K.

2.3.19. Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найдите давление p газа как функцию высоты h, если при h = 0, давление p = p_0, а температура изменяется с высотой как $T = T_0\,(1 - ah)$.

Ответ: $p = p_0\,(1 - ah)^n$, где $n = gM/(aRT_0)$.

2.3.20. У поверхности Земли концентрация n_{He} молекул гелия в 10^5 раз меньше, чем концентрация n_{N_2} молекул азота. На какой высоте h концентрация молекул гелия будет равна концентрации молекул азота. Принять температуру атмосферы равной T = 273 K.

Ответ: $h = \dfrac{RT}{g} \cdot \dfrac{\ln\left(n_{N_2}/n_{He}\right)}{M_{N_2} - M_{He}} \approx 111$ км.

2.3.21. У поверхности Земли концентрация n_{H_2} молекул водорода в 10^6 раз меньше, чем концентрация n_{N_2} молекул азота. На какой высоте h концентрация молекул водорода будет равна концентрации молекул азота. Принять температуру атмосферы равной T = 273 K.

Ответ: $h = RT \cdot \ln\left(n_{N_2}/n_{H_2}\right)\Big/\left[g\left(M_{N_2} - M_{H_2}\right)\right] \approx 123$ км.

2.3.22. В пучке частиц скорости имеют одно направление и лежат в интервале (v, v + Δv). Масса частицы m. Определите скорость частиц после прохождения области, где на расстоянии l, вдоль направления движения на частицы, действовала сила F.

Ответ: $v_{min} = v \cdot \sqrt{1 + 2Fl\big/\left(mv^2\right)}$; $v_{max} = v_{min} + \Delta v \cdot \sqrt{1 + 2Fl\big/\left(mv^2\right)}$.

2.3.23. При изменении температуры идеального газа максимум функции распределения $f(u)$ уменьшился в η раз. Как и во сколько раз изменилась температура T газа?

Ответ: Увеличилась в η^2 раз.

2.3.24. По оси откачанной цилиндрической трубки натянута тонкая нить, разогретая до T = 1000 К. Считая, что скорости имитируемых электронов распределены по закону Максвелла (при той же температуре T), найти долю электронов α, достигающих стенки, если она находится под задерживающим потенциалом V относительно нити, равным 0,1 В.

Ответ: $\alpha = \exp\left(-\frac{eV}{kT}\right) = 31\,\%$.

2.3.25. Закрытую с обоих концов горизонтальную трубку длины l = 1 м перемещают с постоянным ускорением a, направленным вдоль ее оси. Внутри трубки находится аргон при температуре T = 330 К. При каком значении a концентрации аргона вблизи торцов трубки будут отличаться друг от друга на $\eta = (n_0 - n)/n_0 = 0{,}01$?

Ответ: $a = -\frac{RT \cdot \ln\left(n/n_0\right)}{M \cdot l} \approx 689$ м/с, где $n = (1 - \eta)n_0 = 0{,}99n_0$.

3. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за единицу времени

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\cdot\langle v\rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекул; n – концентрация молекул; $\langle v\rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Среднее время между двумя соседними соударениями

$$\langle\tau\rangle = \frac{1}{\langle z\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n\sigma\cdot\langle v\rangle},$$

где $\sigma = \pi d^2$ – эффективное сечение рассеяния молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle z\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sigma n}.$$

Если $p = nkT$, где p – давление газа; T – температура идеального газа; k – постоянная Больцмана, то

$$\langle l\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\cdot\sigma p} \text{ или } \langle l\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\cdot\pi d^2 p}.$$

Для идеального газа, состоящего из молекул массами m_1 и m_2, радиусами r_1 и r_2, с концентрациями n_1 и n_2

$$\langle l_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n_1\sigma_{11} + \sqrt{1+\frac{m_1}{m_2}}\cdot n_2\sigma_{12}}; \qquad \langle l_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n_2\sigma_{22} + \sqrt{1+\frac{m_2}{m_1}}\cdot n_1\sigma_{21}},$$

где $\sigma_{11} = \pi d_1^2$; $\sigma_{22} = \pi d_2^2$; $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \pi\left(r_1 + r_2\right)^2$, d_1 и d_2 – эффективный диаметр молекул.

Основной закон вязкого течения (закон Ньютона для внутреннего трения)

$$F = \eta\frac{dv}{dx}S \text{ или } F = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{S}{\varphi},$$

где F – касательная сила между ламинарными слоями жидкости или газа; dv/dx – скорость изменения скорости жидкости (газа) от слоя к слою вдоль оси x, перпендикулярной скорости слоев; S – площадь слоя, по которому происходит сдвиг вещества; η – динамическая вязкость жидкости или газа; φ = 1/η – текучесть жидкости.

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\cdot\langle v\rangle\langle l\rangle,$$

где ρ – плотность газа.

Основной закон теплопроводности (закон Фурье)

$$J_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta S\Delta t} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x},$$

где ΔQ – количество перенесенной теплоты; ΔS – площадка, перпендикулярная потоку теплоты, через которую идет перенос; Δt – время переноса; $\partial T/\partial x$ – «градиент» температуры вдоль направления переноса.

Коэффициент теплопроводности

$$\lambda = \frac{1}{3}\rho C_V\cdot\langle v\rangle\langle l\rangle,$$

где C_V – теплоемкость единицы массы при постоянном объеме.

Закон диффузии (закон Фика)

$$J_D = \frac{\Delta N}{\Delta S\Delta t} = -D\frac{\partial n}{\partial x},$$

где ΔN – число молекул, перенесенных через площадку ΔS, перпендикулярную направлению переноса x, за время Δt; $\partial n/\partial x$ – «градиент» концентрации вдоль оси x.

Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle.$$

Коэффициенты в явлениях переноса связаны между собой

$$D = \frac{\eta}{\rho}; \qquad \frac{\lambda}{\eta} = C_V.$$

Примечание. Более строгая теория приводит к значению $\lambda/\eta = KC_V$, где K – безразмерный коэффициент, равный $(9\gamma - 5)/4$ (γ – показатель адиабаты).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Самолет летит со скоростью v = 360 км/ч. Считая, что слой воздуха у крыла самолета, увлекаемый вследствие вязкости, d_0 = 4 см, найти касательную силу F_S, действующую на единицу поверхности крыла. Эффективный диаметр молекул воздуха d = 0,3 нм. Температура воздуха °t = 0 °C.

Дано:	
v = 100 м/с	
d_0 = 0,04 м	
$d = 3\cdot10^{-10}$ м	
T = 273 К	
F_S – ?	

Решение: Воздух можно считать идеальным газом. По закону Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$F = \eta\frac{dv}{dx}\cdot S,$$

где F – касательная сила, возникающая между ламинарными слоями; η – коэффициент вязкости; dv/dx – «градиент» скорости молекул газа в направлении, перпендикулярном движению; S – площадь поверхности соприкасающихся слоев.

На единицу площади будет приходиться сила

$$F_S = \frac{F}{S} = \eta\frac{dv}{dx}. \tag{1}$$

Найдем величину F_S. Для этого градиент скорости dv/dx заменим средней величиной

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v-0}{d_0} = \frac{v}{d_0}, \tag{2}$$

где v – скорость молекул воздуха, соприкасающихся с крылом (прилипших к крылу); d_0 – толщина увлекаемого слоя воздуха.

На границе этого слоя скорость молекул воздуха равна нулю.

Коэффициент вязкости равен

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\cdot\langle v\rangle\langle l\rangle. \tag{3}$$

Выразим входящие в (3) величины через термодинамические параметры, заданные в задаче. Плотность газа $\rho = m/V$ найдем из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad\Rightarrow\quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}, \tag{4}$$

где M – молярная масса газа.

Средняя скорость молекул газа ⟨v⟩ однозначно связана с температурой (см. раздел «Распределение Максвелла – Больцмана»):

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{5}$$

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\cdot\pi d^2 p}, \tag{6}$$

где d – эффективный диаметр молекулы воздуха.

Решая систему уравнений (3) – (6) относительно η, получим

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{pM}{RT}\cdot\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\cdot\frac{kT}{\sqrt{2}\cdot\pi d^2 p} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{MT}{\pi R}}\cdot\frac{k}{\pi d^2}. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (2) и (7) в (1), найдем

$$F_S = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{MT}{\pi R}}\cdot\frac{k}{\pi d^2}\frac{v}{d_0} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{29\cdot 10^{-3}\cdot 273}{3{,}14\cdot 8{,}31}}\cdot\frac{1{,}38\cdot 10^{-23}}{3{,}14\cdot\left(3\cdot 10^{-10}\right)^2}\cdot\frac{100}{0{,}04} = 0{,}045\ \text{Н/м}^2.$$

Ответ: $F_S = 0{,}045$ Н/м^2.

Задача 2. Пространство между двумя параллельными пластинами площадью S = 150 см^2 каждая, находящимися на расстоянии Δx = 5 мм друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре $°t_1$ = 17 °С, другая – при температуре $°t_2$ = 27 °С. Определите количество теплоты, прошедшей за t = 5 мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится при нормальном давлении во все время опыта. Эффективный диаметр молекул кислорода считать равным d = 0,36 нм. Температуру газа считать равной среднему арифметическому температур пластин $°t$ = 22 °С.

Дано:
$S = 1{,}5\cdot 10^{-2}$ м^2
$\Delta x = 5\cdot 10^{-3}$ м
T_1 = 290 К
T_2 = 300 К
T = 295 К
t = 300 с
$d = 3{,}6\cdot 10^{-10}$ м

$|Q|$ – ?

Решение: Кислород при данном давлении и температуре можно считать идеальным газом.

По закону теплопроводности Фурье

$$Q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}St. \qquad (1)$$

Площадь пластин S и время эксперимента t заданы. Функцию распределения температуры в газе будем считать линейной вдоль x, тогда

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\Delta T}{\Delta x},\ \text{где}\ \Delta T = T_2 - T_1.$$

Коэффициент теплопроводности газа

$$\lambda = \frac{1}{3}\rho C_V\cdot\langle v\rangle\langle l\rangle, \qquad (2)$$

где $C_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$ – теплоемкость газа при постоянном объеме; i – число степеней свободы молекулы газа (для двухатомного газа O_2 i = 5); M – молярная масса газа (для O_2 $M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль).

Плотность газа $\rho = m/V$ найдем из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad\Rightarrow\quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \qquad (3)$$

Длина свободного пробега молекул

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 p}. \tag{4}$$

Средняя скорость молекул газа $\langle v \rangle$ однозначно связана с температурой (см. раздел «Распределение Максвелла – Больцмана»):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{5}$$

Решая систему уравнений (2) – (5) относительно λ, имеем

$$\lambda = \frac{i}{3} \frac{k}{\pi d^2} \cdot \sqrt{\frac{RT}{\pi M}}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (1), получим

$$|Q| = \frac{i}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{\Delta x} St = 79{,}5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $|Q| = 79{,}5$ Дж.

Задача 3. Во сколько раз уменьшится среднее число столкновений $\langle z \rangle$ в единицу времени молекул двухатомного газа, если объем газа адиабатически увеличить в 2 раза.

Дано:
$V_2 / V_1 = 2$
$i = 5$
$\langle z_1 \rangle / \langle z_2 \rangle$ – ?

Решение: Проведем решение для идеального газа. Среднее число $\langle z \rangle$ столкновений в единицу времени определяется отношением средней скорости $\langle v \rangle$ молекул к средней длине свободного пробега $\langle l \rangle$:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}. \tag{1}$$

Средняя скорость молекул газа $\langle v \rangle$ однозначно связана с температурой (см. раздел «Распределение Максвелла – Больцмана»):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{2}$$

Среднюю длину свободного пробега запишем через температуру T и давление p:

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 p}, \tag{3}$$

где d – эффективный диаметр молекул газа.

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$\langle z \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{\sqrt{2} \pi d^2 p}{kT}.$$

Запишем выражения для $\langle z_1 \rangle$ и $\langle z_2 \rangle$ и найдя их отношение, получим

$$\frac{\langle z_1 \rangle}{\langle z_2 \rangle} = \frac{p_1}{p_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \,. \qquad (4)$$

Воспользуемся уравнениями для адиабатического процесса

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \qquad (5)$$

где $\gamma = (i+2)/i = 1{,}4$ – показатель адиабаты.

С учетом (5) запишем уравнение (4) в виде

$$\frac{\langle z_1 \rangle}{\langle z_2 \rangle} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} \sqrt{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{(1-\gamma)/2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{(\gamma+1)/2} = 2^{1,2} = 2{,}3 \,.$$

Ответ: $\langle z_1 \rangle / \langle z_2 \rangle = 2{,}3$.

Задача 4. В сосуде объемом $V = 0{,}5$ л находится кислород при нормальных условиях ($p = 1\cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К). Найдите общее число столкновений Z_0 между молекулами кислорода в этом объеме за единицу времени. Эффективный диаметр кислорода $d = 0{,}38$ нм.

Дано:
$V = 5\cdot 10^{-4}$ м^3
$p = 1\cdot 10^5$ Па
$T = 273$ К
$d = 3{,}6\cdot 10^{-10}$ м
$M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль
Z_0 – ?

Решение: Среднее время между двумя соседними соударениями

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\sigma \cdot \langle v \rangle},$$

где $\sigma = \pi d^2$ – эффективное сечение рассеяния молекул; n – концентрация молекул.

Тогда среднее число столкновений одной молекулы в единицу времени в единице объема равно

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \cdot \langle v \rangle \,.$$

Общее число столкновений всех молекул в единице объема

$$Z = \frac{\langle z \rangle \cdot n}{2}.$$

Делитель 2 необходим, т. к. сталкиваются две молекулы.

Число столкновений молекул в объеме V

$$Z_0 = Z\,V = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 n^2 \langle v \rangle}{2} \cdot V \,. \qquad (1)$$

Концентрацию молекул n находим из основного уравнения газового состояния:

$$p = nkT \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p}{kT}. \qquad (2)$$

Средняя скорость молекул газа $\langle v \rangle$ однозначно связана с температурой (см. раздел «Распределение Максвелла – Больцмана»):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) после преобразований, получим

$$Z_0 = 2V\left(\frac{pd}{kT}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi RT}{M}} \approx 4,3 \cdot 10^{31}\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $Z_0 = 4,3 \cdot 10^{31}$ с$^{-1}$.

Задача 5. Найдите коэффициент диффузии D и динамическую вязкость η воздуха при давлении p = 101,3 кПа и температуре $°t$ = 10 °С. Эффективный диаметр молекул воздуха $d = 3,8 \cdot 10^{-10}$ м.

Дано:
$p = 1,013 \cdot 10^5$ Па
$T = 283$ К
$d = 3,8 \cdot 10^{-10}$ м
$M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

D – ?
η – ?

Решение: Проведем решение в приближении идеального газа. Для расчета коэффициента диффузии D воспользуемся формулой

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle l \rangle, \qquad (1)$$

Средняя скорость молекул газа $\langle v \rangle$ однозначно связана с температурой (см. раздел «Распределение Максвелла – Больцмана»):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (2)$$

Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 p}. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$D = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \frac{kT}{\pi d^2 p} = 9,1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2/\text{с}.$$

Коэффициент вязкости можно рассчитать воспользоваться соотношением, которым связаны между собой коэффициенты D и η в законах переноса:

$$D = \frac{\eta}{\rho}, \text{ откуда } \eta = D\rho. \qquad (4)$$

Плотность газа $\rho = m/V$ найдем из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}, \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\eta = D \cdot \frac{pM}{RT} = 9{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 283} = 1{,}61 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}.$$

Ответ: D = 9,1·10^{-6} м^2/с; η = 1,61 кг/(м·с).

Задача 6. Какое предельное число молекул газа должно находиться в единице объема сферического сосуда, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом? Эффективный диаметр молекул газа d = 0,3 нм, диаметр сосуда D = 15 см.

Дано:
$d = 3{\cdot}10^{-10}$ м
$D = 0{,}15$ м
n – ?

Решение: Проведем решение для идеального газа. Молекулы газа не будут сталкиваться друг с другом, если длина свободного пробега больше или равна диаметру сосуда, т.е. $\langle l \rangle \geq D$.

Средняя длина свободного пробега молекул газа $\langle l \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma n}$, где $\sigma = \pi{\cdot}d^2$ – эффективное рассеяние σ равно площади круга, радиус которого равен эффективному диаметру молекулы d; n – концентрация молекул газа.

Следовательно,

$$D \leq \langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n}.$$

Отсюда найдем

$$n \leq \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 D} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \left(3 \cdot 10^{-10}\right)^2 \cdot 0{,}15} = 1{,}67 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

Ответ: n = 1,67·10^{19} м$^{-3}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Определите коэффициент теплопроводности азота λ, находящегося в некотором объеме при температуре T = 280 К. Эффективный диаметр молекул азота d принять равным 0,38 нм.

Ответ: $\lambda = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{RT}{\pi M}} \cdot \dfrac{ki}{\pi d^2} = 8{,}25 \ \dfrac{\text{мВт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, где i = 5.

2. В сосуде объемом V = 100 см^3 находится масса m = 0,5 г азота. Найдите среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега азота. Эффективный диаметр d молекулы азота принять равным 0,38 нм.

Ответ: $\langle l\rangle = kVM \Big/ \left(\sqrt{2}\cdot \pi d^2 mR\right) = 14{,}5$ нм.

3. Определите, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости η углекислого газа и азота, если оба газа находятся при одинаковой температуре и одном и том же давлении. Эффективные диаметры этих молекул равны.

Ответ: $\eta_1/\eta_2 = \sqrt{M_1/M_2} = 1{,}25$.

4. Определите коэффициент диффузии D кислорода при нормальных условиях, эффективный диаметр молекул кислорода d = 0,36 нм.

Ответ: $D = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{RT_0}{\pi M}}\cdot\dfrac{kT_0}{\pi d^2 p_0} = 9{,}2\cdot 10^{-6}$ м^2/с.

5. При каком давлении средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул водорода равна 2,5 см, если температура газа равна °t = 67 °С. Диаметр молекулы водорода d = 0,28 нм.

Ответ: $p = kT \Big/ \left(\sqrt{2}\cdot\pi d^2\langle l\rangle\right) = 0{,}54$ Па.

6. Определите среднюю продолжительность τ свободного пробега молекул водорода при температуре °t = 27 °С и давлении p = 0,5 кПа. Диаметр d молекул водорода принять равным 0,28 нм.

Ответ: $\tau = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}\cdot\sqrt{\dfrac{\pi M}{8RT}} = 13{,}3$ нс.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1.1. Число молекул водорода в единице объема при некоторых условиях равно n = 1,8·10^{25} м$^{-3}$, коэффициент диффузии при этих условиях D = 1,42·10^{-4} м^2/с. Найдите, чему равен для такого газа коэффициент вязкости η.

Ответ: $\eta = DnM/N_A = 8{,}5$ мкПа·с.

3.1.2. Определите коэффициент теплопроводности λ азота, если коэффициент динамической вязкости η для него при тех же условиях равен 10 мкПа·с.

Ответ: $\lambda = \eta C_V = \eta\cdot\dfrac{i}{2}\dfrac{R}{M} = 7{,}42\cdot 10^{-3}$ Вт/(м·К).

3.1.3. При помощи ионизационного манометра, установленного на искусственном спутнике Земли, было обнаружено, что на высоте h = 300 км от поверхности Земли концентрация частиц газа в атмосфере $n = 10^{15}$ м$^{-3}$. Найдите среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега частиц газа на этой высоте. Эффективный диаметр частиц газа $d = 0{,}2 \cdot 10^{-9}$ м.

Ответ: $l = 1 \Big/ \left(\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n\right) = 5{,}6 \cdot 10^3$ м.

3.1.4. Найдите коэффициент диффузии D водорода при нормальных условиях, если средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега равна 0,16 мкм.

Ответ: $D = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT_0}{\pi M}} \cdot \langle l \rangle = 9{,}1 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

3.1.5. Определите среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул кислорода, находящихся при температуре $°t$ = 0 °С, если среднее число $\langle z \rangle$ столкновений испытываемых молекул в 1 с равно $3{,}7 \cdot 10^9$ с$^{-1}$.

Ответ: $\langle l \rangle = \dfrac{1}{\langle z \rangle}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}} = 1{,}15 \cdot 10^{-7}$ м.

3.1.6. Средняя длина l_0 свободного пробега молекул водорода при нормальных условиях (p_0, T_0) составляет 0,1 мкм. Определите среднюю длину l_1 их свободного пробега при давлении p_1 = 0,1 Па, если температура газа остается постоянной.

Ответ: $l_1 = l_0 \cdot p_0 / p_1 = 0{,}1$ м.

3.1.7. Ниже какого давления можно говорить о вакууме между стенками сосуда Дьюара, если расстояние между стенками сосуда l_0 = 8 мм, а температура $°t$ = 17 °С? Эффективный диаметр d молекул воздуха принять равным 0,37 нм.

Примечание. В высоком вакууме преобладают столкновения молекул со стенками вакуумного объема, т. е. должно выполняться условие $\langle l \rangle > l_0$.

Ответ: $p \le kT \Big/ \left(\sqrt{2} \cdot \pi d^2 l_0\right) = 0{,}82$ Па.

3.1.8. Чему равна масса азота, заполняющего объем V = 100 см^3, если средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега его молекул равна 23,2 нм? Эффективный диаметр молекул d = 0,28 нм.

Ответ: $m = MV \Big/ \left(\sqrt{2} \cdot \pi d^2 N_A \langle l \rangle\right) = 0{,}5$ г.

3.1.9. Построить график зависимости вязкости η азота от температуры T в интервале 100 – 600 К через каждые 100 К.

Ответ: $\eta = A \cdot \sqrt{T}$, где $A = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{M}{\pi^3 R}} \cdot \dfrac{k}{d^2}$.

3.1.10. Чему равна средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул водорода при давлении p = 0,54 Па и температуре $°t$ = 67 °С. Диаметр молекул водорода d = 0,28 нм.

Ответ: $\langle l \rangle = kT \Big/ \left(\sqrt{2} \cdot \pi d^2 p\right) = 2{,}5$ см.

3.1.11. При какой температуре средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул водорода равна 2,5 см, если давление газа равно p = 0,54 Па. Диаметр молекулы водорода d = 0,28 нм.

Ответ: $T = \sqrt{2}\pi d^2 \langle l \rangle p \big/ k = 340$ К $= 67$ °С.

3.1.12. Определите эффективный диаметр d молекул кислорода при нормальных условиях (p_0, T_0). Коэффициент диффузии $D = 9{,}1 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

Ответ: $d = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{kT_0}{\pi D p_0} \cdot \sqrt{\frac{RT_0}{\pi M}}} = 0{,}36$ нм.

3.1.13. Определите, какая масса m азота находится в сосуде объемом V = 100 см^3, если средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул газа равна 23,2 нм. Эффективный диаметр молекул азота d = 0,38 нм.

$m = MV \Big/ \left(\sqrt{2} \cdot \pi d^2 N_{\text{А}} \langle l \rangle\right) = 0{,}31$ г.

3.1.14. Определите среднюю продолжительность τ свободного пробега молекул водорода при температуре $°t$ = 27 °С и давлении p = 0,5 кПа. Диаметр молекул d водорода принять равным 0,28 нм.

Ответ: $\tau = \frac{kT}{4pd^2} \cdot \sqrt{\frac{M}{\pi RT}} = 13{,}3$ нс.

3.1.15. Определите, при какой температуре T коэффициент теплопроводности λ азота равен 8,25 мВт/(м·К)? Эффективный диаметр молекул азота d принять равным 0,38 нм.

Ответ: $T = \frac{\pi M}{R} \cdot \left(\frac{3\pi d^2 \lambda}{ik}\right)^2 = 280$ К, где $i = 5$.

3.1.16. Определите объем V сосуда, в котором находится кислород при нормальных условиях (p_0, T_0), если общее число столкновений Z_0 между молекулами кислорода в этом объеме за единицу времени $Z_0 = 10^{32}$ с$^{-1}$. Эффективный диаметр молекул кислорода d = 0,36 нм.

Ответ: $V = Z_0 \Bigg/ \left[2\sqrt{\frac{\pi RT_0}{M}} \left(\frac{p_0 d}{kT_0}\right)^2\right] \approx 1{,}2$ л.

3.1.17. Найдите давление, при котором находится воздух при температуре $°t = 10°C$, если коэффициент диффузии $D = 1{,}45 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, а вязкость $\eta = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Ответ: $p = \dfrac{\eta}{D} \cdot \dfrac{RT}{M} \approx 98$ кПа.

3.1.18. В сосуде объемом $V = 2$ л находится $N = 4 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа. Теплопроводность газа $\lambda = 14$ мВт/(м·К). Найдите коэффициент диффузии D газа.

Ответ: $D = 2V\lambda / (ikN) = 2 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, где $i = 5$.

3.1.19. При какой температуре T азот, находящийся в некотором объеме, имеет коэффициент динамической вязкости $\eta = 0{,}4$ мкПа·с? Эффективный диаметр молекул азота $d = 0{,}38$ нм.

Ответ: $T = \dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{\eta^2 R \pi^3 d^4}{k^2 M} = 280\,\text{K}$.

3.1.20. Сколько молекул находится в сосуде объемом $V = 2$ л. Теплопроводность газа $\lambda = 14$ мВт/(м·К), а коэффициент диффузии $D =$ $= 2 \cdot 10^{-5}$ м^2/с. Газ двухатомный.

Ответ: $N = 2\lambda V N_A / (iRD) = 4 \cdot 10^{22}$, где $i = 5$.

3.1.21. Найдите теплопроводность λ водорода, динамическая вязкость которого $\eta = 8{,}6$ мкПа·с.

Ответ: $\lambda = \eta i R / (2M) = 89$ мВт/(м · К), где $i = 5$.

3.1.22. Коэффициент диффузии и вязкость кислорода при некоторых условиях равны $D = 1{,}22 \cdot 10^{-5}$ м^2/с и $\eta = 19{,}5$ мкПа·с. Найдите среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега кислорода. Эффективный диаметр молекул кислорода $d = 0{,}36$ нм.

Ответ: $\langle l \rangle = \dfrac{DkM}{\sqrt{2}\pi d^2 \eta R} = 58$ нм.

3.1.23. Найдите динамическую вязкость азота, теплопроводность которого равна $\lambda = 29{,}44$ мВт/(м·К).

Ответ: $\eta = 2\lambda M / (iR) = 39{,}7$ мкПа · с, где $i = 5$.

3.1.24. Коэффициент диффузии и вязкость водорода при некоторых условиях равны $D = 1{,}42 \cdot 10^{-4}$ м^2/с и $\eta = 8{,}5$ мкПа·с. Найдите число n молекул водорода в единице объема.

Ответ: $n = \dfrac{\eta N_{\text{A}}}{MD} = 1{,}8 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

3.1.25. Коэффициент диффузии и вязкость кислорода при некоторых условиях равны $D = 1{,}22\cdot10^{-5}$ м^2/с и $\eta = 19{,}5$ мкПа·с. Найдите плотность ρ, среднюю длину $\langle l\rangle$ свободного пробега и среднюю арифметическую скорость $\langle v\rangle$ молекул при этих условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода считать равным $d = 0{,}36$ нм.

Ответ: $\rho = \dfrac{\eta}{D} = 1{,}6$ кг/м^3; $\langle l\rangle = \dfrac{kM}{\sqrt{2}\cdot\pi d^2\rho R} = 58$ нм; $\langle v\rangle = \dfrac{3D}{\langle l\rangle} = 631$ м/с.

3.2.1. Пространство между двумя параллельными пластинами площадью $S = 150$ см^2 каждая, находящимися на расстоянии $l = 5$ мм друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластинка поддерживается при температуре $°t_1 = 17$ °С, другая – при температуре $°t_2 = 27$ °С. Определите коэффициент теплопроводности λ, если количество теплоты ΔQ, прошедшее за $\Delta t = 5$ мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой, равно 76,4 Дж.

Ответ: $\lambda = \left|\dfrac{\Delta Q\cdot l}{\Delta T\cdot S\cdot\Delta t}\right| = 8{,}5\cdot10^{-2}$ Вт/(м·К).

3.2.2. Найдите число i степеней свободы идеального газа, для которого вязкость $\eta = 8{,}6$ мкПа·с, а теплопроводность $\lambda = 89{,}33$ мВт/(м·К). Принять молярную массу $M = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $i = 2\lambda M/(\eta R) = 5$.

3.2.3. При каком давлении p отношение динамической вязкости η некоторого газа к коэффициенту его диффузии $\eta/D = 0{,}3$ кг/м^3, а средняя квадратичная скорость его молекул $v_{кв} = 632$ м/с.

Ответ: $p = \eta v_{кв}^2/(3D) = 39{,}9$ кПа.

3.2.4. Построить график зависимости коэффициента диффузии D водорода от температуры T в интервале температур 100 – 600 К через каждые 100 К при $p = 10$ кПа = const. Эффективный диаметр молекулы водорода $d = 0{,}28$ нм.

Ответ: $D = \dfrac{2k}{3\pi d^2 p}\cdot\sqrt{\dfrac{R}{\pi M}}\cdot T^{3/2} = 0{,}02\cdot T^{3/2}$ м^2/с.

3.2.5. Найдите среднее число столкновений $\langle z\rangle$ в единицу времени молекул некоторого газа, если средняя длина свободного пробега $\langle l\rangle = 5$ мкм, а средняя квадратичная скорость его молекул $v_{кв} = 500$ м/с.

Ответ: $\langle z\rangle = \sqrt{\dfrac{8}{3\pi}}\cdot\dfrac{v_{кв}}{\langle l\rangle} = 9{,}2\cdot10^7$ с$^{-1}$.

3.2.6. Какое предельное число n молекул газа должно находиться в единице объема сферического сосуда, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом? Эффективный диаметр молекул газа d = 0,3 нм. Диаметр сосуда D = 15 см.

Ответ: $n \le 1\Big/\left(\sqrt{2}\cdot \pi d^2 D\right) = 1{,}7\cdot 10^{19}\ \text{м}^{-3}$.

3.2.7. В сосуде объемом V = 100 см^3 находится масса m = 0,5 г азота. Найдите среднюю длину свободного пробега $\langle l\rangle$ молекул азота. Эффективный диаметр молекул d = 0,38 нм.

Ответ: $\langle l\rangle = MV\Big/\left(\sqrt{2}\cdot \pi d^2 m N_\text{А}\right) = 14{,}5\ \text{нм}$

3.2.8. Определите массу m азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку S = 50 см^2 за t = 20 с, если «градиент» плотности $\partial\rho/\partial x$ в направлении, перпендикулярном площадке, равен 1 кг/м^4. Температура азота T = 290 К, а средняя длина $\langle l\rangle$ свободного пробега его молекул равна 1 мкм.

Ответ: $m = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}\cdot\dfrac{\langle l\rangle}{3}\cdot\dfrac{\partial\rho}{\partial x}St = 15{,}6\ \text{мг}$.

3.2.9. Чему равен объем V сосуда, заполненного газообразным азотом массой m = 0,49 г, если средняя длина свободного пробега его молекул $\langle l\rangle$ = 23,2 нм? Эффективный диаметр молекул d = 0,38 нм.

Ответ: $V = \sqrt{2} m N_A \pi d^2 \langle l\rangle\big/M = 156\ \text{см}^3$.

3.2.10. Найдите толщину h слоя воздуха, увлекаемого крылом самолета, если самолет летит со скоростью v = 480 км/ч, касательная сила, действующая на единицу поверхности крыла, F_S = 0,045 Н/м^2, принять диаметр молекул воздуха d = 0,3 нм, а температура воздуха °t = 0 °С.

Ответ: $h = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{MT}{\pi R}}\cdot\dfrac{k}{\pi d^2}\cdot\dfrac{v}{F_S} = 5{,}3\ \text{см}$.

3.2.11. Во сколько раз увеличился V объем двухатомный газа в адиабатическом процессе, если средняя длина $\langle l\rangle$ свободного пробега его молекул увеличилась в 2,34 раза?

Ответ: $\dfrac{V_2}{V_1} = \left(\dfrac{\langle l_2\rangle}{\langle l_1\rangle}\right)^{2/(\gamma+1)} = 2$, где $\gamma = (i+2)/i = 1{,}4$.

3.2.12. В некотором сосуде находится кислород при нормальных условиях (p_0, T_0). Число столкновений Z между молекулами газа в этом сосуде в единицу времени равно $Z = 10^{32}$ с$^{-1}$. Эффективный диаметр d молекул кислорода равен 0,38 нм. Найдите объем V этого сосуда.

Ответ: $V = \dfrac{Z}{2}\left(\dfrac{kT_0}{p_0 d}\right)^2 \cdot \sqrt{\dfrac{M}{\pi R T_0}} = 1$ л.

3.2.13. Концентрация молекул газа в сосуде $n = 1{,}7 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$. Эффективный диаметр молекул газа $d = 0{,}3$ нм. Определите предельный диаметр D сосуда, начиная с которого вакуум в сосуде можно считать высоким. (Сосуд сферический).

Примечание. В высоком вакууме преобладают столкновения молекул со стенками вакуумного объема, т. е. должно выполняться условие $\langle l \rangle \geq D$.

Ответ: $D \leq 1\Big/\left(\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n\right) = 14{,}7$ см.

3.2.14. При температуре $°t = 0$ єС и некотором давлении средняя длина $\langle l_1 \rangle$ свободного пробега молекул кислорода равна $9{,}5 \cdot 10^{-8}$ м. Чему равно среднее число $\langle z \rangle$ столкновений в 1 секунду молекул кислорода, если сосуд откачать до $p_2 = 0{,}01 p_1$ первоначального давления? Температура останется неизменной.

Ответ: $\langle z_2 \rangle = \dfrac{1}{\langle l_1 \rangle}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}} \cdot \dfrac{p_2}{p_1} = 4{,}5 \cdot 10^7$ с$^{-1}$.

3.2.15. Найдите среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул водорода при нормальных условиях (p_0, T_0), если коэффициент диффузии $D = 9 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Ответ: $\langle l \rangle = 3D\sqrt{\dfrac{\pi M}{8RT_0}} = 0{,}16$ мкм.

3.2.16. Масса азота Δm, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 50$ см^2 за $\Delta t = 20$ с, равна 15,6 мг. Температура азота $T = 290$ К, а средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега его молекул равна 1 мкм. Определите градиент плотности $(d\rho/dx)$ в направлении, перпендикулярном площадке S.

Ответ: $\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{3\Delta m}{\langle l \rangle S \Delta t} \cdot \sqrt{\dfrac{\pi M}{8RT}} = 1$ кг/м^4.

3.2.17. Пространство между двумя параллельными пластинами площадью $S = 150$ см^2 каждая, находящимися на расстоянии $\Delta x = 5$ мм друг от друга, заполнено кислородом при нормальном давлении. Одна пластина поддерживается при температуре $°t_1 = 17$ °С, другая – при $°t_2 =$ $= 27$ °С. Определите количество теплоты ΔQ, прошедшей за $\Delta t = 5$ мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Температуру газа считать равной среднему арифметическому температур пластин $°t$ = 22 °С. Эффективный диаметр молекул кислорода d = 0,36 нм.

Ответ: $\left|\Delta Q\right| = \dfrac{ik}{3\pi d^2} \cdot \sqrt{\dfrac{RT}{\pi M}} \cdot \dfrac{(T_2 - T_1)}{\Delta x} S\Delta t = 79{,}5$ Дж, где i = 5.

3.2.18. Оценить эффективный диаметр d молекул воздуха, если при температуре $°t$ = 10 °С и давлении p = 101,3 кПа коэффициент диффузии $D = 1{,}45 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Ответ: $d = \sqrt{\dfrac{2kT}{3D \cdot \pi p} \cdot \sqrt{\dfrac{RT}{\pi M}}} = 0{,}3$ нм.

3.2.19. Найдите объем V сосуда, в котором находится $N = 4 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа, если коэффициент диффузии $D = 2 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, а теплопроводность газа λ = 14 мВт/(м·К).

Ответ: $V = \dfrac{ikND}{2\lambda} = 2$ л, где i = 5.

3.2.20. Найдите эффективный диаметр d_{He} гелия, если при нормальных условиях (p_0, T_0) коэффициент диффузии гелия $D = 8{,}25 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Ответ: $d_{\text{He}} = \sqrt{\dfrac{2kT_0}{3D \cdot \pi p_0} \cdot \sqrt{\dfrac{RT_0}{\pi M}}} = 0{,}2$ нм.

3.2.21. Доказать, что отношение динамических вязкостей двух газов при нормальных условиях равно $\dfrac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\dfrac{M_1}{M_2}} \cdot \dfrac{d_2^2}{d_1^2}$. Здесь M – молярные массы; d – эффективные диаметры молекул.

3.2.22. Определите давление p, при котором средняя продолжительность свободного пробега молекул водорода $\langle\tau\rangle$ = 13,3 нс, если температура газа $°t$ = 27 °С, а эффективный диаметр d молекул H_2 равен 0,28 нм.

Ответ: $p = \dfrac{k}{\langle\tau\rangle \cdot d^2} \cdot \sqrt{\dfrac{TM}{16\pi R}} \approx 500$ Па.

3.2.23. Коэффициент диффузии D и вязкость η газа при давлении p = 100 кПа равны $D = 1{,}22 \cdot 10^{-5}$ м^2/с и η = 19,5 мкПа·с. Найдите среднюю арифметическую скорость $\langle v\rangle$ молекул газа.

Ответ: $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8p}{\pi} \cdot \dfrac{D}{\eta}} = 400$ м/с.

3.2.24. Смесь газов азота и кислорода находится при нормальных условиях. Концентрация кислорода $n = 1{,}7\cdot10^{20}$ м$^{-3}$. Определите среднюю длину свободного пробега молекул азота. Эффективные диаметры молекул $d_{O_2} = 0{,}36$ нм; $d_{N_2} = 0{,}38$ нм.

$$\text{Ответ: } \langle l\rangle = \left(\sqrt{2}\pi d_{N_2}^2\left(\frac{p}{RT} - n_{O_2}\right) + \sqrt{1 + \frac{M_{N_2}}{M_{O_2}}} n_{O_2}\frac{\pi}{4}\left(d_{O_2} + d_{N_2}\right)^2\right)^{-1} = 0{,}11\ \text{мкм}.$$

3.2.25. Смесь газов азота и кислорода находится при парциальных давлениях, соответственно $p_{N_2} = 8{,}5\cdot10^6$ Па и $p_{O_2} = 1{,}5\cdot10^6$ Па. Определите среднюю длину свободного пробега молекул кислорода, если температура смеси $°t = 20$ °C, а эффективные диаметры молекул $d_{O_2} = 0{,}36$ нм; $d_{N_2} = 0{,}38$ нм.

$$\text{Ответ: } \langle l\rangle = \frac{RT}{\pi N_A}\left(\sqrt{2}d_{O_2}^2 p_{O_2} + p_{N_2}\sqrt{1 + \frac{M_2}{M_1}}\cdot\frac{\left(d_{O_2} + d_{N_2}\right)^2}{4}\right)^{-1} = 0{,}83\ \text{нм}.$$

4. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Первое начало термодинамики – это одна из частных формулировок закона сохранения энергии для систем, в которых существенную роль играют тепловые процессы

$$\Delta Q = \Delta U + A.$$

Количество теплоты ΔQ, сообщенное термодинамической системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии ΔU и на совершение системой механической работы A.

Первое начало термодинамики в дифференциальной форме

$$dU = \delta Q + (-\delta A).$$

Внутренняя энергия системы складывается из кинетической энергии хаотического теплового движения частиц газа и потенциальной энергии их взаимодействия. Для идеального газа потенциальной энергией его частиц пренебрегают. Внутренняя энергия идеального газа складывается только из кинетической энергии теплового движения частиц.

Внутренняя энергия идеального газа, состоящего из N молекул

$$U = N \cdot \frac{i}{2} kT .$$

Для одного моля газа $U = N_{\text{A}}(i/2)kT$, где N_A – число Авогадро; i – число степеней свободы молекулы газа.

Количество теплоты ΔQ – это количество энергии, получаемой или отдаваемой системой при теплообмене.

Молярные теплоемкости при постоянном объеме C_V и постоянном давлении C_p связаны между собой уравнением Майера:

$$C_p - C_V = R,$$

где R – универсальная газовая постоянная.

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2} R .$$

Элементарная работа, совершаемая газом при изменении его объема

$$dA = pdV.$$

Полная работа при изменении объема газа (V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа, соответственно)

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

При расширении ($\Delta V > 0$) газ совершает положительную работу, при сжатии ($\Delta V < 0$) работа, совершаемая газом, отрицательна.

Процессы в идеальных газах в рамках первого начала термодинамики

1. ***Изотермический процесс*** (температура T = const). Работа, совершаемая газом при изотермическом процессе:

$$A = \frac{m}{M} RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ или } A = \frac{m}{M} RT \cdot \ln \frac{p_1}{p_2},$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объем газа, p_1 и p_2 – начальное и конечное давление газа; M – молярная масса газа.

2. ***Изобарный процесс*** (давление газа p = const).

Работа, совершаемая газом в изобарном процессе при изменении объема ($V_2 - V_1$) или температуры ($T_2 - T_1$):

$$A = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right).$$

По первому началу термодинамики количество теплоты ΔQ, сообщенное системе в изобарном процессе

$$\Delta Q = \left(\frac{i}{2} + 1\right) \frac{m}{M} \cdot R\left(T_2 - T_1\right).$$

3. ***Изохорный процесс*** (занимаемый газом объем V = const). В этом случае вся подведенная к системе теплота идет на увеличение внутренней энергии

$$\Delta Q = \Delta U.$$

4. ***Адиабатический процесс.*** Это процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой.

Поскольку $\Delta Q = 0$, то по первому началу термодинамики

$$\Delta U = A.$$

Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона)

$$p \cdot V^{\gamma} = \text{const}, \quad T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{const}, \quad T^{\gamma} \cdot p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = C_p / C_V = (i + 2)/i$ – показатель адиабаты.

Работу в случае адиабатического процесса

$$A = \frac{m}{M} C_V \left(T_2 - T_1\right),$$

или $$A=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{M}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{M}\left[1-\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right];$$

$$A=\frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right],$$

где p_1 и V_1 – давление и объем газа при температуре T_1.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Десять молей ($\nu = 10$) идеального двухатомного газа (число степеней свободы молекул газа $i = 5$) при температуре $T_1 = 280$ К находится в вертикальном цилиндре под невесомым легко подвижным поршнем. Площадь поршня $S = 0{,}01$ м^2. На поршень положили гирю массой $m = 10$ кг, в результате чего поршень опустился на некоторую высоту. Атмосферное давление равно $p_а = 1\cdot10^5$ Па.

Определите: 1) на сколько ΔT необходимо нагреть газ в цилиндре, чтобы поршень возвратился в первоначальное положение; 2) количество теплоты ΔQ, переданной газу для подъема поршня; 3) изменение внутренней энергии ΔU газа; 4) совершенную газом работу A по подъему поршня.

Дано:
$\nu = 10$
$i = 5$
$T_1 = 280$ К
$S = 0{,}01$ м^2
$m = 10$ кг
$p_а = 1\cdot10^5$ Па

ΔT – ? ΔQ – ?
ΔU – ? A – ?

Решение. В начальном состоянии и после нагревания газ занимал один и тот же объем. Масса газа постоянна. Следовательно, на основании закона Шарля (либо записанного для начального и конечного состояния уравнения Клайперона) получаем, что

$$\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T_2}. \tag{1}$$

Начальное давление p_1 равно атмосферному $p_а$, а начальная температура T_1.

Конечное давление и температура обозначены соответственно через p_2 и T_2. Положенная на поршень гиря создает добавочное давление $\Delta p = mg/S$, поэтому давление

$$p_2 = p_1 + mg/S.$$

Подставив знаение p_2 в соотношение (1), получим

$$\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_1+mg/S}{T_2}.$$

Отсюда следует, что изменение температуры равно

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{mg}{S}\frac{T_1}{p_1} = 27,4\ \text{К}.$$

Количество переданной газу для подъема поршня теплоты ΔQ можно найти, умножив изменение температуры ΔT на теплоемкость десяти молей газа при постоянном давлении $\nu \cdot C_p$. Увеличение внутренней энергии газа ΔU можно найти, умножив изменение температуры ΔT на теплоемкость десяти молей газа при постоянном объеме $\nu \cdot C_V$, где C_p и C_V – молярные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно. На основании первого начала термодинамики совершенную газом работу A можно найти как разность между подведенной теплотой ΔQ и изменением внутренней энергии ΔU. Молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = (i/2) \cdot R$, а при постоянном давлении, на основании уравнения Майера, равна

$$C_p = C_V + R = (i/2) \cdot R + R = R \cdot (i/2 + 1).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\Delta Q = \left(\frac{i}{2} + 1\right) \nu \cdot R \cdot \Delta T = 7969\ \text{Дж} \approx 8\ \text{кДж};$$

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = 5692\ \text{Дж} \approx 5,7\ \text{кДж};$$

$$A = \Delta Q - \Delta U \approx 2,3\ \text{кДж}.$$

Ответ: $\Delta T = 27,4$ К; $\Delta Q \approx 8$ кДж; $\Delta U \approx 5,7$ кДж; $A = 2,3$ кДж.

Задача 2. В цилиндре с легко подвижным невесомым поршнем находится ν молей идеального газа. Газу при постоянном давлении сообщено некоторое количество теплоты ΔQ.

Определите: 1) изменение температуры ΔT газа; 2) изменение внутренней энергии ΔU газа; 3) совершенную газом работу A; 4) связь между молярными теплоемкостями при постоянном давлении C_p и постоянном объеме C_V идеального газа.

Дано:
ν
$p_0 = \text{const}$
ΔQ

ΔT – ? ΔU – ?
A – ?
$C_p = f(C_V)$ – ?

Решение. Учитывая, что процесс протекает при постоянном давлении, запишем первое начало термодинамики в виде:

$$\Delta Q = \Delta U + A = \nu C_V \Delta T + p_0 \Delta V, \qquad (1)$$

где $C_V = iR/2$ – молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме.

Приведенного уравнения недостаточно для ответа на поставленные в задаче вопросы.

Воспользуемся уравнением Клапейрона – Менделеева, записанного для начального и конечного состояния газа:

$$p_0V_0 = \nu RT_0; \tag{2}$$

$$p_1V_1 = \nu RT_1. \tag{3}$$

Нас интересует не состояние газа, а его изменение. Поскольку $p_0 = p_1$, вычтя из уравнения (2) уравнение (3), получим

$$p_0\Delta V = \nu R\Delta T. \tag{4}$$

С учетом (4), запишем уравнение (1) в виде

$$\Delta Q = \nu(C_V + R)\Delta T,$$

откуда

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{\nu(C_V + R)}. \tag{5}$$

В уравнении (1) первое слагаемое означает изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \nu C_V\Delta T. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (6), получим

$$\Delta U = \frac{C_V\Delta Q}{(C_V + R)}. \tag{7}$$

Найдем совершенную газом работу $A = p_0\Delta V$ при изобарном процессе. Из уравнения (1), с учетом (6), имеем

$$A = \Delta Q - \Delta U = \Delta Q - \frac{C_V\Delta Q}{(C_V + R)} = \Delta Q\left(1 - \frac{C_V}{(C_V + R)}\right).$$

Из определения молярной теплоемкости следует, что

$$C = \Delta Q/(\nu\Delta T). \tag{8}$$

Подставляя (5) в (8), найдем

$$C = \frac{\Delta Q}{\nu\Delta T} = C_V + R. \tag{9}$$

Уравнение (9) отражает процесс, протекающий в идеальном газе при постоянном давлении, поэтому $C = C_p$, следовательно,

$$C_p = C_V + R.$$

Полученное соотношение для молярных теплоемкостей, чаще записываемое как

$$C_p - C_V = R,$$

называют уравнением Майера.

Задача 3. Идеальный двухатомный газ (число степеней свободы молекул газа $i = 5$), находящийся в цилиндре с поршнем, первоначально занимает объем $V_1 = 4$ л при давлении $p_1 = 3\cdot10^5$ Па. Газ сначала адиабатно расширяется до объема V_2 = 6 л, а затем изохорно охлаждается. В результате давление газа оказывается равным $p_2 = 1 \cdot 10^5$ Па.

Определите: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение его внутренней энергии; 3) количество поглощенной теплоты.

Дано:	
$i = 5$	
$V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м^3	
$p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па	
$V_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3	
$p_2 = 10^5$ Па	
A_{12} – ?	
ΔU_{12} – ?	
ΔQ_{12} – ?	

Решение. Из условия задачи следует, что газ участвует в двух процессах: а) адиабатном расширении из состояния 1 в промежуточное состояние X, где он занимает объем $V_x = V_2$, причем давление p_x – неизвестно; б) изохорном охлаждении с переходом из состояния X в состояние 2 (рис. 4.1).

Чтобы найти работу $A_{1,2}$ и количество поглощенной теплоты $\Delta Q_{1,2}$ при переходе из состояния 1 в состояние 2, необходимо каждый из процессов рассмотреть отдельно.

При этом

$$A_{12} = A_{1X} + A_{X2}, \qquad (1)$$

$$\Delta Q_{12} = \Delta Q_{1X} + \Delta Q_{X2}. \qquad (2)$$

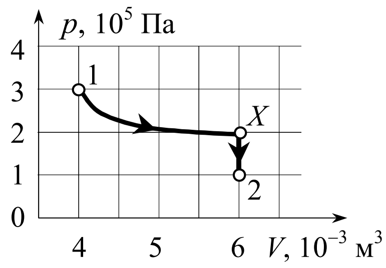

Рис. 4.1

Изменение внутренней энергии не зависит от процесса, а зависит от начального и конечного состояния системы:

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \cdot \nu R \left(T_2 - T_1 \right). \qquad (3)$$

Неизвестные значения T_2, T_1 и ν найем из уравнения Клайперона – Менделеева:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1, \quad p_2 V_2 = \nu R T_2. \qquad (4)$$

Решая систему уравнений (3) – (4) относительно $\Delta U_{1,2}$, получим

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1 \right) = -1500 \text{ Дж}.$$

Для нахождения давления p_X воспользуемся уравнением адиабаты $p \cdot V^{\gamma} = \text{const}$, учитывая, что $V_X = V_2$ (рис. 4.1). Тогда

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_X V_2^{\gamma},$$

где $\gamma = C_p / C_V = (i + 2)/i = (5 + 2)/5 = 1{,}4$ – показатель адиабаты.

Из уравнения адиабаты следует, что

$$p_X = \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{V_2^{\gamma}} = p_1 \left(V_1 / V_2 \right)^{\gamma} = 1{,}7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Адиабатный процесс протекает без теплообмена с окружающей средой. Поэтому на участке 1–X (рис. 4.1) количество поглощенной газом теплоты $\Delta Q_{1X} = 0$. На участке X–2 изохорного охлаждения прбота газа $A_{X2} = 0$, а количество поглощенной теплоты

$$\Delta Q_{X2} = \nu \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\nu \cdot R \cdot (T_2 - T_1),$$

где $C_V = iR/2$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Воспользовавшись уравнением Клайперона – Менделеева (4) для состояний X и 2, получим

$$\Delta Q_{X2} = \frac{i}{2} \cdot (p_2 - p_X) \cdot V_2 = -1050 \text{ Дж}.$$

Поскольку $\Delta Q_{1X} = 0$, то из (2) следует, что общее количество теплоты

$$\Delta Q_{12} = \Delta Q_{1X} + \Delta Q_{X2} = -1050 \text{ Дж}.$$

Знак « – » указывает, что газ отдал теплоту в окружающую среду.

Исходя из первого начала термодинамики, работу газа A_{1X} можно найти по изменению внутренней энергии ΔU_{1X} с использованием уравнения Клайперона – Менделеева и уравнения Пуассона для адиабатического процесса.

Работа газа при адиабатном процессе

$$A_{1X} = -\Delta U_{1X} = \frac{i}{2}\nu R (T_1 - T_X) = \frac{i}{2}(p_1 V_1 - p_X V_2) = 450 \text{ Дж}.$$

Поскольку $A_{X2} = 0$, то из (1) следует, что

$$A_{12} = A_{1X} + A_{X2} = 450 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta Q_{12} = -1050$ Дж; $\Delta U_{12} = -1500$ Дж; $A_{12} = 450$ Дж.

Примечание. При известных значениях ΔQ_{12} и ΔU_{12}, работу газа можно определить непосредственно из первого начала термодинамики:

$$A_{12} = \Delta Q_{12} - \Delta U_{12} = -1050 + 1500 = 450 \text{ Дж}.$$

Задача 4. Десять молей идеального двухатомного газа, занимающего при давлении 0,1 МПа и температуре 0 °С объем 0,01 м^3, адиабатно расширяется до вдвое большего объема. Определите совершенную газом при расширении работу, конечное давление газа, конечную величину внутренней энергии газа.

Дано:
$\nu = 10$
$i = 5$
$p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па
$T_1 = 273$ К
$V_1 = 1 \cdot 10^{-2}$ м^3
$V_2 = 2V_1$
A_{12} – ?
p_2 – ? U_2 – ?

Решение. При адиабатном процессе конечное давление находится из уравнения адиабаты $p \cdot V^{\gamma} = \text{const}$.

Следовательно.

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1^{\gamma}}{V_2^{\gamma}} = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 1 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1,4} = 3,8 \cdot 10^4 \text{ Па},$$

где $\gamma = C_p/C_V = (i + 2)/i = (5 + 2)/5 = 1,4$ – показатель адиабаты.

Так как при адиабатном процессе $\Delta Q = 0$, то совершаемая работа равна убыли внутренней энергии газа

$$A_{12} = -\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot \left(T_1 - T_2\right). \qquad (1)$$

Запишем уравнение Клайперона – Менделеева для начального и конечного состояний:

$$\nu RT_1 = p_1 V_1; \quad \nu RT_2 = p_2 V_2. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) – (2) относительно A_{12}, получим

$$A_{12} = -\Delta U_{12} = \frac{i}{2}\left(p_1 V_1 - p_2 V_2\right) = \frac{i}{2}\left(p_1 - 2p_2\right) V_1 = 600 \text{ Дж}.$$

Очевидно, что $\Delta U_{12} = -600$ Дж.

При адиабатном процессе внутренняя энергия газа U_2 в конечном состоянии должна быть меньше, чем в начальном состоянии U_1.

$$U_2 = U_1 + \Delta U_{12} = \frac{i}{2} \nu RT_1 + \Delta U_{12} = 56716 - 600 = 56116 \text{ Дж} = 56{,}1 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A_{12} = 600$ Дж; $p_2 = 3{,}8 \cdot 10^4$ Па; $U_2 = 56{,}1$ кДж**.**

Задача 5. Молекулярный кислород массой m = 6 г расширяется вдвое при постоянном давлении. Начальная температура газа T_1 = 303 К. Определите работу A расширения газа, изменение его внутренней энергии ΔU и количество сообщенной газу теплоты ΔQ.

Дано:
$m = 6 \cdot 10^{-3}$ кг
$i = 5$
$p = \text{const}$
$T_1 = 303$ К
$V_2 = 2V_1$
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

A – ? ΔU – ? ΔQ – ?

Решение. Поскольку давление постоянно, то работа совершаемая газом при расширении равна

$$A = p(V_2 - V_1) = pV_1, \qquad (1)$$

где учтено, что $V_2 = 2V_1$.

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$A = \frac{m}{M} RT_1 = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 303 = 472 \text{ Дж}.$$

Поскольку расширение происходит при постоянном давлении и массе газа, воспользуемся законом Гей-Люссака $V_1/T_1 = V_2/T_2$. Учитывая, что $V_2 = 2V_1$, найдем конечную температуру газа:

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 2T_1. \qquad (3)$$

Изменение внутренней энергии, с учетом (3), равно

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} RT_1 = \frac{5}{2} \cdot A = 1181 \text{ Дж}.$$

По первому началу термодинамики количество теплоты, сообщенной газу, равно $Q = \Delta U + A = 1181 + 472 = 1663$ Дж.

Ответ: $A = 472$ Дж; $\Delta U = 1181$ Дж; $Q = 1663$ Дж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Азот (N_2), первоначально занимавший объем $V_1 = 4$ литра, изотермически расширяется при температуре $T = 253$ К, изменяя давление от $p_1 = 202$ до $p_2 = 101$ кПа. Найдите работу A расширения, изменение внутренней энергии ΔU газа, количество сообщенной ему теплоты ΔQ, объем V_2 газа после расширения. Результаты округлить до целых чисел, $\ln 2 = 0{,}693$.

Ответ: $A = \Delta Q = p_1 V_1 \cdot \ln(p_1 / p_2) = 560$ Дж; $\Delta U = 0$; $V_2 = 2V_1 = 8$ л.

2. Воздушный шар диаметром $d = 20$ см, находящийся под водой, погружают с начальной глубины $h = 10$ м. В результате его диаметр уменьшается на $\Delta d = 0{,}2$ см. Найдите работу A сжатия газа в воздушном шаре. Натяжением оболочки шара и изменением температуры воды при погружении пренебречь.

Ответ: $A = \dfrac{\pi d^3 \rho g h}{2} \cdot \ln\left(\dfrac{d - \Delta d}{d}\right) = -12{,}3$ Дж .

3. Гелий, первоначально занимавший объем $V_1 = 1$ л и находившийся под давлении $p_1 = 101$ кПа, изотермически расширяется до удвоения объема ($V_2 = 2V_1$). Найти работу A, совершенную газом при расширении, и количество сообщенной газу теплоты Q.

Ответ: $A = \Delta Q = p_1 V_1 \cdot \ln(V_2 / V_1) = 70$ Дж; $Q = 3{,}5$ Дж.

4. В цилиндре под поршнем находится $m = 2$ кг кислорода (O_2). Поршень закреплен. Газ нагревают на $\Delta T = 5$ К. Найдите подведенное к кислороду количество теплоты Q, увеличение внутренней энергии ΔU газа, совершенную газом работу A и удельную теплоемкость кислорода для этого случая.

Ответ: $Q = \Delta U = \dfrac{i}{2}\dfrac{m}{M} R \Delta T = 6{,}49$ кДж; $A = 0$; $C_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{M} = 649$ Дж/(кг · К).

5. В стальном герметичном баллоне находится $m_N = 20$ г азота (N_2) и $m_O = 32$ г кислорода (O_2). Найдите уменьшение внутренней энергии ΔU газовой смеси и совершенную ею работу A, если температура смеси уменьшилась на $\Delta T = 28$ К .

Ответ: $\Delta U = \dfrac{i}{2} \cdot \left(\dfrac{m_O}{M_O} + \dfrac{m_N}{M_N}\right) R \Delta T = 994{,}7$ Дж ; $A = 0$.

6. Молекулярный азот при $°t_1 = 0$ °C и давлении $p_1 = 1{,}82$ атм. занимает в цилиндре под поршнем объем $V_1 = 200$ л. Поршень первоначально находится на расстоянии $h = 50$ см от дна цилиндра. Найдите работу A, совершенную газом при его изобарном нагревании на $\Delta T = 30$ °C, поглощенное при этом количество теплоты ΔQ и перемещение поршня Δh.

Ответ: $A = p_1 V_1 \cdot \dfrac{\Delta T}{T_1} = 4{,}04$ кДж; $\Delta Q = \dfrac{i+2}{2} \cdot A = 14{,}2$ кДж; $\Delta h = h \cdot \dfrac{\Delta T}{T_1}$ см.

7. В цилиндре под поршнем находится $m = 22$ г молекулярного водорода при давлении $p = 0{,}25$ МПа. Площадь поршня $S = 0{,}25$ м^2. Газ изобарно нагревают, сообщая ему $\Delta Q = 17{,}2$ кДж теплоты. Найдите совершенную газом работу A, изменение температуры ΔT в цилиндре и перемещение поршня Δh.

Ответ: $A = \dfrac{2\Delta Q}{i+2} = 4{,}9$ кДж; $\Delta T = \dfrac{2M\Delta Q}{(i+2)mR} = 54$ К; $\Delta h = \dfrac{mR\Delta T}{MpS} = 7{,}9$ см.

8. В цилиндре под поршнем массой $m = 100$ кг находится азот (N_2) при температуре $T_1 = 293$ К. Нижняя поверхность поршня находится на высоте $h = 0{,}5$ м от основания цилиндра. Найдите работу A, которую совершит газ при его изобарном нагревании на $\Delta T = 40$ К. Площадь основания цилиндра $S = 100$ см^2, атмосферное давление $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь.

Ответ: $A = (mg + pS)h\dfrac{\Delta T}{T_1} = 135{,}8$ Дж

9. Азот (молярная масса $M = 28$ г/моль), первоначально находившийся при температуре $T_1 = 260$ К и давлении $p_1 = 0{,}15$ МПа, был адиабатно сжат. При этом объем газа уменьшился в $V_1/V_2 = 12$ раз. Масса газа $m = 1$ кг. Найдите конечное давление p_2, температуру T_2 газа и совершенную при сжатии работу A.

Ответ: $p_2 = p_1 \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 4{,}86$ МПа; $T_2 = T_1 \cdot \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} = 702{,}5$ К;

$A = \dfrac{m}{M} R\Delta T = 328$ кДж, где $\gamma = (i + 2)/i = 1{,}4$ – показатель адиабаты.

10. Один моль идеального одноатомного газа и один моль идеального двухатомного газа по отдельности адиабатно сжимают до уменьшения их объемов в два раза. Найдите отношение температур и внутренних энергий газов после их сжатия.

Ответ: $(T_{\text{одноат}}/T_{\text{двухат}}) = (V_1/V_2)^{0,267} = 0{,}83$; $(3/5) \cdot (T_{\text{одноат}}/T_{\text{двухат}}) = 0{,}5$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.1.1. При нагревании одного моля ($\nu = 1$) идеального двухатомного газа на $\Delta T = 1$ К при постоянном давлении объем газа увеличился на $\Delta V = 2{,}5 \cdot 10^{-3} V_1$ от первоначального объема V_1. Найдите начальную температуру T_1 газа, увеличение его внутренней энергии ΔU, совершенную газом работу A и количество подведенной теплоты ΔQ.

Ответ: $T_1 = \Delta T \cdot \left(\dfrac{V_1}{\Delta V}\right) = 400$ К; $\Delta U = \dfrac{i}{2} R\Delta T = 20{,}8$ Дж;

$A = R\Delta T = 8{,}31$ Дж; $\Delta Q = \Delta U + A = 29{,}11$ Дж.

4.1.2. Молекулярный кислород (O_2) расширяются изобарно. Определите, какая часть подводимого тепла расходуется: 1) на работу расширения; 2) на изменение внутренней энергии.

Ответ: 1) $\dfrac{A}{\Delta Q} = \dfrac{2}{i+2} = 0{,}29$; 2) $\dfrac{\Delta U}{\Delta Q} = \dfrac{i}{i+2} = 0{,}71$

4.1.3. При изобарном сжатии азота (N_2) внешними силами была совершена работа $A_{вс} = 12$ кДж. Определите изменение внутренней энергии газа ΔU и подведенное к газу количество теплоты ΔQ.

Ответ: $\Delta U = -\dfrac{i}{2} \cdot A_{вс} = -30$ кДж; $\Delta Q = \Delta U - A_{вс} = -42$ Дж.

4.1.4. Определите работу A расширения при постоянном давлении $m = 7$ кг водорода (H_2) и количество теплоты ΔQ, переданное водороду, если при этом температура газа повысилась на $\Delta T = 200$ К.

Ответ: $A = \dfrac{m}{M} R\Delta T = 5817$ кДж; $\Delta Q = \dfrac{i+2}{2} A \approx 20360$ кДж.

4.1.5. Идеальный газ объемом $V_1 = 2$ м^3 при изотермическом расширении изменяет давление от $p_1 = 12 \cdot 10^5$ до $p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па. Определите работу A расширения газа, изменение внутренней энергии ΔU и количество подведенной теплоты ΔQ.

Ответ: $A = p_1 V_1 \ln\left(p_1 / p_2\right) = 4{,}3$ МДж; $\Delta U = 0$; $\Delta Q = A = 4{,}3$ МДж.

4.1.6. В изотермическом процессе расширения $m = 1{,}2$ кг азота (N_2) ему было сообщено $\Delta Q = 120$ кДж теплоты. Определите, во сколько раз изменилось давление азота. Температура газа $°t = 7$ °C.

Ответ: $\dfrac{p_1}{p_2} = \exp\left(\dfrac{M}{m} \dfrac{\Delta Q}{RT}\right) = 3{,}3$.

4.1.7. В баллоне емкостью $V = 10$ л содержится кислород при температуре $°t_1 = 27$ °C и давлении $p_1 = 10$ МПа. Нагреваясь солнечными лучами, кислород получил $\Delta Q = 8350$ Дж теплоты. Определите температуру T_2 и давление p_2 кислорода после нагревания.

Ответ: $T_2 = T_1 + \frac{2}{i} \cdot \frac{T_1 \Delta Q}{p_1 V} = 310\ \text{К}; \quad p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 10{,}3\ \text{МПа}$.

4.1.8. Азот (N_2), расширяясь адиабатно, совершает работу $A = 480$ кДж. Определите конечную температуру T_2 газа, если до расширения она была $T_1 = 362$ К. Масса азота $m = 12$ кг.

Ответ: $T_2 = T_1 - (\gamma - 1)\frac{M}{m}\frac{A}{R} = 308\ \text{К}$.

4.1.9. Азот (N_2) массой $m = 2$ г, имевший температуру $T_1 = 300$ К, был адиабатно сжат так, что его объем уменьшился в 10 раз ($V_1/V_2 = 10$). Определите конечную температуру T_2 газа и работу A сжатия.

Ответ: $T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 754\ \text{К}; \quad A = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = -673\ \text{Дж}$.

4.1.10. Какое количество теплоты ΔQ потребуется для нагревания окиси углерода (CO), занимавшей при $°t_1 = 0$ °C объем $V_1 = 5$ м^3, до температуры $°t_2 = 220$ °C, если газ находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легко скользящим невесомым поршнем? Атмосферное давление $p = 9{,}35 \cdot 10^4$ Па.

Ответ: $\Delta Q = \frac{i+2}{2} \cdot pV_1 \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 1{,}32\ \text{МДж}$.

4.1.11. Азот (N_2) массой $m = 5$ кг нагрели на $\Delta T = 150$ К при постоянном объеме. Найдите количество теплоты ΔQ, сообщенной газу, изменение его внутренней энергии ΔU и совершенную газом работу A.

Ответ: $\Delta Q = \Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R \Delta T = 556{,}5\ \text{кДж}; \ A = 0$.

4.1.12. Водород (H_2) занимал объем $V = 10$ м^3 при давлении $p_1 = 100$ кПа. Его нагрели при постоянном объеме. При этом давление газа повысилось до $p_2 = 300$ кПа. Определите количество подведенной к газу теплоты ΔQ, изменение внутренней энергии ΔU газа и совершенную им работу A.

Ответ: $\Delta Q = \Delta U = \frac{i}{2}(p_2 - p_1)V = 5\ \text{МДж}; \quad A = 0$.

4.1.13. При изохорном нагревании V = 50 л молекулярного кислорода (O_2) давление газа изменилось на Δp = 0,5 МПа. Найдите количество сообщенной газу теплоты ΔQ.

Ответ: $\Delta Q = \Delta U = \frac{i}{2} \cdot \Delta p \cdot V = 62{,}5$ кДж.

4.1.14. Стальной баллон объемом V = 20 литров содержит молекулярный водород (H_2) при температуре $°t_1$ = 27 °C и давлении p_1 = 0,4 МПа. Каковы станут температура T_2 и давление p_2, если газу сообщить количество теплоты ΔQ = 6 кДж?

Ответ: $T_2 = T_1 + \frac{2}{i} \cdot \frac{\Delta Q T_1}{p_1 V} = 390$ К; $\quad p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 0{,}52$ МПа.

4.1.15. Кислород (O_2) нагревается при постоянном давлении p = = 80 кПа. При этом объем газа увеличивается от V_1 = 1 до V_2 = 3 м^3. Определите изменение внутренней энергии ΔU газа, количество сообщенной газу теплоты ΔQ и совершенную им при расширении работу A.

Ответ: $\Delta U = \frac{i}{2} p \Delta V = 400$ кДж; $\quad \Delta Q = \frac{i+2}{2} p \Delta V = 560$ кДж;

$A = \Delta Q - \Delta U = 160$ кДж.

4.1.16. При изобарном нагревании молекулярного азота (N_2) ему было сообщено ΔQ = 21 кДж теплоты. Найдите работу A, совершенную газом, и изменение его внутренней энергии ΔU.

Ответ: $A = \frac{2}{i+2} \cdot \Delta Q = 6$ кДж; $\Delta U = \Delta Q - A = 15$ кДж.

4.1.17. Кислород (O_2) массой m = 2 кг при давлении p_1 = 0,2 МПа занимал объем V_1 = 1 м^3. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении, и его объем газа увеличился до V_2 = 3 м^3. При этом объеме газ был нагрет еще, и давление газа увеличилось до p_2 = 0,5 МПа. Найдите изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную им работу A и количество теплоты ΔQ, подведенной к газу.

Ответ: $\Delta U = \frac{i}{2}\left(p_1 \Delta V + \Delta p V_2\right) = 3{,}25$ МДж; $\quad A = p_1 \Delta V = 0{,}4$ МДж;

$\Delta Q = \Delta U + A = 3{,}65$ МДж.

4.1.18. Гелий массой m = 1 г нагрет на ΔT = 100 К при постоянном давлении. Определите количество подведенной к газу теплоты ΔQ, увеличение внутренней энергии ΔU газа и работу A, совершенную газом при расширении.

Ответ: $\Delta Q = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} R \Delta T = 519{,}4$ Дж; $\quad \Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R \Delta T = 311{,}6$ Дж;

$A = \Delta Q - \Delta U = 207{,}8$ Дж.

4.1.19. Водород (H_2) массой m = 4 г при постоянном давлении был нагрет на ΔT = 10 К. Найдите работу A, совершенную газом при расширении, и количество теплоты ΔQ, подведенной к газу.

Ответ: $A = \dfrac{m}{M} R\Delta T = 166{,}2$ Дж; $\Delta Q = \dfrac{i+2}{2} \cdot A = 581{,}7$ Дж.

4.1.20. Идеальный газ, занимавший первоначально объем V_1 = 12 л при давлении $p_1 = 10^5$ Па и температуре $°t_1$ = 27 °C, был изобарно нагрет до температуры $t_2°$ = 127 °C. Найдите работу A расширения газа.

Ответ: $A = p_1V_1\left(T_2 - T_1\right)/T_1 = 400$ Дж.

4.1.21. Один моль азота (N_2), занимавший при давлении $p_1 = 10^5$ Па и температуре $°t_1$ = 0 °C объем V_1 = 22,4 л, адиабатно увеличил его до V_2 = 44,8 л. Найдите давление p_2 и температуру T_2 газа после расширения, а также совершенную газом работу A.

Ответ: $p_2 = p_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 38$ кПа; $T_2 = T_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 207$ К; $A = \dfrac{RT_1}{\gamma-1}\left(1 - \dfrac{T_1}{T_2}\right) = 1373$ Дж.

4.1.22. Один моль азота (N_2), занимавший при давлении p_1 = 38 кПа и температуре $°t$ = –66 °C объем V_1 = 44,8 л, изотермически сжали до объема V_2 = 22,4 л. Найдите давление p_2 газа и работу A, затраченную на его изотермическое сжатие.

Ответ: $p_2 = p_1\dfrac{V_1}{V_2} = 76$ кПа; $A = RT\ln\dfrac{V_1}{V_2} = 1192$ Дж.

4.1.23. Один моль азота, занимавший при давлении $p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па и температуре $°t_1$ = 0 °C объем V_1 = 22,4 л, адиабатно сжимают до объема, равного половине начального (V_1/V_2 = 2). После чего газ изотермически расширяется до первоначального объема V_1. Найдите конечную температуру T_3 и давление p_3, а также совершенную им работу A при изотермическом расширении.

Ответ: $T_3 = T_2 = T_1 \cdot \left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1} = 360$ К; $p_3 = \dfrac{p_1}{2} \cdot \left(V_1/V_2\right)^{\gamma} = 132$ кПа;

$A = RT_2 \cdot \ln\left(V_1/V_2\right) = 2{,}1$ кДж.

4.1.24. При изобарном нагревании ν = 800 молей идеального газа на ΔT = 227 К ему было сообщено количество теплоты ΔQ = 5,3 МДж. Определите совершенную газом работу A и приращение его внутренней энергии ΔU.

Ответ: $A = \nu R\Delta T = 1{,}5$ МДж; $\Delta U = \Delta Q - A = 3{,}8$ МДж.

4.1.25. В вертикально расположенном цилиндре под легко подвижным поршнем площадью S = 245 см^2 находится ν = 1 моль идеального газа при температуре °t_1 = 27 °С. На поршне лежит груз массой m = = 12,5 кг. Атмосферное давление вне цилиндра $p_{атм}$ = 1·10^5 Па. Газ нагревают до температуры, при которой его объем удваивается ($V_2/V_1 = 2$). Найдите давление газа p, его первоначальный объем V_1, конечную температуру T_2, совершенную газом работу A, изменение его внутренней энергии ΔU и число n атомов в молекуле газа, если известно, что к газу было подведено количество теплоты ΔQ = 8725 Дж.

Ответ: $p = p_{атм} + \dfrac{mg}{S} = 105$ кПа; $V_1 = \dfrac{RT_1}{p} = 24$ л; $T_2 = T_1 \cdot \dfrac{V_2}{V_1} = 600$ К;
$A = \nu R(T_2 - T_1) = 2493$ Дж; $\Delta U = \Delta Q - A = 6232$ Дж;
$i = 2\Delta U/(R\Delta T) = 5$, т.е. $n = 2$ – двухатомные молекулы газа.

4.2.1. Два моля (ν = 2) идеального одноатомного газа, находящегося при °t = 0 °С, сначала изохорно перевели в состояние, когда давление стало вдвое больше первоначального. Затем газ изобарно перевели в состояние, при котором его объем стал вдвое больше первоначального. Найдите изменение внутренней энергии ΔU газа.

Ответ: $\Delta U = (3i/2)\nu RT = 20{,}4$ кДж.

4.2.2. В цилиндре под поршнем находится воздух. На его нагревание при постоянном давлении было затрачено ΔQ = 5 кДж теплоты. Найдите совершенную газом работу A. Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна c_p = 10^3 Дж/(кг·К), масса 1 моля воздуха M = 29 г.

Ответ: $A = R\Delta Q/(c_p M) = 1433$ Дж.

4.2.3. Азот (N_2) массой m = 200 г нагревают при постоянном давлении от °t_1 = 20 °С до °t_2 = 100 °С. Найдите совершенную газом работу A, увеличение внутренней энергии ΔU газа и подведенное к нему количество теплоты ΔQ.

Ответ: $A = \dfrac{m}{M} R\Delta T = 4{,}7$ кДж; $\Delta U = \dfrac{i}{2} A = 11{,}9$ кДж; $\Delta Q = \Delta U + A = 16{,}6$ Дж.

4.2.4. В цилиндре под поршнем находится воздух, начальная высота столба воздуха в цилиндре h_0 = 15 см. Какую работу A необходимо произвести, чтобы высота столба воздуха в цилиндре увеличилась на величину Δh_1 = 10 см? Атмосферное давление вне цилиндра p = 1·10^5 Па, площадь поршня S = 10 см^2. Поршень считать невесомым, а температуру воздуха в цилиндре неизменной.

Ответ: $A = pSh_0 \ln\frac{h_0 + \Delta h}{h_0} = 7,7$ Дж.

4.2.5. Идеальный двухатомный газ при давлении p_1 = 1,01·10^5 Па занимал объем V_1 = 5 л, а при давлении $p_2 = 3p_1$, – объем V_2 = 2 л. Переход из первого состояния во второе был произведен в 2 этапа: сначала изохорно, а затем изобарно. Найдите изменение внутренней энергии ΔU газа и произведенную над газом работу A.

Ответ: $\Delta U = \frac{i}{2} p_1 \left(V_1 - 3V_2\right) = -252,5$ Дж; $A = 3p_1\left(V_2 - V_1\right) = 909$ Дж.

4.2.6. Идеальный двухатомный газ один раз сжали изотермически, а другой – адиабатно. Начальные температуры и давление газа в обоих случаях одинаковы. Конечное давление p_2 вдвое больше начального p_1. Найдите отношение работы A_{ad} адиабатного сжатия газа к работе A_t изотермического сжатия.

Ответ: $\frac{A_{ad}}{A_t} = \frac{1 - \left(p_1/p_2\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{(\gamma - 1)\cdot \ln\left(p_1/p_2\right)} = 0,79$.

4.2.7. В цилиндре двигателя находится газ. Для его нагревания сожгли m = 2 кг нефти с удельной теплотой сгорания q = 4,3·10^7 Дж/кг. Расширившись, газ совершил работу A = 2 кВт.ч. Найдите затраченную тепловую энергию ΔQ, совершенную работу A в единицах СИ, изменение внутренней энергии газа ΔU и коэффициент полезного действия η установки.

Ответ: $\Delta Q = qm$ = 86 МДж; A = 7,2 МДж;
$\Delta U = \Delta Q - A$ = 78,8 МДж; $\eta = A/\Delta Q$ = 0,084.

4.2.8. Один литр гелия (V_1 = 1 л), находившегося при нормальных условиях, за счет полученной извне теплоты изотермически расширился до объема V_2 = 2 л. Найдите работу A, совершенную газом при расширении, и количество подведенной к газу теплоты ΔQ. При нормальных условиях температура равна °t_1 = 0 °С, а давление равно p_1 = 1,01·10^5 Па.

Ответ: $A = \Delta U = p_1 V_1 \ln\left(V_2/V_1\right) = 70$ Дж; $\Delta Q = 0$.

4.2.9. Какая доля количества теплоты ΔQ, подводимой к идеальному одноатомному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение внутренней энергии ΔU газа, и какая доля – на работу A расширения?

Ответ: $\frac{\Delta U}{\Delta Q} = \frac{i}{i+2} = 0,6$; $\frac{A}{\Delta Q} = \frac{2}{i+2} = 0,4$.

4.2.10. Один моль водорода (H_2), первоначально имевший температуру $°t_1$ = 0 °С, нагревается при постоянном давлении. Какое количество теплоты ΔQ необходимо сообщить газу, чтобы его объем удвоился? Найдите увеличение внутренней энергии ΔU газа и совершенную им при расширении работу A.

Ответ: $\Delta Q = \frac{i+2}{2} \cdot RT_1 = 7940$ Дж; $\Delta U = \frac{i}{2} \cdot RT_1 = 5671$ Дж;

$A = \Delta Q - \Delta U = 2269$ Дж.

4.2.11. Один кубометр молекулярного водорода (H_2) при температуре $°t_1$ = 0 °С находится в вертикальном цилиндре, закрытом сверху легко скользящим поршнем. Масса поршня m = 1 т, а его площадь S = 0,49 м^2. Атмосферное давление $p_{атм} = 10^5$ Па. Какое количество теплоты ΔQ потребуется для нагревания водорода до $°t_2$ = 300 °С?

Ответ: $\Delta Q = \frac{i+2}{2T_1}\left(p_{атм} + \frac{mg}{S}\right)V_1\left(T_2 - T_1\right) = 461,5$ кДж.

4.2.12. Идеальный двухатомный газ изобарно сжимают до объема в несколько раз меньше начального. Найдите отношение затраченной на сжатие работы $A_{вн}$ к увеличению внутренней энергии ΔU газа.

Ответ: $\frac{A_{вн}}{\Delta U} = \frac{2}{i} = 0,4$.

4.2.13. Найти работу A, которую совершает m = 5 г водорода (H_2) при изотермическом расширении до утроенного объема (V_2/V_1 = 3). Температура газа $°t$ = 17 °С.

Ответ: $A = \frac{m}{M} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 6,62$ кДж.

4.2.14. Идеальный газ, находившийся при температуре T_1 = 290 К и давлении p_1 = 200 кПа в сосуде объемом V_1 = 5 л, изобарно расширился, совершив при этом работу A = 196 Дж. До какой температуры T_2 нагрели газ?

Ответ: $T_2 = T_1 + T_1 A/(p_1 V_1) = 347$ К.

4.2.15. Кислород (O_2) нагрели при постоянном давлении на ΔT = 12 К. При этом было израсходовано ΔQ = 1760 Дж теплоты. Найдите массу m кислорода.

Ответ: $m = \frac{2}{i+2} \cdot \frac{M \Delta Q}{R \Delta T} = 0,16$ кг.

4.2.16. Азот (N_2) в воздушном шаре занимает объем V_1 = 2 дм^3 при нормальном атмосферном давлении $p_{атм}$ = 10^5 Па. Определите количество теплоты ΔQ, которое необходимо сообщить газу, чтобы при постоянном давлении его объем увеличился вдвое. Натяжением оболочки шара пренебречь.

Ответ: $\Delta Q = \frac{i+2}{2} \cdot p_{атм} V_1 = 700$ Дж.

4.2.17. Азот (N_2) занимает объем V_1 = 10 дм^3 при давлении p_1 = 10^5 Па. Определите количество тепла, которое необходимо сообщить газу, чтобы при постоянном объеме его давление увеличилось вдвое.

Ответ: $\Delta Q = \frac{i}{2} \cdot p_1 V_1 = 2{,}5$ кДж

4.2.18. Кислород (O_2) массой m = 10 г, имевший начальную температуру °t_1 = –3 °С, нагревается при постоянном давлении p = 0,1 МПа. После нагревания объем газа стал V_2 = 10 л. Определите количество полученной газом теплоты ΔQ и увеличение внутренней энергии ΔU газа после нагревания.

Ответ: $\Delta Q = \frac{i+2}{2}\left(pV_2 - \frac{m}{M}RT_1\right) = 1046$ Дж; $\Delta U = \frac{i}{2}\left(pV_2 - \frac{m}{M}RT_1\right) = 747$ Дж.

4.2.19. В закрытом стальном баллоне находится m = 1,4 кг азота (N_2) при давлении p_1 = 10^5 Па и температуре T_1 = 300 К. После нагревания давление в баллоне увеличилось до $p_2 = 5p_1$. Найдите объем V сосуда и количество теплоты ΔQ, сообщенной газу.

Ответ: $V = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT_1}{p_1} = 1{,}25$ м^3; $\Delta Q = \frac{i}{2} \cdot (p_2 - p_1)V = 1{,}25$ МДж.

4.2.20. Один моль идеального двухатомного газа, находящегося в цилиндре с поршнем, нагрели при постоянном давлении на ΔT = 50 К. Найдите количество сообщенной газу теплотыΔQ, произведенную им работу A и КПД η устройства.

Ответ: $\Delta Q = \frac{i+2}{2} R\Delta T = 1454{,}3$ Дж; $A = R\Delta T = 415{,}5$ Дж; $\eta = \frac{A}{\Delta Q} = 0{,}286$.

4.2.21. Некоторой массе окиси углерода (СО) при постоянном давлении было сообщено ΔQ = 29,1 кДж теплоты. В результате этого температура газа возросла от T_1 = 300 К до T_2 = 400 К. Найдите увеличение внутренней энергии ΔU газа и его массу m.

Ответ: $\Delta U = \frac{i}{i+2} \cdot \Delta Q = 20{,}8$ кДж; $m = \frac{M}{R} \cdot \frac{\Delta Q - \Delta U}{T_2 - T_1} = 0{,}28$ кг.

4.2.22. В стальном баллоне объемом V = 1 л находится азот (N_2), плотность которого ρ = 2,8 кг/м^3. Азот нагрели на ΔT = 100 К. Какое количество теплоты ΔQ было при этом сообщено газу?

Ответ: $\Delta Q = \frac{i}{2} \cdot \frac{\rho V}{M} R \Delta T = 207{,}8$ Дж.

4.2.23. Кислород (O_2) находится в стальном баллоне емкостью V = 100 л под давлением p_1 = 0,5 МПа. Какое количество теплоты ΔQ нужно сообщить азоту, чтобы его давление возросло до p_2 = 1,5 МПа?

Ответ: $\Delta Q = \frac{i}{2} \cdot (p_2 - p_1) V = 250$ кДж

4.2.24. При адиабатном расширении V_1 = 1 л идеального газа его давление упало от p_1 = 200 кПа до p_2 = 100 кПа. После этого газ изохорно нагрели до первоначальной температуры. При этом давление газа стало равным p = 122 кПа. Найдите отношение теплоемкостей $\gamma = C_p / C_V$ для этого газа, изменение его внутренней энергии ΔU и совершенную газом работу A.

Ответ: $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{1}{1 - \left[\ln(p/p_2) / \ln(p_1/p_2)\right]} = 1{,}4$; $\Delta U = 0$;

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \cdot \left[1 - (p_2/p_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = 89{,}8 \text{ Дж}.$$

4.2.25. В стальном баллоне объемом V = 2 л находится кислород (O_2) под давлением p_1 = 0,1 МПа. После нагревания газа давление в баллоне становится равным p_2 = 0,2 МПа. Найдите количество сообщенной газу теплоты ΔQ и изменение его внутренней энергии ΔU.

Ответ: $\Delta Q = \Delta U = \frac{i}{2} \cdot (p_2 - p_1) V = 500$ Дж.

4.3.1. Гелий, находящийся в закрытом стальном баллоне объемом V_1 = 2 дм^3 при температуре T_1 = 293 К и давлении $p_1 = 10^5$ Па, нагревают на ΔT = 100 К. Найдите сообщенное гелию количество теплоты ΔQ и его внутреннюю энергию U при новой температуре.

Ответ: $\Delta Q = i p_1 V_1 \cdot \Delta T / T_1 = 102$ Дж; $U = i p_1 V_1 \cdot (T_1 + \Delta T) / T_1 = 402$ Дж.

4.3.2. В цилиндре с поршнем находится m = 1,6 кг кислорода (O_2). Начальная температура газа T_1 = 290 К, а давление p_1 = 0,4 МПа. До какой температуры T_2 был нагрет газ, если совершенная при этом работа равна A = 40 кДж?

Ответ: $T_2 = T_1 + \frac{AM}{mR} = 386$ К.

4.3.3. В цилиндре с поршнем находится $m = 2$ кг воздуха. Начальная температура газа $T_1 = 293$ К. Газ изобарно нагревают до температуры $T_2 = 393$ К. Чему при этом равна работа A, совершенная газом?

Ответ: $A = \dfrac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right) = 57{,}3$ кДж.

4.3.4. Вертикальный цилиндр закрыт невесомым поршнем. Площадь основания цилиндра $S = 1$ м^2. Под поршнем находится столб воздуха высотой $h_1 = 1$ м при температуре °$t_1 = 0$ °C и давлении $p_1 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Воздух под поршнем нагревают на $\Delta T = 1$ К, и поршень при этом поднимается. Найдите работу A, совершенную расширяющимся воздухом.

Ответ: $A = p_1 S h_1 \Delta T / T_1 = 370$ Дж.

4.3.5. Находящийся в цилиндре с поршнем воздух нагревается при постоянном давлении. Начальная температура воздуха °$t_1 = 0$ °C, а масса $m = 16$ г. Найдите изменение температуры ΔT газа, подведенное к нему количество теплоты ΔQ и произведенную газом работу A, если при нагревании его объем удвоился? Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_p = 913{,}4$ Дж/(кг·К).

Ответ: $\Delta T = T_1 = 273$ К; $\Delta Q = c_p m \Delta T = 3990$ Дж; $A = \dfrac{m}{M} R \Delta T = 1252$ Дж.

4.3.6. В цилиндре под поршнем находится $\nu = 1$ моль идеального газа. Масса поршня m, а площадь S. При нагревании на $\Delta T = 1$ К газ совершает работу по поднятию поршня. Найдите эту работу A. Давление наружного воздуха не учитывать.

Ответ: $A = \nu R \Delta T = 8{,}31$ Дж.

4.3.7. В вертикально расположенном цилиндре с поршнем взрывается гремучий газ. Масса поршня $m_п = 2$ кг, а площадь его поперечного сечения $S = 10$ см^2. Поршень в цилиндре переместился без трения на высоту $\Delta h = 20$ см. Давление воздуха над поршнем $p = 10^5$ Па. При взрыве внутренняя энергия газа возросла на $\Delta U = 350$ Дж. Найдите количество выделившегося при взрыве теплоты ΔQ.

Ответ: $\Delta Q = \Delta U + \left(m_п g + pS\right)\Delta h = 374$ Дж.

4.3.8. Нагревание одного моля идеального газа при постоянном давлении на $\Delta T = 50$ К потребовало $\Delta Q = 1454$ Дж теплоты. Найдите число n атомов в молекуле этого газа и работу A, совершенную газом при его нагревании.

Ответ: $i = \dfrac{2\Delta Q}{R\Delta T} - 2 = 5$ (двухатомный газ, $n = 2$); $A = R\Delta T = 415{,}5$ Дж.

4.3.9. Азот (N_2) находится в закрытом баллоне, объем которого V = 3 л. Температура азота T_1 = 300 К, а давление p_1 = 0,3 МПа. После нагревания давление в баллоне повысилось на Δp = 2,2 МПа. Найдите температуру T_2 газа после нагревания, количество сообщенной ему теплоты ΔQ и совершенную газом работу A.

Ответ: $T_2 = T\cdot_1\left(\dfrac{\Delta p}{p_1}+1\right) = 2500$ К; $\Delta Q = \dfrac{i}{2}\cdot V\Delta p = 16{,}5$ кДж; $A = 0$.

4.3.10. Необходимо сжать V_1 = 100 л воздуха до объема V_2 = 20 л. Во сколько раз работа $A_{из}$ изотермического сжатия меньше работы $A_{ад}$ адиабатного сжатия? Воздух считать идеальным двухатомным газом.

Ответ: $\dfrac{A_{ад}}{A_{из}} = \dfrac{\left[1-\left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1}\right]}{(\gamma-1)\cdot\ln\left(V_2/V_1\right)} = 1{,}4$.

4.3.11. Идеальный двухатомный газ расширяется адиабатно. При этом его температура уменьшается на ΔT = 54 К. Найдите совершенную газом работу A. Масса газа m = 12 кг, масса одного моля газа M = 28 г.

Ответ: $A = \dfrac{m}{M}\cdot\dfrac{R\Delta T}{\gamma-1} = 480{,}8$ кДж.

4.3.12. Один моль идеального многоатомного газа, имевший температуру T_1 = 290 К, был адиабатно сжат до $V_2 = 0{,}1V_1$ своего первоначального объема V_1. Определите изменение внутренней энергии ΔU газа, работу A, затраченную на его сжатие, и температуру T_2 газа после сжатия.

Ответ: $\Delta U = -A = -\dfrac{RT_1}{\gamma-1}\left[1-\left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1}\right] = 8310$ Дж; $T_2 = T_1\cdot\left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1} = 620$ К.

4.3.13. Для нагревания V_1 = 5 м^3 идеального двухатомного газа на ΔT = 220 К при постоянном давлении p = 0,094 МПа потребовалось ΔQ = 1,3 МДж теплоты. Найдите изменение внутренней энергии ΔU газа и его первоначальную температуру T_1.

Ответ: $\Delta U = \dfrac{i}{i+2}\cdot\Delta Q = 0{,}93$ МДж; $T_1 = \dfrac{i+2}{2}\cdot\dfrac{pV_1}{\Delta Q}\cdot\Delta T = 278$ К.

4.3.14. Водороду (H_2), нагретому на ΔT = 297 К при постоянном давлении, было сообщено ΔQ = 5,3 МДж теплоты. Определите массу m газа и совершенную им работу A.

Ответ: $m = \dfrac{2}{i+2}\cdot\dfrac{M\Delta Q}{R\Delta T} = 1{,}23$ кг; $A = \dfrac{m}{M}R\Delta T = 1{,}51$ МДж.

4.3.15. Один моль идеального двухатомного газа ($\gamma = C_p/C_V = 1{,}4$), занимавший при температуре $T_1 = 273$ К объем $V_1 = 22{,}4$ л, адиабатно сжимают до объема $V_2 = 11{,}2$ л. После чего газ изотермически расширяется до первоначального объема V_1. Найдите конечную температуру газа T_2, изменение его внутренней энергии ΔU и количество подведенной теплоты ΔQ.

Ответ: $T_2 = T_1 \cdot \left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1} = 360$ К; $\Delta U = \dfrac{i}{2} \cdot R\left(T_2 - T_1\right) = 1807$ Дж;

$\Delta Q = RT_2 \ln\left(V_1/V_2\right) = 2073$ Дж.

4.3.16. В стальном цилиндре с легко подвижным поршнем находится идеальный газ. К газу было подведено $\Delta Q = 5$ кДж теплоты. При этом газ совершил работу $A = 1433$ Дж. Масса одного моля газа $M = 29$ г. Определите удельную теплоемкость c_p газа при постоянном давлении.

Ответ: $c_p = \dfrac{R\Delta Q}{AM} = 999{,}8$ Дж/(кг·К).

4.3.17. Водород (H_2) изобарно нагрели на $\Delta T = 100$ К. Масса газа равна $m = 20$ кг. Найдите совершенную газом работу A и количество подведенной к нему теплоты ΔU.

Ответ: $A = \dfrac{m}{M} R\Delta T = 8{,}31$ МДж; $\Delta Q = \dfrac{i+2}{2} \cdot A = 29{,}1$ МДж.

4.3.18. Для нагревания идеального газа на $\Delta T_1 = 50$ К при постоянном давлении требуется $\Delta Q_1 = 670$ Дж теплоты. При охлаждении того же количества газа на $\Delta T_2 = 100$ К выделяется количество теплоты $\Delta Q_2 =$ $= 1005$ Дж. Определите число i степеней свободы молекулы этого газа.

Ответ: $i = 2Q_2\Delta T_1 / \left(Q_1\Delta T_2 - Q_2\Delta T_1\right) = 6$.

4.3.19. В стальном баллоне объемом $V = 2$ л при температуре $T_1 =$ $= 273$ К находится смесь азота с аргоном. Число молекул каждого из газов одинаково. Давление в баллоне $p = 10^5$ Па. Найдите количество теплоты ΔQ, необходимое для нагревания этой смеси на $\Delta T = 100$ К.

Ответ: $\Delta Q = \left(i_{\mathrm{Ar}} + i_{\mathrm{N_2}}\right) \cdot \dfrac{pV\Delta T}{4T_1} = 146{,}5$ Дж.

4.3.20. В стальном баллоне при температуре $°t = 27$ °С и давлении $p = 0{,}1$ МПа находится $m = 0{,}2$ кг гелия. После нагревания давление в баллоне возросло в $n = 5$ раз. Найдите объем V баллона и количество теплоты ΔQ, сообщенной газу.

Ответ: $V = \dfrac{m}{M} \cdot \dfrac{RT}{p} = 1{,}25$ м^3; $\Delta Q = \dfrac{i}{2}\left(n-1\right) pV = 747{,}9$ кДж.

4.3.21. Идеальный двухатомный газ находится в стальном баллоне емкостью $V = 0{,}1$ м^3 под давлением $p_1 = 0{,}5$ МП и при температуре $T_1 = 290$ К. После нагревания давление газа возросло втрое ($n = 3$). Найдите температуру T_2 газа после нагревания и количество подведенной к газу теплоты ΔQ.

Ответ: $T_2 = nT_1 = 870\ \text{К}; \quad \Delta Q = \dfrac{i}{2} \cdot (n-1)\, p_1 V = 250\ \text{кДж}$

4.3.22. Четыре моля ($\nu = 4$) идеального газа при постоянном объеме охладили на $\Delta T = 100$ К. При этом от газа было взято $\Delta Q = 4986$ Дж теплоты. Найдите число i степеней свободы молекул газа и уменьшение его внутренней энергии ΔU.

Ответ: $i = \dfrac{2\Delta Q}{\nu R \Delta T} = 3; \quad \Delta U = \Delta Q = 4986\ \text{Дж}$.

4.3.23. В стальном баллоне объемом $V = 2$ л находится $m = 12$ г азота (N_2) при температуре $T_1 = 283$ К. После нагревания давление в баллоне возросло до $p_2 = 1{,}33$ МПа Найдите температуру T_2 газа после нагревания и количество сообщенной ему теплоты ΔQ.

Ответ: $T_2 = \dfrac{M}{m} \cdot \dfrac{p_2 V}{R} = 747\ \text{К}; \;\; \Delta Q = \dfrac{i}{2} \cdot \dfrac{m}{M} R \Delta T = 4{,}15\ \text{кДж}$.

4.3.24. В стальном баллоне находится смесь $m_1 = 3$ г углекислого газа (CO_2) и $m_2 = 4$ г азота (N_2). Найдите их удельную теплоемкость c_V.

Ответ: $c_V = \dfrac{R}{2(m_1 + m_2)} \cdot \left(i_1 \dfrac{m_1}{M_1} + i_2 \dfrac{m_2}{M_2} \right) = 667\ \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

4.3.25. Азот (N_2) массой $m = 1$ кг занимал объем $V_1 = 0{,}5$ л при температуре $T_1 = 300$ К. В результате адиабатного сжатия давление газа возросло втрое ($p_2/p_1 = 3$). Найдите конечный объем V_2 газа, конечную температуру T_2 и изменение внутренней энергии ΔU.

Ответ: $V_2 = V_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0{,}228\ \text{м}^3; \quad T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 411\ \text{К}$;

$\Delta U = \dfrac{i}{2} \cdot \dfrac{m}{M} R (T_2 - T_1) = 82{,}4\ \text{кДж}$.

5. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Термический КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом холодильнику; A – работа, совершенная за цикл.

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – абсолютная температура нагревателя; T_2 – абсолютная температура холодильника.

Примечание. Изотермический, изобарный, изохорный и адиабатический процессы идеального газа подробно изложены в разделе 11 «Первое начало термодинамики». Знание этих процессов необходимо для успешного решения задач этого раздела.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Тепловая машина, работающая по циклу Карно (рис. 5.1), в качестве рабочего тела использует воздух (i = 5), который при нормальных условиях (давление $p_1 = 10^5$ Па, температура T_1 = 273 К) занимает объем V_1 = 1 л, а после изотермического и адиабатического расширения объемы равны V_2 = 3 л и V_3 = 5 л. Найдите работу A_i, совершаемую газом на каждом участке цикла, полную работу A, совершаемую за весь цикл, и КПД цикла.

Дано:
$p_1 = 1\cdot10^5$ Па
T_1 = 273 К
$V_1 = 1\cdot10^{-3}$ м^3
$V_2 = 3\cdot10^{-3}$ м^3
$V_3 = 5\cdot10^{-3}$ м^3
$i = 5$

A_i – ? A – ?
η – ?

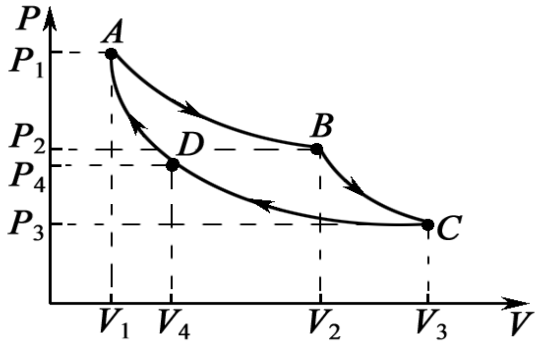

Рис. 5.1

Решение: Цикл Карно (рис. 5.1) состоит из двух изотерм (*AB* и *CD*) и двух адиабат (*BC* и *DA*).

$$p_1V_1 = \nu RT_1 \;\;\Rightarrow\;\; \nu = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 273} = 0,044 \text{ моль}. \qquad (1)$$

Работа при изотермическом расширении газа *AB* (см. раздел «Первое начало термодинамики») равна

$$A_1 = RT_1\nu \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} \approx 110 \text{ Дж}. \qquad (2)$$

Найдем температуру T_2 из уравнения адиабаты (рис. 5.1) для процесса *BC*:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}; \quad T_2 = T_1\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 273 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{0,4} = 223 \text{ К}.$$

Работа при адиабатическом расширении газа *BC* равна

$$A_2 = \frac{RT_1}{\gamma-1}\nu\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}\right],$$

или

$$A_2 = \frac{RT_1}{\gamma-1}\nu\left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right] = \frac{8,31 \cdot 273}{1,4-1} \cdot 0,044 \cdot \left(1 - \frac{223}{273}\right) = 46 \text{ Дж}, \qquad (3)$$

где $\gamma = (i+2)/i = (5+2)/5 = 1,4$ – показатель адиабаты.

Из уравнения адиабатического процесса *DA* найдем объем V_4 газа после изотермического сжатия:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1}; \quad V_4 = V_1\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1 \cdot 10^{-3}\left(\frac{273}{223}\right)^{2,5} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Тогда работа при изотермическом сжатии газа С*D* равна

$$A_3 = RT_2\nu \cdot \ln\frac{V_4}{V_3} = 8,31 \cdot 223 \cdot 0,044 \cdot \ln\frac{1,67}{5} = -89 \text{ Дж}. \qquad (4)$$

Работа при адиабатическом сжатии газа *DA* равна

$$A_4 = \frac{RT_2}{\gamma-1}\nu\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{8,31 \cdot 223}{1,4-1} \cdot 0,044 \cdot \left(1 - \frac{273}{223}\right) = -46 \text{ Дж}. \qquad (5)$$

С учетом (2) – (5), работа за весь цикл

$$A = \sum_{i=1}^{4} A_i = 110 + 46 - 89 - 46 = 21 \text{ Дж}.$$

КПД цикла Карно равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{223}{273} = 0{,}18.$$

Ответ: $A_1 = 110$ Дж; $A_2 = 46$ Дж; $A_3 = -89$ Дж;
$A_4 = -46$ Дж; $A = 21$ Дж; $\eta = 0{,}18$.

Задача 2. Найдите КПД идеальной паровой машины, цикл работы которой приведен на рис. 5.2: *AB* – изохорное увеличение давления в цилиндре при поступлении пара из котла; *BC* – изобарное увеличение объема при движении поршня; *CD* – адиабатическое увеличение объема при прекращении доступа пара в цилиндр; *DE* – изохорное падение давления при открытии клапана и выходе пара в холодильник; *EA* – изобарное уменьшение объема при выталкивании пара из цилиндра поршнем.

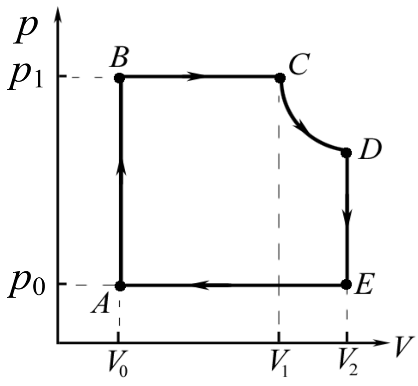

Рис. 5.2

Паровая машина расходует за один цикл m = 1 г топлива с удельной теплотой сгорания q = 15,3 МДж/кг. Начальный объем V_0 = 0,2 л, V_1 = 1,2 л, V_2 = 2,4 л. Начальное давление равно атмосферному p_0 = 0,1 МПа, давление пара в котле p_1 = 1 МПа, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}3$.

Дано:
$m = 1\cdot10^{-3}$ кг
$q = 1{,}53\cdot10^{7}$ Дж/кг
$V_0 = 0{,}2\cdot10^{-3}$ м^3
$V_1 = 1{,}2\cdot10^{-3}$ м^3
$V_2 = 2{,}4\cdot10^{-3}$ м^3
$p_0 = 1\cdot10^{5}$ Па
$p_1 = 1\cdot10^{6}$ Па
$\gamma = 1{,}3$

η – ?

Решение: Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины равен

$$\eta = A/Q,$$

где A – работа, совершенная машиной за один цикл; $Q = mq$ – количество теплоты, выделяющееся при сгорании топлива.

Из рис. 5.2 видно, что работа A за цикл равна сумме работ на каждом участке цикла, т. е.

$$A = A_{BC} + A_{CD} + A_{DE} + A_{EA} + A_{AB}.$$

В изохорных процессах:

$$A_{DE} = 0,\ \ A_{AB} = 0.$$

Тогда

$$A = A_{BC} + A_{CD} + A_{EA}.$$

где $A_{BC} = p_1\left(V_1 - V_0\right)$; $A_{CD} = \dfrac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$; $A_{EA} = p_0\left(V_0 - V_2\right)$.

Отсюда

$$A = p_1(V_1 - V_0) + \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] + p_0\left(V_0 - V_2\right) = .$$

$$= 10^6(1{,}2 - 0{,}2)\cdot 10^{-3} + \frac{10^6\cdot 1{,}2\cdot 10^{-3}}{1{,}3-1}\left[1 - \left(\frac{1{,}2}{2{,}4}\right)^{0{,}3}\right] + 10^5\cdot\left(0{,}2 - 2{,}4\right)\cdot 10^{-3} = 1{,}53 \text{ кДж}.$$

КПД идеальной паровой машины равен

$$\eta = \frac{A}{mq} = \frac{1{,}53\cdot 10^3}{1\cdot 10^{-3}\cdot 15{,}3\cdot 10^6} = 0{,}10.$$

Ответ: $\eta = 0{,}10$.

Задача 3. Найдите КПД η цикла двигателя Дизеля, приведенного на рис. 5.3: *AB* – всасывание воздуха в цилиндр при давлении, равном атмосферному; *BC* – адиабатическое сжатие воздуха, впрыск топлива и его воспламенение; *CD* – изобарное расширение; *DE* – адиабатическое расширение; *EB* – изохорное падение давления при открытии клапана; *BA* – выталкивание поршнем остатков сгорания.

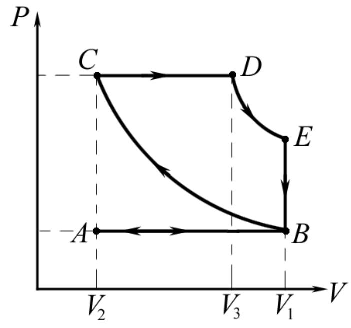

Рис. 5.3

Решение: В цикле, изображенном на рис. 5.3, теплота Q_1 подводится на участке *CD* при p = const, поэтому

$$Q_1 = C_p(T_3 - T_2),$$

где T_2 и T_3 – температуры в начале и конце изобарного расширения.

Теплота Q_2 отводится на участке *EB* при V = const, поэтому

$$Q_2 = C_V(T_4 - T_1),$$

где T_4 и T_1 – температуры в начале и конце процесса *EB*.

КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_V}{C_P}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2},$$

где $\gamma = C_p/C_V$ – показатель адиабаты.

Поделим числитель и знаменатель полученного выражения на T_2:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{T_4/T_2 - T_1/T_2}{T_3/T_2 - 1}. \quad (1)$$

Поскольку процесс *CD* – изобарный при m = const, то

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{V_2}{V_3}; \quad T_3 = T_2\frac{V_3}{V_2} = \alpha T_2; \quad \frac{T_3}{T_2} = \alpha. \quad (2)$$

где $\alpha = V_3/V_2$ – степень изобарного расширения.

Процессы BC и DE адиабатические. Для процесса DE запишем

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}; \qquad T_4 = T_3\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}, \tag{3}$$

Из рис. 5.3 для состояния E имеем $V_4 = V_1$. Тогда

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_3}{V_1}\cdot\frac{V_2}{V_2} = \frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{V_2}{V_1} = \frac{\alpha}{\beta}; \qquad \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma-1}, \tag{4}$$

где $\beta = V_1/V_2$ – степень адиабатического сжатия.

Подставляя (2) и (4) в (3), найдем

$$T_4 = T_3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma-1} = T_2\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma-1}; \quad \frac{T_4}{T_2} = \alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma-1}. \tag{5}$$

Аналогично можно записать для процесса BC

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \beta^{\gamma-1}; \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\beta^{\gamma-1}}. \tag{6}$$

Подставляя (2), (5) и (6) в (1), получим

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma-1} - \frac{1}{\beta^{\gamma-1}}}{\alpha-1} = 1 - \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\alpha^{\gamma}-1}{\beta^{\gamma-1}(\alpha-1)}.$$

Например, при $\gamma = 1{,}4$; $\alpha = 3$; $\beta = 4$ КПД $\eta = 0{,}25$.

Задача 4. Определите часовой перерасход Δm бензина на трение двигателя внутреннего сгорания (ДВС), если он развивает мощность $N = 50$ кВт. Фактический КПД двигателя $\eta_ф = 0{,}45$, степень сжатия $\beta = V_1/V_2 = 10$. Удельная теплота сгорания бензина $q = 45$ МДж/кг, $\gamma = 1{,}4$. Теоретический расход топлива $m_т = 6{,}7$ кг/ч при заданной мощности.

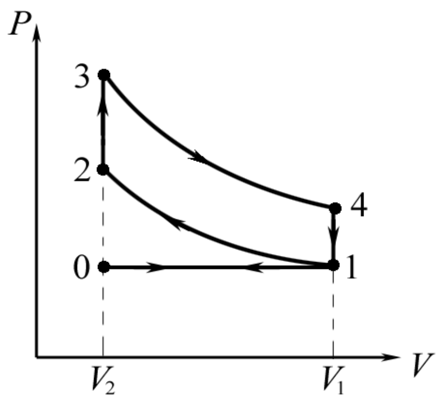

Рис. 5.4

Цикл Отто приведен на рис. 5.4:
0 – 1 – всасывание рабочей смеси;
1 – 2 – адиабатическое сжатие;
2 – 3 – изохорное возрастание давления продуктов сгорания;
3 – 4 – адиабатное расширение (рабочий ход поршня);
4 – 1 – падение давления при открытии клапана;
1 – 0 – выталкивание поршнем продуктов сгорания.

Дано:	**Решение:** Общая формула для КПД цикла:
$N = 5\cdot10^4$ Вт $t = 3600$ с $\eta_ф = 0{,}45$ $\beta = V_1/V_2 = 10$ $q = 4{,}5\cdot10^7$ Дж/кг $\gamma = 1{,}4$ $m_т = 6{,}7$ кг/ч	
$\Delta m = m_ф - m_т$ – ?	

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \qquad (1)$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом холодильнику

Теплота подводится в изохорном процессе 2–3:

$$Q_1 = C_V(T_3 - T_2).$$

Аналогично для процесса 4–1:

$$Q_2 = C_V(T_4 - T_1).$$

Тогда

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \qquad (2)$$

Процессы 3 – 4 и 1 – 2 адиабатические (рис. 5.4), поэтому

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \beta^{\gamma-1} \quad \text{и} \quad \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \beta^{\gamma-1},$$

$$T_2 = T_1\beta^{\gamma-1}; \qquad T_3 = T_4\beta^{\gamma-1}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), имеем

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_4 - T_1}{T_4\beta^{\gamma-1} - T_1\beta^{\gamma-1}} = \frac{1}{\beta^{\gamma-1}}. \qquad (4)$$

Тогда из (1), с учетом (4), найдем теоретический КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{1}{\beta^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{10^{0,4}} = 0{,}6.$$

Фактический КПД определяется формулой $\eta_ф = \dfrac{Nt}{mq}$

$$\eta_ф = \frac{A}{m_с t\cdot q} = \frac{Nt}{m_с qt} = \frac{N}{m_с q},$$

где $m_с$ – расход топлива в секунду (кг/с).

Отсюда фактический расход двигателем топлива в секунду:

$$m_с = \frac{N}{\eta_ф q} = \frac{5\cdot10^4}{0{,}45\cdot4{,}5\cdot10^7} = 2{,}47\cdot10^{-3}\ \text{кг/с};\ \ m_ф = 8{,}9\ \text{кг/ч}.$$

Следовательно, потери бензина на трение в двигателе за час:

$$\Delta m = m_ф - m_т = 8{,}9 - 6{,}7 = 2{,}2\ \text{кг/ч}.$$

Ответ: $\Delta m = 2{,}2$ кг/ч.

Задача 5. Для отопления дома установлен идеальный, работающий по циклу Карно, тепловой насос мощностью $N = 150$ кВт. При этом требуется поддерживать температуру $°t_1 = 50°C$ при наружной температуре $°t_2 = 0°C$. Найдите необходимую механическую мощность $N_м$ и коэффициент ε использования энергии (КИЭ) теплового насоса.

Дано:
$N = 150$ кВт
$T_1 = 323$ К
$T_2 = 273$ К
$N_м$ – ? ε – ?

Решение: Используем для расчета схему обратного цикла Карно (рис. 5.5). Определим КИЭ ε в расчете на один моль (ν = 1). Для изотермического сжатия BA при более высокой температуре T_1 машина получает механическую работу и отдает столько же теплоты:

$$A_{BA} = -\Delta Q_{BA} = RT_1 \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (1)$$

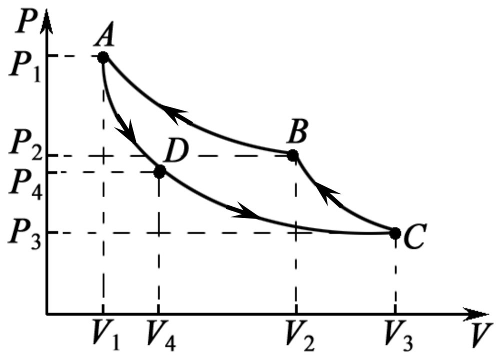

Рис. 5.5

Во время изотермического расширения DC (рис. 5.5) у окружающей среды при температуре T_2 отнимается количество теплоты, равное совершаемой над средой работе:

$$\Delta Q_{DC} = -A_{DC} = RT_2 \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (2)$$

Здесь учтено, что из уравнения адиабаты $T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{const}$ и рис. 5.5 следует отношение $V_2/V_1 = V_3/V_4$.

Полная механическая работа определяется площадью фигуры, ограниченной изотермами и адиабатами.

При адиабатических процессах $\Delta Q = 0$, следовательно

$$A = A_{BA} + A_{DC} = R(T_1 - T_2) \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (3)$$

По определению, КИЭ называется величина $\varepsilon = \Delta Q_{BA}/A$. С учетом (1) и (3), получим

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_{BA}}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{323}{323 - 273} = 6,46.$$

Для работы теплового насоса мощностью N требуется механическая мощность $N_м$. Запишем выражение для ε в виде

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_{BA}}{A} = \frac{N \cdot t}{N_м \cdot t} = \frac{N}{N_м}.$$

Отсюда $$N_м = \frac{N}{\varepsilon} = \frac{150}{6,46} = 23,2 \text{ кВт}.$$

Ответ: $N_м = 23,2$ кВт.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Тепловая машина работает по циклу Карно. Найдите КПД цикла и работу при изопроцессах, если объемы 1 моля воздуха, находящегося при нормальных условиях, в изотермических процессах изменяются в 2 раза, а в адиабатических – в 1,5 раза.

Ответ: $\eta = (1 - T_2/T_1) = 0{,}15$; $A_1 = RT_1 \dfrac{m}{M} \cdot \ln \dfrac{V_2}{V_1} = 1572$ Дж;

$$A_2 = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{M}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 850{,}7 \text{ Дж}; \; A_3 = RT_2 \frac{m}{M} \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} = -1330 \text{ Дж};$$

$$A_4 = \frac{RT_2}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{M}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = -850{,}7 \text{ Дж}.$$

2. Паровая машина расходует за 1 ч массу m = 36 кг дров с удельной теплотой сгорания q = 15 МДж/кг и совершает 5 циклов в секунду. Найдите КПД машины, если начальное давление и объем равны $p_0 = 10^5$ Па, V_0 = 1 л, объем цилиндра V_2 = 10 л, объем изобарного расширения V_1 = 5 л. Давление пара в котле p_1 = 1,5 МПа, показатель адиабаты γ = 1,3.

Ответ: $\eta = A/(mq) = 0{,}21$.

3. Найдите КПД двигателя Дизеля, если температура при изобарном расширении (см. процесс CD, рис. 5.3) изменяется от T_2 = 750 К до T_3 = 1000 К, а при изохорном охлаждении (см. процесс EB, 12.3) от T_4 = 500 К до T_1 = 300 К. Показатель адиабаты γ = 1,4.

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{\gamma\left(T_3 - T_2\right)} = 0{,}43$.

4. Найдите КПД карбюраторного двигателя внутреннего сгорания (цикл Отто, см. рис. 5.4), если степень сжатия $\beta = V_1/V_2$ горючей смеси, состоящей из бензина и воздуха, равна 10.

Ответ: $\eta = 1 - \beta^{1-\gamma} = 0{,}6$, где $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$, i = 5.

5. Найдите КИЭ холодильной машины, если при наружной температуре $°t_1$ = 50 °С морозильник должен иметь температуру $°t_2$ = –20 °С. Определите механическую мощность N, необходимую для отвода мощности N_1 = 1 ккал/мин.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{T_1}{T_1 - T_2} = 4{,}6$; $N = \dfrac{N_1}{\varepsilon} = 15{,}2$ Вт.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

5.1.1. Определите давление и температуру воздуха при совершении цикла Карно в точках пересечения изотерм и адиабат, если максимальное давление и объем равны p_1 = 1 МПа и V_3 = 6 м^3, минимальные p_3 = 0,1 МПа и V_1 = 1 м^3. Масса воздуха m = 10 кг, показатель адиабаты γ = 1,4.

Ответ: $T_1 = T_2 = \dfrac{p_1V_1M}{mR} = 349$ К; $V_2 = \left(\dfrac{p_3V_3^{\gamma}}{p_1V_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1{,}68$ м^3; $p_2 = \dfrac{p_1V_1}{V_2} \approx 0{,}6$ МПа;

$T_3 = T_4 = \dfrac{p_3V_3M}{mR} = 210$ К; $V_4 = \left(\dfrac{p_1V_1^{\gamma}}{p_3V_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 3{,}59$ м^3; $p_4 = \dfrac{p_3V_3}{V_4} \approx 0{,}17$ МПа.

5.1.2. Найдите давление и молярный объем в начале и конце адиабатического сжатия цикла Карно, если температуры холодильника и нагревателя соответственно равны T_2 = 300 К и T_1 = 1000 К, давление в начальной точке p_4 = 0,1 МПа, показатель адиабаты γ = 1,4.

Ответ: $p_1 = RT_1/V_1$ = 6,7 МПа; $V_4 = RT_2/p_4$ = 25 м^3/кмоль;

$$V_1 = \left(\frac{p_4V_4^{\gamma}}{RT_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1{,}24 \text{ м}^3/\text{кмоль}.$$

5.1.3. Найдите давление и молярный объем в начале и конце адиабатического расширения цикла Карно, если температуры нагревателя и холодильника равны T_1 = 1000 К и T_2 = 300 К, давление в начальной точке p_2 = 10^6 Па, показатель адиабаты γ = 1,4.

Ответ: $V_2 = RT_1/p_2$ = 8,3 м^3/кмоль; $p_3 = RT_2/V_3$ = 1,5·10^4 Па;

$$V_3 = \left(\frac{p_2V_2^{\gamma}}{RT_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 166{,}7 \text{ м}^3/\text{кмоль}.$$

5.1.4. Найдите величину работы, совершаемой газом при расширении в цикле Карно, если температура нагревателя T_1 = 1000 К, холодильника T_2 = 300 К, показатель адиабаты γ = 1,4.

Ответ: $A = \dfrac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} = 1{,}45 \cdot 10^7$ Дж/кмоль.

5.1.5. Холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, использует воду при T_2 = 273 К в качестве холодильника и воду при T_1 = 373 К в качестве нагревателя. Сколько воды замерзнет в холодильнике, если в пар превратился V = 1 л воды в кипятильнике?

Ответ: $m = T_2V\rho r/(T_1\lambda)$ = 4,94 кг.

5.1.6. Температура холодильника в цикле Карно T_2 = 300 К. Определите, во сколько раз n увеличится КПД цикла, если температура нагревателя увеличилась в 2 раза и стала больше температуры холодильника на 500 К.

Ответ: $n = \dfrac{2T_1 - T_2}{2(T_1 - T_2)} = 2{,}5$.

5.1.7. При совершении цикла Карно двухатомный идеальный газ увеличивается в объеме при изотермическом расширении в три раза. Работа, совершаемая за цикл, равна A = 10 кДж. Вычислить работу, совершаемую газом, в процессе адиабатического сжатия.

Ответ: $A_{41} = -\dfrac{A}{(\gamma - 1)\cdot \ln(V_2/V_1)} = -22{,}75$ кДж.

5.1.8. Вычислить работу A, совершаемую двухатомным идеальным газом в цикле Карно, если объем изотермического расширения изменяется от V_1 = 1 м^3 до V_2 = 2 м^3. Работа, совершаемая в процессе адиабатического сжатия, равна A_{41} = 25 кДж.

Ответ: $A = A_{41}(\gamma - 1)\cdot \ln(V_2/V_1) = 6{,}9$ кДж.

5.1.9. Одноатомный идеальный газ совершает цикл Карно. Работа A, совершаемая за цикл, равна 8 кДж, степень изотермического расширения равна двум. Найдите работу, совершаемую газом, в процессе адиабатического сжатия.

Ответ: $A_{41} = -\dfrac{A}{(\gamma - 1)\cdot \ln(V_2/V_1)} = -17{,}44$ кДж.

5.1.10. Цикл Карно совершается многоатомным идеальным газом при изменении объема в изотермическом расширении от V_1 = 0,1 м^3 до V_2 = 0,2 м^3. Найдите работу, совершаемую газом за цикл, если работа адиабатического сжатия равна A_{41} = 7 кДж.

Ответ: $A = A_{41}(\gamma - 1)\cdot \ln(V_2/V_1) = 30{,}4$ кДж.

5.1.11. Найдите теплоемкость идеального газа, совершающего цикл Карно, если работа за цикл равна 9 кДж, степень изотермического расширения V_2/V_1 = 3, работа адиабатического сжатия равна –20,5 кДж.

Ответ: $C_V = R\cdot \ln(V_2/V_1)\cdot (A_{41}/A) = 20{,}8$ Дж/(моль·К).

5.1.12. Какой идеальный газ используется при проведении цикла Карно, если работа за цикл равна A = 6 кДж, объем газа при изотермическом расширении изменяется от V_1 = 20 л до V_2 = 40 л, работа адиабатического сжатия равна A_{41} = 13,1 кДж.

Ответ: $\gamma = 1 + \dfrac{A}{A_{41}\ln(V_2/V_1)} = 1{,}66$; одноатомный газ.

5.1.13. КПД цикла Карно $\eta = 0{,}6$, работа, совершаемая при изотермическом расширении $A_{12} = 10$ кДж. Найдите работу, совершаемую при изотермическом сжатии.

Ответ: $A_{34} = A_{12}(1 - \eta) = 40$ кДж.

5.1.14. Определите работу, совершенную над 1 молем воздуха в цикле Карно, если степень изотермического и адиабатического сжатия равна двум, температура холодильника $T_2 = 300$ К.

Ответ: $Q_2 + A_{41} = RT_2 \left\{ \ln\frac{V_3}{V_4} + \frac{1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1}\right]\right\} = 3216$ Дж .

5.1.15. Определите работу, совершаемую 1 молем воздуха в цикле Карно, если степень изотермического и адиабатического расширения равна двум, температура нагревателя $T_1 = 400$ К.

Ответ: $Q_2 + A_{23} = RT_1 \left\{ \ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}\right]\right\} = 4288$ Дж .

5.1.16. Определите работу A, совершенную одним молем воздуха в цикле Карно, если объем газа увеличился в $n = 4$ раза при получении в изотермическом процессе $Q_1 = 5650$ Дж теплоты. Первоначально газ находится при нормальных условиях ($p_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К).

Ответ: $A = Q_1 - \frac{5RT_0}{2}\left\{\frac{\exp\left[Q_1(\gamma - 1)/(RT_0)\right]}{n^{\gamma-1}} - 1\right\} = 2478$ Дж .

5.1.17. При проведении цикла Карно $\nu = 10$ молей воздуха объемом $V_1 = 0{,}1$ м^3 получили в изотермическом процессе $Q_1 = 4545$ Дж теплоты. Определите объем V_2 промежуточного состояния газа, если первоначально газ находился в нормальных условиях ($T_1 = 273$ К).

Ответ: $V_2 = V_1 \exp\left(\frac{Q}{\nu RT_1}\right) = 0{,}122$ м^3.

5.1.18. При проведении цикла Карно $\nu = 1$ моль воздуха с температурой $T_2 = 273$ К увеличился в объеме в 4 раза. Определите температуру T_1, если в изотермическом процессе газ получил $Q_1 = 5670$ Дж теплоты.

Ответ: $T_1 = T_2\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} \cdot \exp\left[\frac{Q(\gamma-1)}{\nu RT_2}\right] = 425$ К .

5.1.19. Найдите КПД η цикла Карно, если температура холодильника $T_2 = 273$ К, количество тепла, полученного от нагревателя с температурой T_1, Q_1 = 5 кДж, степень изотермического и адиабатного расширения одного моля воздуха $n = V_2/V_1 = 4$.

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{n^{\gamma-1}}{\exp\left[Q_1(\gamma-1)/(\nu R T_2)\right]} = 0,28$.

5.1.20. Найдите КПД η цикла Карно, если температура холодильника T_2 = 273 К, количество тепла, полученного от нагревателя, Q_1 = 6000 Дж, давление при изотермическом и адиабатном расширении изменяется в $\alpha = p_1/p_2 = 4$.

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{\alpha^{\gamma-1}}{\exp\left[Q_1(\gamma-1)/(\nu R T_2)\right]} = 0,4$.

5.1.21. Определите наименьший объем газа V_1, совершающего цикл Карно, если объем газа в процессах расширения и сжатия меняется следующим образом: V_2 = 500 л; V_3 = 850 л; V_4 = 170 л.

Ответ: $V_1 = V_2V_4/V_3$ = 100 л.

5.1.22. Двухатомный газ при адиабатическом расширении в цикле Карно изменяет объем от V_2 = 2 л до V_3 = 4 л. Найдите КПД η цикла.

Ответ: $\eta = 1 - (V_2/V_3)^{\gamma-1} = 0,24$.

5.1.23. Холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу A = 50 кДж, при температурах холодильника $°t_1$ = –5 °С и окружающего воздуха $°t_2$ = 27 °С. Найдите количество теплоты Q_1, переданное машиной атмосфере.

Ответ: $Q_1 = AT_1/(T_2 - T_1)$ = 456 кДж.

5.1.24. Дом отапливается тепловым насосом, работающим по обратному циклу Карно. Температура в доме $°t_1$ = 20°С, окружающего воздуха $°t_2$ = –20°С. Во сколько n раз количество теплоты, получаемой домом от сгорания угля в печке, меньше количества теплоты, переданной тепловым насосом с паровой машиной с КПД η = 0,27, потребляющей ту же массу угля?

Ответ: $n = \eta \cdot \dfrac{T_1}{T_1 - T_2} = 2$.

5.1.25. Найдите коэффициент преобразования ε холодильника, работающего по обратному циклу Карно, если при работе по прямому циклу его КПД η = 0,25.

Ответ: $\varepsilon = (1 - \eta)/\eta = 3$.

5.2.1. Мощность паровой машины N = 10 кВт, объем цилиндра V_2 = = 4 л, объем V_0 = 1 л, объем V_1 = 3 л. Давление пара в котле p_1 = 1 МПа, в холодильнике p_0 = 0,1 МПа. Найдите число циклов, которые делает машина за t = 1 с, если показатель адиабаты γ = 1,3.

Ответ: $n = \dfrac{Nt}{p_1(V_1 - V_0) + \dfrac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] - p_0(V_2 - V_0)} = 4$.

5.2.2. Определите мощность паровой машины, делающей n = 10 циклов за t = 1 с, если объем цилиндра V_2 = 10 л, объем V_0 = 1 л, объем V_1 = 9 л, давление пара в котле p_1 = 1,5 МПа, в холодильнике $p_0 = 10^5$ Па. Показатель адиабаты γ = 1,3.

Ответ: $N = \dfrac{n}{t} \cdot \left\{ p_1(V_1 - V_0) + \dfrac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] - p_0(V_2 - V_0) \right\} = 125$ кВт.

5.2.3. Определите мощность N паровой машины, если давление пара в котле p_1 = 1,5 МПа, объем изобарного расширения V_1 = 10 л, объем V_0 = 1 л, температуры котла и холодильника °t_1 = 200 °С и °t_2 = 50 °С соответственно. Машина делает n = 5 циклов за t = 1 с, показатель адиабаты γ = 1,3.

Ответ: $N = \dfrac{n}{t} \cdot \left\{ p_1(V_1 - V_0) + \dfrac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] - p_0(V_2 - V_0) \right\} = 130$ кВт.

5.2.4. Найдите объем V_2 цилиндра паровой машины мощностью N = 10 кВт, совершающей n = 1 цикл за t = 1 с, если давление пара в котле p_1 = 2 МПа, в холодильнике p_0 = 0,1 МПа, объем изобарного расширения V_1 = 5 л, объемом V_0 пренебречь. Показатель политропы m = 2.

Ответ: $V_2 = \dfrac{(2p_1V_1 - Nt/n) \pm \sqrt{{}_1(2p_1V_1 - Nt/n)^2 - 4p_0p_1V_1^2}}{2p_0} = 9$ л или 5,3 л.

5.2.5. Найдите объем изобарного расширения в цикле паровой машины мощностью 10 кВт, совершающей n = 120 циклов за t = 1 мин, имеющей объем цилиндра V_2 = 10 л, если давление пара в котле p_1 = 2 МПа, в холодильнике p_0 = 0,1 МПа. Показатель политропы m = 2. Объемом V_0 пренебречь.

Ответ: $V_1 = V_2\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{Nt}{np_1V_2} - \dfrac{p_0}{p_1}}\right) = 1{,}63$ л.

5.2.6. Мощность паровой машины N = 10 кВт, площадь поршня S = 0,01 м^2, ход поршня h = 0,5 м. Изобарный процесс происходит при движении поршня на половину его хода. Давление пара в котле p_1 = = 2 МПа, в холодильнике p_0 = 0,1 МПа. Объемом V_0 пренебречь. Сколько циклов n за t = 60 с делает машина, если показатель адиабаты γ = 1,3?

Ответ: $$n = \frac{Nt}{\frac{p_1Sh}{2} + \frac{p_1Sh}{2(\gamma-1)}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1}\right] - p_0Sh} = 98.$$

5.2.7. Найдите давление p_1 в котле паровой машины, работающей с частотой n = 50 Гц, мощностью N = 5 кВт, имеющей объем цилиндра V_2 = 1 л, объем изобарного расширения V_1 = 0,5 л, давление в холодильнике p_0 = 0,1 МПа, объемом V_0 пренебречь. Показатель адиабаты γ = 1,3.

Ответ: $$p_1 = \frac{N/n + p_0V_2}{V_1\left\{1+\frac{1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]\right\}} = 0{,}245\ \text{МПа}.$$

5.2.8. Найдите КПД η паровой машины, потребляющей за t = 1 час работы массу m = 36 кг топлива с теплотой сгорания q = 14,3 МДж/кг, и работающей с частотой n = 10 циклов за 1 с. Давление в котле p_1 = 1 МПа. Объем цилиндра V_2 = 2 л, объем изобарного расширения V_1 = 1 л, давление в холодильнике p_0 = 0,1 МПа, объемом V_0 пренебречь. Показатель адиабаты γ = 1,3.

Ответ: $$\eta = \frac{nt}{mq}\cdot\left[p_1V_1\left\{1+\frac{1}{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)\right\} - p_0V_2\right] = 0{,}1.$$

5.2.9. Определите часовой расход $(\Delta m/\Delta t)$ угля с теплотой сгорания q = 30 МДж/кг при работе паровой машины с КПД η = 0,15, объемом цилиндра V_2 = 2 л, объемом изобарного расширения V_1 = 1 л, давлением в котле p_1 = 2 МПа, делающей n = 300 циклов за t = 1 мин. Объемом V_0 пренебречь. Показатель адиабаты γ = 1,3, давление в холодильнике p_0 = 0,1 МПа.

Ответ: $$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{n}{\eta t q}\cdot\left[p_1V_1\left\{1+\frac{1}{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)\right\} - p_0V_2\right] = 0{,}0034\ \frac{\text{кг}}{\text{с}} = 12{,}2\ \frac{\text{кг}}{\text{ч}}.$$

5.2.10. Найдите расход за t = 1 ч топлива двигателя Дизеля мощностью N = 100 кВт. Степень сжатия α = 15, степень изобарного расширения $\beta = 4$, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$. Теплота сгорания мазута $q = 40$ МДж/кг.

Ответ: $m = \dfrac{Nt}{q\left[1 - \dfrac{\beta^{\gamma} - 1}{\gamma(\beta - 1)\alpha^{\gamma-1}}\right]} = 17{,}3 \text{ кг}$.

5.2.11. Найдите температуру T_2 воспламенения мазута в цилиндре двигателя Дизеля, если КПД $\eta = 0{,}5$, степень изобарного расширения $\alpha = 4$, температура воздуха $T_1 = 300$ К, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$.

Ответ: $T_2 = T_1\left(\alpha^{\gamma} - 1\right)\Big/\left[\gamma(1-\eta)(\alpha - 1)\right] = 852 \text{ К}$.

5.2.12. Найдите давление в цилиндре двигателя Дизеля, если его КПД $\eta = 0{,}5$, степень изобарного расширения $\alpha = 4$, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$, $p_0 = 0{,}1$ МПа.

Ответ: $p_1 = p_0\left[\dfrac{\alpha^{\gamma} - 1}{\gamma(1-\eta)(\alpha - 1)}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 3{,}86 \text{ МПа}$.

5.2.13. Найдите работу, совершаемую двигателем Дизеля за один цикл, если давление в цилиндре $p_1 = 4{,}5 \cdot 10^6$ Па, объем цилиндра $V_1 = 6$ л, объем изобарного расширения изменяется от $V_2 = 0{,}4$ л до $V_3 = 1{,}6$ л. Показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$.

Ответ: $A = p_1\left\{(V_3 - V_2) + \dfrac{V_3}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right] - \dfrac{V_2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right]\right\} = 9{,}8 \text{ кДж}$.

5.2.14. Определите мощность дизельного двигателя, работающего с частотой $n = 10$ Гц, если максимальное давление в цилиндре объемом $V_1 = 8$ л равно $p_1 = 5$ МПа, объем изобарного расширения изменяется от $V_2 = 0{,}5$ л до $V_3 = 2$ л. Показатель адиабаты $\gamma = 1{,}41$.

Ответ: $N = p_1 n\left\{(V_3 - V_2) + \dfrac{V_3}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right] - \dfrac{V_2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right]\right\} = 139 \text{ кВт}$.

5.2.15. Мощность N дизельного двигателя 70 кВт, давление в цилиндре объемом $V_1 = 6$ л равно $p_1 = 4$ МПа, объем изобарного расширения изменяется от $V_2 = 0{,}4$ л до $V_3 = 1{,}6$ л. Найдите число n циклов, которые делает двигатель за 1 с, если показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$.

Ответ: $n = \dfrac{N}{p_1\left\{(V_3 - V_2) + \dfrac{V_3}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right] - \dfrac{V_2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right]\right\}} = 8 \text{ с}^{-1}$.

5.2.16. Дизельный двигатель использует при работе $\nu = 0{,}1$ киломолей воздуха. Степень адиабатического сжатия $\beta = 15$, степень изобарного расширения $\alpha = 4$, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$. Найдите количество тепла, полученного газом за цикл, если в начале адиабатического сжатия температура $T_1 = 300$ К.

Ответ: $Q = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \nu R T_1 \beta^{\gamma-1} \left(\alpha - 1\right) = 7{,}85 \text{ МДж}$.

5.2.17. Найдите работу, совершаемую за один цикл, бензиновым ДВС, если объем цилиндра $V_1 = 5$ л, степень сжатия $\beta = 6$, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Ответ: $A = \dfrac{\left(p_2 - p_1\right) V_2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(V_2/V_1\right)^{\gamma-1}\right] = 2 \text{ кДж}$.

5.2.18. Мощность бензинового ДВС $N = 40$ кВт, объем цилиндра $V_1 = 4$ л, степень сжатия $\beta = 6$, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$. Найдите число n циклов, которые делает двигатель за 1 с.

Ответ: $n = \dfrac{N}{\dfrac{\left(p_2 - p_1\right) V_2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right]} = 25$.

5.2.19. Определите мощность бензинового ДВС, делающего 10 циклов в секунду, если объем цилиндра $V_1 = 2$ л, степень сжатия $\beta = 6$, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Ответ: $N = \dfrac{nmR\left(T_0 - T_3\right)\left(1 - \beta^{\gamma-1}\right)}{M\left(\gamma - 1\right)} = 8 \text{ кВт}$.

5.2.20. Бензиновый двигатель потребляет за время $t = 1$ ч массу $m_0 = 1$ кг бензина с теплотой сгорания $q = 44$ МДж/кг. Найдите потери бензина на трение и нагрев окружающей среды, если степень сжатия $\beta = 6$, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$.

Ответ: $m = m_0/\beta^{\gamma-1} = 0{,}49$ кг.

5.2.21. Диаметр цилиндра бензинового ДВС $d = 76$ мм, ход поршня $h = 16$ см. Определите V_2 камеры сжатия, если начальная температура горючей смеси $T_1 = 400$ К, конечная температура $T_2 = 680$ К. Показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$.

Ответ: $V_2 = \dfrac{\pi d^2}{4\left(T_2/T_1\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} = 0{,}26 \text{ л}$.

5.2.22. Идеальная холодильная машина мощностью N = 200 Вт находится в теплоизолированной комнате объемом V = 300 м^3, воздух в которой является нагревателем машины. Температура воздуха в комнате T_1 = 300 К, давление p = 10^5 Па, температура холодильной камеры T_2 = 250 К. Найдите время работы машины, если температура в комнате повысилась на ΔT = 1 К.

Ответ: $t = \dfrac{cpV\Delta T}{rT_1N} \cdot \left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right) = 3{,}5$ мин.

5.2.23. Система отопления в коттедже работает следующим образом: холодильная машина забирает тепло из уличного воздуха (°t_2 = 0 °С) и отдает его воде в отопительной системе (работает с помощью паровой машины при температуре котла °t_1 = 200 °С, температура воды в отопительной системе, являющейся охладителем паровой машины, °t_3 = 50 °С). Определите количество тепловой энергии Q, получаемой системой отопления, на $Q_{хим}$ = 1 Дж химической энергии топлива.

Ответ: $Q = \dfrac{T_3\left(T_1 - T_2\right)}{T_1\left(T_3 - T_2\right)} = 2{,}73$ Дж.

5.2.24. Определите работу A, совершаемую холодильной установкой, работающей по обратному циклу Карно, если из комнаты с температурой T_2 = 300 К отводится Q_2 = 10 МДж энергии за t = 1 ч в окружающую среду, температура которой T_1 = 330 К.

Ответ: $A = \dfrac{T_1 - T_2}{T_2} \cdot \dfrac{Q_2}{t} = 1$ МДж/ч.

5.2.25. Определите температуру T_1 окружающей среды и количество отводимого из комнаты теплоты Q, если температура в комнате °t_2 = 25 °С, работа A холодильной установки с коэффициентом преобразования η = 10 равна 3 МДж за t = 1 ч.

Ответ: $T_1 = T_2\left(1 + \dfrac{1}{\eta}\right) = 328$ К; $Q = \eta A\,/t$ = 30 МДж/ч.

5.3.1. Один моль двухатомного газа (i = 5) совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найдите КПД η цикла, если объем и давление увеличиваются вдвое (n = 2).

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{n + \gamma}{1 + \gamma n} = 0{,}105$, где $\gamma = (i + 2)/i$.

5.3.2. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изотерм с температурами T_1 = 546 К и T_2 = 273 К, и двух изобар ($p_1 = 2p_2$). Найдите КПД η цикла, если рабочим веществом служит воздух.

Ответ: $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1 + \left(\dfrac{i+2}{2}\right)\cdot\dfrac{(T_1 - T_2)}{\ln(p_1/p_2)}} = 0{,}142$, где $i = 5$.

5.3.3. Найдите число степеней свободы i газа, используемого в тепловой машине, работающей по циклу, состоящему из двух изотерм (T_1 = 50 К; T_2 = 300 К) и двух изобар ($p_1 = 3p_2$). КПД цикла η = 0,21.

Ответ: $i = 2\left(\dfrac{T_1 - T_2}{\eta} - T_1\right)\cdot\dfrac{\ln(p_1/p_2)}{T_1 - T_2} - 2 = 3$.

5.3.4. Определите степень сжатия газа p_1/p_2 в тепловой машине, работающей по циклу, состоящему из двух изотерм с температурами T_1 = 400 К и T_2 = 200 К и двух изобар. КПД цикла равно η = 0,22. В качестве рабочего вещества используется идеальный двухатомный газ.

Ответ: $\dfrac{p_1}{p_2} = \exp\left[\left(\dfrac{i+2}{2}\right)\cdot\dfrac{(T_1 - T_2)}{((T_1 - T_2)/\eta - T_1)}\right] = 4$, где $i = 5$.

5.3.5. Определите максимальную температуру идеального одноатомного газа, используемого в качестве рабочего тела в тепловой машине, работающей по циклу, состоящему из двух изотерм (T_2 = 300 К) и двух изобар ($p_1 = 2p_2$). КПД цикла η = 0,19.

Ответ: $T_1 = T_2\cdot\dfrac{\eta(i+2) - 2\ln(p_1/p_2)}{\eta(i+2) + 2\ln(p_1/p_2)(\eta - 1)} = 769\ \text{К}$.

5.3.6. Определите минимальную температуру T_2 идеального многоатомного газа (i = 6), используемого в качестве рабочего тела в тепловой машине, работающей по циклу, состоящему из двух изотерм (T_1 = 600 К) и двух изобар ($p_1 = 3p_2$). КПД цикла η = 0,15.

Ответ: $T_2 = T_1\left(1 - \dfrac{2\eta\ln(p_1/p_2)}{2\ln(p_1/p_2) - \eta(i+2)}\right) = 400\ \text{К}$.

5.3.7. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух адиабат. Определите КПД η цикла, если объем изменяется в V_2/V_1 = 5 раз. В качестве рабочего тела используется воздух (i = 5).

Ответ: $\eta = 1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{1-\gamma} = 0{,}47$, где $\gamma = (i + 2)/i$.

5.3.8. Определите степень сжатия V_1/V_2 в тепловой машине с циклом, состоящим из двух изохор и двух адиабат, если КПД цикла $\eta = 0{,}51$. В качестве рабочего тела используется углекислый газ ($i = 6$).

Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = (1-\eta)^{\frac{1}{1-\gamma}} = 8{,}5$, где $\gamma = (i+2)/i$.

5.3.9. Найдите число i степеней свободы газа, используемого в качестве рабочего тела в тепловой машине, работающей по циклу, состоящему из двух изохор и двух адиабат, если степень сжатия газа $n = V_1/V_2 = 6$, а КПД цикла $\eta = 0{,}45$.

Ответ: $i = -\frac{\ln n^2}{\ln(1-\eta)} = 6$.

5.3.10. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из изотермы, изобары и изохоры. Максимальная температура достигается при изотермическом процессе и равна $T = 500$ К. Степень сжатия $\nu = 1$ моля идеального газа составляет $\beta = V_1/V_2 = 4$. Найдите работу A газа за цикл.

Ответ: $A = \nu RT \cdot \left(\ln\beta - \frac{\beta-1}{\beta}\right) = 2644$ Дж/моль.

5.3.11. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из изотермы, изобары и изохоры. Степень сжатия одноатомного газа составляет $\beta = V_1/V_2 = 5$. Найдите КПД η цикла.

Ответ: $\eta = \left(\ln\beta - \frac{\beta-1}{\beta}\right) \Big/ \left(\ln\beta + \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{\beta-1}{\beta}\right) = 0{,}29$.

5.3.12. Определите степень сжатия $\beta = V_1/V_2$ в цикле тепловой машины, состоящем из изотермы, изобары и изохоры, КПД цикла $\eta = 0{,}31$. В качестве рабочего тела используется двухатомный идеальный газ ($i = 5$).

Ответ: $\beta^{\frac{\beta}{\beta-1}} = \exp\left[\frac{\eta+\gamma-1}{(1-\eta)(\gamma-1)}\right] = 2{,}57$; $\beta = 10$, где $\gamma = (i+2)/i$.

5.3.13. Определите показатель адиабаты γ для газа, используемого в качестве рабочего тела в тепловой машине с циклом, состоящим из изотермы, изобары и изохоры, степень сжатия газа составляет $\beta = V_1/V_2 = 10$, КПД цикла $\eta = 0{,}384$.

Ответ: $\gamma = \frac{(1-\eta)\cdot(\beta\ln\beta - \beta + 1)}{(1-\eta)\cdot\beta\ln\beta - \beta + 1} = 1{,}67$.

5.3.14. Определите число молей ν газа, используемого в качестве рабочего тела в тепловой машине с циклом, состоящим из изотермы, изобары и изохоры, если степень сжатия газа равна $\beta = V_1/V_2 = 4$, температура изотермы $T = 600$ К, работа газа за цикл $A = 12{,}7$ кДж.

Ответ: $\nu = \dfrac{A}{RT\cdot\left(\ln\beta-(\beta-1)/\beta\right)} = 4$.

5.3.15. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из изотермы, изобары и изохоры. Степень сжатия $\nu = 1$ моля газа $V_1/V_2 = 12$, работа газа за цикл $A = 13$ кДж. Найдите температуру изотермического процесса.

Ответ: $T = \dfrac{A}{\nu R\cdot\left(\ln\beta-(\beta-1)/\beta\right)} = 10^3$ К.

5.3.16. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изобар и двух адиабат. В качестве рабочего тела используется многоатомный идеальный газ ($i = 6$). Степень сжатия газа $p_1/p_2 = 10$. Найдите КПД η цикла.

Ответ: $\eta = 1-\left(p_2/p_1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 0{,}435$, где $\gamma = (i+2)/i$.

5.3.17. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изобар и двух адиабат. КПД цикла $\eta = 0{,}37$. В качестве рабочего тела используется двухатомный идеальный газ ($i = 5$). Найдите степень сжатия p_1/p_2 газа.

Ответ: $\dfrac{p_1}{p_2} = \left(1-\eta\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 5$, где $\gamma = (i+2)/i$.

5.3.18. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изобар и двух адиабат. Определите показатель адиабаты, если КПД цикла $\eta = 0{,}566$, а степень сжатия газа $\alpha = p_1/p_2 = 8$.

Ответ: $\gamma = \dfrac{\ln\alpha}{\ln\alpha+\ln\left(1-\eta\right)} = 1{,}67$.

5.3.19. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изобар и двух адиабат с температурами $T_1 = 300$ К и $T_2 = 400$ К. Найдите КПД η цикла, если степень сжатия $\beta = V_1/V_2 = 2$, а в качестве рабочего тела используется многоатомный идеальный газ ($i = 6$).

Ответ: $\eta = \dfrac{T_2-T_1}{T_2+\dfrac{T_2-T_1}{\left(\gamma-1\right)\cdot\ln\beta}} = 0{,}12$, где $\gamma = (i+2)/i$.

5.3.20. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух изотерм с температурами T_1 = 273 К и T_2 = 573 К. Определите степень сжатия $\beta = V_1/V_2$ двухатомного газ (i = 5), если КПД цикла равен η = 0,425.

Ответ: $\beta = \exp\left(\dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \dfrac{\eta(T_2 - T_1)}{(T_2 - T_1 - \eta T_2)}\right) = 8$, где $\gamma = (i + 2)/i$.

5.3.21. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух изотерм с температурами T_1 = 250 К и T_2 = 500 К. Определите число степеней свободы i газа, используемого в качестве рабочего тела, если степень сжатия $\beta = V_1/V_2$ = 10, а КПД цикла равен η = 0,325.

Ответ: $i = \dfrac{\ln \beta^2}{\eta} \cdot \dfrac{T_2 - T_1 - \eta T_2}{T_2 - T_1} = 3$.

5.3.22. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух изотерм, причем минимальная температура T_1 = 300 К. Определите, во сколько раз максимальная температура цикла T_2 больше минимальной T_1, если степень сжатия газа $\beta = V_1/V_2$ = 10, а КПД цикла η = 0,3.

Ответ: $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{(\gamma - 1) \cdot \ln \beta \ - \eta}{(\gamma - 1)(1 - \eta) \cdot \ln \beta \ - \ \eta} = 2$.

5.3.23. Цикл тепловой машины состоит из изотермы, адиабаты и изобары, причем изотермический процесс происходит при минимальной температуре цикла. Степень сжатия одноатомного газа равна $\alpha = p_1/p_2$ = 2. Найдите КПД η цикла.

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{(\gamma - 1)}{\gamma} \cdot \ln \alpha \bigg/ \left(\alpha^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1\right) = 0{,}134$.

5.3.24. Цикл тепловой машины состоит из изотермы, адиабаты и изобары. Изотермический процесс происходит при минимальной температуре цикла. Определите степень сжатия $\alpha = p_1/p_2$ двухатомного газ (i = 5), являющегося рабочим веществом цикла, если КПД цикла η = 0,3.

Ответ: $\dfrac{\ln x}{x - 1} = 1 - \eta;\ x = \alpha^{(\gamma - 1)/\gamma};\ \alpha = 10$, где $\gamma = (i + 2)/i$.

5.3.25. Цикл тепловой машины состоит из изотермы при минимальной температуре, адиабаты и изобары. Определите показатель адиабаты γ, если КПД цикла равен η = 0,235, а степень сжатия $\alpha = p_1/p_2$ = 8.

Ответ: $\dfrac{\ln x}{x - 1} = 1 - \eta;\quad x = \alpha^{(\gamma - 1)/\gamma};\quad \gamma = 1{,}33$.

6. ЭНТРОПИЯ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Формула Больцмана (статистический смысл энтропии)

$$S = k \cdot \ln G,$$

где S – энтропия системы; G – термодинамическая вероятность (статистический вес) ее состояния; k – постоянная Больцмана.

Изменение энтропии (термодинамический смысл энтропии)

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T},$$

где 1 и 2 – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состоянию системы; S_1 и S_2 – энтропия системы в начальном и конечном состоянии.

Так как процесс равновесный, то интегрирование проводится по любому пути.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Статистический смысл энтропии

Задача 1. Найдите уравнение состояния системы, связывающее статистический вес G с макроскопическими параметрами состояния системы.

Решение: Количество возможных микросостояний системы, находящейся в некотором макросостоянии, называется статистическим весом G данного макросостояния.

Из этого определения следует, что статистический вес G является параметром макросостояния системы. Следовательно, должны существовать уравнения состояния, связывающие статистический вес G с объемом, давлением, температурой и другими параметрами состояния системы.

Для этого рассмотрим сначала наиболее простую систему, содержащую только одну одноатомную молекулу. Микросостояние такой системы описывается шестью величинами (x, v_x; y, v_y; z, v_z). Будем считать, что молекула обладает не тремя степенями свободы, а одной, – тогда её микросостояние полностью описывается комплектом только из двух физических величин (x, v_x). Этот комплект удобно считать координатами некоторой точки в двухмерном пространстве.

Точка с координатами (x, v_x) называется фазовой точкой. Множество всех фазовых точек образует фазовое пространство.

Для молекулы с тремя степенями свободы фазовое пространство будет шестимерным. Представить его, конечно, можно, но изобразить – нет. Поэтому для простоты и наглядности мы и будем пока рассматривать молекулу с одной степенью свободы.

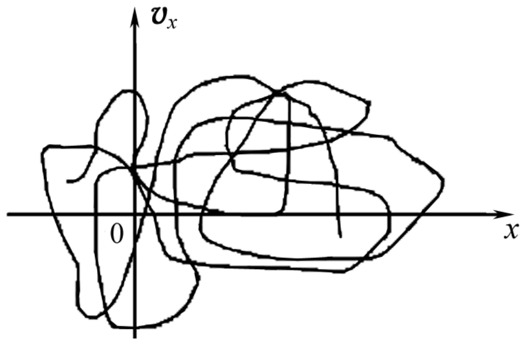

Рис. 6.1

Изображая микросостояния системы в виде фазовых точек, можно наглядно представить себе хаотическую смену микросостояний как хаотическое, случайное блуждание фазовой точки по фазовой плоскости. При этом каждому макросостоянию соответствует вполне определенная область фазового пространства, в которой блуждает фазовая точка. Эта область обладает определенной формой и размерами (рис. 6.1), и мы будем называть ее фазовой областью.

Эта простая картинка сразу вызывает проблему: сколько бы мала ни была фазовая область системы, находящейся в некотором макросостоянии, число различных фазовых точек в этой области бесконечно велико. А это означает бесконечность статистического веса. Спастись от этой бесконечности можно, если использовать традиционную идею, которую в свое время сформулировал Исаак Ньютон: непрерывность – это предел дискретности. Следовательно, надо разбить всю область непрерывных величин x и v_x на множество маленьких дискретных интервалов размером Δx и Δv_x соответственно. При этом фазовая плоскость разбивается на дискретные клеточки, которые называются фазовыми ячейками. Все фазовые точки из одной ячейки изображают очень близкие микросостояния, поэтому эти микросостояния внутри ячейки можно считать тождественными. Тогда каждому микросостоянию молекулы соответствует не фазовая точка, а фазовая ячейка. Ячейки же, в отличие от точек, можно пересчитать.

Будем считать, что наша молекула – одна из молекул некоторого равновесного идеального газа, который находится в некотором закрытом сосуде и обладает определенной температурой T. Тогда всякая координата молекулы, в том числе и x, может принимать значения лишь из ограниченного интервала, определяемого размерами сосуда. Пусть для координаты x этот интервал есть (x_1, x_2). В отличие от координат, проекции скорости молекулы могут, казалось бы, иметь любые значения. Но для равновесной системы, как известно, справедливо распределение Максвелла по компонентам скорости (см. раздел 9):

$$f(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}, \qquad (1)$$

где m_0 – масса молекулы; k – постоянная Больцмана; T – абсолютнаая температура; v_x – проекция скорости v молекулы на ось Ox.

Из (1) следует, что с ростом $|v_x|$ вероятность попадания значения v_x в элементарный интервал шириной Δv_x, равная $\Delta w = f(v_x)\Delta v_x$, быстро спадает к нулю. Это означает, что существует некоторое предельное значение проекции скорости v_m – такое, что вероятность попадания фазовой точки молекулы в любую фазовую ячейку, координаты которой $v_x > v_m$ или $v_x < -v_m$, практически равна нулю, и можно считать, что такие ячейки недоступны для молекулы в данном ее макросостоянии (то есть в данном сосуде и при данной температуре). При изменении макросостояния предельная проекция скорости v_m может измениться. Например, из (1) ясно, что с ростом температуры растет и v_m. Зависимость $v_m(T)$ б+удет рассмотрена позднее.

Таким образом, все фазовые точки, соответствующие микросостояниям молекулы, возможным для данного равновесного состояния, располагаются в пределах изображенного на рис. 6.2 прямоугольника. Этот прямоугольник есть фазовая область молекулы.

Статистический вес макросостояния молекулы можно определить, подсчитав количество фазовых ячеек, помещающихся в пределах фазовой области. Для этого надо разделить площадь фазовой области (прямоугольника) на площадь фазовой ячейки:

$$G_{1x} = \frac{(x_2 - x_1) \cdot 2v_m}{\Delta x \cdot \Delta v_x}. \qquad (2)$$

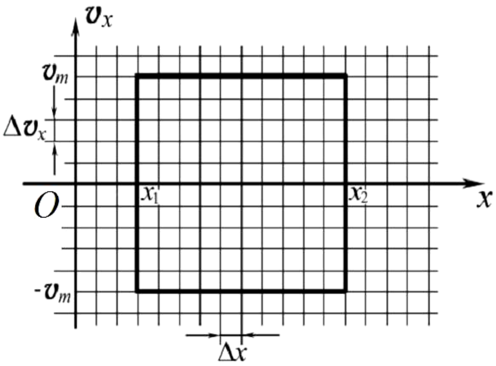

Рис. 6.2

Индексы «1x» в обозначении статистического веса поставлены для того, чтобы подчеркнуть, что системой является одна молекула и что рассматривается одна из ее степеней свободы, связанная с движением вдоль оси Ox.

Естественным обобщением этой формулы для всех трех степеней свободы молекулы является следующая формула:

$$G_1 = G_{1x} \cdot G_{1y} \cdot G_{1z} = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \cdot (2v_m)^3}{\Delta}, \quad (3)$$

где буквой Δ обозначена величина, называемая объемом фазовой ячейки и равная

$$\Delta = (\Delta x \cdot \Delta v_x)(\Delta y \cdot \Delta v_y)(\Delta z \cdot \Delta v_z). \quad (4)$$

Учитывая, что $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)$ – это объем сосуда V, формулу (3) можно переписать в более кратком виде:

$$G_1 = \frac{V \cdot (2v_m)^3}{\Delta}. \quad (5)$$

Рассмотрим, как зависит предельная проекция скорости молекулы v_m от температуры газа T. Ответ на этот вопрос можно найти, если ввести относительную (безразмерную) скорость

$$u = \frac{v_x}{v_в} = v_x \cdot \sqrt{\frac{m_0}{2kT}}, \quad (6)$$

где $v_в = \sqrt{2kT/m_0}$ – наиболее вероятная скорость молекулы (частицы).

Используя формулы (1) и (6) перейдем от функции распределения проекции скорости v_x к функции распределения безразмерной скорости u

$$f(u) = v_в \cdot f(v_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}. \quad (7)$$

Эта функция качественно точно такая же, как и функция распределения Максвелла (1) для проекции скорости v_x, т. е. она является четной и быстро спадающей к нулю с возрастанием $|u|$. Поэтому для u, как и для v_x, тоже существует предельная величина u_m, определяющая интервал возможных значений $(-u_m, u_m)$. Ясно, что величина u_m связана с v_m так же, как u с v_x в (6):

$$u_m = \frac{v_m}{v_в}. \quad (8)$$

С другой стороны, так как функция распределения относительной скорости $f(u)$ зависит только от u и не зависит ни от каких параметров (ни от температуры, ни от массы молекул, и т. д.), то и величина u_m тоже ни от чего не зависит, то есть это – константа. Тогда из (8) следует характер зависимости v_m от температуры газа

$$v_m = u_m v_в = u_m \cdot \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (9)$$

Подставив (9) в (5), получим искомое уравнение состояния, связывающее статистический вес равновесного состояния пока для простейшей системы (одной одноатомной молекулы) с температурой T и объемом V системы*) :

$$G_1 = \beta V T^{\frac{3}{2}}\text{, где } \beta = \frac{8u_m^3}{\Delta}\left(\frac{2k}{m_0}\right)^{3/2}. \qquad (10)$$

Прямая зависимость G_1 от V и T достаточно ясная – рост объема непосредственно вызывает расширение фазовой области в направлении координат, а рост температуры приводит, согласно (9), к росту предельной проекции скорости v_m, что вызывает расширение фазовой области в направлении скоростей.

Обобщим уравнение (10) на случай системы, содержащей много молекул. Для этого воспользуемся свойством мультипликативности статистического веса: статистический вес любой системы равен произведению статистических весов независимых подсистем, входящих в эту систему, т.е.

$$G = \prod_{i=1}^{N_\Pi} G_i\,, \qquad (11)$$

где N_Π – количество подсистем, а символ Π означает произведение, так же как символ Σ означает суммирование. По определению идеального газа молекулы в нем друг с другом не взаимодействуют (учитываются лишь их упругие столкновения), следовательно, каждую молекулу газа можно считать независимой подсистемой. Если газ без примесей, то все молекулы в нем совершенно одинаковые и поэтому имеют один и тот же статистический вес G_1. Тогда статистический вес газа $G = G_1^N$, где N – число молекул газа в объеме. С учетом (10), можно записать выражение для статистического веса равновесного идеального одноатомного газа:

$$G = \left(\beta V T^{\frac{3}{2}}\right)^N. \qquad (12)$$

Это выражение и представляет собой уравнение состояния, связывающее статистический вес равновесного идеального одноатомного газа G с объемом V и температурой газа T.

---

*) Температура отдельной молекулы T – это не какая-то характеристика ее внутреннего состояния, а величина, определяющая среднюю кинетическую энергию молекулы, обладающей i степенями свободы: $\langle E_k \rangle = ikT/2$. Объем V – это тоже не характеристика молекулы, определяющая ее устройство, а объем той области пространства, в которой молекула хаотически летает, например объем сосуда.

Задача 2. Найдите выражение для энтропии S равновесного идеального газа, используя параметр состояния системы – статистический вес G.

Решение: Статистический вес обладает достаточно ясным физическим смыслом, но присущее ему свойство мультипликативности неудобно в расчетах и не очень привычно. Более удобными и привычными являются аддитивные физические величины.

Дадим определение аддитивной физической величины: пусть C – некоторая система, а A и B – две ее подсистемы, которые образуются, если C разделить каким-то образом на две части. И пусть F – некоторая физическая величина, которая для системы C имеет значение F_C, а для подсистем A и B – значения F_A и F_B. Тогда F называется **аддитивной** физической величиной, если для любой C и для любых A и B выполняется равенство: $F_C = F_A + F_B$.

Аддитивными являются такие широко используемые физические величины, как масса, энергия, объем, импульс, момент импульса, момент инерции. К неаддитивным величинам относятся, например, скорость, температура, давление.

Из мультипликативной величины очень просто построить аддитивную, если использовать известное свойство логарифмов:

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B.$$

Таким образом, логарифм статистического веса – это аддитивная величина, а так как логарифм есть функция монотонная, то поведение этой величины такое же, как и поведение статистического веса: она всегда возрастает, если возрастает статистический вес, и убывает при его убывании.

Отсюда: **энтропия** – это функция состояния системы, связанная со статистическим весом данного состояния формулой

$$S = k \cdot \ln G, \tag{13}$$

где $k = R/N_A$ – постоянная Больцмана; N_A – постоянная Авогадро.

Следует заметить, что аддитивность энтропии носит не абсолютный характер. Выражение $S_C = S_A + S_B$ справедливо лишь в том случае, если A и B – независимые подсистемы, то есть они не взаимодействуют друг с другом. Именно в этом случае можно говорить о мультипликативности статистического веса. Но оказывается, что отклонение от аддитивности энтропии наблюдается лишь при очень сильном взаимодействии подсистем A и B, что в молекулярной физике встречается редко.

Получим, пользуясь формулой (13), выражение для энтропии конкретной системы – равновесного идеального одноатомного газа, для чего подставим в (13) выражение (12), для статистического веса этой системы.

$$S = kN \cdot \left(\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \ln\beta \right) = \nu R \cdot \left(\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \ln\beta \right). \tag{14}$$

где $\nu = N/N_A$ – количество вещества.

Хотя формулы (14) достаточно просты и понятны, они все же порождают, по крайней мере, две проблемы.

Первая проблема – как определить значение β? Величина β – это не функция состояния, и зависит она, согласно (10), от массы молекулы m_0 и от объема фазовой ячейки Δ. Но как надо выбирать фазовые ячейки? Какого размера они должны быть – вдоль оси координат и вдоль оси скоростей? В рамках классической физики ответа на эти вопросы найти невозможно. Поэтому из выражения (14) вытекает, что в классической физике энтропия может быть определена лишь с точностью до произвольной постоянной. Но зато эта произвольная постоянная исчезает при нахождении изменения энтропии ΔS. Из (14) следует, что изменение энтропии рассматриваемой системы в ходе произвольного процесса равно:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \nu R \cdot \left(\ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{3}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} \right). \tag{15}$$

Таким образом, для вычисления изменения энтропии совершенно неважно, как выбраны фазовые ячейки, их можно выбирать произвольно.

В квантовой физике проблема выбора размера фазовой ячейки решается точно: для квантовых объектов из соотношения неопределенностей Гейзенберга следует $\Delta x \cdot m_0 \Delta \mathrm{v}_x \sim h$ и, следовательно, площадь двухмерной фазовой ячейки равная $\Delta x \cdot \Delta \mathrm{v}_x \sim h$, а объем фазовой ячейки $\Delta \sim h^3$. Точное значение объема фазовой ячейки равно $\Delta = (h/2\pi)^3$, где h – постоянная Планка. Однако следует иметь в виду, что формула (10) для β имеет другой вид в квантовой механике.

Вторая проблема, которую вызывают формулы (14), как обобщить эти формулы или лучше формулу (15), имеющую большее практическое значение, на случай смеси газов и на случай молекул, состоящих из нескольких атомов?

Первая часть этой проблемы решается легко, так как энтропию смеси (а также ее изменение) можно найти, используя свойство аддитивности энтропии. Но в выражении для изменения энтропии (15) вместе с β исчезла и масса молекулы, поэтому, даже не применяя свойство аддитивности, можно догадаться, что это выражение применимо как для чистого газа, так и для смеси.

Идея перехода от одноатомных молекул к многоатомным тоже достаточно проста – надо в формуле (15) вместо $3/2$ писать $i/2$, где i – число степеней свободы [*)].

Итак, изменение энтропии произвольного идеального газа в произвольном процессе, начинающемся с одного равновесного состояния газа и кончающемся другим его равновесным состоянием, определяется формулами:

$$\Delta S = kN \cdot \left(\ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} \right) \text{ или } \Delta S = \nu R \cdot \left(\ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} \right). \qquad (16)$$

Подчеркнем, что эта формула справедлива не только для равновесных, но и для неравновесных процессов. Энтропия является функцией состояния, и изменение энтропии зависит только от начального и конечного равновесных состояний и не зависит от процесса перехода между этими состояниями.

Задача 3. Найдите связь между математической w и термодинамической G вероятностями и покажите, что равновесное состояние изолированной системы является наиболее вероятным.

Решение: Рассмотрим частную задачу, и в качестве изолированной системы выберем наиболее простую – идеальный газ. Изолированность газа может быть обеспечена абсолютной жесткостью стенок сосуда, в котором газ находится, при условии, что стенки совсем не проводят тепло (без теплообмена с окружающей средой). Разделим мысленно сосуд на две одинаковые части (рис. 6.3) и оценим вероятности различных распределений частиц.

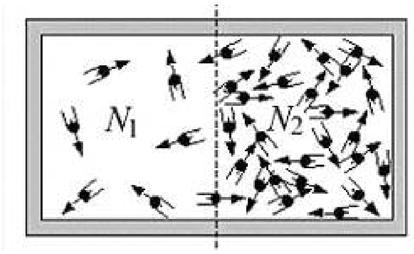

Рис. 6.3

Предположим, что всего частиц в газе N. Очевидно, что вероятность пребывания каждой частицы в любой из частей сосуда равна $1/2$ (при беспорядочном движении пребывание частицы как в одной, так и в другой части сосуда – события равновероятные). Теперь перенумеруем частицы. Картину пребывания частиц с определенными номерами в

[*)] Это, конечно, гипотеза, но ее нетрудно проверить и убедиться в том, что именно для формулы (15) она прекрасно подтверждается. В формулах (14) переход к многоатомным молекулам требует изменения величины β.

одной части сосуда, а остальных – в другой назовем определенным пространственным микросостоянием системы (конфигурацией).

Так как частицы идеального газа не взаимодействуют между собой, то они являются статистически независимыми, и тогда вероятность обнаружить любую пространственную конфигурацию будет равна произведению вероятностей пребывания каждой частицы в соответствующей части сосуда. Для N частиц это произведение равно $1/2^N$.

Обозначим через $w(N_1, N_2)$ вероятность пребывания любых N_1 частиц в левой, а остальных $N_2 = N - N_1$ частиц – в правой частях сосуда. События, состоящие в реализации разных конфигураций с одним и тем же числом N_1 частиц слева и N_2 частиц справа, являются взаимоисключающими (несовместимыми). Поэтому для несовместимых событий вероятность $w(N_1, N_2)$ определяется суммой вероятностей всех возможных микросостояний, в которых N_2 каких-то частиц находятся справа, а N_1 оставшихся частиц – слева. Эта сумма равна произведению $1/2^N$ на число таких микросостояний. Это число микросостояний и является (см. определение) статистическим весом (термодинамической вероятностью) $G(N_1, N_2)$ состояния, в котором N_1 любых частиц будут в одной части сосуда, а N_2 оставшихся частиц – в другой.

Легко сообразить, что $G(N_1, N_2)$ равно числу перестановок между N_1 и N_2 частицами:

$$G\left(N_1, N_2\right) = \frac{(N_1 + N_2)!}{N_1!N_2!} = \frac{N!}{N_1!N_2!}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$w(N_1, N_2) = \frac{1}{2^N} \cdot G\left(N_1, N_2\right) = \frac{1}{2^N} \cdot \frac{N!}{N_1!N_2!}. \tag{18}$$

Так как максимальное значение математической вероятности w равно 1 (нормировка на единицу), то из формулы (18) следует, что максимальное значение статистического веса G равно 2^N (термодинамическая вероятность не нормирована на единицу).

Покажем теперь, что переход от менее вероятных состояний к более вероятным приводит к равномерному распределению частиц по всему сосуду. Именно такая картина свойственна газу, достигшему равновесного состояния. Для этого найдем $\ln G(N_1, N_2)$ (энтропия $S \sim \ln G(N_1, N_2)$). Согласно замечательной формуле Стирлинга, которая провозглашает асимптотическое равенство $\ln x! = x \cdot \ln x$, справедливое с высокой точностью при больших x,

$$\ln G(N_1, N_2) = \ln \frac{N!}{N_1!N_2!} = \ln N! - \ln N_1! - \ln N_2! = N \ln N - N_1 \ln N_1 - N_2 \ln N_2.$$

Напомним, что в газе N_1 и N_2 – макроскопически большие числа (в одном моле газа ~ 10^{23} молекул).

Пусть $N_2 >> N_1$, так что весь газ находится в правой части сосуда. Тогда $\ln G(N_1, N_2)$ ничтожен в сравнении с $\ln 2^N$ (например, при $N_1 = 0$, $N_2 = N$, тогда $\ln G = \ln 1 = 0$). Итак, при $N_2 >> N_1$ число $G << 2^N$ (максимально возможного G), а следовательно, вероятность $w(N_1, N_2) \approx 0$ (только при $N >> 1$!). Таким образом, резко неравномерное распределение газа обладает небольшим (в сравнении с 2^N) статистическим весом и поэтому маловероятно.

Допустим теперь, что молекулы газа распределены равномерно по всему объему, тогда по порядку величины $N_1 \approx N_2 \approx N/2$. В этом случае с высокой точностью

$$\ln G(N_1, N_2) = N \cdot \ln N - \frac{N}{2} \cdot \ln \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \cdot \ln \frac{N}{2} = \ln 2^N .$$

Следовательно, по порядку величины $G(N_1, N_2) \approx 2^N$. Это очень большое число. Такому статистическому весу отвечает математическая вероятность, очень близкая к единице [формула (18)].

Таким образом, состояние с равномерным распределением газа по всему сосуду является наиболее вероятным. Именно поэтому изолированный газ всегда из неравновесного состояния приходит (в результате процесса релаксации) в это состояние, и оно является для него равновесным.

Неравновесное состояние системы означает меньшую фазовую область этой системы, и пока не закончен процесс релаксации и не достигнуто равновесное состояние, фазовая область непрерывно растет, что означает рост статистического веса (числа фазовых ячеек) и, соответственно, энтропии. В любом неравновесном состоянии энтропия системы всегда меньше, чем в равновесном. В этом и состоит суть закона возрастания энтропии:

Энтропия замкнутой системы никогда не убывает. Она или растет, пока в системе протекает процесс релаксации, или остается неизменной, если система равновесна. При этом в равновесном состоянии энтропия системы максимальна по сравнению со всеми другими возможными макросостояниями.

Как всякий статистический закон, закон возрастания энтропии выполняется с точностью до флуктуаций (флуктуация – это случайное отклонение от какого-либо состояния). Однако в макроскопических системах они столь незначительны, что закон возрастания энтропии практически можно считать точным законом. Существенно, что это свойство энтропии обусловлено единственной причиной – фактом неравновесности процесса. Ведь энергия изолированной системы не изменяется! Поэтому формулу (13) можно применять и для неравновесных процессов.

Кроме того, закон возрастания энтропии выражает следующее фундаментальное свойство природы: в с е м а к р о с к о п и ч е с к и е п р о ц е с с ы о б л а д а ю т о д н о с т о р о н н е й н а п р а в л е н н о с т ь ю. Переход между двумя макроскопическими состояниями возможен только в том случае, если конечное состояние является более вероятным, чем начальное. В этом заключается природа необратимости тепловых процессов, которая проявляется в стремлении всех макроскопических тел перейти в равновесное состояние.

Это означает, что если возможны два состояния с разными статистическими весами и в какой-то момент времени изолированная система оказалась в состоянии с меньшим статистическим весом (с меньшей энтропией), то наиболее вероятным последствием теплового движения является переход в будущем в состояние с бульшим статистическим весом (с бульшей энтропией). Именно в этом заключается смысл понятия односторонней направленности макроскопических процессов. Психологически это свойство воспринимается как неумолимое течение времени только в одну сторону от прошлого к будущему.

2. Термодинамический смысл энтропии

Задача 4. Рассчитайте изменение энтропии ΔS для любого равновесного процесса.

Решение: Рассмотрим элементарный равновесный процесс. В нем, согласно определению, энтропия меняется на бесконечно малую величину dS. Найдем это изменение. Для этого в качестве примера обратимся к чистому идеальному одноатомному газу, энтропия которого определяется формулой (14):

$$S = \nu R \cdot \left(\ln V + \frac{i}{2} \cdot \ln T + \ln \beta \right),$$

где для общности решения вместо $3/2$ записано $i/2$; i – число степеней свободы молекулы.

Вычислим дифференциал от этого выражения:

$$dS = \nu R \cdot \left(\frac{dV}{V} + \frac{i}{2} \frac{dT}{T} \right).$$

При дифференцировании правой части получились два слагаемых: одно из них связано с изменением объема dV, второе – с изменением температуры dT. Вследствие аддитивности энтропии, это можно записать в виде

$$dS = dS_V + dS_T, \tag{19}$$

где $dS_V = \nu R \cdot \dfrac{dV}{V}$; $dS_T = \dfrac{i}{2} \nu R \dfrac{dT}{T}$.

Выясним смысл дифференциалов dS_V и dS_T. Второй из них можно записать в виде

$$dS_T = \frac{dU}{T},$$

а первый с учетом уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = \nu RT$ можно преобразовать к виду

$$dS_V = \nu R \cdot \frac{pdV}{pV} = \frac{pdV}{T} = \frac{\delta A}{T}.$$

Тогда, согласно (19), получим

$$dS = \frac{dU + \delta A}{T},$$

откуда с учетом первого начала термодинамики следует:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \qquad (20)$$

Это выражение получено для чистого идеального газа, но оно имеет универсальный характер и справедливо для любой системы, совершающей равновесный процесс. В выражении (20) и заложен термодинамический смысл энтропии.

С точки зрения термодинамики **энтропия** – это такая функция состояния системы, изменение которой dS в элементарном равновесном процессе равно отношению порции теплоты δQ, которое система получает в этом процессе, к температуре системы T.

Формулу (20) можно вообще рассматривать как определение понятия «энтропия», и с ее помощью можно найти изменение энтропии в ходе любого **равновесного** процесса. Для этого надо всего лишь вычислить определенный интеграл:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{S_1}^{S_2} dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \qquad (21)$$

Пределы интегрирования обозначены условно цифрами 1 и 2, так как для того, чтобы довести интегрирование до конца, надо от порции δQ под знаком интеграла перейти к каким-то дифференциалам. К каким – это зависит от процесса [*)].

[*)] Следует заметить, что изменение энтропии ΔS можно определить проще, без всякого интегрирования – с помощью одной из формул (16). Правда, эти формулы менее общие, чем (21), они применимы только для идеального газа, но на практических занятиях чаще всего используется именно модель идеального газа, и поэтому, в этом случае, формулы (16) и (21) равнозначны.

Изотермический процесс

Задача 5. Найдите изменение энтропии ΔS идеального газа в изотермическом процессе.

Решение: Прежде всего выясним, как изменяется в изотермическом процессе фазовая область каждой молекулы. Эта область, как показано на рис. 6.2, имеет форму прямоугольника с размерами ($x_2 - x_1$) (координатный размер) и $2\mathrm{v}_m$ (скоростной размер). Так как температура не изменяется, скоростной размер фазовой области не изменяется, но зато меняется координатный размер: при изотермическом расширении он увеличивается, а при сжатии – уменьшается. Таким образом, статистический вес и энтропия в процессе изотермического расширения увеличиваются, а в процессе изотермического сжатия уменьшаются.

Найдем изменение энтропии, используя формулу (16). Так как $T_2 = T_1$, то из (16) следует:

$$\Delta S = \nu R \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{22}$$

Формула (22) полностью подтверждает то, что следует из анализа поведения фазовой области: при $V_2 > V_1$ (расширение) энтропия увеличивается, при $V_2 < V_1$ (сжатие) энтропия уменьшается.

Найдем изменение энтропии идеального газа, вычислив интеграл (21). Так как внутренняя энергия идеального газа связана только с температурой, то в изотермическом процессе $dU = 0$. Тогда $\delta Q = \delta A = pdV$, и под знаком интеграла появляется дифференциал dV:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{p\,dV}{T}.$$

Для вычисления этого интеграла нужно подынтегральное выражение представить как функцию от объема V. Это можно сделать, используя уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$p/T = \nu R/V.$$

Таким образом,

$$\Delta S = \nu R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu R \cdot \ln\frac{V_2}{V_1},$$

что в точности совпадает с формулой (22).

Отметим, что для изотермического процесса работа газа равна

$$A = \nu RT \cdot \ln\frac{V_2}{V_1},$$

следовательно

$$\Delta S = \frac{A}{T}. \tag{23}$$

Полученная формула справедлива для всех изотермических процессов.

Изохорный процесс

Задача 6. Найдите изменение энтропии ΔS идеального газа в изохорном процессе.

Решение: Так как объем системы не меняется, то остается неизменным и координатный размер фазовой области молекул (см. рис. 6.2). Скоростной размер растет с ростом температуры и падает при уменьшении температуры. Поэтому статистический вес и энтропия нарастают при изохорном нагревании и убывают при изохорном охлаждении.

Подстановка в формулу (16) условия $V_2 = V_1$ дает

$$\Delta S = \frac{i}{2}\nu R \cdot \ln\frac{T_2}{T_1}. \tag{24}$$

Эта формула дает те же результаты, что и анализ поведения фазовой области: при $T_2 > T_1$ (нагревание) энтропия увеличивается, при $T_2 < T_1$ (охлаждение) энтропия уменьшается.

При вычислении интеграла (21) воспользуемся первым началом термодинамики для изохорного процесса: $\delta Q = dU = (i/2)\nu R\cdot dT$, при этом под интегралом сразу появляется дифференциал dT. Следовательно

$$\Delta S = \frac{i}{2}\nu R\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \frac{i}{2}\nu R \cdot \ln\frac{T_2}{T_1},$$

что в точности совпадает с формулой (24).

Изобарный процесс

Задача 7. Найдите изменение энтропии ΔS идеального газа в изобарном процессе.

Решение: В этом процессе пропорционально друг другу изменяются объем и температура газа, поэтому меняются оба размера фазовой области молекул – и координатный, и скоростной (см. рис. 6.2). При изобарном нагревании они увеличиваются, вследствие чего статистический вес и энтропия увеличиваются, при изобарном охлаждении они уменьшаются, и это приводит к падению статистического веса и энтропии.

То же самое непосредственно следует и из формулы (16). Уравнение изобары $V = \text{const}\cdot T$ позволяет записать эту формулу в более кратком виде

$$\Delta S = \left(\frac{i}{2}+1\right)\nu R\cdot\ln\frac{V_2}{V_1} \text{ или } \Delta S = \left(\frac{i}{2}+1\right)\nu R\cdot\ln\frac{T_2}{T_1}. \qquad (25)$$

При вычислении интеграла (21) воспользуемся уравнением Клапейрона – Менделеева $pdV = \nu RdT = \delta A$ и первым началом термодинамики для изобарного процесса

$$\delta Q = dU + \delta A = (i/2)\nu R\cdot dT + \nu RdT = (i/2+1)\nu RdT,$$

при этом под интегралом сразу появляется дифференциал dT. Следовательно

$$\Delta S = \left(\frac{i}{2}+1\right)\nu R\cdot\ln\frac{T_2}{T_1},$$

что совпадает с формулой (25).

Адиабатический процесс

Задача 8. Найдите изменение энтропии ΔS идеального газа в адиабатическом процессе.

Решение: В этом процессе анализ поведения фазовой области молекулы не позволяет сделать какие-то определенные выводы о том, как изменяется энтропия. Дело в том, что объем и температура в адиабатическом процессе связаны обратной зависимостью: при расширении (увеличении объема) температура падает, а при сжатии (уменьшении объема) температура растет. Поэтому в обратной зависимости находятся и размеры фазового прямоугольника (см. рис. 6.2), и трудно сказать, нарастает или убывает его площадь, то есть число содержащихся в нем фазовых ячеек.

Для ответа на вопрос, как ведет себя энтропия при адиабатическом процессе, воспользуемся формулой (16) и уравнением адиабаты в виде

$$TV^{\gamma-1} = \text{const},$$

где $\gamma = C_p/C_V = (i+2)/i$ – показатель адиабаты.

Так как $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$, то

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}$$

и, следовательно,

$$\Delta S = \nu R\left(\ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{i}{2}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}\right) = \nu R\left(\ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{i}{2}(1-\gamma)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right) =$$

$$= \nu R\left(1 + \frac{i}{2}(1-\gamma)\right)\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Распишем выражение в скобках, учитывая что $\gamma = (i+2)/i$.

$$\left(1 + \frac{i}{2}(1-\gamma)\right) = 1 + \frac{i}{2} - \frac{i}{2}\gamma = 1 + \frac{i}{2} - \frac{i}{2}\cdot\frac{i+2}{i} = 1 + \frac{i}{2} - \frac{i}{2} - 1 = 0.$$

Откуда следует

$$\Delta S = 0. \tag{26}$$

Ответ на вопрос, как ведет себя энтропия в адиабатическом процессе, вытекает непосредственно и из термодинамического смысла энтропии, то есть из формулы (20). Так как по определению в адиабатическом процессе $\delta Q = 0$, то из (20) следует, что в каждом элементарном адиабатическом процессе $dS = 0$, то есть энтропия S не изменяется. Таким образом, адиабатический процесс можно назвать изоэнтропийным.

3. Поведение энтропии в процессах изменения агрегатного состояния вещества

Фазовый переход «твердое тело - жидкость»

Задача 9. Найдите изменение энтропии ΔS при фазовом переходе «твердое тело – жидкость».

Решение: В процессе плавления (отвердевания) температура системы остается постоянной до тех пор, пока вся система не расплавится (отвердеет). Эта температура называется температурой плавления $T_{пл}$.

Количество теплоты δQ, которое необходимо для расплавления вещества массой dm, пропорционально этой массе

$$\delta Q = \lambda\cdot dm,$$

где λ – удельная теплота плавления вещества системы.

Этот закон справедлив и для отвердевания, правда, с одним отличием: $\delta Q < 0$ – т. е. в этом случае теплота выделяется системой.

Поэтому закон плавления можно записать в обобщенном виде

$$\delta Q = \pm\,\lambda\cdot dm, \tag{27}$$

где знак «+» относится к плавлению, а знак «–» – к отвердеванию.

Твердое и жидкое тело не идеальный газ и поэтому в данном разделе будем использовать термодинамический смысл энтропии. Изменение энтропии в процессе этого фазового перехода можно найти, если считать процесс равновесным. Это вполне допустимое приближение при условии, что разность температур между системой и тем объектом, который поставляет ей (или забирает у нее) теплоту, не слишком велика, т. е. много меньше температуры плавления. В этом случае можно вычислить интеграл (21), подставив в него выражение (27):

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \pm \int_1^2 \frac{\lambda dm}{T_{\text{пл}}}.$$

Так как температура системы в данном фазовом переходе не меняется и равна температуре плавления $T_{\text{пл}}$, то для данного вещества $\lambda / T_{\text{пл}} = \text{const}$. Тогда интеграл вычисляется сразу:

$$\Delta S = \pm \frac{\lambda}{T_{\text{пл}}} \cdot \int_1^2 dm = \pm \frac{\lambda m}{T_{\text{пл}}}. \quad (28)$$

Из (28) следует, что при плавлении энтропия увеличивается, а при отвердевании – уменьшается. Физический смысл этого результата достаточно ясен: фазовая область молекулы в твердом теле гораздо меньше, чем в жидкости, так как в твердом теле каждой молекуле доступна малая область пространства между соседними узлами кристаллической решетки, а в жидкости – вся область пространства, занятая этой жидкостью. Поэтому при равных температурах энтропия твердого тела меньше энтропии жидкости. Это означает, что твердое тело представляет собой более упорядоченную, менее хаотичную систему, чем жидкость.

Фазовый переход «жидкость – газ»

Задача 10. Найдите изменение энтропии ΔS при фазовом переходе «жидкость – газ».

Решение: Процессы испарения и конденсации протекают в широком диапазоне температур, но фазовым переходом они являются лишь тогда, когда процесс охватывает всю массу вещества. Это происходит при определенной температуре $T_{\text{к}}$, которая называется температурой кипения. В процессе фазового перехода «жидкость – газ» температура системы остается постоянной и равной температуре кипения до тех пор, пока вся система не перейдет из одной фазы в другую.

Количество теплоты δQ, которое необходимо для испарения вещества массой dm, пропорционально этой массе:

$$\delta Q = r \cdot dm,$$

где r – удельная теплота испарения вещества системы.

Этот закон справедлив и для конденсации: $\delta Q < 0$ – т. е. в этом случае теплота выделяется системой. Поэтому запишем закон испарения в обобщенном виде:

$$\delta Q = \pm\, r \cdot dm, \tag{29}$$

где знак «+» относится к испарению, а знак «–» – к конденсации.

Изменение энтропии в процессе этого фазового перехода можно найти, если считать процесс равновесным. Это вполне допустимое приближение при условии, что разность температур между системой и тем объектом, который поставляет ей (или забирает у нее) теплоту, не слишком велика, то есть много меньше температуры кипения. В этом случае можно вычислить интеграл (21), подставив в него выражение (29):

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \pm \int_1^2 \frac{r}{T_\text{к}} dm .$$

Подынтегральное выражение $r/T_\text{к}$ не зависит от переменной интегрирования m, поэтому его можно вынести из-под интеграла. В результате

$$\Delta S = \pm \frac{rm}{T_\text{к}} . \tag{30}$$

Из (30) следует, что при и с п а р е н и и энтропия в о з р а с т а е т, а при к о н д е н с а ц и и – у м е н ь ш а е т с я. Физический смысл этого результата состоит в различии фазовой области молекулы в жидкости и в газе. Хотя и в жидкости, и в газе каждой молекуле доступна вся область пространства, занятая системой, но сама эта область для жидкости существенно меньше, чем для газа. В жидкости силы притяжения между молекулами удерживают их на определенном расстоянии друг от друга, поэтому каждая молекула, хотя и имеет возможность свободно мигрировать по области пространства, занятой жидкостью, но имеет малую вероятность «оторваться от коллектива» остальных молекул. Поэтому объем жидкости зависит только от ее количества и никак не связан с объемом сосуда, в котором она налита. Молекулы газа ведут себя иначе: у них гораздо больше свободы – среднее расстояние между ними таково, что силы притяжения очень малы, и молекулы «замечают» друг друга лишь при столкновениях. В результате газ всегда занимает весь объем сосуда, в котором он помещен.

Поэтому при равных температурах фазовая область молекулы газа значительно больше фазовой области молекулы жидкости, и энтропия газа больше энтропии жидкости. Газ по сравнению с жидкостью – гораздо менее упорядоченная, более хаотичная система.

Нагрев вещества

Задача 11. Найдите изменение энтропии ΔS при нагревании твердого (т) или жидкого (ж) тела массой m от температуры T_1 до температуры T_2.

Решение: При нагревании вещества дифференциальный расход теплоты равен

$$\delta Q = mc_{\text{т, ж}} \cdot dT, \tag{31}$$

где $c_{\text{т, ж}}$ – удельная теплоемкость твердого или жидкого тела.

Изменение энтропии в процессе нагревания можно найти, если считать процесс равновесным. Это вполне допустимое приближение при условии, что разность температур между системой (телом) и тем объектом, который поставляет ей (или забирает у нее) теплоту, не слишком велика, то есть много меньше температур T_1 и T_2.

В этом случае можно вычислить интеграл (21), подставив в него выражение (31):

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} mc_{\text{т, ж}} \frac{dT}{T}.$$

В подынтегральном выражении считаем, что удельная теплоемкость тела не зависит от переменной интегрирования (температуры), поэтому константы выносим за знак интеграла. В результате:

$$\Delta S = mc_{\text{т, ж}} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{32}$$

В процессе нагревания (в общем случае) изменяются объем (температурное расширение тел) и температура тела, поэтому меняются оба размера фазовой области молекул (см. рис. 6.2) – и координатный, и скоростной: при нагревании они увеличиваются, вследствие чего статистический вес и энтропия увеличиваются, при охлаждении они уменьшаются, и это приводит к падению статистического веса и энтропии.

Задача 12. В бокал с коктейлем бросают кубик льда. Температура коктейля 20 °С, масса 200 г, температура кубика 0 °С, масса 10 г. Определите, насколько изменится энтропия содержимого бокала к тому моменту, когда кубик полностью растает. Удельная теплоемкость коктейля $c_{\text{к}} = 4 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Дано:	Решение:
$T_к = 293$ К $m_к = 0{,}2$ кг $m_л = 10^{-2}$ кг $T_{пл} = 273$ К $c_к = 4\cdot10^3$ Дж/(кг·К) $c_в = 4{,}19\cdot10^3$ Дж/(кг·К) $\lambda = 3{,}33\cdot10^5$ Дж/кг $\Delta S = ?$	**Решение:** Решение любой задачи надо начинать с анализа ситуации. «Действующими лицами» этой задачи являются коктейль и лед. О других «лицах» – о воздухе, о бокале, о состоянии владельца этого бокала и т. д. – ничего не сказано. Поэтому в задаче неявно предполагается, что содержимое бокала нужно считать замкнутой системой, пренебрегая влиянием окружающей среды.

Для замкнутой системы справедлив закон возрастания энтропии. Поэтому можно сразу сказать, что энтропия системы или совсем не изменится, или возрастет. Первое возможно, если система находится в равновесном состоянии, второе – если в ней протекает процесс релаксации. Ничего другого в замкнутой системе происходить не может. В данной задаче содержимое бокала не является равновесной системой: лед тает, коктейль остывает и в итоге – энтропия увеличивается.

Так как в бокале два «действующих лица», то можно использовать свойство аддитивности энтропии и находить изменение энтропии системы ΔS по частям: сначала найти изменение энтропии коктейля $\Delta S_к$, затем – изменение энтропии льда $\Delta S_л$, а затем их сложить

$$\Delta S = \Delta S_к + \Delta S_л.$$

Изменение энтропии системы и ее частей определяется начальным и конечным состояниями системы. Начальное состояние известно – даны начальные температуры коктейля и льда: $T_к$ и $T_л$. А конечная температура содержимого бокала T неизвестна. Поэтому необходимо найти T. Это можно сделать, используя уравнение теплового баланса.

В процессе релаксации происходит теплообмен между коктейлем и льдом: лед получает количество теплоты Q, а коктейль его отдает. Теплота, полученная льдом, идет на плавление льда (Q_1) и на нагревание талой воды до температуры T(Q_2). Согласно закону плавления

$$Q_1 = \lambda m_л,$$

а согласно закону нагревания

$$Q_2 = m_л c_в(T - T_{пл}).$$

Количество теплоты, полученное льдом, равно

$$Q_{пол} = \lambda m_л + m_л c_в(T - T_{пл}).$$

Найдем количество теплоты, отданное коктейлем. Коктейль остывает от температуры $T_к$ до температуры T и в соответствии с законом нагревания отдает при этом количество теплоты

$$Q_{отд} = m_к c_к(T_к - T).$$

Составим уравнение теплового баланса, приравняв количество теплоты, полученное льдом, и количество теплоты, отданное коктейлем:

$$Q_{пол} = Q_{отд};$$

$$\lambda m_л + m_л c_в(T - T_{пл}) = m_к c_к(T_к - T).$$

Это уравнение с одним неизвестным T. Решение уравнения дает

$$T = \frac{m_к c_к T_к + m_л c_в T_{пл} - \lambda m_л}{m_к c_к + m_л c_в} = 288\ \text{К}.$$

Изменение энтропии льда. При плавлении льда его энтропия возрастает, и этот прирост можно определить по формуле (28)

$$\Delta S'_л = \frac{\lambda m_л}{T_{пл}} = 12{,}2\ \text{Дж/К}.$$

Талая вода нагревается от температуры плавления льда $T_{пл}$ до конечной температуры T, при этом энтропия продолжает нарастать. Этот прирост можно вычислить по формуле (32):

$$\Delta S''_л = m_л c_в \cdot \ln\frac{T}{T_{пл}} = 2{,}24\ \text{Дж/К}.$$

Итак, энтропия льда возрастает на

$$\Delta S_л = \Delta S'_л + \Delta S''_л = 14{,}44\ \text{Дж/К}.$$

Изменение энтропии коктейля. Коктейль остывает, и его энтропия уменьшается. Это уменьшение можно найти так же по формуле (32):

$$\Delta S_к = m_к c_к \cdot \ln\frac{T}{T_к} = -m_к c_к \cdot \ln\frac{T_к}{T} = -13{,}77\ \text{Дж/К}.$$

Окончательный результат

$$\Delta S = \Delta S_к + \Delta S_л = 0{,}67\ \text{Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 0{,}67$ Дж/К.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Изменение энтропии системы в результате некоторого процесса равно 3170 Дж/К. Определите логарифм отношения термодинамических вероятностей конечного и начального состояния системы.

Ответ: $\ln\frac{G_2}{G_1} = \frac{\Delta S}{k} = 2{,}3 \cdot 10^{26}$.

2. Изменение энтропии системы в результате некоторого процесса равно 3170 Дж/К. Определите отношение термодинамических вероятностей конечного и начального состояния системы.

Ответ: $\frac{G_2}{G_1} = e^{\frac{\Delta S}{k}} = 10^{10^{26}}$.

3. Один киломоль идеального одноатомного газа изотермически расширяется так, что при этом происходит изменение энтропии на 3170 Дж/К. Определите отношение конечного и начального давлений (и объемов) газа.

Ответ: $\dfrac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{\Delta S}{\nu R}} = 0{,}68;\ \dfrac{V_2}{V_1} = e^{\frac{\Delta S}{\nu R}} = 1{,}46$.

4. Один киломоль идеального одноатомного газа изохорически нагревается так, что при этом происходит изменение энтропии на 3170 Дж/К. Определите отношение конечного и начального давлений (и температур) газа.

Ответ: $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{T_2}{T_1} = e^{\frac{2\Delta S}{i\nu R}} = 1{,}29$, $i = 3$.

5. Один киломоль идеального одноатомного газа изобарически охлаждается так, что отношение начального и конечного значений температур (T_1/T_2) газа стало равным 1,29. Определите изменение энтропии газа.

Ответ: $\Delta S = \left(1 + \dfrac{i}{2}\right)\nu R \cdot \ln\dfrac{T_2}{T_1} = -5{,}3\ \dfrac{\text{кДж}}{\text{К}}$, где $i = 3$.

6. Найдите изменение энтропии электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 1000 В. Температура электронного газа 10^3 К.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{eU}{T} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж/К.

7. Идеальный газ в количестве 2,2 моля находится в одном из двух теплоизолированных сосудов, соединенных между собой трубкой с краном. В другом сосуде – вакуум. Кран открыли, и газ заполнил оба сосуда, увеличив свой объем в 3 раза. Найдите приращение энтропии газа.

Ответ: $\Delta S = \nu R \cdot \ln\dfrac{V_2}{V_1} = 20{,}1$ Дж/К.

8. Двухлитровый сосуд разделен перегородкой на две равные части. Одна его часть заполнена водородом, другая – азотом. Оба газа находятся при нормальных условиях. После того как перегородка убирается, газы перемешиваются. Определите изменение энтропии при перемешивании.

Ответ: $\Delta S = 2\dfrac{p_0 V_1}{T_0} \cdot \ln\dfrac{V_2}{V_1} = 0{,}514$ Дж/К, где $V_2 = 2V_1 = 2$ л.

9. Резиновый шнур, жесткость которого k = 3000 Н/м, под действием груза удлинился на Δx = 20 см. Считая процесс растяжения шнура изотермическим и происходящим при температуре $°t$ = 27 °С, определите изменение энтропии.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{k(\Delta x)^2}{2T} = 0{,}2$ Дж/К.

10. Струя водяного пара, имеющая температуру $T_к$ = 373 К, направленная на глыбу льда массой $m_л$ = 2 кг при температуре T_1 = 193 К, растопила лед ($T_{пл}$ = 273 К) и нагрела воду до T_2 = 283 К. Найдите изменение ΔS энтропии.

Ответ: $\Delta S = m_л\left(c_л \ln\dfrac{T_{пл}}{T_1} + \dfrac{\lambda_л}{T_{пл}} + c_в \ln\dfrac{T_2}{T_{пл}}\right) + m_п\left(c_в \ln\dfrac{T_2}{T_к} - \dfrac{r_п}{T_к}\right) \approx 1239$ Дж/К,

где $m_п = \dfrac{m_л\left(c_л\left(T_{пл} - T_1\right) + \lambda_л + c_в\left(T_2 - T_{пл}\right)\right)}{r_п + c_в\left(T_к - T_2\right)} = 0{,}41$ кг $-$ масса пара.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

6.1.1. Найдите статистический вес наиболее вероятного распределения 6 одинаковых молекул по двум одинаковым половинам сосуда.

Ответ: $G(N_1, N_2) = \dfrac{N!}{N_1!\cdot N_2!} = 20$.

6.1.2. В сосуде находится N молекул идеального газа. Разделите мысленно сосуд на две одинаковые половины A и B. Определите математическую вероятность w того, что в половине A сосуда окажется N_1 молекул. Решите задачу для случая $N = 3$, $N_1 = 1$.

Ответ: $w(N_1, N_2) = \dfrac{1}{2^N}\dfrac{N!}{N_1!\cdot N_2!} = 0{,}375$, $N_2 = N - N_1$.

6.1.3. В сосуде объемом V находятся N молекул. Определите вероятность w того, что в объеме V_1, который представляет собой часть объема V, не будет ни одной молекулы. Расчет проведите для случая, когда $V_1 = V_2 = V/2$, $N = 2$.

Ответ: $w(N_1, N_2) = \dfrac{1}{2^N}\dfrac{N!}{N_1!\cdot N_2!} = 0{,}25$, где $N_2 = 0$.

6.1.4. Энтропия S термодинамической системы в некотором состоянии равна 276 мДж/К. Определите логарифм статистического веса этого состояния системы.

Ответ: $\ln G = \dfrac{S}{k} = 2 \cdot 10^{22}$.

6.1.5. Один моль идеального газа изотермически расширяется так, что при этом происходит увеличение энтропии на ΔS = 5,75 Дж/К. Определите натуральный логарифм отношения статистических весов конечного и начального состояний газа.

Ответ: $\ln \dfrac{G_2}{G_1} = \dfrac{\Delta S}{k} = 4{,}2 \cdot 10^{23}$.

6.1.6. Один моль идеального газа изотермически расширяется так, что при этом происходит увеличение энтропии на ΔS = 8,31 Дж/К. Определите начальное давление газа, если конечное равно p_2 = 5 кПа.

Ответ: $p_1 = p_2 e^{\frac{\Delta S}{\nu R}} = 13{,}59$ кПа.

6.1.7. Один моль идеального газа изотермически расширяется так, что при этом происходит увеличение энтропии на ΔS = 9,13 Дж/К. Определите, во сколько раз при этом увеличился объем газа.

Ответ: $\dfrac{V_2}{V_1} = e^{\frac{\Delta S}{\nu R}} = 3$.

6.1.8. Водород, имеющий температуру °t = 27 єС, подвергается изотермическому сжатию. Определите изменение энтропии газа, если работа сжатия равна A = 300 Дж.

Ответ: $\Delta S = -\dfrac{A}{T} = -1$ Дж/К.

6.1.9. Идеальный газ, имеющий температуру °t = 27 єС, подвергается изотермическому расширению. Изменение энтропии ΔS при этом равно 2 Дж/К. Какое количество теплоты было передано газу?

Ответ: $Q = \Delta S \cdot T$ = 600 Дж.

6.1.10. Определите изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении кислорода массой m = 10 г от объема V_1 = 25 литров до объема V_2 = 100 л.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{m}{M} R \cdot \ln \dfrac{V_2}{V_1} = 3{,}6$ Дж/К.

6.1.11. Найдите приращение энтропии ν = 1 моля углекислого газа (CO_2) при увеличении его температуры в 2 раза, если процесс нагревания изохорический. Газ считать идеальным.

Ответ: $\Delta S = \frac{i}{2}\nu R \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} = 17{,}28$ Дж/К, i = 6.

6.1.12. В результате изохорического нагревания водорода массой m = 1 г давление газа увеличилось в два раза. Определите изменение энтропии газа.

Ответ: $\Delta S = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R \cdot \ln\frac{p_2}{p_1} = 7{,}2$ Дж/К, i = 5.

6.1.13. В результате изохорического нагревания ν = 1 моля водорода температура увеличилась в 2 раза. Молярную теплоемкость при постоянном объеме C_V для водорода считать независимой от температуры и равной 20 Дж/(моль·К). Определите изменение энтропии газа.

Ответ: $\Delta S = \nu C_V \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} = 13{,}86$ Дж/К.

6.1.14. До какой температуры нужно изохорно довести кислород массой m = 1 кг, находящийся при температуре $°t_2$ = 100 єС, чтобы уменьшить его энтропию на ΔS = 1000 Дж/К?

Ответ: $T_1 = T_2 e^{-\frac{2M\Delta S}{imR}} = 80$ K.

6.1.15. В результате изохорического нагревания ν = 1 моля идеального газа его температура увеличилась в e раз. Изменение энтропии составило ΔS = 20,8 Дж/К. Сколько атомов n содержит молекула этого газа?

Ответ: $i = \frac{2\Delta S}{\nu R \ln\left(T_2/T_1\right)} = 5$; i = 5 для 2-х атомного газа, т. е. n = 2.

6.1.16. Кислород массой m = 50 г нагревают изобарически, при этом температура газа увеличивается от $°t_1$ = 2 єС до $°t_2$ = 150 єС. Найдите изменение энтропии газа.

Ответ: $\Delta S = \left(\frac{i+2}{2}\right)\frac{m}{M} R \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} = 19{,}6$ Дж/К, i = 5.

6.1.17. Водород массой m = 6,6 г расширяется изобарически до удвоения объема. Найдите изменение энтропии при этом расширении.

Ответ: $\Delta S = \left(\frac{i+2}{2}\right)\frac{m}{M} R \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = 66{,}53$ Дж/К, i = 5.

6.1.18. Найдите приращение энтропии ν = 1 моля углекислого газа (CO_2) при увеличении его температуры в два раза, если процесс нагревания изобарический. Газ считать идеальным.

Ответ: $\Delta S = \left(\dfrac{i+2}{2}\right)\nu R \cdot \ln\dfrac{T_2}{T_1} = 23$ Дж/К, $i = 6$.

6.1.19. В результате изобарического нагревания ν = 1 моля азота температура увеличилась в 2 раза. Молярную теплоемкость C_p при постоянном давлении для азота считать независимой от температуры и равной 30 Дж/(моль·К). Определите изменение энтропии газа.

Ответ: $\Delta S = \nu C_P \cdot \ln\dfrac{T_2}{T_1} = 20{,}8$ Дж/К.

6.1.20. В результате изобарического нагревания ν = 1 моля идеального газа его объем увеличился в e раз. Изменение энтропии ΔS составило 29,1 Дж/К. Сколько n атомов содержит молекула этого газа?

Ответ: $i = 2\left(\dfrac{\Delta S}{\nu R \cdot \ln\left(V_2/V_1\right)} - 1\right) = 5$; $i = 5$ для 2-х атомного газа, т. е. $n = 2$.

6.1.21. Найдите изменение энтропии при превращении $m = 1$ кг льда в воду при температуре плавления.

Ответ: $\Delta S = \lambda\dfrac{m}{T_{\text{пл}}} = 1{,}22$ кДж/К.

6.1.22. Найдите изменение энтропии при превращении $m = 1$ кг воды в пар при температуре кипения.

Ответ: $\Delta S = r\dfrac{m}{T_к} = 6{,}06$ кДж/К.

6.1.23. При охлаждении воды массой $m = 1$ кг ее термодинамическая температура уменьшилась в 1,35 раза. Найдите изменение энтропии в этом процессе.

Ответ: $\Delta S = mc \cdot \ln\dfrac{T_2}{T_1} = -1{,}26$ кДж/К.

6.1.24. Камень массой $m = 2{,}2$ кг падает с высоты $h = 13{,}6$ м на Землю. Температура окружающей среды °t = 20 єС. Определите изменение энтропии, вызванное этим процессом в системе «камень – Земля».

Ответ: $\Delta S = \dfrac{mgh}{T} = 1$ Дж/К.

6.1.25. При нагревании тела массой m = 1 кг его термодинамическая температура возросла в 2 раза. Изменение энтропии ΔS в этом процессе составило 1,25 кДж/К. Найдите удельную теплоемкость c тела.

6.2.1. Во сколько раз следует изотермически увеличить объем, занимаемый ν = 4 молями газа, чтобы его энтропия ΔS увеличилась на 23 Дж/К?

Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = e^{\frac{\Delta S}{\nu R}} = 2$.

6.2.2. При изотермическом расширении идеального газа, находящегося при температуре °t = 17 єС, была совершена работа A = 870 Дж. На сколько при этом увеличилась энтропия газа?

Ответ: $\Delta S = \frac{A}{T} = 3$ Дж/К.

6.2.3. Один киломоль идеального газа изотермически расширяется так, что при этом происходит изменение энтропии на ΔS = 5750 Дж/К. Определите отношение начального p_1 и конечного p_2 давлений газа.

Ответ: $\frac{p_1}{p_2} = e^{\frac{\Delta S}{\nu R}} = 2$.

6.2.4. В результате изотермического сжатия V_1 = 0,887 м^3 воздуха, находящегося при температуре °t_1 = 30 єС и начальном давлении p_1 = = 0,1 МПа, энтропия его уменьшилась на ΔS = 673 Дж/К. Определите объем V_2 воздуха в конце процесса.

Ответ: $V_2 = V_1 e^{-\frac{\Delta S \cdot T_1}{p_1 V_1}} = 8,9 \cdot 10^{-2}$ м^3.

6.2.5. При изохорическом нагревании ν = 1 моля азота энтропия газа возросла на ΔS = 20,8 Дж/К. Во сколько раз возросло давление газа?

Ответ: $\frac{p_2}{p_1} = e^{\frac{2\Delta S}{i\nu R}} = 2,72$.

6.2.6. В результате изохорического охлаждения углекислого газа (CO_2) массой m = 44 г температура газа уменьшилась в e раз. Определите изменение энтропии ΔS газа.

Ответ: $\Delta S = \frac{imR}{2M} \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} = -24,93$ Дж/К.

6.2.7. При изохорическом нагревании $\nu = 1$ моля газа энтропия возросла на ΔS = 22,85 Дж/К, а температура (T_2/T_1) в 3 раза. Найдите молярную теплоемкость C_V этого газа при постоянном объеме. Сколько атомов n имеет молекула этого газа?

Ответ: $C_V = \dfrac{\Delta S}{\nu \cdot \ln\left(T_2/T_1\right)} = 20{,}8$ Дж/моль · К;

$i = 2C_V/R = 5$; $i = 5$ для 2-х атомного газа, т. е. $n = 2$.

6.2.8. Два киломоля гелия, находящегося при нормальных условиях, расширяются адиабатически так, что занимаемый объем увеличивается в 3 раза. Определите изменение энтропии газа.

Ответ: Так как процесс адиабатический ($\delta Q = 0$), то его можно назвать изоэнтропийным, т. е. $\Delta S = 0$ Дж/К.

6.2.9. Два тела с начальными температурами T_1 и T_2, причем $T_1 > T_2$, приведены в соприкосновение. Процесс выравнивания температур проходит без теплообмена с окружающей средой. Как изменится суммарная энтропия этих тел?

Ответ: Процесс релаксации. Энтропия увеличится.

6.2.10. Азот массой m = 1 кг сжимают поршнем адиабатически так, что его объем уменьшается в 5 раз, а затем при постоянном объеме давление возрастает в $p_2/p_1 = 25$ раз. Определите изменение энтропии ΔS азота.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{imR}{2M} \cdot \ln\dfrac{p_2}{p_1} = 2{,}39$ кДж/К, $i = 5$.

6.2.11. Гелий массой m = 1,7 кг адиабатически расширили в $V_2/V_1 = 3$ раза а затем изобарически сжали до первоначального объема. Найдите изменение энтропии ΔS в этих процессах.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{(i+2)mR}{2M} \cdot \ln\dfrac{V_2}{V_1} = -9{,}7$ кДж/К, $i = 3$.

6.2.12. Кислород массой m = 0,2 кг при давлении p = 5 кПа занимает объем V = 8,31 м^3. Для изотермического удвоения объема газа необходимо Q = 160 Дж теплоты. Найдите изменение энтропии ΔS газа.

Ответ: $\Delta S = Q\dfrac{m}{M}\dfrac{R}{pV} = 0{,}2$ Дж/К.

6.2.13. Найдите изменение энтропии ΔS при изобарическом расширении азота массой m = 4 г от объема V_1 = 5 л до объема V_2 = 9 л.

Ответ: $\Delta S = \left(\dfrac{i+2}{2}\right)\dfrac{mR}{M} \cdot \ln\dfrac{V_2}{V_1} = 2{,}44$ Дж/К, $i = 5$.

6.2.14. Кислород массой m = 2 кг увеличил свой объем в V_2/V_1 = 5 раз один раз изотермически, другой – адиабатически. Найдите изменение энтропии ΔS в каждом из указанных процессов.

Ответ: $\Delta S_{T=\text{const}} = \dfrac{m}{M} R \cdot \ln\dfrac{V_2}{V_1} = 836\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$; $\Delta S_{\delta Q=0} = 0$.

6.2.15. Определите изменение энтропии ΔS при изотермическом сжатии m = 7 мг азота на $1/10^6$ часть первоначального объема V_1, занимаемого газом.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{m}{M} R \cdot \ln\dfrac{V_2}{V_1} = -2{,}08\ \dfrac{\text{нДж}}{\text{К}}$.

6.2.16. Вода массой m = 1 кг была охлаждена от $^\circ t_1$ = 100 до $^\circ t_2$ = 0 єС. Найдите изменение энтропии ΔS в этом процессе.

Ответ: $\Delta S = mc_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \ln\dfrac{T_2}{T_1} = -1{,}31\ \dfrac{\text{кДж}}{\text{К}}$.

6.2.17. Кусок льда массой m = 1 кг, имеющий температуру T_1 = 233 К, превращается в воду при температуре T_2 = 273 К. Найдите изменение энтропии ΔS в этом процессе.

Ответ: $\Delta S = mc_{\text{льда}} \cdot \ln\dfrac{T_2}{T_1} + \dfrac{\lambda m}{T_2} = 1{,}55\ \dfrac{\text{кДж}}{\text{К}}$.

6.2.18. Кусок льда массой m = 200 г, взятый при температуре $^\circ t_1$ = = –10 єС, был расплавлен, после чего образовавшаяся вода нагрета до температуры $^\circ t_2$ = 10 єС. Найдите изменение энтропии ΔS в ходе указанных процессов.

Ответ: $\Delta S = mc_{\text{льда}} \ln\dfrac{T_{\text{пл}}}{T_1} + \dfrac{\lambda m}{T_{\text{пл}}} + mc_{\text{H}_2\text{O}} \ln\dfrac{T_2}{T_{\text{пл}}} = 290\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

6.2.19. Вода массой m = 100 г, взятая при температуре $T_{\text{пл}}$ = 273 К, была заморожена в лед до температуры T_2 = 253 К. Найдите изменение энтропии ΔS в этом процессе.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{\delta Q}{T} = mc_{\text{льда}} \ln\dfrac{T_2}{T_{\text{пл}}} - \dfrac{\lambda m}{T_{\text{пл}}} = -138\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

6.2.20. Смешали воду массой m_1 = 5 кг при температуре T_1 = 280 К с водой массой m_2 = 8 кг при температуре T_2 = 350 К. Найдите изменение энтропии ΔS, происходящее при смешивании.

Ответ: $\Delta S = m_1 c_{\text{H}_2\text{O}} \ln\dfrac{\Theta}{T_1} + m_2 c_{\text{H}_2\text{O}} \ln\dfrac{\Theta}{T_2} = 302\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$, где $\Theta = \dfrac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 323\ \text{К}$.

6.2.21. Один киломоль идеального газа изобарически расширяется так, что при этом происходит увеличение энтропии на ΔS = 5,75 кДж/К. Определите логарифм отношения термодинамических вероятностей конечного и начального состояний газа.

Ответ: $\ln\frac{G_2}{G_1}=\frac{\Delta S}{k}=4{,}16\cdot 10^{26}$.

6.2.22. Теплоизолированный сосуд объемом V разделен перегородкой на две части, объемы которых V_2/V_1 относятся как 1:2. В большей части V_1 находится ν = 0,1 моля идеального газа, в меньшей же V_2 создан высокий вакуум. Определите изменение энтропии при удалении перегородки.

Ответ: $\Delta S=\nu R\cdot\ln\frac{V}{V_1}=0{,}337\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

6.2.23. Определите количество теплоты ΔQ, которое необходимо сообщить макроскопической системе, находящейся при температуре T = 290 К, чтобы при неизменном объеме ее статистический вес (термодинамическая вероятность G) увеличился на $\delta = 10^{-2}$.

Ответ: $\Delta Q=kT\cdot\ln\left(1+\delta\right)=4\cdot 10^{-23}$ Дж .

6.2.24. Кислород и водород, имеющие одинаковые массы и занимающие одинаковые объемы V, изотермически сжимают до объема $V/2$. Для какого газа приращение энтропии будет больше и во сколько раз?

Ответ: $\Delta S_{H_2}/\Delta S_{O_2}=M_{O_2}/M_{H_2}=16$; для H_2, в 16 раз.

6.2.25. Один моль идеального двухатомного газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление p_{max} в α = 5 раз больше наименьшего p_{min}, а наибольший объем V_{max} в β = 5 раз больше наименьшего V_{min}. Определите изменение энтропии газа при изохорическом расширении.

Ответ: $\Delta S=\frac{i}{2}\nu R\cdot\ln\alpha=33{,}4\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, где i = 5.

6.3.1. Мотор сообщает W = 1 Дж механической энергии холодильнику, поглощающему тепло из морозильной камеры при температуре $°t_1$ = –20 єС и передающему его окружающему воздуху, имеющему температуру $°t_2$ = 15 єС. Определите изменение энтропии ΔS морозильной камеры, считая, что холодильник работает по обратному циклу Карно.

Ответ: $\Delta S=-\frac{\Delta Q}{T_2}=-\eta\frac{W}{T_2}=-\frac{T_2}{\left(T_2-T_1\right)}\cdot\frac{W}{T_2};\quad \Delta S=-\frac{W}{\left(T_2-T_1\right)}=-28{,}6\ \frac{\text{мДж}}{\text{К}}$.

6.3.2. Два баллона объемами V_1 = 1 м^3 и V_2 = 11 м^3 соединяются трубкой с краном. В первом баллоне находится m_1 = 1 кг воздуха при температуре $°t_1$ = 1 єС, во втором – m_2 = 36 кг воздуха при температуре $°t_2$ = 60 єС. Найдите изменение энтропии ΔS системы после открывания крана и достижения равновесия, если система находится в термостате.

Ответ: $\Delta S = \frac{m_1 R}{M}\left(\ln\frac{V}{V_1} + \ln\frac{T_0}{T_1}\right) + \frac{m_2 R}{M}\left(\ln\frac{V}{V_2} + \ln\frac{T_0}{T_2}\right) = 1{,}62\ \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$,

где $T_0 = \left(m_1 T_1 + m_2 T_2\right)/\left(m_1 + m_2\right) = 331{,}4$ К, $V = V_1 + V_2$.

6.3.3. В калориметре с пренебрежимо малой теплоемкостью находится m_1 = 400 г воды при температуре T_1 = 273 К. В воду бросили кусочек льда массой m_2 = 50 г при температуре T_2 = 200 К и одновременно пустили m_3 = 10 г пара при температуре T_3 = 373 К. Найдите изменение энтропии системы. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Ответ: $\Delta S = \left(m_1 + m_2\right) c_{\text{H}_2\text{O}} \ln\frac{\Theta}{T_1} + m_2 c_{\text{льда}} \ln\frac{T_1}{T_2} + \frac{\lambda m_2}{T_1} - \frac{r m_3}{T_3} - m_3 c_{\text{H}_2\text{O}} \ln\frac{T_3}{\Theta} = 27\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$,

где $\Theta = \frac{m_1 c_{\text{H}_2\text{O}} T_1 - m_2 c_{\text{льда}}\left(T_1 - T_2\right) + m_2 c_{\text{H}_2\text{O}} T_1 - \lambda m_2 + r m_3 + m_3 c_{\text{H}_2\text{O}} T_3}{c_{\text{H}_2\text{O}}\left(m_1 + m_2 + m_3\right)} = 274\ \text{К}\cdot$

6.3.4. Два сосуда, емкости которых равны V_1 = 2 л и V_2 = 1 л, содержат соответственно m_1 = 20 г окиси углерода (CO) и m_2 = 10 г кислорода, причем температуры газов одинаковы. Сосуды соединяют, и газы перемешиваются. Найдите изменение энтропии ΔS в этом процессе.

Ответ: $\Delta S = \frac{m_1}{M_1} R \cdot \ln\frac{V_1 + V_2}{V_1} + \frac{m_2}{M_2} R \cdot \ln\frac{V_1 + V_2}{V_2} = 5{,}26\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

6.3.5. Пять молей (ν = 5) идеального газа изотермически расширяются в вакуум от объема в V_1 = 1 л до V_2 = 20 л. Вычислите изменение энтропии ΔS газа.

Ответ: $\Delta S = \nu R \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = 124\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

6.3.6. Давление $p_{\text{н}}$ насыщенного водяного пара при температуре T = 280 К равно 1 кПа. Пар, первоначально занимающий объем V = 2 л, изотермически сжимается так, что половина его конденсируется. Определите изменение энтропии системы. Удельную теплоту r парообразования при этой температуре считать равной 1 МДж/кг.

Ответ: $\Delta S_1 = -\frac{rm}{2T} = -\frac{r p_{\text{н}} M_{\text{H}_2\text{O}} V}{2T^2 R} = -27{,}6\ \frac{\text{мДж}}{\text{К}}$.

6.3.7. Холодильная машина работает по обратному циклу Карно в интервале температур от $°t_1$ = +70 єС до $°t_2$ = –50 єС. Рабочим веществом является азот массой m = 50 г. Определите изменение ΔS энтропии газа, если отношение максимального объема газа к минимальному α = 4.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{m}{M_{N_2}} R \cdot \left(\ln\alpha + \dfrac{i}{2} \cdot \ln\dfrac{T_2}{T_1} \right) = 4,6\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$, где $i = 5$.

6.3.8. В двух баллонах, соединенных трубкой с краном, находится m_1 = 1 кг азота и m_2 = 1 кг углекислого газа (CO_2). Определите изменение энтропии ΔS системы после открытия крана и установления равновесия. Известно, что температуры и давления газов до смешения были одинаковы.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{m_1}{M_1} R \cdot \ln\left(1 + \dfrac{M_1}{M_2} \right) + \dfrac{m_2}{M_2} R \cdot \ln\left(1 + \dfrac{M_2}{M_1} \right) = 325\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

6.3.9. Адиабатически изолированный сосуд разделен перегородкой на две равные части ($V_1 = V_2 = V/2$), одна из которых пуста, а в другой находится ν = 1 моль двухатомного идеального газа при температуре T = 100 К. После удаления перегородки газ изотермически сжимают до начального объема. Определите изменение энтропии ΔS газа.

Ответ: $\Delta S = \nu R \cdot \ln\dfrac{V}{V_1} = R \cdot \ln 2 = 5,76\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

6.3.10. Прирост ΔS энтропии между двумя адиабатами в цикле Карно равен 100 Дж/К. Разность температур ΔT между двумя изотермами равна 100 К. Какое количество теплоты ΔQ превращается в работу в этом цикле?

П р и м е ч а н и е. Необходимо учесть, что в координатах S,T цикл Карно – прямоугольник.

Ответ: $\Delta Q = \Delta S \cdot \Delta T$ = 10 кДж.

6.3.11. Водород массой m = 100 г был изобарически нагрет так, что объем его увеличился в α = 3 раза, затем он был изохорически охлажден так, что давление его уменьшилось в β = 3 раза. Найдите изменение энтропии ΔS в ходе указанных процессов.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{m}{M} R \left(\dfrac{i+2}{2} \cdot \ln\alpha - \dfrac{i}{2} \cdot \ln\beta \right) = 457\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$, где $i = 5$.

6.3.12. Кусок льда массой m = 10 г, имеющий температуру T_1 = 173 К, превращается в пар при температуре T_2 = 373 К. Найдите изменение энтропии ΔS процесса.

Ответ: $\Delta S = m\left(c_{\text{льда}} \ln\frac{T_0}{T_1} + \frac{\lambda}{T_0} + c_{\mathrm{H_2O}} \ln\frac{T_2}{T_0} + \frac{r}{T_2}\right) = 95{,}4\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, где T_0 = 273 К.

6.3.13. Два сосуда с водой соединены короткой трубкой с краном. В первом сосуде находится m_1 = 20 кг воды, нагретой до T_1 = 361 К, во втором – m_2 = 60 кг воды, имеющей температуру T_2 = 273 К. Найдите изменение энтропии ΔS системы после открывания крана и установления равновесного состояния. Система заключена в теплоизолирующую оболочку.

Ответ: $\Delta S = \int\frac{dQ_1}{T} + \int\frac{dQ_2}{T} = c_{\mathrm{H_2O}}\left(m_1 \cdot \ln\frac{\Theta}{T_1} + m_2 \cdot \ln\frac{\Theta}{T_2}\right) = 2565\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$,

где $\Theta = \left(m_1 T_1 + m_2 T_2\right)/\left(m_1 + m_2\right) = 295$ К.

6.3.14. Определите изменение ΔS энтропии m = 1 кг углекислого газа (CO_2) в результате сжатия от давления p_1 = 100 кПа при температуре °t_1 = 10 єС до давления p_2 = 600 кПа при температуре °t_2 = 100 °С.

Ответ: $\Delta S = \frac{m}{M} R\left(\ln\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} + \frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_1}\right) = -129{,}5\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, где i = 6.

6.3.15. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из изотермического, изобарического и адиабатического процессов. При изобарическом процессе рабочее вещество (воздух массой m = 1 кг) нагревается от температуры T_1 = 50 К до температуры T_2 = 400 К. Определите изменение ΔS энтропии рабочего вещества при изотермическом сжатии.

Ответ: $\Delta S_T + \Delta S_p + \Delta S_{\text{адиаб}} = 0$; $\Delta S_T = \left(\frac{i+2}{2}\right)\nu R \cdot \ln\frac{T_1}{T_2} = -2{,}09\ \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$.

6.3.16. Теплоизолированный сосуд, разделенный перегородкой на две части объемами V_1 = 1 л и V_2 = 11 л, наполнен азотом. В первой части азот находится под давлением p_1 = 10 кПа, во втором – p_2 = 400 кПа, температура газа одинакова и равна °t = 10 єС. Определите изменение ΔS энтропии после удаления перегородки и установлении равновесного состояния.

Ответ: $\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T} \cdot \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) + \frac{p_2 V_2}{T} \cdot \ln\left(1 + \frac{V_1}{V_2}\right) = 1{,}44\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

6.3.17. Гелий, находившийся в тонкостенном резиновом мешке объемом V_1 = 10 дм^3 при нормальных условиях (p_0, T_0), в результате длительного хранения продиффундировал наружу. Вычислите изменение ΔS энтропии гелия, если в обычном воздухе на один атом гелия приходится $n = 10^7$ молекул других газов.

$$\text{Ответ: } \Delta S = \int_1^2 \frac{p\,dV}{T} = \nu R \int_1^2 \frac{dV}{V} = \nu R \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_0 V_1}{T_0} \cdot \ln n = 59\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}},$$

$$V_2 / V_1 = n,\ \nu = p_0 V_1 / (R T_0).$$

6.3.18. Два цилиндра, заполненные одинаковым двухатомным газом, сообщаются с помощью трубки. В цилиндрах поддерживается постоянное давление, равное p_1 = 1 атм. Начальные значения объемов и температур газа равны: V_1 = 1 л и V_2 = 11 л, T_1 = 100 К и T_2 = 450 К. После соединения цилиндров происходит выравнивание температур. Найдите изменение ΔS энтропии.

$$\text{Ответ: } \Delta S = p_0 \frac{V_1}{T_1}\left(\ln\frac{V}{V_1} + \frac{i}{2}\ln\frac{T_0}{T_1}\right) + p_0 \frac{V_2}{T_2}\left(\ln\frac{V}{V_2} + \frac{i}{2}\ln\frac{T_0}{T_2}\right) = 4{,}3\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}},$$

$$\text{где } V = V_1 + V_2;\ i = 5;\ T_0 = \frac{T_1 T_2 (V_1 + V_2)}{T_2 V_1 + T_1 V_2} = 348{,}4\ \text{К}.$$

6.3.19. Один моль (ν = 1) идеального двухатомного газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление p_{max} в α = 5 раз больше наименьшего p_{min}, а наибольший объем V_{max} в β = 5 раз больше наименьшего V_{min}. Определите изменение энтропии газа при изобарическом сжатии.

$$\text{Ответ: } \Delta S = \left(\frac{i+2}{2}\right)\nu R \cdot \ln(1/\beta) = -46{,}8\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}},\ \text{где } i = 5.$$

6.3.20. В сосудах объемами V_1 и V_2 находятся по ν = 1,2 моля гелия. Отношение объемов сосудов $V_2/V_1 = \alpha = 2$, а отношение абсолютных температур гелия в них $T_1/T_2 = \beta = 1{,}5$. Считая газ идеальным, найдите разность энтропий ΔS гелия в этих сосудах.

$$\text{Ответ: } \Delta S = \nu R \cdot \left(\ln\alpha - \frac{i}{2}\ln\beta\right) = 0{,}85\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}},\ \text{где } i = 3.$$

6.3.21. Два моля (ν = 2) идеального газа сначала изохорически охладили, а затем изобарически расширили так, что температура газа стала равной первоначальной T_1. Найдите приращение ΔS энтропии газа, если его давление в этом процессе изменилось в $p_1/p_2 = \alpha = 3{,}3$ раза.

Ответ: $\Delta S = \nu R \cdot \ln\alpha$ = 19,84 Дж/К.

6.3.22. Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части ($V_1 = V_2$) перегородкой, в которой имеется закрывающееся отверстие. В одной половине сосуда содержится m = 10 г водорода. Вторая половина откачена до высокого вакуума. Отверстие в перегородке открывают, и газ заполняет весь объем. Считая газ идеальным, найдите изменение его энтропии ΔS.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{m}{M_{\mathrm{H_2}}} R \cdot \ln\left(1 + \dfrac{V_2}{V_1}\right) = 28,8\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

6.3.23. Найдите, во сколько раз статистический вес G_8 наиболее вероятного распределения N_8 = 8 одинаковых молекул по двум одинаковым половинам сосуда больше G_6 такого же распределения из N_6 = 6 молекул?

Ответ: $\dfrac{G_8(N_4, N_4)}{G_6(N_3, N_3)} = \dfrac{N_8!}{N_4! \cdot N_4!} : \dfrac{N_6!}{N_3! \cdot N_3!} = \dfrac{70}{20} = 3,5$.

6.3.24. В сосуде объемом V находятся N = 4 молекулы идеального газа. Определите вероятность w того, что все молекулы соберутся только в половине этого сосуда.

Ответ: $w(N_1, N_2) = \dfrac{1}{2^N} \dfrac{N!}{N_1! \cdot N_2!} = 0,0625$, где $N_2 = 0$.

6.3.25. В сосуде объемом V находятся N = 4 молекулы идеального газа. Определите вероятность w того, что в одной половине сосуда будет одна молекула газа, а в другой – три.

Ответ: $w(N_1, N_2) = \dfrac{1}{2^N} \dfrac{N!}{N_1! \cdot N_2!} = 0,25$, где $N_1 = 1$, $N_2 = 3$.

7. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ

А. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение Ван-дер-Ваальса (уравнение состояния реальных газов)

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT,$$

где $\nu = m/M$ – количество вещества (молей); m – масса газа; M – молярная масса газа; p, V, T – объем, давление, температура газа; a, b – константы Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов (см. табл. в Приложении).

Внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул,

$$p'=\frac{\nu^2 a}{V^2} \text{ или } p'=\frac{a}{V_m^2},$$

где $V_m = V/\nu$ – молярный объем газа (м^3/моль).

Собственный объем всех молекул газа

$$V' = \nu b/4.$$

Критические параметры (связь критических параметров – молярного объема V_k, давления p_k и температуры T_k с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса, см. табл. в Приложении):

$$V_k=3b;\quad p_k=\frac{a}{27b^2};\quad T_k=\frac{8a}{27bR};\quad K_k=R\frac{T_k}{p_kV_k},$$

где K_k – критический коэффициент. Согласно уравнению Ван-дер-Ваальса критический коэффициент $K_k = 8/3 \approx 2{,}67$. В действительности для реальных газов при $R = 8{,}31$ Дж/(К·моль) $K_k > 3$.

Внутренняя энергия реального газа

$$U=\frac{m}{M}\left(C_VT-\frac{m}{M}\frac{a}{V}\right) \text{ или } U=\nu C_VT-\nu^2\frac{a}{V},$$

где $C_V = iR/2$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Величина дифференциального эффекта Джоуля – Томсона

$$\frac{\Delta T}{\Delta p}=\frac{(2a/RT)-b}{C_P},$$

где $C_p = (i+2)R/2$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

Температура инверсии дифференциального эффекта Джоуля–Томсона (температура, при которой происходит изменение знака эффекта Джоуля–Томсона)

$$T_i = \frac{2a}{Rb} = \frac{27}{4} T_k .$$

При произвольных плотностях газа температура инверсии

$$T_i = \frac{2a}{Rb} \left(\frac{V_m - b}{V_m} \right)^2 ,$$

Температура инверсии интегрального эффекта Джоуля –Томсона

$$T_I = \frac{2a}{Rb} \cdot \frac{V_m - b}{V_m} .$$

Разность температур при интегральном эффекте Джоуля – Томсона

$$\Delta T = \frac{1}{C_p} \left(RT \frac{b}{V_m - b} - \frac{2a}{V_m} \right).$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. В баллоне вместимостью V = 8 л находится кислород массой m = 0,3 кг. Найдите, какую часть вместимости сосуда составляет собственный объем молекул газа.

Дано:
$V = 8 \cdot 10^{-3}$ м^3
m = 0,3 кг
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль

K – ?

Решение: Необходимо найти отношение

$$K = \frac{V'}{V}, \qquad (1)$$

где V' – собственный объем молекул.

Собственный объем молекул определим, зная, что постоянная b Ван-дер-Ваальса равна учетверенному объему молекул, содержащихся в одном моле реального газа, т.е.

$$\nu b = 4V',$$

где $\nu = m/M$ – число молей вещества; M – молярная масса кислорода.

Тогда

$$V' = \nu \frac{b}{4} = \frac{m}{M} \cdot \frac{b}{4}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$K = \frac{m}{M} \cdot \frac{b}{4V} = \frac{0,3}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{3,17 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 0,0093, \quad K = 0,93\ \%.$$

Полный объем всех молекул составляет около одного процента от объема сосуда.

Ответ: $K = 0,93$ %.

Задача 2. В баллоне вместимостью 10 л находится кислород массой m = 0,8 кг при температуре T = 300 К. Определите давление реального газа p, внутреннее давление p' и отношение p'/p.

Дано:	Решение:
$V = 1 \cdot 10^{-2}$ м^3 T = 300 К m = 0,8 кг $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль a = 0,138 Па·м^6/моль^2 $b = 3,17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль ——— p'/p – ?	**Решение:** В уравнении Ван-дер-Ваальса внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул, равно $$p' = \frac{\nu^2 a}{V^2} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2}, \qquad (1)$$ где $\nu = m/M$ – число молей вещества; M – молярная масса кислорода. a, b – константы Ван-дер-Ваальса для кислорода.

Число молей кислорода в баллоне

$$\nu = m/M = 0,8/32 \cdot 10^{-3} = 25.$$

$$p' = \nu^2 \frac{a}{V^2} = 25^2 \frac{0,138}{\left(1 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 8,63 \cdot 10^5 \text{ Па} = 863 \text{ кПа}. \qquad (2)$$

Давление p, производимое газом на стенки сосуда, найдем из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{a}{V^2} = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - p'.$$

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - p' = \left(\frac{25 \cdot 8,31 \cdot 300}{1 \cdot 10^{-2} - 25 \cdot 3,17 \cdot 10^{-5}} - 8,63 \cdot 10^5\right) = 5,91 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,9 \text{ МПа}. \ (3)$$

Из (2) и (3) получим

$$p'/p = 0,863/5,9 = 0,146. \quad p'/p = 14,6\ \%.$$

Следовательно, давление газа, обусловленное силами притяжения молекул, составляет ~ 14,6 % давления газа на стенки сосуда.

Ответ: p' = 863 кПа; p = 5,9 МПа; p'/p = 14,6 %.

Задача 3. Вычислить постоянные Ван-дер-Ваальса a и b и индивидуальную газовую постоянную R_k для водорода в критическом состоянии.

Дано:	**Решение:** Критическая температура для водорода равна T_k = 33,2 К, критическое давление p_k = $13 \cdot 10^5$ Па, критический молярный объем $V_k = 6{,}55 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль (см. Приложение). Воспользуемся уравнениями, устанавливающими связь между критическими параметрами реальных газов:
T_k = 33,2 К $p_k = 1{,}3 \cdot 10^6$ Па $V_k = 6{,}55 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль	
a – ? b – ? R_k – ?	

$$V_k = 3b \ (1); \quad p_k = \frac{a}{27b^2} \ (2); \quad T_k = \frac{8a}{27bR} \ (3); \quad K_k = R\frac{T_k}{p_k V_k} \ (4).$$

Из уравнения (1) определим

$$b = V_k/3 = 6{,}65 \cdot 10^{-5}/3 = 2{,}22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3\text{/моль}.$$

Из уравнений (1) и (2) найдем

$$a = 3p_k V_k^2 = 3 \cdot 1{,}3 \cdot 10^6 \cdot \left(6{,}55 \cdot 10^{-5}\right)^2 = 0{,}0167 \text{ Па} \cdot \text{м}^6\text{/моль}^2$$

Индивидуальную газовую постоянную R_k для водорода определим из уравнения (4), приняв $K_k = 8/3$,

$$K_k = \frac{8}{3} = R_k \frac{T_k}{p_k V_k}.$$

Отсюда имеем

$$R_k = \frac{8}{3} \cdot \frac{p_k V_k}{T_k} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1{,}3 \cdot 10^6 \cdot 6{,}55 \cdot 10^{-5}}{33{,}2} = 6{,}84 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}.$$

Ответ: a = 0,0167 Па·м^6/моль^2; $b = 2{,}22 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль;
R_k = 6,84 Дж/(К·моль).

Задача 4. Вычислить давление водорода вблизи критического состояния для T = 35 К, если молярный объем V_m = 0,1 дм^3/моль. Сравнить полученное давление реального газа с давлением, рассчитанным по уравнению для идеального газа.

Дано:	**Решение:** Чтобы найти давление газа p, преобразуем уравнение Ван-дер-Ваальса к виду: $$p = \frac{\nu RT}{\left(V - \nu b\right)} - \frac{\nu^2 a}{V^2},$$ где V – объем газа (м^3); ν – количество вещества (моль), и запишем его для одного моля, учитывая, что $V_m = V/\nu$. Тогда
T = 35 К $V_m = 1 \cdot 10^{-4}$ м^3/моль R = 8,31 Дж/(К·моль) a = 0,024 Па·м^6/моль^2 $b = 2{,}66 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль	
p – ?	

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} = \left(\frac{8,31 \cdot 35}{1 \cdot 10^{-4} - 2,66 \cdot 10^{-5}} - \frac{0,024}{\left(10^{-4}\right)^2} \right) = 1,56 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,56 \text{ МПа}.$$

Давление идеального газа, вычисленное по уравнению Клапейрона – Менделеева, при данных параметрах газа (T и V_m) составило бы

$$p_{\text{ид}} = \frac{RT}{V_m} = \frac{8,31 \cdot 35}{1 \cdot 10^{-4}} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

т.е. давление $p_{\text{ид}}$ существенно отличается от давления p реального газа.

Ответ: p = 1,56 МПа.

Задача 5. Найдите изменение внутренней энергии хлора при его изотермическом расширении от V_1 = 200 см^3 до V_2 = 500 см^3, если хлора составляет m = 20 г.

Дано:
$m = 2 \cdot 10^{-2}$ кг
$V_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м^3
$V_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ м^3
a = 0,657 Па·м^6/моль^2
$b = 5,62 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль
$M_{Cl_2} = 71 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

ΔU_{12} – ?

Решение: Если бы газ был идеальным, то при любом изотермическом процессе $\Delta U = 0$.

Если для газа выполняется условие

$$V_m = V/\nu >> b,$$

то газ можно считать идеальным.

В данной задаче

$$V_m = V_1 \cdot M_{Cl_2}/m;$$

$$V_m = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,071/2 \cdot 10^{-2} = 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Полученная величина V_m сравнима с $b = 0,56 \cdot 10^{-4}$ м^3/моль для Cl_2. Следовательно газ неидеальный.

Для реального (ван-дер-ваальсовского газа) внутренняя энергия U определяется выражением

$$U = \nu \left(C_V T - \frac{a}{V_m} \right). \tag{1}$$

Выразим ν и V_m и подставим в (1):

$$\nu = \frac{m}{M}; \quad V_m = \frac{V}{\nu} = \frac{M}{m} V.$$

$$U = \frac{m}{M}\left(C_V T - \frac{m}{M}\frac{a}{V} \right) = \frac{m}{M} C_V T - \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{a}{V}. \tag{2}$$

Изменение внутренней энергии в результате изотермического расширения найдем как разность двух значений внутренней энергии при объемах V_2 и V_1:

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 a \cdot \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\Delta U_{12} = \left(\frac{0,02}{0,071}\right)^2 \cdot 0,657 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) \cdot 10^4 = -156,4 \text{ Дж}.$$

Знак «минус» означает, что внутренняя энергия реального газа в результате изотермического расширения уменьшилась.

Ответ: $\Delta U_{12} = -156,4$ Дж.

Задача 6. Найдите изменение температуры кислорода при его перетекании через пористую перегородку, если p_1 = 250 атм, p_2 = 1 атм, T = 273 К.

Дано:	**Решение:**
$p_1 = 2,5 \cdot 10^7$ Па $p_2 = 1 \cdot 10^5$ Па $T = 273$ К $R = 8,31$ Дж/(К·моль) $a = 0,138$ Па·м^6/моль^2 $b = 3,17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль $i = 5$ (для O_2)	Если считать газ ван-дер-ваальсовским, что вполне обоснованно при высоком начальном давлении кислорода, то изменение температуры в дифференциальном эффекте Джоуля – Томсона равно $\frac{\Delta T}{\Delta p} = \left(\frac{2a}{RT} - b\right)\frac{1}{C_p}$ или $\frac{\Delta T}{p_2 - p_1} = \left(\frac{2a}{RT} - b\right)\frac{1}{C_p}$, где $C_p = (i+2)R/2$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении.
ΔT – ?	

Отсюда
$$\Delta T = \left(\frac{2a}{RT} - b\right)\frac{p_1 - p_2}{C_p}.$$

Молярная теплоемкость при постоянном давлении для кислорода

$$C_p = (5+2)R/2 = 3,5 \cdot 8,31 = 29,1 \text{ Дж/(К·моль)}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\Delta T = \left(\frac{2a}{RT} - b\right)\frac{(p_2 - p_1)}{C_p} = \left(\frac{2 \cdot 0,138}{8,31 \cdot 273} - 3,17 \cdot 10^{-5}\right) \cdot \frac{(1-250) \cdot 10^5}{29,1} = -77 \text{ К}$$

Изменение температуры по шкале Кельвина и Цельсия одинаково, т. е. $\Delta T = -77$ К $= -77$ °С.

Вывод: расширение кислорода через пористую перегородку, при котором его давление падает от 250 до 1 атм, сопровождается понижением температуры газа на 77 °С.

Ответ: –77 °С.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. В сосуде вместимостью V = 10 л находится азот массой m = 0,25 кг. Определите: 1) внутреннее давление p' газа; 2) собственный объем V' молекул.

Ответ: $p' = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \cdot \frac{a}{V^2} = 1,09 \cdot 10^5$ Па; $V' = \frac{m}{M} \cdot \frac{b}{4} = 8,7 \cdot 10^{-5}$ м^3.

2. Определите давление p_1, которое будет производить кислород, содержащий количество вещества ν = 1 моль, если он занимает объем V = 0,5 л при температуре T = 300 К. Сравнить полученный результат с давлением p_2, вычисленным по уравнению Клапейрона – Менделеева.

Ответ: $p_1 = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \left(\frac{\nu}{V}\right)^2 a = 4,78 \cdot 10^6$ Па; $p_2 = \frac{\nu RT}{V} = 4,99 \cdot 10^6$ Па.

3. Азот массой m = 0,84 кг занимает объем V = 33 л при температуре T = 173 К. Найдите давление p_1, оказываемое азотом на стенки сосуда. Сравнить полученный результат с давлением p_2, вычисленным по уравнению Клапейрона – Менделеева.

Ответ: $p_1 = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \left(\frac{\nu}{V}\right)^2 a = 1,27 \cdot 10^6$ Па; $p_2 = \frac{\nu RT}{V} = 1,30 \cdot 10^6$ Па,

где $\nu = m/M$.

4. Вычислить критическую температуру $T_{кр}$ и критическую плотность $\rho_{кр}$ углекислого газа.

Ответ: $T_{кр} = 8aR/(27b)$ = 308 К; $\rho_{кр} = M/(3b)$ = 340 кг/м^3.

5. Критические величины для воды имеют следующие значения: $T_{кр}$ = 547 К; $p_{кр}$ = 21,8 МПа. Какой наибольший объем $V_{кр}$ может занимать вода массой m = 1 кг в жидком состоянии.

Ответ: $V_{кр} = \frac{m}{M} V_k = \frac{3mRT_k}{8Mp_k} = 4,34$ л.

6. Определите внутреннюю энергию U азота, содержащего количество вещества ν = 1 моль, при критической температуре $T_{кр}$ = 126 К. Вычисления выполнить для объемов 1) V_1 = 20 л; 2) V_2 = 0,1 л.

Ответ: $U = \nu\left(C_V T_{кр} - \nu a/V\right)$; U_1 = 2,62 кДж; U_2 = 1,23 кДж.

7. Определите внутреннюю энергию U углекислого газа (CO_2) массой m = 132 г при нормальном давлении p_0 и температуре T = 300 К, если газ 1) идеальный: 2) реальный.

Ответ:; $U_1 = \nu C_V T$ = 22,4 кДж; $U_2 = U_1 - \nu a p_0/\left(RT\right) = 22$ кДж, где $C_V = (i/2)R$; $\nu = m/M$.

8. Найдите изменение температуры ΔT при дросселировании воздуха от $p_1 = 200$ атм до $p_2 = 1$ атм, если $T_1 = 290$ К.

Ответ: $\Delta T = \left(\dfrac{2a}{RT_1} - b\right)\cdot\left(\dfrac{p_2 - p_1}{C_p}\right) = -55$ К.

9. Объем углекислого газа массой $m = 0{,}2$ кг увеличился от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 10$ м^3. Найдите работу A внутренних сил взаимодействия молекул при этом процессе.

Ответ: $A = \left(\dfrac{m}{M}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{V_1} - \dfrac{1}{V_2}\right) = 6{,}9$ Дж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

7.1.1. Определите давление p ван-дер-ваальсовского водорода при температуре $°t = 0$ °С, если молярный объем $V_m = 0{,}5$ л/моль.

Ответ: $p = \dfrac{RT}{(V_m - b)} - \dfrac{a}{V_m^2} = 4{,}7\cdot10^6$ Па.

7.1.2. Определите давление p ван-дер-ваальсовского кислорода при температуре $°t = -100$ °С, если молярный объем $V_m = 1\cdot10^{-3}$ м^3/моль.

Ответ: $p = \dfrac{RT}{(V_m - b)} - \dfrac{a}{V_m^2} = 1{,}35\cdot10^6$ Па.

7.1.3. Определите собственный объем V' молекул углекислого газа, находящегося в баллоне при температуре $°t = 0$ °С, если его масса $m = 0{,}5$ кг.

Ответ: $V' = \dfrac{m}{M}\cdot\dfrac{b}{4} = 1{,}22\cdot10^{-4}$ м^3.

7.1.4. Определите собственный объем V' молекул гелия, находящегося при температуре $°t = -100$ °С, если его масса $m = 0{,}1$ кг.

Ответ: $V' = \dfrac{m}{M}\cdot\dfrac{b}{4} = 1{,}05\cdot10^{-4}$ м^3.

7.1.5. Определите собственный объем V_1' молекул гелия и собственный объем молекул хлористого водорода, если их масса одинакова и равна $m = 0{,}2$ кг. Объяснить полученный результат.

Ответ: $V' = \dfrac{m}{M}\cdot\dfrac{b}{4}$; $V_1' = 2{,}8\cdot10^{-4}$ м^3; $V_2' = 3{,}65\cdot10^{-5}$ м^3.

7.1.6. Определите внутреннее давление p' кислорода, находящегося в баллоне объемом $V = 1$ л при температуре при комнатной температуре. Масса кислорода $m = 1$ кг.

Ответ: $p' = (\nu/V)^2 a = 1{,}35 \cdot 10^5$ Па, где $\nu = m/M$.

7.1.7. Определите внутреннее давление p' азота, находящегося в баллоне объемом $V = 1$ л при температуре $°t = 20$ °С. Масса азота $m = 0{,}1$ кг. Сравнить полученную величину с давлением p на стенки баллона.

Ответ: $p' = (\nu/V)^2 a = 1{,}75 \cdot 10^6$ Па; $p = \dfrac{\nu RT}{V - \nu b} - \left(\dfrac{\nu}{V}\right)^2 a = 8{,}1 \cdot 10^6$ Па,

где $\nu = m/M$.

7.1.8. В баллоне вместимостью $V = 6$ л находится кислород $m = 0{,}6$ кг при температуре $T = 290$ К. Найдите давление p газа на стенки сосуда.

Ответ: $p = \dfrac{\nu RT}{V - \nu b} - \left(\dfrac{\nu}{V}\right)^2 a = 6{,}8 \cdot 10^6$ Па, где $\nu = m/M$.

7.1.9. Найдите величину дифференциального эффекта Джоуля – Томсона для кислорода при температуре $T = 290$ К.

Ответ: $\dfrac{\Delta T}{\Delta p} = \dfrac{(2a/RT) - b}{C_P} = 2{,}85 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{К}}{\text{Па}} = 0{,}285\ \dfrac{\text{град}}{\text{атм}}$, где $C_P = (7/2)R$.

7.1.10. Найдите величину дифференциального эффекта Джоуля – Томсона для кислорода при температуре $°t = -100$ °С. Сравнить с ответом к предыдущей задаче и объяснить его.

Ответ: $\dfrac{\Delta T}{\Delta p} = \dfrac{(2a/RT) - b}{C_P} = 5{,}51 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{К}}{\text{Па}} = 0{,}551\ \dfrac{\text{град}}{\text{атм}}$, где $C_p = 7R/2$.

7.1.11. Определите давление p водяного пара массой $m = 1$ кг, взятого при температуре $T = 380$ К в объеме $V_1 = 1$ м^3 и $V_2 = 2$ л.

Ответ: $p = \dfrac{\nu RT}{V - \nu b} - \left(\dfrac{\nu}{V}\right)^2 a$; $p_1 = 1{,}74 \cdot 10^7$ Па; $p_2 = 1{,}46 \cdot 10^8$ Па,

где $\nu = m/M$.

7.1.12. В сосуде емкостью $V = 0{,}3$ л находится $\nu = 1$ моль углекислого газа при температуре $T = 300$ К. Определите давление p газа: 1) по уравнению Клапейрона – Менделеева; 2) по уравнению Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $p_1 = \dfrac{\nu RT}{V} = 8{,}31 \cdot 10^6$ Па; $p_2 = \dfrac{\nu RT}{V - \nu b} - \left(\dfrac{\nu}{V}\right)^2 a = 5{,}67 \cdot 10^6$ Па.

7.1.13. Найдите критическую температуру T_k и температуру инверсии T_i дифференциального эффекта Джоуля – Томсона для кислорода.

Ответ: $T_k = \dfrac{8a}{27Rb} = 155$ К; $T_i = \dfrac{27}{4} T_k = 1046$ К.

7.1.14. Углекислый газ (CO_2) адиабатически расширяется в пустоту, при этом температура газа уменьшается на $\Delta t = 0{,}26$ °С. Вычислите работу A, совершаемую массой $m = 4{,}4$ г против межмолекулярных сил притяжения.

Ответ: $A = \dfrac{m}{M} C_V \Delta T = 0{,}65$ Дж, где $C_V = iR/2 = 24{,}93$ Дж/(моль·К).

7.1.15. Найдите удельный объем $V_{уд}$ бензола (C_6H_6) в критическом состоянии, если его критическая температура $T_{кр} = 562$ К и критическое давление $p_{кр} = 46$ атм.

Ответ: $V_{уд} = \dfrac{V_k}{M} = \dfrac{3RT_k}{8Mp_k} = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ м^3/кг.

7.1.16. Вычислите постоянные Ван-дер-Ваальса для углекислого газа (CO_2), если его критическая температура $T_{кр} = 304$ К и критическое давление $p_{кр} = 73$ атм.

Ответ: $a = \dfrac{27R^2T_k^2}{64p_k} = 0{,}369$ Па·м^6/моль^2; $b = \dfrac{RT_k}{8p_k} = 4{,}3 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

7.1.17. Найдите наибольший объем $V_{кр}$, который может занимать вода массой $m = 1$ кг в жидком состоянии.

Ответ: $V_{кр} = 3mb/M = 5{,}07$ л.

7.1.18. Найдите изменение ΔU внутренней энергии в результате изотермического расширения $m = 40$ г гелия от объема $V_1 = 300$ см^3 до $V_2 = 600$ см^3.

Ответ: $\Delta U = a\left(\dfrac{m}{M}\right)^2 \cdot \dfrac{V_2 - V_1}{V_1V_2} = 567$ Дж.

7.1.19. Найдите изменение ΔU внутренней энергии в результате изотермического расширения $m = 40$ г углекислого газа от объема $V_1 = 300$ см^3 до $V_2 = 600$ см^3.

Ответ: $\Delta U = a\left(\dfrac{m}{M}\right)^2 \cdot \dfrac{V_2 - V_1}{V_1V_2} = 553$ Дж.

7.1.20. Найдите внутреннюю энергию U водорода, если T = 300 К, V = 1 см^3, m = 1 г.

Ответ: $U = \nu C_V T - \nu^2 \dfrac{a}{V} = -2{,}9$ кДж,

где $C_V = iR/2$ = 20,78 Дж/(моль·К), $\nu = m/M$ = 0,5 моль.

7.1.21. Найдите внутреннюю энергию U хлористого водорода (HCl), если V = 1 см^3, m = 1 г, T = 300 К.

Ответ: $U = \nu C_V T - \nu^2 \dfrac{a}{V} = 88{,}6$ Дж,

где $C_V = iR/2$ = 20,78 Дж/(моль·К), $\nu = m/M \approx 0{,}027$ моль.

7.1.22. Найдите внутреннюю энергию углекислого газа (CO_2), если V = 1 см^3, m = 1 г, T = 300 К.

Ответ: $U = \nu C_V T - \nu^2 \dfrac{a}{V} = -21$ Дж,

где $C_V = iR/2$ = 24,93 Дж/(моль·К), $\nu = m/M \approx 0{,}023$ моль.

7.1.23. Оцените возможное значение молярного объема водорода, при котором происходит инверсия интегрального эффекта Джоуля – Томсона, если температура инверсии T_I = 202 К. Каков физический смысл этой величины.

Ответ: $V_m = \dfrac{2ab}{2a - T_I Rb} = 3{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^3/моль.

7.1.24. В баллоне вместимостью V = 1 л находится азот массой m = 84 г при температуре °t = 0 °С. Определите внутреннее давление p' реального газа и давление p, производимое газом на стенки сосуда.

Ответ: $p' = \left(\dfrac{m}{M}\right)^2 \dfrac{a}{V^2} = 1{,}23$ МПа; $p = \dfrac{\nu RT}{V - \nu b} - p' = 6{,}46$ МПа; $\nu = m/M$.

7.1.25. Зная постоянные Ван-дер-Ваальса воды, найдите наибольшее давление $p_{кр}$ насыщенных паров воды.

Ответ: $p_k = a/\left(27b^2\right) = 221$ атм.

7.2.1. Гелий в количестве ν = 1 кмоль занимает объем V = 0,237 м^3 при температуре T = 73 К. Найдите давление p газа.

Ответ: $p = \dfrac{\nu RT}{V - \nu b} - \dfrac{\nu^2 a}{V^2} = 2{,}78 \cdot 10^6$ Па.

7.2.2. Найдите, во сколько раз давление $p_{кр}$ газа больше его критического давления p_k, если известно, что его молярный объем и температура вдвое больше критических значений этих величин.

Ответ: $p_k = \frac{3}{8} \cdot \frac{T_k R}{V_k}$; $p_{кр} = \left(\frac{6}{5} - \frac{27}{96}\right) \cdot \frac{RT_k}{V_k}$; $p_{кр}/p_k = 2{,}45$.

7.2.3. Кислород в количестве $\nu = 1$ кмоль занимает объем $V = 56$ л при давлении $p = 9{,}025 \cdot 10^7$ Па. Найдите температуру T кислорода.

Ответ: $T = \left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \cdot \frac{V - \nu b}{\nu R} = 393\ \text{K}$.

7.2.4. Трехатомный газ в количестве $\nu = 0{,}5$ кмоль адиабатически расширяется в вакуум от $V_1 = 0{,}5$ м^3 до $V_2 = 3$ м^3. При этом происходит понижение температуры газа на $\Delta T = 12{,}2$ К. Найдите по этим данным постоянную a Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $a = \frac{C_V \Delta T}{\nu} \cdot \frac{V_1 V_2}{V_2 - V_1} = 0{,}365\ \text{Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$.

где $C_V = iR/2 = 3R = 24{,}93$ Дж/(моль·К).

7.2.5. Кислород в количестве $\nu = 1$ кмоль занимает объем $V = 42$ л при давлении $p = 9 \cdot 10^7$ Па. Найдите температуру T кислорода.

Ответ: $T = \left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \cdot \frac{V - \nu b}{\nu R} = 208\ \text{K}$.

7.2.6. Найдите, во сколько раз давление p кислорода $\nu = 1$ кмоль больше его критического давления p_k, если температура кислорода $T = 400$ К, а занимаемый объем $V = 0{,}056$ м^3.

Ответ: $\frac{p}{p_k} = \frac{27b^2}{a} \cdot \left(\frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) = 18{,}24$.

7.2.7. Найдите соотношение между температурой T кислорода и его критической температурой T_k, если кислород занимает объем $V =$ $= 0{,}056$ м^3 при давлении $p = 920$ атм.

Ответ: $\frac{T}{T_k} = \frac{27b}{8a} \cdot \left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \cdot \left(\frac{V}{\nu} - b\right) = 2{,}6$.

7.2.8. Азот в количестве $\nu = 1$ кмоль занимает объем $V = 55$ л при давлении $p = 620$ атм. Найдите температуру T азота.

Ответ: $T = \left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \cdot \frac{V - \nu b}{\nu R} = 212\ \text{K}$.

7.2.9. Найдите, во сколько раз температура T азота в количестве $\nu = 1$ кмоль превышает его критическую температуру T_k, если он находится при давлении $p = 6{,}08 \cdot 10^7$ Па и занимает объем $V = 55$ дм^3.

Ответ: $\frac{T}{T_k} = \frac{27b}{8a} \cdot \left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) \cdot \left(\frac{V}{\nu} - b \right) = 1{,}65$.

7.2.10. Гелий в количестве $\nu = 1$ кмоль занимает объем $V = 237$ л при температуре $°t = -200$ °С. Найти давление гелия.

Ответ: $p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2} = 2{,}78 \cdot 10^6$ Па.

7.2.11. Какое давление p нужно осуществить, чтобы углекислый газ (CO_2) превратился в жидкость при температуре $°t = 31$ °С.

Ответ: $p = p_k T / T_k = 7{,}39 \cdot 10^6$ Па.

7.2.12. Найдите плотность $\rho_{кр}$ водяных паров при критическом состоянии.

Ответ: $\rho_{кр} = M / (3b) = 197{,}4$ кг/м^3.

7.2.13. Найдите плотность $\rho_{кр}$ гелия в критическом состоянии, если известно, что $T_{кр} = 5{,}2$ К; $p_{кр} = 2{,}25$ атм.

Ответ: $\rho_{кр} = 8Mp_{кр} / (3T_{кр}R) = 55{,}5$ кг/м^3.

7.2.14. Аргон в количестве $\nu = 1$ кмоль находится в баллоне емкостью $V_б = 100$ л при давлении $p = 1000$ атм. Найдите соотношение между критическим объемом $V_{кр}$ молекул аргона и емкостью баллона $V_б$.

Ответ: $\frac{V_{кр}}{V_б} = \frac{\nu V_k}{V_б} = \frac{3\nu b}{V_б} = 0{,}97$.

7.2.15. Какое давление необходимо осуществить, чтобы углекислый газ (CO_2) превратить в жидкость при температуре $°t = 50$ °С.

Ответ: процесс осуществить невозможно. Дать объяснение.

7.2.16. Какой наибольший объем V_{max} может занимать $m = 1$ кг жидкой углекислоты (CO_2)?

Ответ: $V_{max} = \nu V_k = \frac{m}{M} \cdot 3b = 2{,}9$ л.

7.2.17. Какой наибольший объем может занимать $m = 1$ кг жидкого водорода?

Ответ: $V_{max} = \nu V_k = \frac{m}{M} \cdot 3b = 39{,}9$ л.

7.2.18. Найдите константу a Ван-дер-Ваальса, если при расширении $\nu = 0,5$ кмоль газа от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 1,2$ м^3 была совершена работа $A = 5800$ Дж.

Ответ: $a = \dfrac{A}{\nu^2} \cdot \dfrac{V_1 V_2}{V_2 - V_1} = 0,139 \text{ Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$.

7.2.19. Найдите эффективный диаметр D молекулы кислорода, если $T_k = 154$ К и $p_k = 50$ атм.

Ответ: $D = 2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3RT_k}{128\pi N_A p_k}} \approx 3\ \text{Å}$.

7.2.20. Найдите эффективный диаметр D атома гелия, если $T_k = 5,2$ К и $p_k = 2,25$ атм.

Ответ: $D = 2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3RT_k}{128\pi N_A p_k}} \approx 2,7\ \text{Å}$.

7.2.21. Найдите внутреннее давление p', обусловленное силами взаимодействия молекул, заключенных в $\nu = 1$ кмоле газа, находящегося при нормальных условиях (p_0, T_0). Критическая температура $T_k = 417$ К, критическое давление $p_k = 77,1$ атм.

Ответ: $p' = \dfrac{27}{64} \cdot \left(\dfrac{T_k}{T_0}\right)^2 \cdot \dfrac{p_0^2}{p_k} = 1,28 \cdot 10^3 \text{ Па}$.

7.2.22. Найдите внутреннее давление p', обусловленное силами взаимодействия молекул, заключенных в $\nu = 1$ кмоле газа, находящегося при нормальных условиях(p_0, T_0). Критическое давление газа $p_k = 12,6$ атм, критическая температура $T_k = 33,6$ К.

Ответ: $p' = \dfrac{27}{64} \cdot \left(\dfrac{T_k}{T_0}\right)^2 \cdot \dfrac{p_0^2}{p_k} = 51 \text{ Па}$.

7.2.23. Найдите плотность ρ_k водорода при критическом состоянии, считая известной для него $b = 2,66 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Ответ: $\rho_k = M/(3b) = 25,1 \text{ кг/м}^3$.

7.2.24. Найдите изменение температуры при расширении $m = 20$ кг азота в пустоту от $V_1 = 1,0$ м^3 до $V_2 = 2$ м^3.

Ответ: $\Delta T = \dfrac{a\,m}{C_V M} \cdot \dfrac{V_1 - V_2}{V_1 V_2} = -2,35 \text{ К}$, где $C_V = iR/2 = 20,78$ Дж/(моль·К).

7.2.25. Найдите изменение температуры при расширении m = 32 кг кислорода в пустоту от V_1 = 1,2 м^3 до V_2 = 1,6 м^3.

Ответ: $\Delta T = \dfrac{a\,m}{C_V M} \cdot \dfrac{V_1 - V_2}{V_1 V_2} = -1{,}38\ \text{K}$, где $C_V = iR/2 = 20{,}78$ Дж/(моль·К).

Б. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ. ФОРМУЛА ЛАПЛАСА. ЯВЛЕНИЯ КАПИЛЛЯРНОСТИ И СМАЧИВАНИЯ. ИСПАРЕНИЕ И КИПЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{F}{l} \quad \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right],$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости;

$$\sigma = \left(\frac{\Delta\Psi}{\Delta B}\right)_T = \left(\frac{\Delta A}{\Delta B}\right)_T \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}\right],$$

где $\Delta\Psi$ – изменение свободной энергии поверхностной пленки жидкости, связанное с изменением площади ΔB поверхности этой пленки; ΔA – работа, связанная с площадью ΔB поверхности; ΔB – приращение площади поверхности жидкости; B – площадь поверхности жидкости.

Теплота, сообщенная единице поверхности пленки при изотермическом расширении,

$$q = -T\left(\frac{d\sigma}{dT}\right).$$

Изменение внутренней энергии при изотермическом изменении площади пленки от B_0 до B

$$\Delta U = \int_{B_0}^{B} (q+\sigma)\,dB = (q+\sigma)\Delta B\,.$$

Формула Лапласа

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где Δp – избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны; R_1, R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости. Радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны вне жидкости (вогнутый мениск).

Для сферической поверхности

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R},$$

где θ – краевой угол; R – радиус капилляра; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Высота подъема жидкости между двумя близкими и параллельными плоскостями

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d},$$

где d – расстояние между плоскостями.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 7. Определите величину добавочного давления Δp внутри мыльного пузыря диаметром $d = 2{,}5$ см.

Дано:
$d = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м
$\sigma = 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м
Δp – ?

Решение: Применим формулу Лапласа:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Радиусы кривизны R_1 и R_2 двух взаимно перпендикулярных сечений пузыря одинаковы: $R_1 = R_2 = d/2$. Кроме того, нужно учесть, что пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности – внешнюю и внутреннюю. Очевидно, что обе поверхности оказывают давление на воздух, находящийся внутри мыльного пузыря.

Обе поверхности имеют практически одинаковые радиусы, так как толщина τ пленки составляет несколько микрометров, т.е. $\tau_{\text{пленки}} << d/2$.

Учитывая эти обстоятельства, имеем

$$\Delta p = 2 \cdot \frac{2\sigma}{R}, \text{ где } R = d/2.$$

Окончательно получим

$$\Delta p = \frac{8\sigma}{d} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2{,}5 \cdot 10^{-2}} = 12{,}8 \text{ Па}.$$

Обратите внимание, что размерность σ совпадает с размерностью коэффициента жесткости пружины.

Ответ: $\Delta p = 12{,}5$ Па.

Задача 8. Какую работу ΔA нужно совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь диаметром $d = 5$ см?

Дано:	Решение:
$d = 5\cdot10^{-2}$ м	**Решение:** Формула для вычисления работы $\Delta A = \Delta\Psi = \sigma\cdot\Delta B$,
$\sigma = 4\cdot10^{-2}$ Н/м	где $\Delta B = B - B_0$; B – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря; B_0 – удвоенная поверхность отверстия трубки, служащей для выдувания мыльного пузыря.
ΔA – ?	

Ясно, что $B_0 << B$.

Таким образом,

$$\Delta A = 2\sigma\cdot B_{\text{один.}} = 2\sigma\cdot4\pi R^2 = 2\sigma\pi d^2.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\Delta A = 2\cdot3{,}14\cdot4\cdot10^{-2}\cdot(5\cdot10^{-2})^2 = 6{,}3\cdot10^{-4}\text{ Дж} = 0{,}63\text{ мДж}.$$

Ответ: $\Delta A = 0{,}63$ мДж.

Задача 9. Определите изменение свободной энергии $\Delta\Psi$ поверхности мыльного пузыря при изотермическом увеличении его объема от $V_1 = 2$ см^3 до $V_2 = 6$ см^3.

Дано:	Решение:
$V_1 = 2\cdot10^{-6}$ м^3	**Решение:** Изменение свободной энергия $\Delta\Psi$ поверхности жидкости пропорциональна площади этой поверхности
$V_2 = 6\cdot10^{-6}$ м^3	$\Delta\Psi = \sigma\cdot\Delta B$,
$\sigma = 4\cdot10^{-2}$ Н/м	
$\Delta\Psi$ – ?	где σ – коэффициент поверхностного натяжения.

У мыльного пузыря, как известно, имеются две поверхности равной площади из-за малой толщины пленки. Поэтому

$$\Delta\Psi = 2\sigma\cdot\Delta B. \tag{1}$$

Обратим внимание, что свободная энергия подобна потенциальной энергии механических систем, формула $\Delta\Psi = \sigma\cdot\Delta B$ применима для $T = \text{const}$, в противном случае, нужно учитывать зависимость $\sigma = \sigma(T)$.

Учитывая, что $V = (4/3)\pi R^3$, получим

$$R_1 = \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{1/3};\ R_2 = \left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{1/3}, \tag{2}$$

где R_1 – радиус сферы, соответствующий начальному объему V_1; R_2 – радиус сферы, соответствующий конечному объему V_2.

Изменение поверхности:

$$\Delta B = B_2 - B_1 = 4\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right). \tag{3}$$

Подставляя (2) в (3), имеем

$$\Delta B = 4\pi\left(\left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{2/3} - \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}\right).$$

Изменение свободной энергии равно

$$\Delta\Psi = 8\pi\sigma\left(\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3} - \left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{2/3}\right).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\Delta\Psi = 8\pi\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot\left(\left(\frac{3\cdot 6\cdot 10^{-6}}{4\pi}\right)^{2/3} - \left(\frac{3\cdot 2\cdot 10^{-6}}{4\pi}\right)^{2/3}\right) = 6{,}6\cdot 10^{-5}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\Delta\Psi$ = 66 мкДж.

Задача 10. Проволочная рамка *ABCD* (рис. 7.1) устроена так, что одна из ее сторон *mn* может скользить вдоль направляющих *AB* и *CD*. Между *BC* и *mn* образована жидкая пленка из мыльной воды. Длина подвижной проволочки *mn* l = 5 мм. Найдите: 1) скрытую теплоту q образования пленки при T = 293 К; 2) силу F, работу A, которая затрачивается при растяжении пленки на d = 1 см; 3) изменение внутренней энергии ΔU системы при увеличении площади пленки, если известно, что $\sigma(T) = \sigma_0[1 + 0{,}5\cdot(1 - T/273)]$.

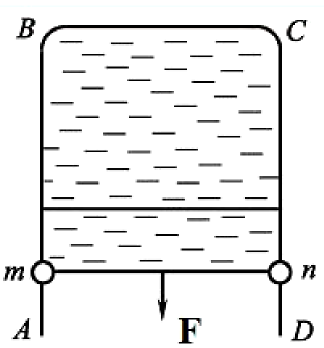

Рис. 7.1

Дано:
$l = 5\cdot 10^{-3}$ м
$d = 1\cdot 10^{-2}$ м
T = 293 К
$\sigma_0 = 4\cdot 10^{-2}$ Н/м

q – ? ΔU – ?
F – ? A – ?

Решение: 1) Скрытая теплота сообщенная единице поверхности пленки при изотермическом расширении

$$q = -T\frac{d\sigma}{dT};$$

$$q = -T\sigma_0\frac{d}{dT}\left[1 + 0{,}5\left(1 - \frac{T}{273}\right)\right] = \frac{\sigma_0}{2}\cdot\frac{T}{273}$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$q = \frac{0{,}04}{2}\cdot\frac{293}{273} = 0{,}021\ \text{Дж/м}^2.$$

2) Сила $F = 2\sigma \cdot l$, где l – длина подвижной проволочки mn, коэффициент «два» учитывает, что пленка имеет две поверхности

$$F = 2\sigma l = 2 \cdot 0,04 \cdot \left[1 + 0,5\left(1 - \frac{293}{273}\right)\right] \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 0,39 \text{ мН}.$$

3) Работа силы F на пути d равна

$$A = F \cdot d = 0,39 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 3,9 \text{ мкДж}.$$

4) Изменение внутренней энергии ΔU при $T = \text{const}$ равно

$$\Delta U = \int_{B_0}^{B} (q + \sigma) dB = (q + \sigma)\Delta B. \tag{1}$$

Из (1), учитывая, что $\Delta B = 2ld$, имеем

$$\Delta U = (q + \sigma)\Delta B = 2(q + \sigma)ld. \tag{2}$$

При $T = 293$ К

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 + 0,5\left(1 - \frac{T}{273}\right)\right] = 0,039 \ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Подставляя числовые значения q, σ, l и d в (2), получим

$$\Delta U = 2(q + \sigma)ld = 2 \cdot (0,021 + 0,039) \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 6 \text{ мкДж}.$$

Ответ: $q = 0,021$ Дж/м^2; $\Delta U = 6$ мкДж; $F = 0,39$ Мн; $A = 3,9$ мкДж.

Задача 11. Мыльная пленка толщиной $\tau = 1$ мкм имеет площадь $B_0 = 0,5$ см^2. Найдите: 1) Изменение энтропии пленки при увеличении ее площади до 2,5 см^2 ($T_0 = 273 = \text{const}$); 2) Изменение энтропии пленки при увеличении температуры от $T_0 = 273$ до $T = 293$ К (площадь остается постоянной, $B_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ м$^2 = \text{const}$).

Дано:
$\tau = 1 \cdot 10^{-6}$ м
$B_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ м^2
$B = 2,5 \cdot 10^{-4}$ м^2
$T_0 = 273$ К
$T = 293$ К
$\sigma_0 = 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м
$\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3
$c_{\text{уд}} = 4190$ Дж/(кг·К)

ΔS_{T_0} – ? ΔS_{B_0} – ?

Решение: Согласно 2-му началу термодинамики энтропия (см. раздел «Энтропия»)

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{CdT - Td\sigma}{T}.$$

После интегрирования получаем

$$\Delta S = C \cdot \ln\frac{T}{T_0} - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_B (B - B_0), \tag{1}$$

где $C = c_{\text{уд}} \cdot \rho \cdot V_0$ – теплоемкость пленки; $c_{\text{уд}}$ – удельная теплоемкость воды; ρ и V_0 – плотность воды и начальный объем мыльной пленки.

Из задачи 4 имеем $\sigma = \sigma_0 \left[1 + 0,5\left(1 - \dfrac{T}{T_0}\right)\right].$

Тогда

$$\frac{\partial\sigma}{\partial T} = -\frac{\sigma_0}{2T_0} = -\frac{0,04}{2\cdot 273} = -7,3\cdot 10^{-5}\ \text{Н/(м}\cdot\text{К)}. \qquad (2)$$

Начальный объем мыльной пленки

$$V_0 = B_0\cdot\tau = 5\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-6} = 5\cdot 10^{-11}\ \text{м}^3. \qquad (3)$$

Теплоемкость пленки

$$C = c_{\text{уд}}\cdot\rho\cdot V_0 = 4{,}19\cdot 10^3\cdot 10^3\cdot 5\cdot 10^{-11} = 2{,}1\cdot 10^{-4}\ \text{Дж/К}. \qquad (3)$$

1) Если $T = \text{const}$, то из (1) и (2), учитывая, что $dT = 0$, имеем

$$\Delta S_{T_0} = -\frac{\partial\sigma}{\partial T}\left(B - B_0\right) = 7,3\cdot 10^{-5}\cdot\left(2,5 - 0,5\right)\cdot 10^{-4} \approx 1,5\cdot 10^{-8}\ \text{Дж/К}.$$

2) При изменении температуры и при постоянной площади B_0 из (1) и (3), найдем

$$\Delta S_{B_0} = C\cdot\ln\frac{T}{T_0} = 2,1\cdot 10^{-4}\cdot\ln\frac{293}{272} \approx 1,5\cdot 10^{-5}\ \text{Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S_{T0} = 1{,}5\cdot 10^{-8}$ Дж/К; $\Delta S_{B0} = 1{,}5\cdot 10^{-5}$ Дж/К.

Задача 12. Глицерин поднялся в капиллярной трубке на высоту h = 25 мм. Определите коэффициент поверхностного натяжения σ глицерина, если диаметр канала трубки d = 0,8 мм. Принять $g = 9{,}8$ м/с^2.

Дано:
$h = 2{,}5\cdot 10^{-2}$ м
$d = 8\cdot 10^{-4}$ м
$\rho = 1{,}26\cdot 10^3$ кг/м^3
$g = 9{,}8$ м/с^2

σ – ?

Решение: Высота поднятия жидкости в цилиндрическом капилляре радиуса R равна

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R},$$

где θ – краевой угол; R – радиус капилляра; ρ – плотность жидкости.

Отсюда

$$\sigma = \frac{\rho g R h}{2\cos\theta}.$$

Радиус капилляра R и угол θ (рис. 7.2) связаны соотношением

$$R = r\cdot\cos\theta,$$

где r – радиус мениска.

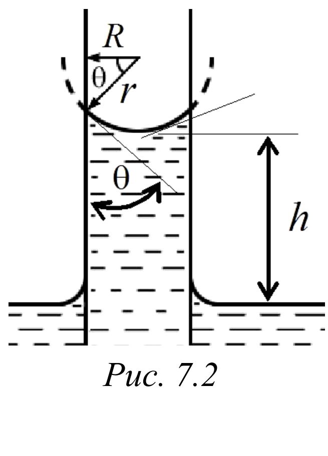

Рис. 7.2

При полном смачивании краевой угол $\theta = 0°$. Для смачивающей жидкости (например, глицерина) краевой угол острый. Поэтому для смачивающей жидкости с достаточной степенью точности можно принять $\cos\theta \approx 1$.

Принимая $R = d/2 \cong r$, имеем

$$\sigma = \frac{\rho g h d}{4} = \frac{1{,}26\cdot 10^{3}\cdot 9{,}8\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 8\cdot 10^{-4}}{4} = 6{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{Н/м}.$$

Ответ: σ = 62 мН/м.

Задача 13. Найдите радиус капли жидкости R, вытекающей из узкой вертикальной капиллярной трубки радиусом $r = 1\cdot 10^{-3}$ м. Считать, что в момент отрыва капля имеет сферическую форму. Расчеты провести для воды.

Дано:
$r = 1\cdot 10^{-3}$ м
$\sigma = 7{,}3\cdot 10^{-2}$ Н/м
$\rho = 1\cdot 10^{3}$ кг/м^3
$g = 9{,}8$ м/с^2
R – ?

Решение: Капля удерживается у трубки силами поверхностного натяжения

$$F_{\text{п}} = \sigma l = 2\pi r\sigma,$$

где $l = 2\pi r$ – длине окружности отверстия трубки.

Сила тяжести $m\mathbf{g}$ висящей сферической капли

$$mg = \rho V g,$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^{3}$; R – радиус капли.

Условие отрыва капли $mg \ge F_{\text{п}}$. Тогда

$$2\pi r\sigma = \frac{4}{3}\pi R^{3}\rho g.$$

Преобразуя, получим

$$R = \sqrt[3]{\frac{3r\sigma}{2\rho g}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 10^{-3}\cdot 7{,}3\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{3}\cdot 9{,}8}} = 2{,}24\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

Ответ: R = 2,24 мм.

Задача 14. В сосуде объемом V = 10 л находилась вода при температуре T_1 = 290 К массой m = 1 г. В результате нагрева на ΔT = 50 К вода испарилась. Найдите давление паров до и после нагрева. Принять $\rho_{\text{н}1} = 1{,}63\cdot 10^{-2}$ кг/м^3 при T_1 = 290 К.

Дано:
$V = 1\cdot 10^{-2}$ м^3
T_1 = 290 К
ΔT = 50 К
$m = 1\cdot 10^{-3}$ кг
$\rho_{\text{в}} = 1\cdot 10^{3}$ кг/м^3
$M = 18\cdot 10^{-3}$ кг/моль
p_1 – ? p_2 – ?

Решение: Первоначально состояние пара описывается уравнением Клапейрона – Менделеева

$$p_1\left(V - V_{\text{в}}\right) = \frac{m_{\text{п}1}}{M}RT_1, \qquad (1)$$

где $V_{\text{в}} = m/\rho_{\text{в}}$ – объем воды в сосуде; $m_{\text{п}1}$ – равновесная масса пара в сосуде при T = 290 К .

Предположим, что пар находится в сосуде с водой достаточно долго.

В этом случае равновесная масса пара

$$m_{п1} = \rho_{н1}(V - V_в). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$p_1 = \frac{\rho_{н1}}{M} R T_1,$$

где $\rho_{н1}$ – плотность насыщенных паров при T_1 = 290 К.

$$p_1 = \frac{\rho_{н1}}{M} R T_1 = \frac{1{,}63 \cdot 10^{-2}}{18 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 290 = 2182 \text{ Па}.$$

После испарения всей воды массой m, получим

$$p_2 V = \frac{m_{п2}}{M} R\left(T_1 + \Delta T\right), \qquad (3)$$

где $m_{п2} = m + m_{п1}$ – первоначальная масса всей воды в сосуде в виде жидкости m и пара $m_{п1}$.

Тогда из (2) и (3) имеем

$$p_2 V = \frac{m_{п1} + m}{M} R\left(T_1 + \Delta T\right) = \frac{\rho_{п1}\left(V - V_в\right) + m}{M} R\left(T_1 + \Delta T\right).$$

Так как $V_в = m/\rho_в$, то

$$p_2 = \frac{\rho_{п1}\left(V - m/\rho_в\right) + m}{MV} R\left(T_1 + \Delta T\right).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$p_2 = \frac{1{,}63 \cdot 10^{-2} \cdot \left(10^{-2} - 1 \cdot 10^{-3}/10^{3}\right) + 1 \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}} \cdot 8{,}31 \cdot 340 \approx 1{,}57 \cdot 10^{4} \text{ Па}.$$

Ответ: $p_1 \approx 2{,}2$ кПа; $p_2 \approx 15{,}7$ кПа.

Примечание. По данным таблицы при T_2 = 340 К ($t_2 \approx 67$ °C) плотность насыщенного пара $\rho_{н2}$ = 0,13 кг/м^3. Определим плотность пара в сосуде при этой температуре: $\rho_2 \approx m/V = 1 \cdot 10^{-3}/10^{-2} = 0{,}1$ кг/м^3. Так как $\rho_2 < \rho_{н2}$, то процесс полного испарения воды при данный температуре возможен.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

10. Какую работу A нужно совершить, чтобы, выдувая мыльный пузырь, увеличить его диаметр от d_1 = 1 см до d_2 = 10 см.

Ответ: $A = 2\pi\sigma\left(d_2^2 - d_1^2\right) = 2{,}49$ мДж.

11. Определите величину добавочного давления Δp внутри мыльного пузыря диаметром d = 5 мм.

Ответ: $\Delta p = 8\sigma/d = 64$ Па.

12. Какое количество энергии выделяется при слиянии двух капель ртути радиусом $r = 1$ мм каждая в одну каплю.

Ответ: $\Psi = 4\pi\sigma r^2\left(2-\sqrt[3]{4}\right) = 2{,}5$ мкДж.

13. Одна из сторон проволочной прямоугольной рамки является подвижной. Передвигая подвижную часть, увеличивают площадь пленки на $\Delta B = 2$ см^2, при этом $T = \text{const}$ и равна 300 К. Вычислите работу ΔA по увеличению площади, изменение внутренней энергии ΔU и энтропии ΔS в этом процессе, если $\sigma = 4\cdot10^{-2}$ Н/м; $d\sigma/dT = -1{,}5\cdot10^{-4}$ Н/(м·К).

Ответ: $\Delta A = 2\sigma\Delta B = 16$ мкДж; $\Delta U = 2[\sigma - (d\sigma/dT)T]\Delta B = 34$ мкДж; $\Delta S = 2(d\sigma/dT)\Delta B = -60$ нДж.

14. Найдите свободную энергию поверхностного слоя: а) капли ртути диаметром $d = 1{,}4$ мм; б) мыльного пузыря диаметром $d = 0{,}6$ см.

Ответ: а) $\Psi_{\text{Hg}} = \pi\sigma d^2 = 3$ мкДж; б) $\Psi_{\text{H}_2\text{O}} = 2\pi\sigma d^2 = 9$ мкДж.

15. Вертикальный капилляр привели в соприкосновение с поверхностью воды. Какое количество теплоты Q выделится при поднятии воды по капилляру? Поверхностное натяжение равно σ. Смачивание считать полным.

Ответ: $Q = 2\pi\sigma^2/(\rho g) = 3{,}4$ мкДж.

16. Две параллельные друг другу стеклянные пластины частично погружены вертикально в воду. Расстояние между пластинами $d = 0{,}1$ мм, их ширина $l = 12$ см. Найдите силу F, которую нужно приложить, чтобы оторвать пластины друг от друга. Считать смачивание полным.

Ответ: $F = 2\sigma^2 l/\left(\rho g d^2\right) = 13$ Н.

17. Камера Вильсона заполнена пересыщенным водяным паром при температуре $°t = -7$ °С. Давление паров p в 1,12 раза больше давления насыщенных паров p_0 над плоской поверхностью воды при той же температуре. Найдите равновесный радиус r капель воды, образующихся при прохождении α-частиц через камеру Вильсона.

Указание. Зависимость давления насыщенного пара над искривленной поверхностью от радиуса ее кривизны r выражается законом: $p = p_0 \exp\left(\frac{2\sigma M}{\rho RT}\cdot\frac{1}{r}\right)$.

Ответ: $r = \dfrac{2\sigma M}{\rho RT\cdot\ln\left(p/p_0\right)} \approx 11$ нм.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

7.3.1. Найдите дополнительное (лапласовское) давление Δp, создаваемое поверхностью находящегося под водой пузырька воздуха диаметром d_1 = 18 мм; мыльного пузыря диаметром d_2 = 20 мм.

Ответ: $\Delta p_1 = 4\sigma_1/d_1$ = 16,2 Па; $\Delta p_2 = 8\sigma_2/d_2$ = 16 Па.

7.3.2. Каким диаметром d должен обладать мыльный пузырь, чтобы дополнительное давление Δp на его поверхности было равно 200 Па.

Ответ: $d = 8\sigma/\Delta p$ = 1,6 мм.

7.3.3. Определите внутренний диаметр d стеклянного капилляра, если искривленная поверхность воды в ней создает дополнительное давление Δp = 320 Па, а краевой угол θ = 30°.

Ответ: $d = 4\sigma\cos\theta/\Delta p$ = 0,79 мм.

7.3.4. Диаметр капилляра равен d = 0,2 мм. Определите высоту h поднятия воды и керосина при температуре T = 290 К.

Ответ: $h_1 = 4\sigma_1/(\rho g d)$ = 15 см; $h_2 = 4\sigma_2/(\rho g d)$ = 6,3 см.

7.3.5. Определите, насколько опустится ртуть при погружении в нее капилляра диаметром d = 0,2 мм. Краевой угол θ = 138°, T = 290 К

Ответ: $h = 4\sigma\cos\theta/(\rho g d)$ = –5,5 см.

7.3.6. Найдите дополнительное давление Δp, создаваемое мыльным пузырем диаметром d = 3,2 мм.

Ответ: $\Delta p = 8\sigma/d$ = 100 Па.

7.3.7. Высота h поднятия воды в стеклянном капилляре равна 1,5 см. Определите радиус R капилляра. Краевой угол θ = 30°.

Ответ: $R = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g h} = 0{,}86$ мм.

7.3.8. Найдите максимальное значение диаметра d стальной иглы, которая, будучи загрязнена маслом, может плавать в горизонтальном положении на поверхности воды. Диаметр иглы $d = l/\alpha$, где α = 20, l – длина иглы. Глубина погружения иглы равна радиусу r иглы, рис. 7.3.
Указание: $f_z = 2\sigma(d + l)$.

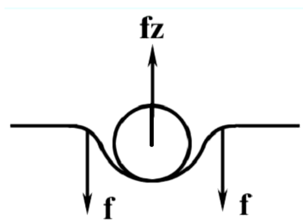

Рис. 7.3

Ответ: $d = \sqrt{\dfrac{8\sigma}{\pi\rho_{ст} g}\cdot\dfrac{1+\alpha}{\alpha}} = 1{,}6$ мм.

7.3.9. Внутренние радиусы U-образной капиллярной трубки слева и справа равны, соответственно, R_1 = 0,05 мм и R_2 = 0,1 мм. Найдите разность Δh уровней воды в трубке. Краевой угол принять равным θ=30°.

Ответ: $\Delta h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g}\cdot\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right) = 12{,}9\ \text{см}$.

7.3.10. Вычислить диаметр d капиллярной трубки, если вода поднимается на высоту h = 8 см. Краевой угол θ = 30°. Температура воды равна 293 К.

Ответ: $d = \dfrac{4\sigma\cos\theta}{\rho g h} = 0{,}32\ \text{мм}$.

7.3.11. Разность Δh высоты подъема воды в капиллярах равна 2,5 см. Вычислить внутренние диаметры d_1 и d_2 капилляров, если один диаметр больше другого в 2 раза. Смачивание считать полным.

Ответ: $d_1 = 4\sigma/(\rho g\Delta h) \approx 1{,}2$ мм; $d_2 = d_1/2 \approx 0{,}6$ мм.

7.3.12. Внутренний радиус капилляра R = 0,1 мм. Капилляр опущен в керосин. Вычислить работу A поверхностных сил и потенциальную энергию U поднятого столба жидкости. Смачивание считать полным.

Ответ: $A = \sigma\Delta B = \dfrac{4\pi\sigma^2}{\rho g} = 0{,}92\ \text{мкДж}$; $U = \dfrac{2\pi\sigma^2}{\rho g} = 0{,}46\ \text{мкДж}$.

7.3.13. При измерении коэффициента поверхностного натяжения этилового спирта использовалась капиллярная трубка с внутренним радиусом R = 0,075 мм. Высота h поднятия спирта при T = 293 К равна 7,6 см. Чему равно поверхностное натяжение, если $\cos\theta \approx 1$?

Ответ: $\sigma = \rho g h R/2$ = 22 мН/м.

7.3.14. Определите массу m керосина, поднятого в капилляре, если внутренний диаметр d капилляра, опущенного в керосин, равен 0,2 мм.

Ответ: $m = \pi d\sigma/g$ = 1,5 мг.

7.3.15. Каково давление p в пузырьках воздуха, образующихся в воде на глубине h = 3,5 м? Радиус пузырьков равен R = 1,83 мкм. Атмосферное давление p_0 = 100 кПа.

Ответ: $p = p_0 + \rho g h + \dfrac{2\sigma}{R} = 214\ \text{кПа}$.

7.3.16. Добавочное давление Δp внутри мыльного пузыря равно 29 Па, поверхностное натяжение мыльной воды при T = 280 К равно 0,043 Н/м. Определите диаметр d мыльного пузыря.

Ответ: $d = 8\sigma/\Delta p$ = 12 мм.

7.3.17. Масса N = 100 капелек этилового спирта, вытекающего из капилляра m = 0,71 г. Определите коэффициент σ поверхностного натяжения спирта, если диаметр шейки капли в момент отрыва d = 1 мм.

Ответ: $\sigma = mg/(N\pi d) = 22$ мН/м.

7.3.18. Трубка имеет диаметр d_1 = 0,2 см. На нижнем конце трубки повисла капля воды, имеющая в момент отрыва вид шара. Найдите диаметр d_2 этой капли.

Ответ: $d_2 = \sqrt[3]{6\sigma d_1/(\rho g)} = 4{,}5$ мм.

7.3.19. Определите массу m капли этилового спирта, вытекающего по каплям из капилляра, если диаметр d шейки капли в момент отрыва равен 1 мм.

Ответ: $m = \pi d\sigma/g = 7{,}1$ мг.

7.3.20. Пространство между двумя стеклянными пластинами, расположенными параллельно друг другу, заполнено водой. Толщина слоя воды l = 0,022 мм. Размеры пластинок a^2 = 10×10 см^2. Определите силу F, прижимающую пластинки друг к другу, считая, что мениск вогнутый с диаметром d, равным толщине слоя воды l.

Ответ: $F = 2a^2\sigma/d = 66{,}4$ Н.

7.3.21. Давление p в пузырьках воздуха, образующихся в воде на глубине h = 3,5 м, равно 214 кПа. Чему равен радиус R пузырьков, если атмосферное давление p_0 = 100 кПа?

Ответ: $R = \dfrac{2\sigma}{p - p_0 - \rho g h} = 1{,}83$ мкм.

7.3.22. Внутренний радиус капилляра R = 0,1 мм. Вычислить работу A поверхностных сил, если в качестве жидкости выбран керосин.

Ответ: $A = 4\pi\sigma^2/(\rho g) = 0{,}92$ мкДж.

7.3.23. В воду опущена на очень малую глубину стеклянная трубка с внутренним диаметром d = 1 мм. Найдите массу m вошедшей в трубку воды.

Ответ: $m = \pi d\sigma/g$ = 23,4 мг.

7.3.24. На какую высоту h поднимается вода между двумя параллельными друг другу стеклянными пластинками, если расстояние между ними d = 0,2 мм. Смачивание считать полным.

Ответ: $h = 2\sigma/(\rho g d)$ = 7,4 см.

7.3.25. Капиллярная трубка с внутренним радиусом r = 0,25 мм наполнена водой. Часть воды на нижнем конце трубки повисла в виде капли. Эту каплю принимаем за часть сферы радиусом R = 3 мм. Найдите высоту h столбика воды в трубке.

Ответ: $h = \dfrac{6\sigma - 4r^2\rho g}{3\rho g R} = 4{,}9$ мм.

7.4.1. В отростке сосуда, закрытого поршнем, находится некоторая масса воды в равновесии с насыщенным паром. Диаметр сосуда и отростка D = 5 см и d = 2 мм. Поддерживая температуру равной $°t$ = 20 °С, поршень опускают на высоту H = 10 см; уровень воды в отростке при этом повышается на высоту h = 1 мм (рис. 7.4). Определите давление насыщенного пара при $°t$ = 20 °С.

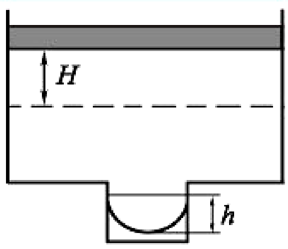

Рис. 7.4

Ответ: $p = \dfrac{\rho d^2 h}{M} \cdot \dfrac{RT}{DH} = 2{,}13 \cdot 10^3$ Па.

7.4.2. В запаянной трубке объемом V = 0,4 л находится водяной пар при давлении p_1 = 8 кПа и температуре $°t_1$ = 150 °С. Какая масса m воды сконденсируется на стенках трубки при охлаждении ее до температуры $°t_2$ = 22 °С? Давление насыщенного пара воды при $°t_2$ = 22 °С p_2 = 2,5 кПа.

Указание. Воспользоваться уравнением Клапейрона – Менделеева $pV = \dfrac{m_{\text{пар}}}{M} RT$.

Ответ: $\Delta m = \dfrac{MV}{R} \cdot \left(\dfrac{p_1}{T_1} - \dfrac{p_2}{T_2} \right) = 8{,}9$ мг.

7.4.3. В откаченном геометрически закрытом сосуде объемом V = 10 л находится открытая колбочка, содержащая m = 10 г воды. Сосуд прогревают до $°t$ = 100 °С. Какая масса Δm воды испарится?
Указание. Вода начнет кипеть тогда, когда давление p станет равным атмосферному p_0. Поэтому Δm находим из уравнения Клапейрона – Менделеева.

Ответ: $\Delta m = \dfrac{M p_0 V}{RT} = 5{,}8$ г.

7.4.4. На сколько нагреется капля ртути, полученная от слияния двух капель радиусом R = 1 мм каждая?

Ответ: $\Delta T = \dfrac{3\sigma}{2c\rho R}\left(2-\sqrt[3]{4}\right) = 1{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{К}$,

где c – удельная теплоемкость ртути.

7.4.5. Какую работу надо совершить против сил поверхностного натяжения, чтобы разбить сферическую каплю ртути радиусом R = 3 мм на две одинаковые капли.

Ответ: $A = \dfrac{4\pi\sigma R^2}{1{,}59}\left(2-\sqrt[3]{4}\right) = 14{,}4\ \text{мкДж}$.

7.4.6. Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы увеличить вдвое объем мыльного пузыря радиусом R = 1 см.

Ответ: $A = 8\pi\sigma R^2\left(2^{2/3}-1\right) = 59\ \text{мкДж}$.

7.4.7. Определите изменение свободной энергии при изотермическом увеличении объема мыльного пузыря с V_1 = 4 см^3 до V_2 = 6 см^3.

Ответ: $\Delta\Psi = 8\pi\sigma\left(\left(\dfrac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3} - \left(\dfrac{3V_2}{4\pi}\right)^{2/3}\right) = 30\ \text{мкДж}$.

7.4.8. При выдувании мыльного пузыря была совершена работа A = 0,63 мДж. До каких размеров выдули пузырь?

Ответ: $R = \sqrt{A/(8\pi\sigma)} = 25\ \text{см}$.

7.4.9. Найдите скрытую теплоту Q образования мыльной пленки площадью S = 1 м^2, если $\sigma(T) = \sigma_0[1 + 0{,}5(1 - T/T_0)]$, σ_0 = 40 мН/м, T_0 = 273 K, $°t$ = 5 °C.

Ответ: $Q = \sigma_0 S\cdot T/(2T_0)$ = 0,02 Дж.

7.4.10. При выдувании мыльного пузыря изменение внутренней энергии составило ΔU = 300 мкДж. Определите конечный объем V пузыря, если V_0 = 4 см^3. Принять $d\sigma/dT = -1{,}5\cdot 10^{-4}$ Н/(м·K), T = 290 K.

Ответ: $V = \left[V_0^{2/3} + \Delta U\Big/\left(8\pi\left(\sigma - T\cdot\dfrac{d\sigma}{dT}\right)\left(\dfrac{3}{4\pi}\right)^{2/3}\right)\right]^{3/2} = 15{,}5\ \text{см}^3$.

7.4.11. В камере Вильсона объемом V_0 = 1 л заключен воздух, насыщенный водяными парами. Начальная температура камеры $°t_0$ = 20 °C. При движении поршня объем камеры увеличился в $\delta = V_1/V_0$ = 1,25 раза. Расширение считать адиабатическим (γ = 1,4). Найдите температуру T_1 пара после расширения и массу Δm водяных паров, сконденсированных в воду.

Указание: при температуре $°t_1 = -5$ °С упругость насыщенных паров p_0 = 400 Па; Δm – равно разности массы водяных паров до расширения (p_1 = 2330 Па при температуре $°t_0$ = 20 °С) и после расширения.

Ответ: $T_1 = T_0\left(\dfrac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 268$ К; $\Delta m = \dfrac{M_{H_2O}V_0}{R}\left(\delta\dfrac{p_1}{T_1} - \dfrac{p_0}{T_0}\right) = 20{,}4$ мг.

7.4.12. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на Δp = 133 Па больше атмосферного. Чему равен диаметр d пузыря, если коэффициент поверхностного натяжения σ мыльного раствора равен 0,043 Н/м.

Ответ: $d = 8\sigma/\Delta p$ = 2,6 мм.

7.4.13. Рамка $ABCD$ (рис. 7.5) с подвижной перекладиной CD затянута мыльной пленкой. Каков должен быть диаметр медной перекладины CD, чтобы она находилась в равновесии.

Ответ: $d = \sqrt{8\sigma/(\pi\rho_{Cu}g)} = 1{,}1$ мм.

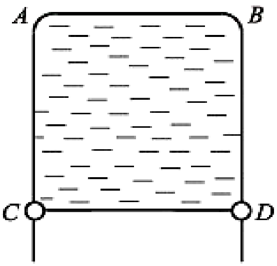

Рис. 7.5

7.4.14. Под поршнем цилиндра объемом V_1 = 10 л находится m = 1,9 г газообразного аммиака. Цилиндр помещен в термостат при $°t = -57$ °С. Какая масса аммиака сконденсируется при сжатии газа поршнем до объема V_2 = 5 л? Давление $p_н$ насыщенного пара аммиака при температуре $°t = -57$ °С равен 26,7 кПа. Молярная масса газообразного аммиака $M = 17 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $\Delta m = m - Mp_н(V_1 - V_2)/(RT)$ = 0,64 г.

7.4.15. Какую энергию $\Delta\Psi$ надо затратить, чтобы выдуть мыльный пузырь диаметром d = 12 см? Каково будет добавочное давление Δp внутри этого пузыря?

Ответ: $\Delta\Psi = 2\sigma\pi d^2$ = 3,62 мДж; $\Delta p = 8\sigma/d$ = 2,67 Па.

7.4.16. Широкое колено U-образного манометра имеет диаметр d_1 = 2 мм, узкое – d_2 = 1 мм. Определите разность Δh уровней ртути в обоих коленах, краевой угол θ = 138°.

Ответ: $\Delta h = \dfrac{4\sigma\cos\theta}{\rho g} \cdot \left(\dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{d_1}\right) = 5{,}5$ мм.

7.4.17. Найдите добавочное давление Δp внутри мыльного пузыря диаметром d = 10 см. Какую работу A надо совершить, чтобы выдуть этот пузырь? T = const.

Ответ: $\Delta p = 8\sigma/d$ = 3,2 Па; $A = 2\sigma\pi d^2$ = 2,5 мДж.

7.4.18. Определите работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить размер мыльного пузыря с d_1 = 6 мм до d_2 = 60 мм. Считать процесс изотермическим.

Ответ: $\Delta A = 2\pi\sigma\left(d_2^2 - d_1^2\right) = 0{,}9$ мДж.

7.4.19. Две капли воды радиусом r = 1 мм каждая слились в одну каплю. Определите изменение свободной энергии $\Delta\Psi$ в данном процессе. Считать T = const.

Ответ: $\Psi = 4\pi\sigma r^2\left(2 - \sqrt[3]{4}\right) = 0{,}38$ мкДж.

7.4.20. Рамка $ABCD$ (рис. 7.6) с подвижной перекладиной CD затянута мыльной пленкой. Найдите, чему равна длина l перекладины, если известно, что при перемещении перекладины на Δx = 1 см совершается работа $A = 4{,}5\cdot10^{-5}$ Дж; σ = 0,045 Н/м.

Ответ: $l = A/(2\sigma\cdot\Delta x)$ = 5 см.

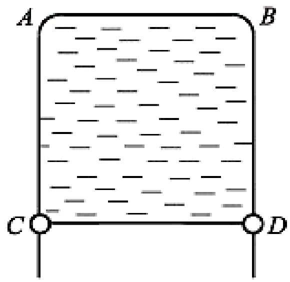

Рис. 7.6

7.4.21. Мыльная пленка имеет площадь B_1 = 2 см^2. Найдите изменение энтропии пленки при увеличении ее площади до B_2 = 3 см^2 (T = 273 К = = const). Известно, что $\sigma(T) = \sigma_0[1 + 0{,}5\cdot(1 - T/T_0)]$, где T_0 = 290 К, σ_0 = 40 мН/м.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{2\sigma_0\left[1+0{,}5\left(1-T/T_0\right)\right]}{T}\cdot\left(B_1 - B_2\right) = 3\cdot10^{-8}$ Дж/К.

7.4.22. Найдите изменение энтропии пленки при её нагревании от $°t_0$ = 0 °С до $°t$ = 30 °С, если известно, что теплоемкость C данной пленки равна $2{,}1\cdot10^{-4}$ Дж/К.

Ответ: $\Delta S = C\cdot\ln(T/T_0) = 2{,}2\cdot10^{-5}$ Дж/К.

7.4.23. Определите давление p воздуха в воздушном пузырьке диаметром d = 0,01 мм, находящемся на глубине h = 2 м под поверхностью воды. Атмосферное давление p_0 = 102 кПа.

Ответ: $p = p_0 + \rho g h + \dfrac{4\sigma}{d} = 151$ кПа.

7.4.24. Воздушный пузырек диаметром d = 0,02 мм находится на глубине h = 2,5 м над поверхностью воды. Определите давление p воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление p_0 = 100 кПа.

Ответ: $p = p_0 + \rho g h + \dfrac{4\sigma}{d} = 139$ кПа.

7.4.25. Длина l подвижной проволоки в рамке abcd равна 5 см (рис. 7.7). Найдите работу A по растяжению мыльной пленки на Δx = 2 см. Температура пленки T = const = 290 К.

Ответ: $A = 2\sigma l \Delta x$ = 80 мкДж.

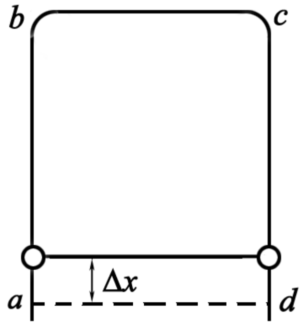

Рис. 7.7

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(моль·К)
Число Авогадро	$N_{\text{А}} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/ К
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Постоянная в законе Кулона	$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $\hbar = h/(2\pi)$
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с
Элементарный заряд	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Фарадея	$F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль
Радиус первой боровской орбиты	$a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м
Энергия связи электрона в атоме водорода	$E = 13{,}6$ эВ
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_e = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ м
Классический радиус электрона	$r_e = 2{,}82 \cdot 10^{-15}$ м
Нормальное атмосферное давление	$p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па

Таблица 2

Некоторые астрономические величины

Наименование	Числовое значение
Солнечная постоянная	$C = 1{,}37 \cdot 10^3$ Дж/(м^2·с)
Средний радиус Земли	$R_{\text{З}} = 6{,}371 \cdot 10^6$ м
Радиус Солнца	$R_{\text{С}} = 6{,}95\ 10^8$ м
Радиус Луны	$R_{\text{Л}} = 1{,}74 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$M_{\text{З}} = 5{,}98\ 10^{24}$ кг
Масса Солнца	$M_{\text{С}} = 1{,}98\ 10^{30}$ кг
Масса Луны	$M_{\text{Л}} = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Период обращения Земли вокруг Солнца	$T_{\text{ЗС}} = 1$ год $= 3{,}156 \cdot 10^7$ с
Период обращения Земли вокруг своей оси	$T_{\text{З}} = 1$ сут $= 8{,}64 \cdot 10^4$ с
Период обращения Луны вокруг Земли	$T_{\text{ЛЗ}} = 2{,}36 \cdot 10^6$ с
Среднее расстояние от Земли до Луны	$r_{\text{ЗЛ}} = 3{,}84 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние от Земли до Солнца	$r_{\text{ЗС}} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м
Астрономическая единица (1 а. е. = $r_{\text{ЗС}}$)	1 а. е. = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ м
Парсек (единица длины в астрономии)	1 пк = 206 265 а. е. $\approx 3 \cdot 10^{16}$ м
Световой год (1 с.г = $T_{\text{ЗС}} \cdot c$)	1 с.г. = 0,3068 пк = $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м

Таблица 3

Плотность ρ некоторых твердых тел и жидкостей

Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3
Алюминий	2,7	Лед	0,92
Вода	1,0	Медь	8,9
Глицерин	1,26	Натрий	0,97
Железо (сталь)	7,8	Никель	8,8
Золото	19,3	Олово (°t > 14 °C)	7,3
Калий	0, 96	Ртуть	13,6
Кварц	2,65	Серебро	10,5
Керосин	0,8	Спирт (этиловый)	0,794

Таблица 4

Молярная масса M некоторых веществ

Вещество	M, 10^{-3} кг/моль	Вещество	M, 10^{-3} кг/моль
Азот, N_2	28	Неон, Ne	20
Алюминий, Al	27	Никель, Ni	58,7
Аммиак, NH_3	17	Окись азота, NO	30
Аргон, Ar	39,8	Олово, Sn	119
Водород, H_2	2	Ртуть, Hg	200,6
Водяной пар, H_2O	18	Серебро, Ag	108
Воздух	29	Угарный газ, CO (окись углерода)	28
Гелий, He	4	Углекислый газ, CO_2	44
Золото, Au	197	Углерод, C	12
Иод, I	127	Фтор, F	19
Кислород, O_2	32	Хлор, Cl_2	71
Метан, CH_4	16	Эфир	74
Натрий, Na	23		

Таблица 5

Температура плавления $t_{пл}$,, удельная теплоемкость c, удельная теплота плавления λ и испарения (парообразования) r некоторых веществ

Вещество	$t_{пл}$, °C	c, Дж/(кг·K)	λ, 10^5 Дж/кг	r, 10^5 Дж/кг
Вода	–	4190	–	22,6
Железо	1538	455	2,46	62,5
Золото	1063	129	0,64	17,7
Латунь	940	380	–	–
Лед	0	2100	3,33	–
Медь	1083	390	1,75	–
Олово	232	200	0,60	–
Ртуть	–38,9	140	0,115	2,95
Серебро	961	234	1,05	24,7
Свинец	327	126	0,25	8,6

Таблица 6

Некоторые дополнительные физические характеристики

Скорость звука в воздухе при нормальных условиях	$v_{зв}$ = 340 м/с
Нормальное атмосферное давление	$p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па
Температура кипения воды при $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па	t = 100 °C
Удельная теплота сгорания бензина	$q = 4{,}5 \cdot 10^7$ Дж/кг

Таблица 7

Константы Ван-дер-Ваальса и критические параметры некоторых веществ

Газ	p_k, 10^5 Па	V_k, 10^{-5} м^3/моль	T_k, К	a, Па·м^6/моль^2	b, 10^{-5} м^3/моль	ρ_k, кг/м^3
H_2	13,0	6,55	33,2	0,024	2,66	31,0
N_2	33,9	9,21	126	0,137	3,86	304
O_2	50,8	7,80	155	0,138	3,17	410
HCl	55,6	8,01	143	0,107	2,67	456
Cl_2	77,1	12,4	417	0,657	5,62	57,3
H_2O	221	5,63	647	0,552	3,04	320
CO_2	73,9	9,40	304	0,365	4,28	468
He	2,29	5,75	5,20	0,0034	2,36	69,3
Ne	27,2	4,17	44,5	0,0211	1,69	484
Ar	48,6	7,52	151	0,136	3,22	531
Kr	55,0	9,23	209	0,232	3,95	908

П р и м е ч а н и е . Константы a и b выбраны таким образом, чтобы получить оптимальное согласование уравнения Ван-дер-Ваальса с измеренными изотермами для комнатной температуры.

Таблица 8

Поверхностное натяжение некоторых жидкостей при 18 °C

Жидкость	σ, мН/м	Жидкость	σ, мН/м
Вода	73	Керосин	24
Водный раствор NaCl 26%	82	Масло оливковое	34
Водный раствор спирта 40%	30	Масло касторовое	37
Спирт (этиловый)	22	Мыльная вода	40
Вода – бензол	33,6	Ртуть	490
Вода – эфир	12,2	Ртуть – вода	427
Бензол	29	Скипидар	26
Глицерин	62	Эфир	16,5
Жидкий азот (при 77 К)	8	Жидкий гелий (при 4 К)	0,1
Жидкий водород (при 14 К)	3		

Таблица 9

Эффективный диаметр d молекул, динамическая вязкость η и теплопроводность λ газов при нормальных условиях

Вещество	Эффективный диаметр d, нм	Динамическая вязкость η, мкПа·с	Теплопроводность λ, мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	168
Воздух	0,38	17,2	24,1
Гелий	0,22	–	–
Кислород	0,36	19,8	24,4
Пары воды	–	8,32	15,8

Таблица 10

Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{arctg}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{arcctg}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x$
e^x	e^x	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$
e^{nx}	ne^{nx}	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\mathrm{th}x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu'-uv'}{v^2}$	$\mathrm{cth}x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		

Таблица 11

Таблица интегралов

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln \cos x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x$	
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x$	

Таблица 12

Некоторые десятичные приставки

Наименование	тера	гига	мега	микро	нано	пико	фемто	атто
Приставка	Т	Г	М	мк	н	п	ф	а
Множитель	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ТЮРИН Юрий Иванович
ЛАРИОНОВ Виталий Васильевич
ТОЛМАЧЕВА Нелла Дмитриевна
АНТРОПОВ Николай Андреевич
ГОРЯЧЕВ Борис Валентинович
КУЗНЕЦОВ Сергей Иванович
ПЕТРОВА Ольга Юрьевна
СМЕКАЛИНА Татьяна Владимировна
СТЕПАНОВА Екатерина Николаевна
ШОШИН Эдуард Борисович

ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
(с решениями)

Молекулярная физика.
Термодинамика

Учебное пособие

Научный редактор *доктор физико-математических наук, профессор Ю.И. Тюрин*

Редактор *Н.Т. Синельникова*
Компьютерная верстка *В.И. Толмачев*
Дизайн обложки *А.И. Сидоренко*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати 26.12.2013. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 9,86.
Заказ 1492-13. Тираж 100 экз.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru