МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
(с решениями)

ЧАСТЬ 3
Оптика. Атомная и ядерная физика

Допущено Научно-методическим Советом по физике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям

2-е издание

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 53(076)
ББК 22.3я73
Ф50

Авторы:
Ю.И. Тюрин, В.В. Ларионов, И.П. Чернов, Н.А. Ефремова, С.И. Кузнецов,
Е.И. Купрекова, Л.Ю. Лельчук, В.Ф. Рудковская, Л.И. Семкина,
Ю.А. Сивов, Н.Д. Толмачева, В.Д. Хоружий

Ф50 **Физика. Сборник задач (с решениями).** Часть 3. **Оптика. Атомная и ядерная физика:** учебное пособие / под ред. Ю.И. Тюрина, В.В. Ларионова, И.П. Чернова; Томский политехнический университет. – 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 238 с.

ISBN 978-5-98298-624-5

Сборник (ч. 3) включает 500 задач по всем разделам курса физики «Оптика. Атомная и ядерная физика». Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения в виде основных формул, задачи с решениями и задачи для самостоятельного анализа. Основное внимание уделено методике решения задач для применения полученных решений при изучении технических устройств.

Предназначен для студентов и преподавателей технических университетов. Ориентирован на организацию самостоятельной индивидуальной работы.

УДК 53(076)
ББК 22.3я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук,
профессор Московского индустриального университета,
член-корреспондент РАО
В.В. Тихомиров

Доктор педагогических наук, профессор ТПУ
В.А. Стародубцев

ISBN 978-5-98298-624-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный сборник содержит 200 решенных задач и 300 задач для самостоятельного решения, которые распределены по вариантам различной степени трудности. По составу и структуре задачник полностью соответствует учебнику по физике: Ю.И. Тюрин, И.П. Чернов, Ю.Ю. Крючков. Физика. Часть 3. Оптика. Квантовая физика. Задачи имеют подробные решения и анализ. Это позволяет студентам освоить не только схему, но и тщательно проследить за логикой решения, чтобы эффективно использовать приобретенные знания в дальнейшей работе. Часть задач составлена по публикациям известных российских физиков и носит оригинальный характер. Как и в теоретической части, основное внимание уделено раскрытию физического смысла фундаментальных законов волновой и квантовой оптики, квантово-механическому описанию свойств атомов и ядер, современным представлениям физики элементарных частиц.

Задачи располагаются в строго логической последовательности. Самостоятельное решение по вариантам позволяет проверить индивидуальные способности каждого студента. Некоторые разделы содержат также качественные задачи с краткими примерами ответов к ним. Такие подсказки формируют логическую базу для самостоятельного анализа, с их помощью обучение физике приносит наибольшую пользу, т. к. они являются видом деятельного творчества. Форма представления решения позволяет применить задачи для интерактивного тестирования и анализа явлений, изучаемых в ходе выполнения лабораторных работ.

Полезно при решении задач в заключительной части курса физики инновационного, исследовательского университета иметь в виду деление задач на познавательно-практические и творческие. Признаком познавательно-практической задачи является известный заранее результат при неизвестном средстве его достижения. Этот метод получил название метода обратных задач и считается эффективным и продуктивным в плане развития творческих способностей обучаемых. В этой связи информационные технологии в физике существенно поднимают роль и значение преподавателя для создания соответствующего диалогового режима обучения.

Инженерные способности студентов в техническом университете развиваются в курсе физики путем применения творческих задач в процессе моделирования, изобретательства, экспериментирования. Существенно, что при этом исключается недооценка тех задач, когда известен результат, но неизвестны средства его достижения. Именно последнее обстоятельство делает задачи проблемными, так как предполагает несколько путей их решения, что характерно для всех задач курса физики технического университета.

Инновационное образование требует от студентов владеть навыками технических решений хотя бы в игровом варианте. Этому в немалой степени соответствует предлагаемый сборник.

По отдельным темам авторами глав являются Н.А. Ефремова (4), С.И. Кузнецов (8), Е.И. Купрекова (3, 7), В.В. Ларионов (1, 2, 7, 8, 10), Л.Ю. Лельчук (11), В.Ф. Рудковская (1, 4), Л.И. Семкина (6), Ю.А. Сивов (11), Н.Д. Толмачева (5, 10), Ю.И. Тюрин (9), И.П. Чернов (5), В.Д. Хоружий (9,10).

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Основные формулы и обозначения

Фокусное расстояние сферического зеркала

$$F = R/2,$$

где R – радиус кривизны зеркала.

Оптическая сила сферического зеркала

$$D = 1/F.$$

Формула сферического зеркала

$$\pm\frac{1}{F} = \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f},$$

где d и f – расстояния от полюса зеркала, соответственно, до предмета и изображения. Знак «плюс» соответствует действительным величинам, а знак «минус» – мнимым.

Закон преломления света на границе двух сред с показателями преломления n_1 и n_2:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21},$$

где α – угол падения; β – угол преломления; $n_{21} = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления второй среды относительно первой; n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления, соответственно, первой и второй сред.

Оптическая сила сферической преломляющей поверхности:

$$D = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

где n_1, n_2 – показатели преломления первой и второй среды, R – радиус кривизны.

Оптическая сила системы двух тонких линз или двух сферических преломляющих поверхностей с оптической силой D_1 и D_2, сложенных вплотную,

$$D = D_1 + D_2.$$

Фокусное расстояние F тонкой линзы в среде с показателем преломления $n_{ср}$ определяется по формуле

$$\frac{1}{F} = \frac{D}{n_{ср}} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где $n_л$ – абсолютный показатель преломления вещества линзы; радиусы выпуклых поверхностей R_1 и R_2 берутся со знаком «плюс», вогнутых – со знаком «минус».

Формула тонкой линзы

$$\pm\frac{1}{F}=\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f},$$

где d и f – расстояния от оптического центра линзы, соответственно, до предмета и изображения. Знак «плюс» перед $1/F$ соответствует собирающей линзе, знак «минус» – рассеивающей. Знак «плюс» перед $1/f$ соответствует действительному изображению, знак «минус» – мнимому.

Увеличение линзы

$$\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d},$$

где h и H – линейные размеры (высота), соответственно, предмета и его изображения.

Угловое увеличение лупы

$$\Gamma = d_0/F,$$

где d_0 – расстояние наилучшего зрения (d_0 = 25 см).

Угловое увеличение телескопа в случае, когда в телескоп наблюдают удаленные предметы,

$$\Gamma = F_1/F_2,$$

где F_1 и F_2 – фокусные расстояния, соответственно, объектива и окуляра.

Увеличение микроскопа

$$\Gamma=\frac{d_0\delta}{F_1F_2},$$

где δ – расстояние между фокусами объектива и окуляра; F_1 и F_2 – фокусные расстояния объектива и окуляра.

Задачи с решениями

Задача 1. Световой луч падает под углом $\alpha = 60°$ на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной d = 10 см. Определить смещение S луча пластинкой, если пластинка погружена в воду. Показатели преломления стекла и воды, соответственно, равны n_2 = 1,5, n_1 = 1,33.

Дано:
$\alpha = 60°$
d = 10 см
n_1 = 1,33
n_2 = 1,5
S – ?

Решение. Из прямоугольных треугольников AOC и BOC (рис. 1.1) следует: $CO=\dfrac{d}{\cos\beta}=\dfrac{S}{\sin(\alpha-\beta)}$.

Отсюда смещение луча пластинкой

$$S=\frac{d\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}=d\left(\sin\alpha-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}\right). \quad (1)$$

По закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1},\quad \sin\beta=\frac{n_1\sin\alpha}{n_2}. \qquad (2)$$

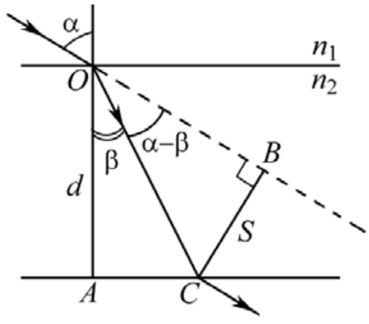

Рис. 1.1

Следовательно,

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{1}{n_2}\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в формулу (1):

$$S=d\left(\sin\alpha-\frac{n_1n_2\cos\alpha\sin\alpha}{n_2\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\alpha}}\right)=d\left(\sin\alpha-\frac{n_1\sin 2\alpha}{2\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\alpha}}\right)=$$

$$=10\left(\sin 60^\circ-\frac{1{,}33\sin 120^\circ}{2\sqrt{1{,}5^2-1{,}33^2\sin^2 60^\circ}}\right)=2{,}67 \text{ см.}$$

Ответ: S = 2,67 см.

Задача 2. Внутренняя поверхность конуса покрыта зеркальным отражающим слоем, образующим коническое зеркало. Вдоль оси конуса внутри него натянута светящаяся нить. Определить минимальный угол раствора конуса α_{min}, при котором лучи, идущие от нити, будут отражаться от поверхности конуса не более одного раза.

Решение. Рассмотрим ход луча (*1*), испущенного точкой *A*, лежащей на нити. После первого отражения от конической поверхности в точке *B* луч *1* пойдет так, как если бы он вышел из точки *A*′ – мнимого изображения точки *A*. Если угол раствора конуса мал, то точка *A*′ будет лежать выше прямой *OC* (рис. 1.2, *а*).

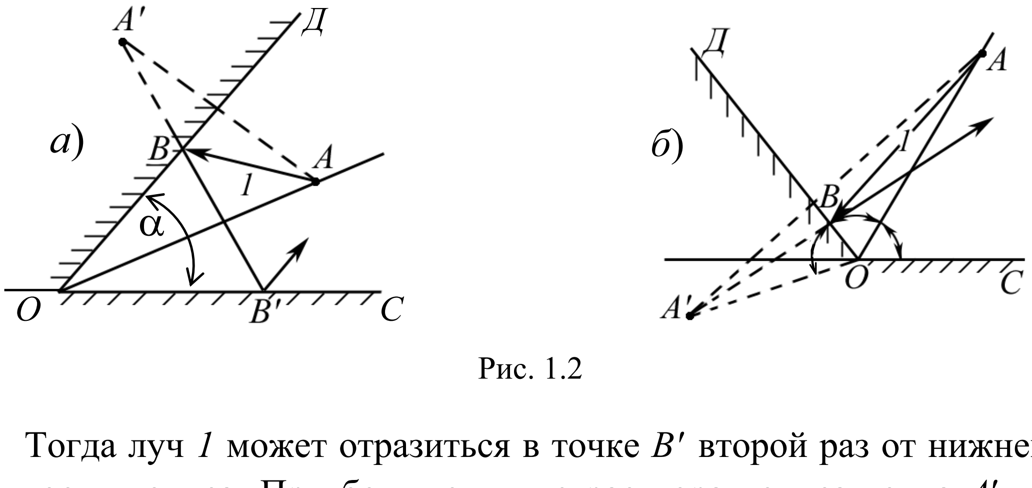

Рис. 1.2

Тогда луч *1* может отразиться в точке *B*′ второй раз от нижней поверхности конуса. При большом угле раствора конуса точка *A*′ лежит ниже прямой *ОС* (рис. 1.2, *б*). Тогда ни один луч, вышедший из точки *А*, второй раз не попадет на зеркало. Это будет иметь место, если

$$\angle A'OД + \angle AOД + \angle AOC \geq 180°. \qquad (1)$$

Но $\angle AOC = \angle AOД = \angle A'OД = \alpha/2$. Подставим выражение для углов в (1): $3(\alpha/2) \geq 180°$. Отсюда получим

$$\alpha_{\min} = \alpha \geq (2\ /\ 3)\cdot 180°, \quad \alpha_{\min} \geq 120°.$$

Ответ: $\alpha_{\min} \geq 120°$.

Задача 3. На оптической скамье установлена лампочка *Л* (ее можно считать точечным источником света). От лампочки отодвигают с постоянной скоростью v_0 собирающую линзу, фокусное расстояние которой равно F. В какую сторону и с какой скоростью v_x будет двигаться изображение *Л'* лампочки в тот момент, когда линза окажется от нее на расстоянии $1{,}5F$? Лампочка все время остается на главной оптической оси линзы.

Дано:
$d = 1{,}5F$
v_0
v_x – ?

Решение. Из формулы тонкой линзы $1/F = 1/d + 1/f$ для $d > F$ выразим расстояние f от изображения до линзы, рис. 1.3:

$$f = \frac{Fd}{d-F}.$$

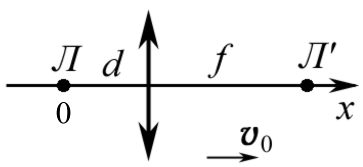

Рис. 1.3

Расстояние от неподвижной лампочки до её изображения (положение лампочки 0 принято за начало отсчета) равно:

$$x = d + f = d + \frac{Fd}{d-F}.$$

Скорость, с которой изменяется расстояние между лампочкой и её изображением (скорость движения изображения *Л'* лампочки относительно Земли):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = d' + \frac{Fd'(d-F) - d'Fd}{(d-F)^2}.$$

Учитывая, что $d' = v_0$ – положительная величина, т. к. расстояние до предмета увеличивается, найдем скорость, с которой будет двигаться изображение *Л'* лампочки в момент времени, когда $d = 1{,}5F$:

$$v_x = v_0 + \frac{0{,}5v_0F^2 - 1{,}5v_0F^2}{(0{,}5F)^2} = -3v_0.$$

Знак «минус» говорит о том, что изображение лампочки движется по направлению к линзе.

Ответ: $v_x = -3v_0$.

Задача 4. Луч света падает под углом α на поверхность среды с показателем преломления, изменяющемся по закону $n = n_0 + ky$, где n_0 и k – положительные постоянные; y – координата. Определить траекторию луча света в среде.

Решение. Для любой точки A, лежащей на траектории луча (рис. 1.4) можно записать:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\beta, \qquad (1)$$

где β – угол преломления луча.

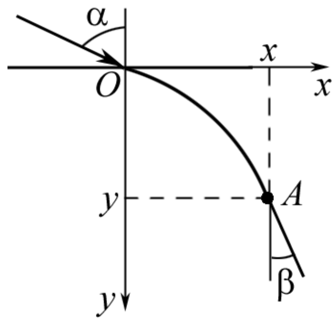

Рис. 1.4

Из закона преломления света следует:

$$\sin\alpha / \sin\beta = n.$$

Отсюда $\quad \sin\beta = \sin\alpha / n,$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}. \qquad (2)$$

Подставим выражения (2) в (1), имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Тогда

$$dx = dy\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем траекторию луча:

$$x = \int_0^y \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}dy = \int_0^y \frac{\sin\alpha}{\sqrt{(n_0+ky)^2 - \sin^2\alpha}}dy =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{k}\ln\left[\left(\frac{n_0+ky}{\sin\alpha}\right) + \sqrt{\left(\frac{n_0+ky}{\sin\alpha}\right)^2 - 1}\,\right]\Bigg|_0^y.$$

После несложных преобразований получим

$$x = \frac{\sin\alpha}{k}\ln\left[\frac{(n_0+ky) + \sqrt{(n_0+ky)^2 - \sin^2\alpha}}{n_0 + \sqrt{n_0^2 - \sin^2\alpha}}\right].$$

Задача 5. На краю бассейна стоит человек и наблюдает камень, лежащий на дне. Глубина бассейна h. На каком расстоянии от поверхности видно изображение камня, если луч зрения составляет с нормалью к поверхности воды угол θ?

Решение. Глубину, на которой видно изображение камня, можно определить из $\Delta S'KA$, рис. 1.5:

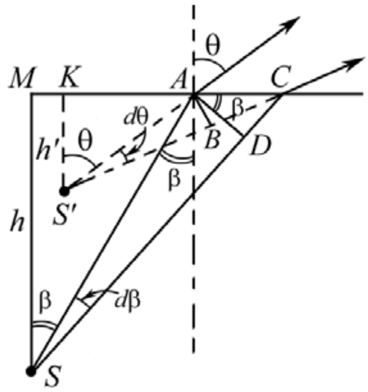

Рис. 1.5

$$h' = S'A\cos\theta. \qquad (1)$$

Здесь

$$S'A = \frac{AB}{d\theta}, \qquad (2)$$

где $d\theta$ – бесконечно малое изменение угла θ; AB – элемент дуги.

Из треугольника ACB следует:

$$AB = AC\cos\theta. \qquad (3)$$

Выразим AC из треугольника ACD:

$$AC = \frac{AD}{\cos\beta}, \qquad (4)$$

где β – угол падения луча на границу раздела «вода – воздух».

Элемент дуги

$$AD = SA\,d\beta, \qquad (5)$$

где $d\beta$ – бесконечно малое изменение угла β.

Из треугольника SMA следует, что

$$SA = h/\cos\beta. \qquad (6)$$

Используя выражения (6), (5), (4), (3), (2), приведем формулу (1) к следующему виду:

$$h' = h\frac{\cos^2\theta\cdot d\beta}{\cos^2\beta\cdot d\theta}. \qquad (7)$$

Из закона преломления находим

$$\sin\beta = \frac{\sin\theta}{n}; \qquad (8)$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\theta}. \qquad (9)$$

Продифференцируем формулу (8):

$$\cos\beta\, d\beta = \frac{\cos\theta\, d\theta}{n}.$$

Отсюда получим

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{\cos\theta}{n\cos\beta}. \qquad (10)$$

Подставив выражения (10) и (9) в формулу (7), получим

$$h' = h\frac{\cos^3\theta}{n\cos^3\beta} = h\frac{n^2\cos^3\theta}{\left(n^2-\sin^2\theta\right)^{3/2}}.$$

Задача 6. Найти радиус кривизны светового луча, распространяющегося вдоль поверхности Земли, где градиент показателя преломления воздуха $\partial n/\partial N$ = $3\cdot10^{-8}$ м$^{-1}$. При каком значении этого градиента луч света распространялся бы по окружности вокруг Земли?

Решение. Траектория света в неоднородной среде геометрически совпадает с траекторией частицы в потенциальном поле. Радиус кривизны траектории частицы R можно найти из проекции силы на нормаль N,

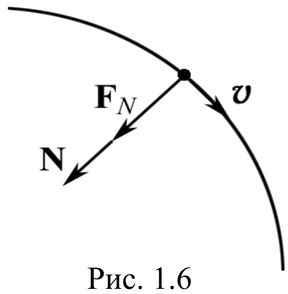

Рис. 1.6

$$F_N = \frac{mv^2}{R} = -\frac{\partial U}{\partial N},$$

где m – масса; v – скорость; U – потенциальная энергия частицы.

Продифференцировав уравнение энергии $\frac{mv^2}{2} + U = \text{const}$ по N, получим

$$F_N = mv\frac{\partial v}{\partial N}.$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial N}.$$

Заменив скорость частицы на скорость света в среде $v = c/n$ (c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления), получим выражение для кривизны луча:

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{n}{c}\frac{\partial(c/n)}{\partial N}\right| = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial N}.$$

Для воздуха $n \approx 1$, $R = \frac{n}{\partial n/\partial N} = \frac{1}{3\cdot 10^{-8}} \approx 3\cdot 10^7$ м – радиус кривизны светового луча. То есть при заданном градиенте показателя преломления свет не будет распространяться по окружности вокруг Земли.

Чтобы свет распространялся по окружности вокруг Земли ($R = 6{,}4\cdot 10^6$ м), градиент показателя преломления по направлению нормали к лучу должен быть равен:

$$\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{n}{R} = \frac{1}{6{,}4\cdot 10^6} \approx 1{,}56\cdot 10^{-7}\ \text{м}^{-1}.$$

Ответ: $\partial n/\partial N = 1{,}56\cdot 10^{-7}$ м$^{-1}$.

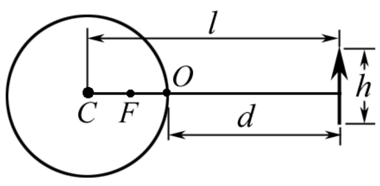

Рис. 1.7

Задача 7. На расстоянии $l = 10$ см от центра посеребренного елочного шара (рис. 1.7) находится елочная иголка длиной $h = 1$ см. Диаметр шара 8 см, а иголка расположена перпендикулярно оси симметрии шара, проходящей через середину иголки. Найти, на каком расстоянии от центра шара находится изображение иголки, и определить величину изображения.

Дано:	**Решение.** Расстояние f от точки O шара до мнимого изображения иголки найдем из формулы для сферического выпуклого зеркала $-\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f}$,
$l = 10$ см $h = 1$ см $D = 8$ см	
X – ? h_1 – ?	где $F = D/4$ – фокусное расстояние выпуклого зеркала; $d = l - D/2$ – расстояние от иголки до полюса зеркала (точки O).

$$f=\frac{Fd}{F+d}=\frac{D/4\cdot(l-D/2)}{D/4+l-D/2}=\frac{D(2l-D)}{2(4l-D)}=\frac{8\cdot(2\cdot10-8)}{2\cdot(4\cdot10-8)}=1{,}5 \text{ см.}$$

Изображение иголки (мнимое) находится в шаре на расстоянии 1,5 см от точки O. Расстояние от изображения до центра шара

$$X=\frac{D}{2}-f=\frac{8}{2}-1{,}5=2{,}5 \text{ см.}$$

Величина изображения иголки $h_1 = \Gamma h$, где $\Gamma = f/d$ – увеличение сферического выпуклого зеркала.

$$h_1=h\frac{f}{d}=h\frac{f}{l-D/2}=1\cdot\frac{1{,}5}{10-4}=0{,}25 \text{ см.}$$

Ответ: $X = 2{,}5$ см; $h_1 = 0{,}25$ см.

Задача 8. Определить, при каких градиентах температуры возможен нижний мираж.

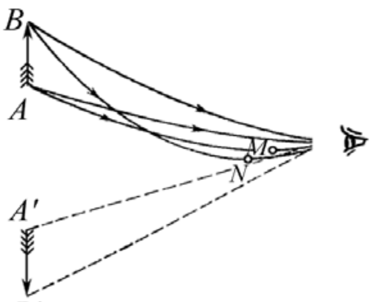

Рис. 1.8

Решение. При нижнем мираже изображение $A'B'$ получается ниже самого предмета AB (рис. 1.8).

Нижний мираж наблюдается в пустынях и степях в теплое время года, когда прилегающий к земной поверхности слой воздуха сильно нагрет, а его плотность ρ и показатель преломления n возрастают с высотой. Воспользуемся уравнением состояния идеального газа

$$\rho=\frac{\mu P}{RT},$$

где $\mu \approx 0{,}029$ кг/моль – молярная масса воздуха; P – давление вблизи поверхности; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

Из уравнения состояния находим

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dh}=\frac{1}{P}\frac{dP}{dh}-\frac{1}{T}\frac{dT}{dh}.$$

Отсюда получим $\dfrac{dT}{dh} = \dfrac{T}{P}\dfrac{dP}{dh} - \dfrac{T}{\rho}\dfrac{d\rho}{dh}$.

При механическом равновесии $\dfrac{dP}{dh} = -\rho g$, где g = 9,8 м/с^2 – ускорение свободного падения.

В результате получим

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\rho g T}{P} - \frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{dh} = -\frac{\mu g}{R} - \frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{dh}.$$

Членом, содержащим $d\rho/dh$, можно пренебречь из-за малости величины.

Тогда $\dfrac{dT}{dh} < -\dfrac{\mu g}{R} \approx -\dfrac{0,029 \cdot 9,8}{8,31} \approx -0,03$ К/м.

Такое распределение температур конвективно неустойчиво.

Ответ: $dT/dh = -0{,}03$ К/м.

Примечание. Конвективная неустойчивость – неустойчивость в газовой или жидкой среде, находящейся в поле силы тяжести $m\mathbf{g}$ и пронизываемой потоком тепла с компонентом в направлении, противоположном $m\mathbf{g}$.

Задача 9. На какой глубине под водой находится водолаз, если он видит отраженным от поверхности воды те части горизонтального дна, которые расположены от него на расстоянии S = 15 м и больше? Рост водолаза a = 1,5 м.

Дано:
a = 1,5 м
S = 15 м
n = 1,33
h – ?

Решение. Расстояние ED равно расстоянию от водолаза до ближайших к нему предметов, которые он видит отраженными от поверхности воды: $ED = S$, $AE = a$ (рост водолаза) (рис. 1.9).

Предельный угол $\varphi_{пр}$ определяется из условия полного внутреннего отражения:

$$\sin\varphi_{пр} = 1/n. \quad (1)$$

Из треугольника ACO находим:

$$AC = CO\,\text{tg}\,\varphi_{пр}. \quad (2)$$

Тогда глубина h, на которой находится водолаз, равна:

$$h = CO + a. \quad (3)$$

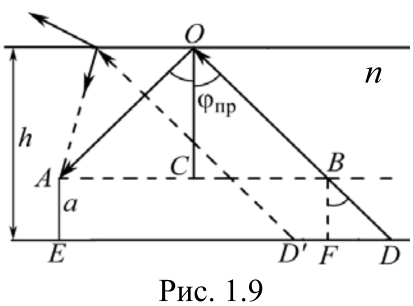

Рис. 1.9

Из треугольника BFD находим ($FB = a$):

$$FD = a\,\text{tg}\varphi_{пр}. \quad (4)$$

Так как $\angle AOC = \varphi_{пр}$, то из равенства треугольников ACO и BCO следует

$$AC = CB = (S - FD)/2.$$

Учитывая соотношение (4), получим

$$AC = \frac{S - a\,\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пр}}}{2}. \qquad (5)$$

Выразим из уравнения (2) CO, учитывая равенство (5):

$$CO = \frac{AC}{\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пр}}} = \frac{S - a\,\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пр}}}{2\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пр}}} = \frac{S}{2\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пр}}} - \frac{a}{2}. \qquad (6)$$

Подставим выражение (6) в равенство (3):

$$h = \frac{S}{2\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пр}}} - \frac{a}{2} + a = \frac{S}{2\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пр}}} + \frac{a}{2}. \qquad (7)$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пр}} = \frac{\sin\varphi_{\text{пр}}}{\sqrt{1-\sin^2\varphi_{\text{пр}}}} = \frac{1}{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Подставляя значение $\mathrm{tg}\,\varphi_{\text{пр}}$ в уравнение (7), находим:

$$h = \frac{a + S\sqrt{n^2-1}}{2} = \frac{1{,}5 + 15\sqrt{1{,}33^2-1}}{2} = 7{,}3 \text{ м.}$$

Ответ: $h = 7{,}3$ м.

Задача 10. В осколок тонкостенной сферической колбы с радиусом кривизны 10 см налили прозрачную жидкость. С помощью полученной линзы действительное изображение предмета, помещенного над ней на расстоянии одного метра, получилось уменьшенным в 5 раз. Каков показатель преломления жидкости?

Дано:
$R = 0{,}1$ м
$d = 1$ м
$\Gamma = 1/5$
n – ?

Решение. Фокусное расстояние F линзы в воздухе можно выразить из формулы

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Для плосковыпуклой линзы $R_1 = \infty$, $R_2 = R$. Тогда

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R}. \qquad (1)$$

Увеличение линзы равно:

$$\Gamma = \frac{f}{d}, \qquad (2)$$

где d – расстояние от предмета до линзы; f – расстояние от изображения до линзы.

Формула собирающей тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \qquad (3)$$

Из выражения (2) находим $f = \Gamma d$. Подставим в (3):

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma d} = \frac{\Gamma + 1}{\Gamma d}. \qquad (4)$$

Приравняем выражения (1) и (4):

$$\frac{n-1}{R} = \frac{\Gamma + 1}{\Gamma d}.$$

Отсюда

$$n = \frac{R}{d}\frac{(\Gamma + 1)}{\Gamma} + 1 = \frac{0{,}1}{1}\frac{(0{,}2 + 1)}{0{,}2} + 1 = 1{,}6.$$

Ответ: $n = 1{,}6$.

Задача 11. В вогнутое зеркало радиусом $R = 53{,}2$ см налили тонкий слой воды. Определить главное фокусное расстояние такой системы.

Дано:
$R = 0{,}532$ м
$n = 1{,}33$
F – ?

Решение. Пусть на систему «вода – зеркало» падает луч *1*, параллельный главной оптической оси OM, рис. 1.10. Угол отражения луча от зеркала равен углу падения α.

Угол падения луча на поверхность раздела «вода – воздух» равен 2α. Из закона преломления следует

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Длина отрезка BF равна искомому фокусному расстоянию (обозначим как F).

Из треугольника KBF находим

$$KB = F \operatorname{tg}\beta. \qquad (2)$$

Из треугольника KBO' находим

$$KB = O'B \operatorname{tg} 2\alpha. \qquad (3)$$

Приравнивая (2) и (3), получим

$$F = O'B\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg}\beta}. \qquad (4)$$

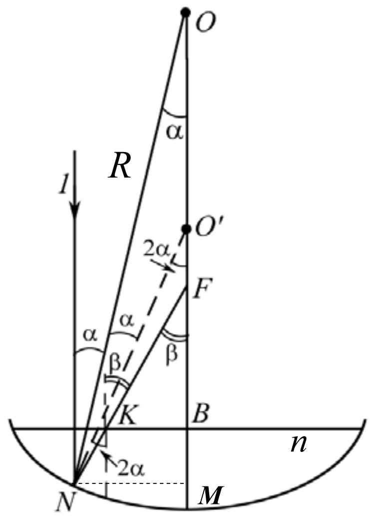

Рис. 1.10

Так как луч *1* параксиален (близкий к оптической оси), то углы α и β малы и отношение тангенсов углов в (4) можно заменить на отношение синусов углов [выражение (1)]:

$$F = O'B\frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta} = \frac{O'B}{n}. \qquad (5)$$

Из рис. 1.10 $O'B = \dfrac{NM}{\operatorname{tg} 2\alpha} - MB$, где $NM = R\sin\alpha \approx R\operatorname{tg}\alpha$.

Тогда (при малых углах $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$; $\operatorname{tg}2\alpha \approx 2\alpha$)

$$O'B = \frac{R\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,2\alpha} - MB = \frac{R\alpha}{2\alpha} - MB \approx \frac{R}{2}, \qquad (6)$$

так как толщиной BM «линзы», по сравнению с R, можно пренебречь.

Подставляя в формулу (5) выражение (6) найдем:

$$F = R/(2n) = 53{,}2/(2\cdot 1{,}33) = 20 \text{ см}.$$

Ответ: $F = 20$ см.

Альтернативное решение. Такой же результат можно получить из следующих соображений. Луч, падающий на слой воды (который можно рассматривать как плосковыпуклую линзу) последовательно проходит «линзу», отражается от вогнутого зеркала и еще раз проходит линзу. Данную оптическую систему можно рассматривать как центрированную систему, состоящую из сложенных вплотную двух плосковыпуклых линз и сферического зеркала. Оптическая сила зеркала равна $2/R$, а линзы – $(n - 1)/R$. Тогда оптическая сила системы

$$D = 2/R + 2\cdot(n - 1)/R = 2n/R.$$

Фокусное расстояние такой системы

$$F = 1/D = R/(2n) = 53{,}2/(2\cdot 1{,}33) = 20 \text{ см}.$$

Задача 12. Из астрономической трубы, у которой фокусное расстояние объектива $F_1 = 2{,}5$ м, вынули окуляр и просто глазом рассматривают изображение удаленного предмета. Каково увеличение трубы в этом случае?

Дано:
$F_1 = 2{,}5$ м
$d_0 = 25$ см
Γ – ?

Решение. Объектив дает в задней фокальной плоскости обратное уменьшенное изображение AB удаленного предмета, рис. 1.11. Глаза видят действительное изображение AB предмета с расстояния наилучшего зрения $d_0 = 25$ см под углом

$$\varphi_2 \approx AB/d_0. \qquad (1)$$

Угол, под которым виден предмет невооруженным глазом (без объектива),

$$\varphi_1 \approx AB/F_1. \qquad (2)$$

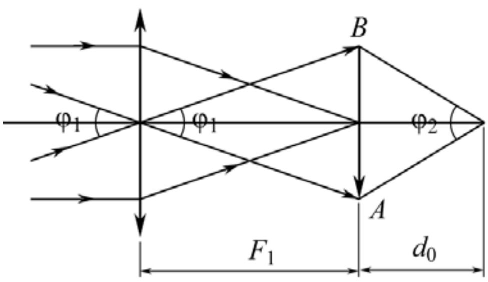

Рис. 1.11

Угловое увеличение трубы без окуляра найдем как отношение угла φ_2, под которым глаза видят удаленный предмет через объектив, к углу φ_1:

$$\Gamma = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

С учетом выражений (1) и (2) получаем

$$\Gamma = \frac{AB \cdot F_1}{d_0 \cdot AB} = \frac{F_1}{d_0} = \frac{250}{25} = 10.$$

Ответ: $\Gamma = 10$.

Задача 13. Пределы аккомодации у близорукого человека лежат между 10 и 50 см. Определить, на каком наименьшем расстоянии этот человек сможет читать книгу, если наденет очки, с помощью которых он хорошо видит удаленные предметы.

Дано:
$d_1 = 10$ см
$d_2 = 50$ см
$d_m - ?$

Решение. Максимальную (D_1) и минимальную (D_2) оптическую силу хрусталика глаза найдем из следующих формул:

$$D_1 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f}; \qquad (1)$$

$$D_2 = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f}, \qquad (2)$$

где f – расстояние от хрусталика до сетчатки глаза.

Удаленные предметы человек видит в очках, расстоянием между очками и глазами можно пренебречь, тогда оптическая сила системы «очки – глаза» равна $D_0 + D_2$, где D_0 – оптическая сила очков.

При правильно подобранных очках человек хорошо видит удаленные предметы. Следовательно, в формуле линзы величиной $1/d$ можно пренебречь. Тогда

$$D_0 + D_2 = \frac{1}{f} + \frac{1}{d} \approx \frac{1}{f}. \qquad (3)$$

Запишем формулу линзы, соответствующую наименьшему расстоянию d_m,

$$D_0 + D_1 = \frac{1}{f} + \frac{1}{d_m}. \qquad (4)$$

Вычитая уравнение (3) из уравнения (4) и затем подставив выражения (1) и (2), получим

$$\frac{1}{d_m} = D_1 - D_2 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f} - \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} = \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2}.$$

Отсюда $$d_m = \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} = \frac{10 \cdot 50}{50 - 10} = 12{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: $d_m = 12{,}5$ см.

Задача 14. Телескоп (зрительная труба Кеплера) с фокусным расстоянием объектива $F_1 = 24$ см установлена на бесконечность. На какое расстояние надо передвинуть окуляр трубы, чтобы ясно видеть предметы на расстоянии $d = 10$ м?

Дано:
$F_1 = 24$ см
$d = 10$ м
$\Delta l - ?$

Решение. Объектив O_1 дает в задней фокальной плоскости уменьшенное изображение удаленного предмета, рассматриваемое в окуляр O_2 как лупу (рис. 1.12*а*).

Длина трубы при наведении на удаленный предмет

$$l_1 = F_1 + F_2.$$

Расстояние f_1 от объектива до изображения близко расположенного предмета больше фокусного расстояния объектива F_1 (рис. 1.12*б*).

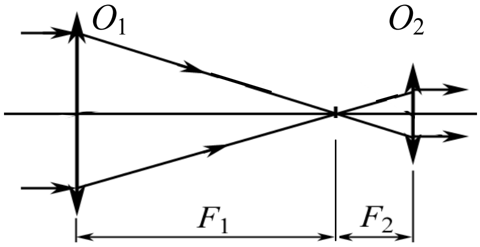

Рис. 1.12*а*

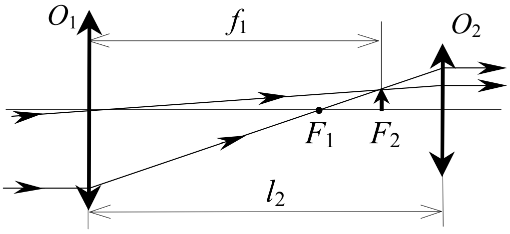

Рис. 1.12*б*

Из формулы линзы для объектива $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}$ можно найти f_1:

$$f_1 = \frac{F_1 d}{d - F_1}. \qquad (1)$$

В этом случае длина трубы $l_2 = f_1 + F_2$.

Чтобы ясно видеть близкие предметы, окуляр передвигаем на

$$\Delta l = l_2 - l_1 = f_1 + F_2 - (F_1 + F_2) = f_1 - F_1.$$

С учетом выражения (1) получим

$$\Delta l = \frac{F_1 d}{d - F_1} - F_1 = \frac{F_1^2}{d - F_1} = \frac{24^2}{1000 - 24} = 0{,}59 \text{ см}.$$

Ответ: $\Delta l = 0{,}59$ см.

Задача 15. Луч света проходит через призму с преломляющим углом θ и показателем преломления n. Пусть α – угол отклонения луча. Показать, что при симметричном ходе луча через призму угол α минимален.

Решение. Из рис. 1.13 видно, что $\angle OAC = 90° - \beta_1$ и $\angle OCA = 90° - \alpha_2$. Тогда сумма углов в треугольнике OAC:

$$\theta + 90° - \beta_1 + 90° - \alpha_2 = 180°.$$

Отсюда

$$\alpha_2 + \beta_1 = \theta. \qquad (1)$$

Из треугольника ADC следует

$$\angle ADC = 180° - (\alpha_1 - \beta_1) - (\beta_2 - \alpha_2). \qquad (2)$$

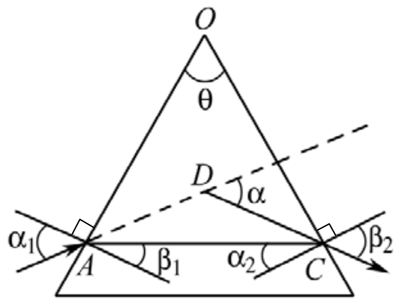

Рис. 1.13

Используя выражения (1) и (2), найдем угол отклонения луча

$$\alpha = 180° - \angle ADC = \alpha_1 + \beta_2 - \theta. \qquad (3)$$

Тогда можно записать

$$\alpha_1 + \beta_2 = \arcsin\sin\alpha_1 + \arcsin\sin\beta_2.$$

Минимальному значению α соответствует производная по углу падения или преломления, равная нулю:

$$\frac{d\alpha}{d\beta_1} = \frac{\cos\alpha_1}{1 + \sin^2\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\beta_1} + \frac{\cos\beta_2}{1 + \sin^2\beta_2}\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = 0. \qquad (4)$$

Из закона преломления следует

$$\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1; \tag{5}$$

$$\sin\beta_2 = n\sin\alpha_2. \tag{6}$$

Найдем производные этих выражений по β_1:

$$\cos\beta_2 \frac{d\beta_2}{d\beta_1} = n\cos\alpha_2 \frac{d\alpha_2}{d\beta_1}.$$

Из равенства (1) следует, что $\frac{d\alpha_2}{d\beta_1} = -1.$

Тогда

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = -n\frac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_2}. \tag{7}$$

Соответственно, $\cos\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} = n\cos\beta_1$, отсюда

$$\frac{d\alpha_1}{d\beta_1} = n\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}. \tag{8}$$

Подставив выражения (7) и (8) в уравнение (4) для производной, получим $\frac{\cos\beta_1}{1+\sin^2\alpha_1} = \frac{\cos\alpha_2}{1+\sin^2\beta_2}$.

Заменим $\sin\alpha_1$ и $\sin\beta_2$ выражениями (5) и (6):

$$\frac{\cos\beta_1}{1+n^2\sin^2\beta_1} = \frac{\cos\alpha_2}{1+n^2\sin^2\alpha_2}.$$

Из симметрии выражений, стоящих слева и справа в равенстве, следует, что $\beta_1 = \alpha_2$, т. е. ход лучей в призме симметричен, когда угол α минимален.

Задача 16. Труба Галилея (с рассеивающей линзой в качестве окуляра) десятикратного увеличения при установке на бесконечность имеет длину 54 см. Определить фокусные расстояния объектива и окуляра. На какое расстояние нужно сместить окуляр, чтобы четко видеть предметы, находящиеся на расстоянии 60 м?

Дано:
$\Gamma = 10$
$l = 54$ см
$d = 60$ м

F_1 – ?
F_2 – ?
Δl – ?

Решение. В трубе Галилея в качестве окуляра применяется двояковогнутая линза, передний фокус которой F_2 совпадает с задним фокусом объектива F_1. Данную систему используют в театральных биноклях.

Параллельный пучок лучей после прохождения через трубу остается параллельным. Объектив дает перевернутое изображение AB, окончательное изображение $A'B'$ получается прямым. При этом длина трубы

$$l = F_1 - F_2. \tag{1}$$

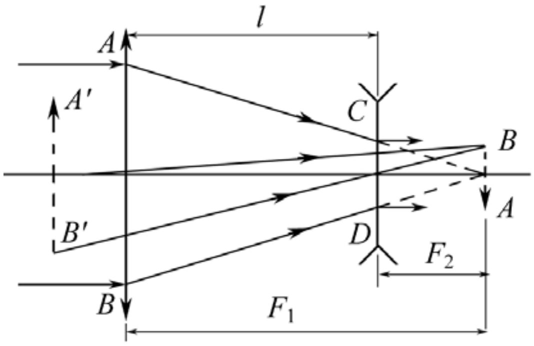

Рис. 1.14

Увеличение телескопа в случае, когда в телескоп наблюдают удаленные предметы, $\Gamma = F_1/F_2$, или

$$F_1 = \Gamma \cdot F_2. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$l = \Gamma \cdot F_2 - F_2. \qquad (3)$$

Из выражения (3) находим

$$F_2 = \frac{l}{\Gamma - 1} = \frac{54}{9} = 6 \text{ см},$$

$$F_1 = l + F_2 = 54 + 6 = 60 \text{ см}.$$

Расстояние f_1 от объектива до изображения близко расположенного предмета больше фокусного расстояния F_1. Это изображение должно попасть в точку переднего фокуса окуляра F_2.

Найдем f_1 из формулы линзы:

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}, \text{ отсюда } f_1 = \frac{F_1 d}{d - F_1}.$$

Окуляр нужно передвинуть на величину

$$\Delta l = f_1 - F_1 = \frac{F_1 d}{d - F_1} - F_1 = \frac{60 \cdot 6000}{6000 - 60} - 60 = 0{,}6 \text{ см}.$$

Ответ: $F_1 = 60$ см; $F_2 = 6$ см; $\Delta l = 0{,}6$ см.

Задачи для самостоятельного решения

1.1.1. Вывести с помощью принципа Ферма законы отражения и преломления света на плоской границе раздела.

1.1.2. Показать, что луч света, последовательно отразившийся от трех взаимно перпендикулярных плоских зеркал, изменит свое направление на прямо противоположное.

1.1.3. Построить изображение предмета AB, лежащего на главной оптической оси: а) собирающей линзы; б) рассеивающей линзы.

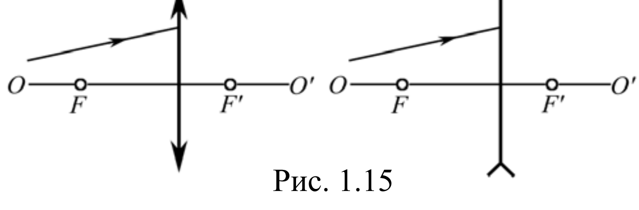

Рис. 1.15

1.1.4. Найти построением ход луча за собирающей и рассеивающей тонкими линзами (см. рис. 1.15, где OO' – оптическая ось; F и F' – передний и задний фокусы).

1.1.5. Пучок параллельных световых лучей падает из воздуха на толстую стеклянную пластину под углом $\alpha = 60°$ и, преломляясь, переходит в стекло. Ширина пучка в воздухе $a = 10$ см. Определите ширину d пучка в стекле. Показатель преломления стекла $n = 1{,}51$.

Ответ: $d = \dfrac{a\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n\cos\alpha} = 16{,}4$ см.

1.1.6. На плоскопараллельную прозрачную для света пластину толщиной $d = 2$ см падает луч под углом $\alpha = 60°$. Определите угол β преломления этого луча, если при выходе из пластины луч смещается на $\Delta x = 1$ см.

Ответ: $\beta = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}60^\circ - \dfrac{\Delta x}{d\cos 60^\circ}\right) = 36{,}2^\circ$.

1.1.7. Точечный источник света расположен в воде на глубине $H = 1$ м. Каков радиус R круга на поверхности воды, в пределах которого возможен выход лучей в воздух?

Ответ: $R = H\big/\sqrt{n^2 - 1} = 1{,}14$ м.

1.1.8. Имеются две оптические среды с плоской границей раздела. Пусть $\theta_{1пр}$ – предельный угол падения луча, а θ_1 – угол падения, при котором преломленный луч перпендикулярен отраженному (луч идет из оптически более плотной среды). Найти относительный показатель преломления этих сред, если $\sin\theta_{1пр}/\sin\theta_1 = \eta = 1{,}28$.

Ответ: $n_1/n_2 = 1\big/\sqrt{\eta^2 - 1} = 1{,}25$.

1.1.9. На дне ручья лежит камешек. Мальчик хочет толкнуть его палкой. Прицеливаясь, мальчик держит палку по лучу зрения под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. На каком расстоянии S от камешка воткнется палка в дно ручья, если его глубина $H = 0{,}4$ м? На какой глубине h будет находиться кажущееся положение камешка, если на него смотреть сверху по вертикали?

Ответ: $S = H\left(\operatorname{tg}\left(90^\circ - \alpha\right) - \dfrac{\sin\left(90^\circ - \alpha\right)}{\sqrt{n^2 - \sin^2\left(90^\circ - \alpha\right)}}\right) = 15$ см; $h = H/n = 30$ см.

1.1.10. Луч света распространяется в среде, показатель преломления которой убывает с высотой по закону $n = n_0 - ky$, где n_0, k – постоянные. На какой высоте луч повернет обратно? В точке $y = 0$ угол между направлением луча и координатой y равен α_0.

Ответ: $h = n_0(1 - \sin\alpha_0)/k$.

1.1.11. Показатель преломления атмосферы планеты уменьшается с высотой h над ее поверхностью по закону $n = n_0 - \alpha h$ при $h << n/\alpha$. Радиус планеты R. Найдите, на какой высоте над поверхностью планеты луч, испущенный горизонтально, будет обходить планету, оставаясь все время на этой высоте.

Ответ: $h = (n_0/\alpha - R)/2$.

1.1.12. Имеются две тонкие симметричные линзы: одна собирающая с показателем преломления n_1 = 1,70, другая рассеивающая с n_2 = 1,51. Обе линзы имеют одинаковый радиус кривизны поверхностей R = = 10 см. Линзы сложили вплотную и погрузили в воду с показателем преломления n_0. Каково фокусное расстояние этой системы в воде?

Ответ: $F = \dfrac{n_0 R}{2(n_1 - n_2)} = 35$ см $\cdot$

1.1.13. Найти фокусное расстояние зеркала, представляющего собой тонкую симметричную двояковыпуклую стеклянную линзу с посеребренной одной поверхностью. Радиус кривизны поверхностей линзы R = 40 см.

Ответ: $F = R/[2(2n - 1)] = 10$ см.

1.1.14. Для некоторой стеклянной (n = 1,5) призмы угол наименьшего отклонения луча равен преломляющему углу призмы. Найти последний.

Ответ: $\theta = 2\arccos(n/2) = 83°$.

1.1.15. В стекле с показателем преломления n_1 = 1,52 имеется сферическая полость радиусом R = 3 см, заполненная водой с показателем преломления n_2 = 1,33. На полость падают параллельные лучи света. Определите радиус r светового пучка, который проникает в полость.

Ответ: $r = R(n_2/n_1) =$ 2,63 см.

1.1.16. Столб вбит в дно реки и возвышается над водой на h = 1 м. Найти длину l тени столба на дне реки, если высота Солнца над горизонтом α = 30° (угол между солнечным лучом и поверхностью воды), глубина реки H = 2 м.

Ответ: $l = h\operatorname{ctg}\alpha + H\dfrac{\sin(90° - \alpha)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(90° - \alpha)}} = 3{,}45$ м.

1.1.17. Каким должен быть внешний радиус R изгиба световода (рис. 1.16), сделанного из прозрачного вещества с показателем преломления n, чтобы при диаметре световода, равном l, свет, вошедший в световод перпендикулярно плоскости его поперечного сечения, распространялся, не выходя через боковую поверхность наружу?

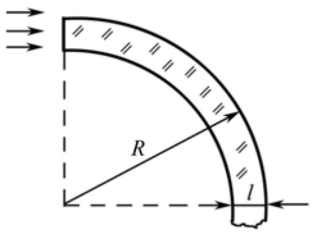

Рис. 1.16

Ответ: $R = l{\cdot}n/(n - 1)$.

Для нижнего луча, входящего в световод, должно соблюдаться условие полного внутреннего отражения.

1.1.18. Вогнутое зеркало увеличивает предмет в $\Gamma_1 = 3$ раза. После того как предмет отодвинули от зеркала на l = 80 см, увеличение Γ_2 стало равно 0,5. Найти фокусное расстояние F зеркала.

Ответ: $F = l \cdot \dfrac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = 48$ см.

1.1.19. Какие очки вы пропишете близорукому человеку, который может читать текст, расположенный от глаз не далее d_1 = 20 см, а какие дальнозоркому, который может читать текст, расположенный от глаз не ближе d_2 = 50 см?

Ответ: $D_1 = (d_1 - d_0)/(d_0d_1) = -1$ дптр; $D_2 = (d_2 - d_0)/(d_0d_2) = 2$ дптр.

1.1.20. Каково наименьшее возможное расстояние l между предметом и его действительным изображением, создаваемым собирающей линзой с главным фокусным расстоянием F = 12 см?

Ответ: $l = 4F = 48$ см.

1.1.21. Линза, расположенная на оптической скамье между лампочкой и экраном, дает на экране резко увеличенное изображение лампочки. Когда лампочку передвинули Δl = 40 см ближе к экрану, на нем появилось резко уменьшенное изображение лампочки. Определить фокусное расстояние F, если расстояние l от лампочки до экрана равно 80 см.

Ответ: $F = (l^2 - \Delta l^2)/(4l) = 15$ см.

1.1.22. При некотором положении предмета лупа дала четырехкратное увеличение Γ_1. Как изменится это число, если расстояние от предмета до лупы уменьшить в $\eta = 1{,}5$ раза?

Ответ: $\Gamma_1/\Gamma_2 = [\Gamma_1(\eta - 1) + 1]/\eta = 2$.

1.1.23. Найти увеличение зрительной трубы кеплеровского типа, установленной на бесконечность, если D – диаметр оправы ее объектива, а d – диаметр изображения этой оправы, образуемого окуляром трубы.

Ответ: $\Gamma = D/d$.

1.1.24. Найти коэффициент Г увеличения изображения предмета AB, даваемого тонкой рассеивающей линзой с фокусным расстоянием F, рис. 1.17.

Ответ: Г = 0,17.

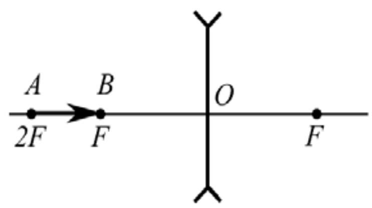

Рис. 1.17

1.1.25. Найти положение фокусов двояковыпуклой тонкой симметричной стеклянной (n = 1,5) линзы с радиусом кривизны поверхностей R = 7,5 см, если с одной стороны ее находится воздух, а с другой вода (n_0 = 1,33).

Ответ: $D = (2n - n_0 - 1)/R$; $F_{\text{возд}} = 1/D = 11$ см; $F_{\text{вода}} = n_0/D = 15$ см.

1.2.1. Система, состоящая из трех тонких линз (l = 5 см, рис. 1.18), находится в воздухе. Оптическая сила каждой линзы D = 10,0 дптр. Определить положение точки схождения параллельного пучка, падающего слева, после прохождения через систему.

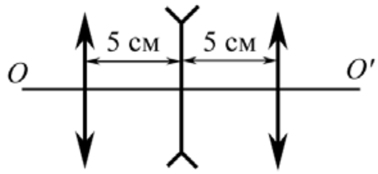

Рис. 1.18

Ответ: $f = \left(l^2D^2 + lD - 1\right)\Big/\left(l^2D^3 - D\right) \approx 3$ см.

Справа от последней линзы на 3 см от нее.

1.2.2. В центре сферического зеркала расположен точечный источник света S. Зеркало разрезали пополам. Обе половины симметрично отодвинули на расстояние h от главной оптической оси целого зеркала. Найти расстояние l между изображениями источника света в зеркалах.

Ответ: $l = 4h$.

1.2.3. Улитка размером a сидит на дальней стенке прямоугольного аквариума шириной l. Во сколько раз изменится видимый угловой размер улитки, если из аквариума слить воду? Наблюдатель расположился на расстоянии L от аквариума. Считать a намного меньше L и l.

Ответ: уменьшится в $n(L + l)/(nL + l)$ раз.

1.2.4. Вычислить оптическую силу D и фокусные расстояния тонкой симметричной двояковыпуклой стеклянной линзы, с одной стороны которой находится воздух, а с другой – вода, если оптическая сила этой линзы в воздухе D_0 = +10 дптр. Показать преломление воды n_0 = 1,33, стекла – n = 1,5.

Ответ: $D = D_0\dfrac{2n - n_0 - 1}{2(n-1)} = 2$ дптр; $F_1 = \dfrac{1}{D} = 15$ см; $F_2 = \dfrac{n_0}{D} = 20$ см.

1.2.5. При каком минимальном угле падения луча света на стопку плоских прозрачных пластин, показатель преломления каждой из которых в k раз меньше, чем у вышележащей, луч не пройдет сквозь стопку? Показатель преломления верхней пластины n, число пластин N.

Ответ: $\alpha = \arcsin(n/k^{N-1})$.

1.2.6. На дне стеклянной ванны лежит зеркало, поверх которого налит слой воды высотой l = 20 см. В воздухе на высоте h = 30 см над поверхностью воды висит лампа. На каком расстоянии L от поверхности воды смотрящий в воду наблюдатель будет видеть изображение лампы в зеркале?

Ответ: $L = h + 2l/n = 60$ см.

1.2.7. В днище судна сделан стеклянный иллюминатор для наблюдения за морскими животными. Диаметр иллюминатора d = 40 см, много меньше толщины стекла. Определите площадь S обзора дна из такого иллюминатора. Показатель преломления морской воды n = 1,4, расстояние до дна H = 5 м.

Ответ: $S = \pi\left(\frac{H}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{d}{2}\right)^2 = 88,3\ \text{м}^2$.

1.2.8. Внутри стеклянного шара радиусом r = 0,1 м слева от его центра вблизи поверхности находится точечный источник света S, см. рис. 1.19. На каком расстоянии справа от центра шара радиус светового пучка, вышедший из шара, будет равен r? Показатель преломления стекла n = 2.

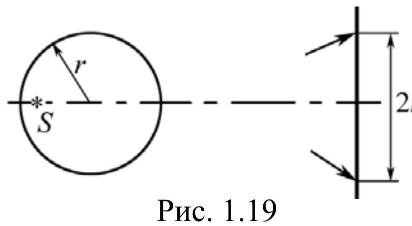

Рис. 1.19

Ответ: $x = r\left(2+\sqrt{3}\right) = 0,37$ м.

1.2.9. Человек движется вдоль главной оптической оси объектива фотоаппарата со скоростью v = 5 м/с. С какой скоростью v' необходимо перемещать матовое стекло фотоаппарата, чтобы изображение человека на нем все время оставалось резким? Главное фокусное расстояние F объектива равно 20 см. Вычисления выполнить для случая, когда человек находился на расстоянии d = 10 м от фотоаппарата.

Ответ: $v' = vF^2/(d-F)^2$ = 2,08 мм/с.

1.2.10. Фотографируется момент погружения в воду прыгуна с вышки высотой h = 4,9 м. Фотограф находится у воды на расстоянии d = 10 м от места погружения. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата равно F = 20 см. На негативе допустимо «размытие» изображения не более Δx = 0,05 мм. На какое наибольшее время τ (в миллисекундах) должен быть открыт затвор фотоаппарата?

Ответ: $\tau = \frac{\Delta x d}{F\sqrt{2gh}} = 0,25$ мс.

1.2.11. Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями F_1 = 20 и F_2 = 10 см. Расстояние между линзами l = 30 см. Предмет находится на расстоянии d_1 = 30 см от первой линзы. Определите, на каком расстоянии d_2 от второй линзы находится изображение предмета?

Ответ: $d_2 = \frac{(d_1-F_1)F_2 l - F_1F_2d_1}{(l-F_2)(d_1-F_1)-F_1d_1} = 7,5$ см.

1.2.12. Точка A движется с постоянной скоростью v = 2 см/с в направлении, как показано на рис. 1.20. С какой скоростью v' движется изображение этой точки, если d = 0,15 м, а фокусное расстояние линзы F = 0,1 м?

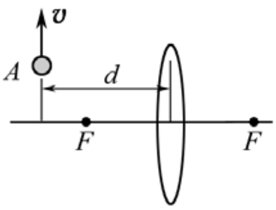

Рис. 1.20

Ответ: $v' = vF/(d - F)$ = 4 см/с.

1.2.13. Источник света находится на расстоянии l = 90 см от экрана. Тонкая собирающая линза, помещенная между источником света и экраном, дает четкое изображение источника при двух ее положениях. Найти фокусное расстояние линзы, если: а) расстояние между обоими положениями Δl = 30 см; б) поперечные размеры изображения при одном положении линзы в η = 4,0 раза больше, чем при другом.

Ответ: а) $F = (l^2 - \Delta l^2)/(4l)$ = 20 см; б) $F = l\sqrt{\eta}\big/\left(1+\sqrt{\eta}\right) = 20$ см.

1.2.14. Линзу с фокусным расстоянием F и радиусами кривизны r_1 и r_2 встроили в стенку аквариума так, что поверхность линзы с радиусом кривизны r_2 находится внутри аквариума. Показатель преломления воды n. Определите, на каком расстоянии от линзы сфокусируется параллельный пучок света: а) входящий в аквариум; б) выходящий из аквариума.

Ответ: а) $F_{\text{вход}} = nFr_2/[r_2 - F(n - 1)]$; б) $F_{\text{вых}} = Fr_2/[r_2 - F(n - 1)]$.

1.2.15. Точечный источник света помещен на главной оптической оси собирающей линзы L_1 с фокусным расстоянием F_1 = 20 см на расстоянии d_1 = 40 см от этой линзы. По другую сторону линзы L_1 в ее фокальной плоскости помещена рассеивающая линза L_2 так, что вышедшие из линзы L_2 лучи кажутся исходящими из самого источника. Определите фокусное расстояние рассеивающей линзы.

Ответ: $F = -\left(d_1 + F_1\right)\dfrac{F_1^2}{d_1^2} = -15$ см.

1.2.16. С помощью фотоаппарата с объективом, оптическая сила которого D = 10 дптр, фотографируют предмет, находящийся на дне водоема глубиной h_1 = 1,2 м. Каково расстояние между объективом и пленкой? Объектив расположен на расстоянии h_2 = 0,50 м от поверхности воды.

Ответ: $a = \dfrac{h_1 + nh_2}{Dh_1 + Dnh_2 - n} = 11$ см.

1.2.17. В трубку вставлены две двояковыпуклые линзы таким образом, что их главные оптические оси совпадают. Расстояние между линзами l = 16 см. Главное фокусное расстояние первой линзы F_1 = 8 см, второй – F_2 = 5 см. Предмет высотой h = 9 см помещен на расстоянии d_1 = 40 см от первой линзы. На каком расстоянии f_2 от второй линзы получилось изображение? Какова высота h'?

Ответ: $f_2 = \dfrac{d_2 F_2}{d_2 - F_2} = 30$ см, где $d_2 = l - \dfrac{d_1 F_1}{d_1 - F_1}$;

$h' = \dfrac{h f_2 F_1}{\left(d_1 - F_1\right) d_2} = 11{,}25$ см.

1.2.18. Лупа дает увеличение $\Gamma_1 = 2$. Вплотную к ней приложили собирательную линзу с оптической силой $D = 20$ дптр. Какое увеличение Γ_2 будет давать такая составная лупа?

Ответ: $\Gamma_2 = \Gamma_1 + d_0 D = 7$.

1.2.19. При окуляре с фокусным расстоянием $F_2 = 50$ мм телескоп дает угловое увеличение $\Gamma_1 = 60$. Какое угловое увеличение Γ_2 даст один объектив, если убрать окуляр и рассматривать действительное изображение, созданное объективом, невооруженным глазом с расстояния наилучшего зрения?

Ответ: $\Gamma_2 = \mathrm{F}_2 \Gamma_1 / d_0 = 12$.

1.2.20. Телескоп наведен на Солнце. Фокусное расстояние F_1 объектива телескопа равно 3 м. Окуляр с фокусным расстоянием $F_2 = 50$ мм проецирует действительное изображение Солнца, созданное объективом, на экран, расположенный на расстоянии $b = 60$ см от окуляра. Плоскость экрана перпендикулярна оптической оси телескопа. Определить линейный диаметр d изображения Солнца на экране, если диаметр Солнца на небе виден невооруженным глазом под углом $\alpha = 32'$.

Ответ: $d = F_1 \alpha (b - F_2) / F_2 = 30{,}7$ см.

1.2.21. Фокусное расстояние F_1 объектива телескопа равно 1 м. В телескоп рассматривали здание, находящееся на расстоянии $d = 1$ км. В каком направлении и на сколько нужно передвинуть окуляр, чтобы получить резкое изображение в двух случаях: 1) если после здания будут рассматривать Луну; 2) если вместо Луны будут рассматривать близкие предметы, находящиеся на расстоянии $d_1 = 100$ м?

Ответ: 1) к объективу на $\Delta l_1 = F_1^2 \big/ \left(d - F_1\right) = 1$ мм;

2) от объектива на $\Delta l_2 = \dfrac{\left(d - d_1\right) F_1^2}{\left(d_1 - F_1\right)\left(d - F_1\right)} = 9$ мм.

1.2.22. Галилеева труба 10-кратного увеличения ($\Gamma = 10$) при установке на бесконечность имеет длину $l = 45$ см. Найти: а) фокусные расстояния F_1 объектива и F_2 окуляра трубы; б) на какое расстояние Δl надо передвинуть окуляр трубы, чтобы ясно видеть предметы на расстоянии $d = 50$ м.

Ответ: а) $F_1 = \Gamma l \big/ \left(\Gamma - 1\right) = 50$ см и $F_2 = l \big/ \left(\Gamma - 1\right) = 5$ см;

б) отодвинуть на $\Delta l = \dfrac{l^2 \Gamma^2}{\left(\Gamma - 1\right) \cdot \left[\Gamma\left(d - l\right) - d\right]} = 0{,}5$ см.

1.2.23. Оптическая сила D объектива телескопа равна 0,5 дптр. Окуляр действует, как лупа, дающая увеличение $\Gamma_1 = 10$. Какое увеличение Γ_2 дает телескоп?

Ответ: $\Gamma_2 = \Gamma_1/(d_0 D) = 80$.

1.2.24. Расстояние δ между фокусами объектива и окуляра внутри микроскопа равно 16 см. Фокусное расстояние F_1 объектива равно 1 мм. С каким фокусным расстоянием F_2 следует взять окуляр, чтобы получить увеличение $\Gamma = 500$?

Ответ: $F_2 = d_0\delta/(F_1\Gamma) = 8$ см.

1.2.25. Микроскоп имеет длину $L = 20$ см. Фокусные расстояния объектива и окуляра, соответственно, равны $F_1 = 0{,}40$ см и $F_2 = 2{,}0$ см. На каком расстоянии d от объектива надо поместить предмет, чтобы его отчетливо видеть человеку с нормальным зрением?

Ответ: $d = (L - F_2)F_1/(L - F_2 - F_1) = 4{,}09$ мм.

2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Основные формулы и обозначения

Оптическая длина пути луча

$$L = n \cdot l\,,$$

где n – показатель преломления среды; l – геометрическая длина пути луча.

Оптическая разность хода двух световых лучей

$$\Delta = L_2 - L_1.$$

Условия максимумов и минимумов при интерференции: $\Delta = \pm m\lambda$ – условие максимумов; $\Delta = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda}{2}$ – условие минимумов, где Δ – оптическая разность хода между волнами, приходящими в точку наблюдения; $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$ – порядок интерференционного максимума или минимума; λ – длина волны монохроматического света.

Наблюдение интерференции по методу деления волнового фронта

1. Метод Юнга

Расстояние Δx между соседними полосами в опыте Юнга (рис. 2.1) равно:

$$\Delta x = \lambda l / d,$$

где l – расстояние от щелей до экрана; d – расстояние между когерентными источниками света S_1 и S_2.

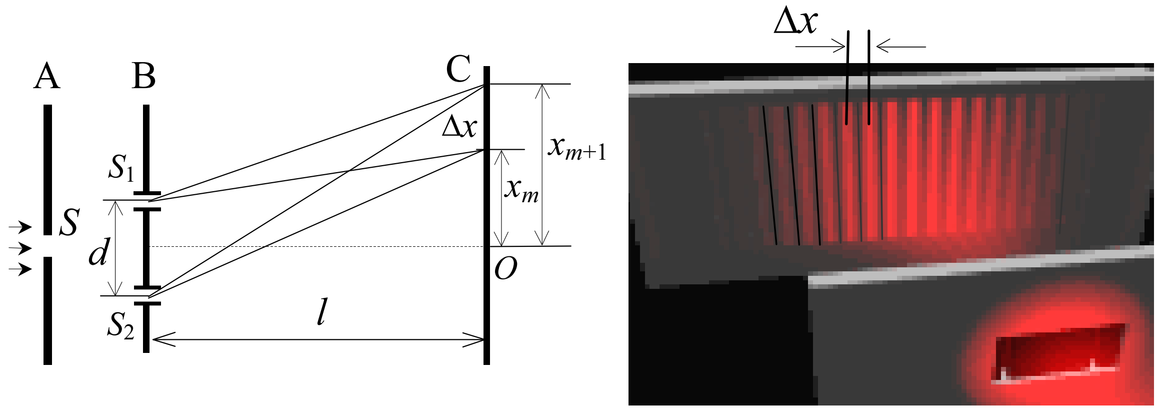

Рис. 2.1. Опыт Юнга. Слева схема наблюдения интерференции света от двух узких щелей, справа фотография интерференционной картины на экране C

2. Бизеркала Френеля

Ширина Δx интерференционной полосы в устройстве, представленном на рис. 2.2, равна $\Delta x \approx \dfrac{\lambda l}{d} = \dfrac{\lambda(a+b)}{2a\delta}$, где a – расстояние от источника света S до пересечения зеркал; b – расстояние от зеркал до экрана наблюдения Э; δ – небольшой угол между зеркалами.

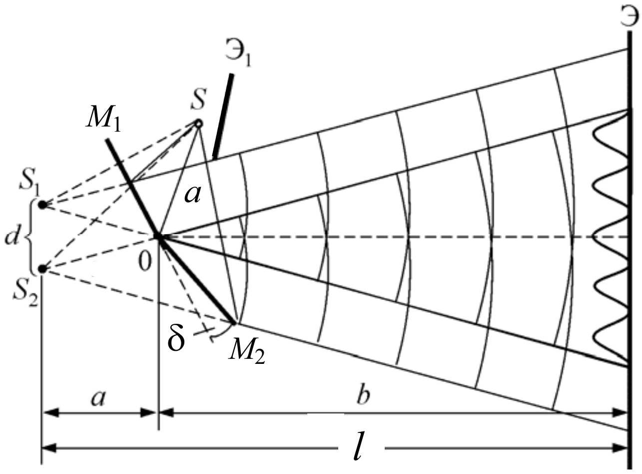

Рис. 2.2. Бизеркала Френеля M_1 и M_2, плоскости которых наклонены под небольшим углом δ друг к другу; S – источник света

3. Бипризма Френеля

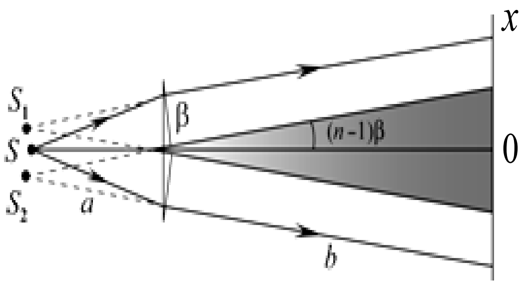

Рис. 2.3. Бипризма Френеля

Угловое расстояние между когерентными источниками S_1 и S_2 в бипризме Френеля (рис. 2.3) равно:

$$\alpha = 2(n-1)\beta,$$

где β – небольшой угол призмы; a – расстояние от источника до бипризмы; b – расстояние от бипризмы до экрана наблюдения.

Наблюдение интерференции по методу деления амплитуды

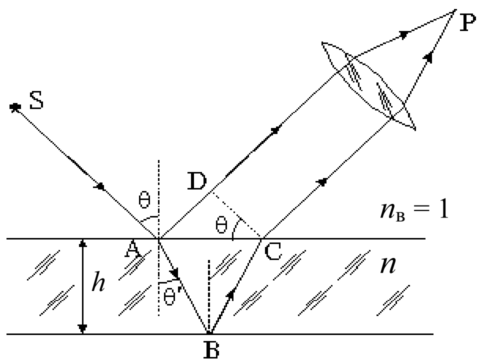

Рис. 2.4

1. Интерференция в тонких пленках

(полосы равного наклона, рис. 2.4).

Условия максимумов: светлые полосы расположены в местах, для которых

$$2nh\cos\theta' + \lambda_0/2 = m\lambda_0,$$

где m = 1, 2, 3, … – целое число, называемое *порядком интерференции*. Полоса, соответствующая данному порядку интерференции, обусловлена светом, падающим на пластинку под вполне определенным углом θ. Поэтому такие полосы называют *интерференционными полосами равного наклона*.

2. Интерференция в тонких пленках

(полосы равной толщины, рис. 2.5)

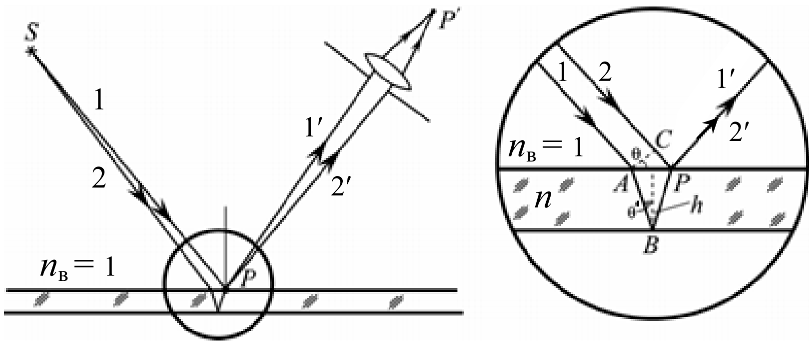

Рис. 2.5. Интерференция в тонких пленках. Справа показан ход лучей в пластинке в увеличенном масштабе

Условия максимумов остаются такими же.

Кольца Ньютона

Радиус темных колец в отраженном свете (или светлых в проходящем, рис. 2.6)

$$r_m = \sqrt{mR\lambda}\ ,$$

где r_m – радиус m-го темного кольца, m – номер кольца (m = 0, 1, 2, 3, ...), R – радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся со стеклянной пластинкой.

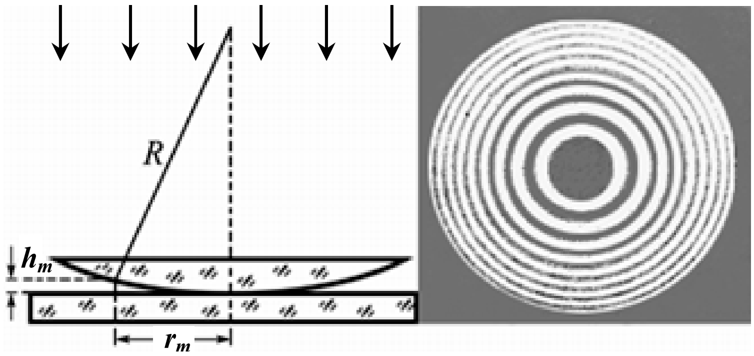

Рис. 2.6. Кольца Ньютона в отраженном свете

Радиус светлых колец Ньютона (рис. 2.6) в отраженном свете (или темных в проходящем) определяется формулой

$$r_m = \sqrt{(2m-1)R\lambda/2}\ \ (m = 1, 2, 3, ...).$$

Интерферометр Майкельсона

Разность хода равна:

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2} = 2h \text{ – условие минимума;}$$

$$\Delta = m\lambda = 2h \text{ – условие максимума,}$$

где $2h$ – разность хода в центре интерференционной картины (рис. 2.7).

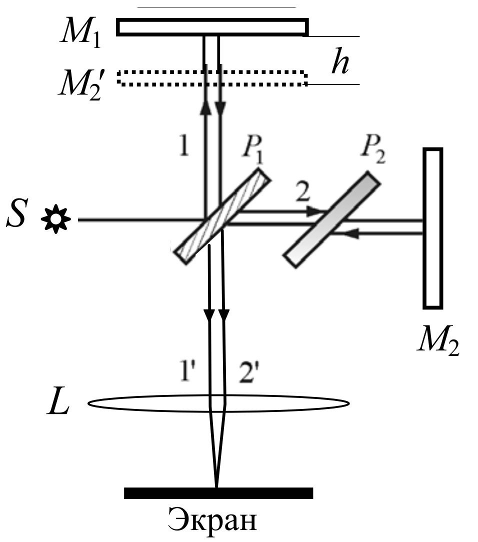

Рис. 2.7. Схема интерферометра Майкельсона: M_1 и M_2 – зеркала; P_1 – разделительная (полупрозрачная) пластина; P_2 – компенсационная (идентичная P_1) прозрачная пластина; L – линза, фокусирующая изображение на экран; S – источник света

Интерферометр Жамена

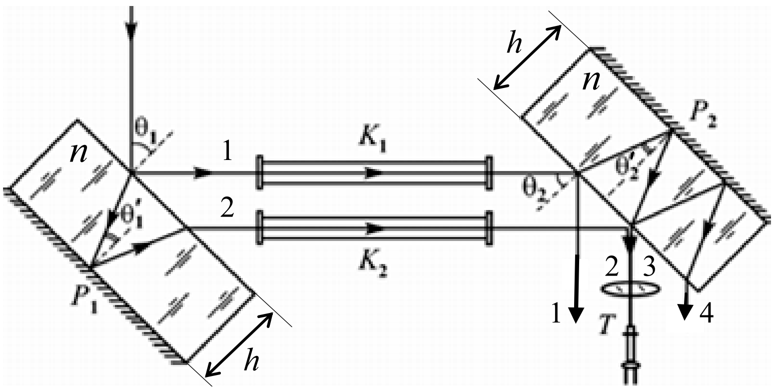

Рис. 2.8. Схема интерферометра Жамена с кюветами K_1 и K_2 (вид сверху)

Кюветы K_1 и K_2 с исследуемыми веществами создают дополнительную разность хода Δ, равную $(n_2 - n_1)l$, где n_1 и n_2 – показатели преломления газов в кюветах; l – длина кювет; $\Delta = m\lambda$ – условие максимумов.

Задачи с решениями

Задача 1. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центральной полосы x = 0,05 см. Данные установки (рис. 2.9): a = 5 м, d = 0,5 см.

Дано:
$x = 5\cdot10^{-4}$ м
$a = 5$ м
$d = 5\cdot10^{-3}$ м

λ – ?

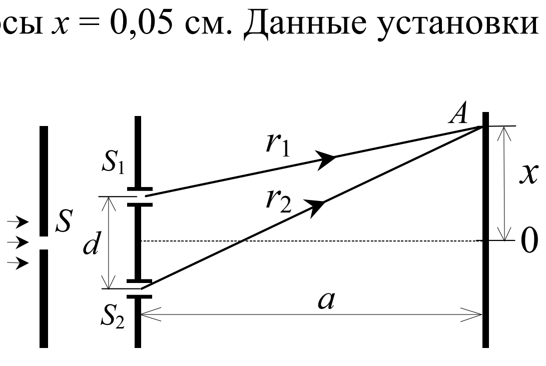

Рис. 2.9

Решение. Разность хода лучей, прошедших в точку наблюдения A, равна:

$$\Delta = r_2 - r_1; \qquad 1)$$

$$r_2^2 = a^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2; \qquad (2)$$

$$r_1^2 = a^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Вычитая почленно из выражения (2) выражение (3) и раскрывая скобки, получим

$$\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right) = 2xd. \qquad (4)$$

Так как интерференционная картина наблюдается вблизи центра экрана ($x << a$), то

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (5)$$

Используя условие максимума $r_2 - r_1 = m\lambda$, из уравнений (4) и (5) получим

$$r_2 - r_1 = \frac{xd}{a} = m\lambda.$$

По условию задачи $m = 1$, поэтому

$$\lambda = \frac{xd}{a} = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^{-3}}{5} = 5\cdot 10^{-7}\,\text{м} = 500\ \text{нм}.$$

Ответ: $\lambda = 500$ нм.

Задача 2. В точку A экрана (рис. 2.10) от источника S_1 монохроматического света длиной волны λ = 0,5 мкм приходят два луча: непосредственно от источника перпендикулярный экрану луч S_1A и луч S_1BA, отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A. Расстояние l_1 равно 1 м, расстояние h равно 2 мм. Определить: 1) что будет наблюдаться в точке A экрана – усиление или ослабление освещенности; 2) как изменится освещенность в точке A, если на пути луча A перпендикулярно к нему поместить плоскопараллельную пластинку стекла (n = 1,55) толщиной d = 6 мкм.

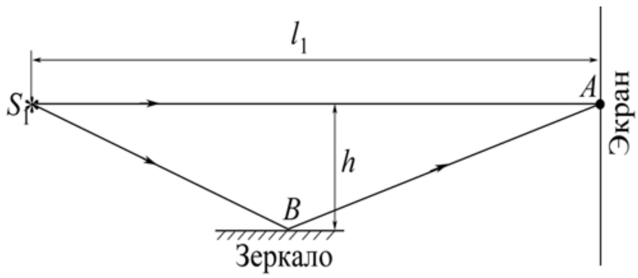

Рис. 2.10

Дано:
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м
$l_1 = 1$ м
$h = 2 \cdot 10^{-3}$ м
$n = 1{,}55$
$d = 6 \cdot 10^{-6}$ м
m_1 – ? m_2 – ?

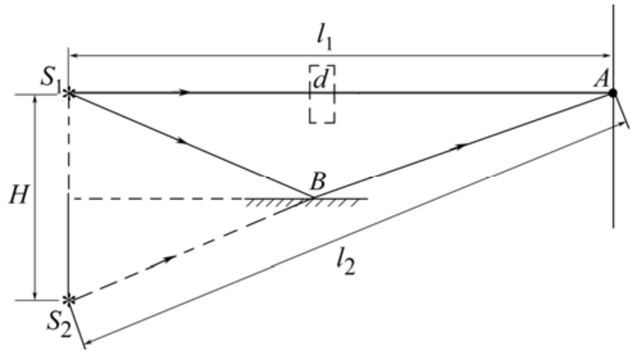

Рис. 2.11

Решение. Источник S_1 и мнимый источник S_2 являются когерентными, поэтому на экране возникает интерференционная картина (рис. 2.11). Максимум или минимум, возникая в той или иной точке экрана, зависит от оптической разности хода Δ интерферирующих лучей,

$$m = \frac{\Delta}{\lambda/2}. \qquad (1)$$

Если m – целое четное число, то имеем максимум, если m – целое нечетное, то минимум.

1. Оптическая разность хода Δ_1 будет складываться из геометрической разности $l_2 - l_1$ (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности $\lambda/2$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении от среды, оптически более плотной. Таким образом:

$$\Delta_1 = l_2 - l_1 + \frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

По теореме Пифагора $l_2^2 = l_1^2 + H^2$ (рис. 2.11), $(l_2 - l_1) = \dfrac{H^2}{2l_1}$, т. к.

$$l_2^2 - l_1^2 = \left(l_2 - l_1\right)\left(l_2 + l_1\right), \text{ где } l_2 + l_1 \approx 2l_1, H << l_1.$$

Подставив это выражение $l_2 - l_1$ в формулу (2), найдем

$$\Delta_1 = \frac{H^2}{2l_1} + \frac{\lambda}{2}. \qquad (3)$$

Зная Δ_1, можно по формуле (1) найти $m_1 = \dfrac{\dfrac{H^2}{2l_1} + \dfrac{\lambda}{2}}{\lambda/2} = \dfrac{H^2}{l_1\lambda} + 1.$

Так как $H = 2h$, то окончательно получим:

$$m_1 = 4\frac{h^2}{l_1\lambda} + 1 = 4\frac{\left(2 \cdot 10^{-3}\right)^2}{1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} + 1 = 32 + 1 = 33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке A наблюдается максимальное ослабление освещенности.

2. Стеклянная пластинка, помещенная на пути луча S_1A (см. рис. 2.11), изменит оптическую длину пути луча на $(n - 1)d$. В этом случае оптическая разность хода лучей $\Delta_2 = \Delta_1 - (n - 1)d$. Тогда из формулы (1) следует

$$m_2 = \frac{\Delta_2}{\lambda/2} = \frac{\Delta_1}{\lambda/2} - \frac{(n-1)d}{\lambda/2} = m_1 - \frac{(n-1)d}{\lambda/2} = 33 - \frac{0{,}55 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{2{,}5 \cdot 10^{-7}} = 19{,}8.$$

Так как число полуволн m_2 оказалось дробным и ближе к 20, то в точке A будет неполное (неамплитудное) усиление.

Ответ: 1) $m_1 = 33$; 2) неполное усиление ($m_2 = 19{,}8$).

Задача 3. На пути одного луча в интерференционной установке Юнга стоит трубка длиной $l = 2$ см с плоскопараллельными стеклянными основаниями и наблюдается интерференционная картина, когда эта трубка наполнена воздухом. Затем трубка наполняется хлором и при этом наблюдается смещение интерференционной картины на $m = 20$ полос. Наблюдения производятся со светом линии D натрия ($\lambda = 5890$ Å). Принимая показатель преломления воздуха $n = 1{,}000276$, вычислить показатель преломления хлора. В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении сосуда хлором?

Дано:
$l = 2{\cdot}10^{-2}$ м
$m = 20$
$\lambda = 5{,}89{\cdot}10^{-7}$ м
$n = 1{,}000276$

n_{Cl} – ?

Решение. Легко догадаться, что разность хода лучей Δ при усилении света по определению равна $m\lambda$. В данном случае оптическая разность хода равна $(n_{\text{Cl}} - n)l$. Из полученного равенства находим

$$(n_{\text{Cl}} - n)l = m\lambda; \quad n_{\text{Cl}} = n + m\lambda/l.$$

Вычисляя, получаем $n_{\text{Cl}} = 1{,}000867$.

Ответ: $n_{\text{Cl}} = 1{,}000867$.

Задача 4. На толстую стеклянную пластинку с коэффициентом преломления $n_3 = 1{,}5$, покрытую очень тонкой пленкой, коэффициент преломления вещества которой $n_2 = 1{,}4$, падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определить толщину d пленки.

Дано:
$n_1 = 1{,}0$
$n_2 = 1{,}4$
$n_3 = 1{,}5$
$\lambda = 0{,}6$ мкм

d – ?

Решение. Показатель преломления воздуха ($n_1 = 1{,}0$) меньше показателя преломления вещества пленки ($n_2 = 1{,}4$), который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла ($n_3 = 1{,}5$).

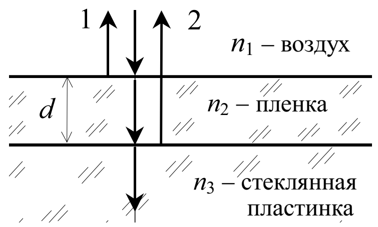

Рис. 2.12

В обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, рис. 2.12. Следовательно, дополнительная разность хода $\lambda/2$, обусловленная изменением фазы колебаний на π при отражении от оптически более плотной среды, происходит как у луча 1, так и у луча 2. В этом случае условие минимумов при интерференции лучей 1 и 2 имеет вид

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Как видно из рисунка, оптическая разность хода $\Delta = 2dn_2$.

Следовательно, $$2dn_2 = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

отсюда искомая толщина пленки

$$d = \frac{(2m+1)\lambda}{4n_2}.$$

Получим возможные значения толщины пленки:

$$m = 0,\ d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{0{,}6}{4\cdot 1{,}4} \approx 0{,}11 \text{ мкм};$$

$$m = 1,\ d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = 3d_0 = 0{,}33 \text{ мкм, и т. д.}$$

Ответ: $d = (2m + 1)\lambda/(4n_2)$, где $m = 0, 1, 2$, и т. д.

Задача 5. Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются на воздушном клине между двумя стеклянными пластинками с углом при вершине $\alpha = 1'$. Полосы получаются в свете зеленой линии ртути с длиной волны $\lambda = 5461$ Å и шириной $\Delta\lambda = 0{,}1$ Å. Определить: 1) расстояние Δx между двумя соседними полосами; 2) максимальное количество полос N, которое можно было бы видеть на клине, если бы его размеры не были ограничены; 3) расстояние x последней наблюдаемой полосы от вершины клина; 4) толщину h клина в этом месте.

Дано:
$\alpha = 2{,}9\cdot 10^{-4}$ рад
$\lambda = 5{,}461\cdot 10^{-7}$ м
$\Delta\lambda = 1\cdot 10^{-11}$ м

$\Delta x - ?$ $N - ?$
$x - ?$ $h - ?$

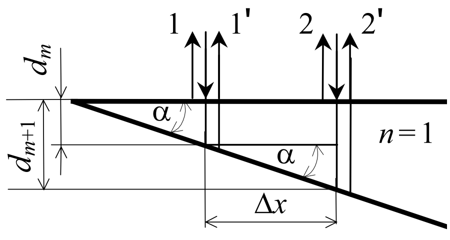

Рис. 2.13*а*

Решение. 1. Так как интерференционные полосы наблюдаются на воздушном клине ($n = 1$), то оптическая разность хода лучей $11'$ и $22'$

равна их геометрической разности хода $2d_m$ и $2d_{m+1}$ (рис. 2.13*а*). Условия наблюдения светлых полос при интерференции:

$$\Delta_1 = m\lambda = 2d_m, \qquad (1)$$

$$\Delta_2 = (m+1)\lambda = 2d_{m+1}, \qquad (2)$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Вычитая почленно из выражения (2) выражение (1), получим

$$2(d_{m+1} - d_m) = \lambda. \qquad (3)$$

Из рисунка следует

$$\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{d_{m+1} - d_m}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) окончательно получаем:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{5,461 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 2,9 \cdot 10^{-4}} = 9,4 \cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0,94\ \text{мм}.$$

2. На рис. 2.13*б* приведен контур спектральной линии – распределение интенсивности излучения от длины волны. Величина $\Delta\lambda$ определяется условием

$$I(\lambda - \Delta\lambda/2) = I(\lambda + \Delta\lambda/2) = I_0(\lambda)/2,$$

и называется *шириной спектральной линии*. Здесь I_0 – максимальное значение интенсивности.

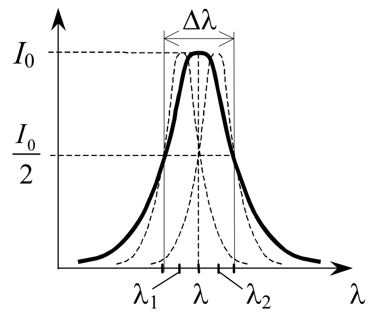

Рис. 2.13 *б*

С учетом определения, исходный спектр можно заменить на две более узкие спектральные линии (как показано штриховыми линиями на рис. 2.13*б*) с полушириной $\Delta\lambda/4$. Тогда $\lambda_1 = \lambda - \Delta\lambda/4$ и $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda/4$.

Пусть на отрезке x от вершины клина укладывается N интерференционных полос с длиной волны λ_1 и λ_2, так что для λ_1 выполняется условие интерференционного минимума, а для λ_2 – максимума.

$$\Delta_N = 2d_N = (2N+1)\frac{\lambda_1}{2}, \qquad (5)$$

$$\Delta_N = 2d_N = 2N\frac{\lambda_2}{2}. \qquad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) имеем

$$N\lambda_2 = (2N+1)\lambda_1/2,$$

$$2N\lambda_2 = 2N\lambda_1 + \lambda_1,$$

$$2N\lambda + N\Delta\lambda/2 = 2N\lambda - N\Delta\lambda/2 + \lambda - \Delta\lambda/4,$$

$$N\Delta\lambda = \lambda - \Delta\lambda/4.$$

Пренебрегая членом $\Delta\lambda/4$, получим искомую величину

$$N = \lambda/\Delta\lambda = 5,461 \cdot 10^{-7}/1 \cdot 10^{-11} \approx 54600.$$

3. Ясно, что расстояние x равно произведению ширины одной полосы Δx на число полос N, т. е. $x = \Delta x \cdot N \cong 51{,}3$ м.

4. Толщина клина в месте, где наблюдается последняя полоса N, равна длине когерентности, которую можно определить из выражения (6):

$$h = d_N = N\lambda/2 = \lambda^2/(2\Delta\lambda) = 1{,}5 \text{ см}.$$

Другой (геометрический) способ определения толщины клина:

$$h = x \cdot \mathrm{tg}\alpha \approx x \cdot \alpha = 51{,}3 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-4} = 0{,}015 \text{ м} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: $\Delta x = 0{,}94$ мм; $N = 54600$; $x = 51{,}3$ м; $h = 1{,}5$ см.

Задача 6. Расстояние от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана, соответственно, равно a = 10 см и b = 1,0 м. Бипризма стеклянная (n = 1,5) с преломляющим углом $\delta = 10'$. Определите длину волны света, если ширина интерференционных полос Δx = 0,5 мм.

Дано:
a = 10 см = 0,1 м
b = 1,0 м
n = 1,5
$\delta = 10' = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ рад
$\Delta x = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м

λ = ?

Решение. Схема наблюдения интерференционной картины методом бипризмы Френеля дана на рис. 2.14. Таким образом, задача сводится к наблюдению интерференции по методу Юнга от источников S_1 и S_2.

В опыте Юнга расстояние между соседними полосами

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d},$$

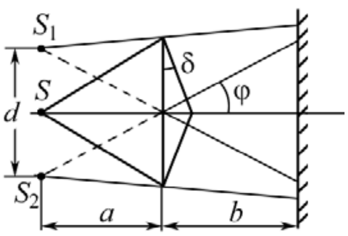

Рис. 2.14

где l – расстояние от источников S_1 и S_2 до экрана, $l = a + b$, d – расстояние между источниками.

Легко увидеть (рис. 2.14), что $d = 2a\sin\varphi$, и задача сводится к нахождению угла φ. Угол φ и преломляющий угол δ связаны соотношением $\varphi = (n-1)\delta$. Так как угол δ мал, то $\sin\varphi \approx \varphi$ (углы δ и φ выражены в радианах).

После несложных преобразований окончательно получаем:

$$\lambda = \frac{2a(n-1)\delta \cdot \Delta x}{a+b} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0{,}1+1} \approx 5{,}272 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 527{,}2 \text{ нм}.$$

Ответ: λ = 527,2 нм.

Задача 7. Полосы интерференции получаются с помощью бипризмы Френеля с малым преломляющим углом и щелевого источника света, параллельного ребру бипризмы (рис. 2.15). Интерференционные полосы наблюдаются на экране, расположенном перпендикулярно к оси установки. Нулевая полоса получается в центре экрана – на оси (точнее, в плоскости симметрии) установки. Расстояние от источника до бипризмы равно a, от бипризмы до экрана – b. В какую сторону и на какую величину x сместится нулевая интерференционная полоса, если щелевой источник света немного сместить в направлении, перпендикулярном к оси оптической системы, на величину h? Вычислить x, если h = 1 мм, a = 5 см, b = 2 м.

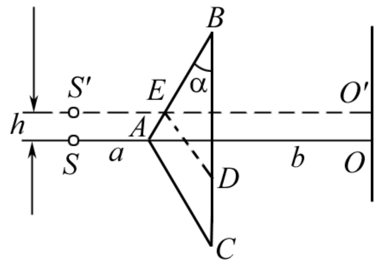

Рис. 2.15

Дано:
$h = 10^{-3}$ м
$a = 0{,}05$ м
$b = 2$ м

x – ?

Решение. Пока источник S находится на оси системы, центр интерференционной картины получается в точке O (рис. 2.15). Сместим источник вверх на h в положение S', а затем вообразим, что от бипризмы отрезана часть $ACDE$.

Эта часть действует как плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 2h\alpha$, смещающая картину вниз на $N = d(n-1)/\lambda$. Центр картины из O переместится вниз на расстояние $x = N\Delta x$, где $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2(n-1)\alpha}\cdot\dfrac{a+b}{a}$ – ширина полосы. Смещение из O будет равно (см. решение задачи № 6 и формулы к зеркалам Френеля):

$$x = \frac{N\lambda}{2(n-1)\alpha}\cdot\frac{a+b}{a} = \frac{d(a+b)}{2\alpha a}.$$

Подставляя значение α, имеем $x = hb/a$. Это и есть смещение из прежнего центра O. Вычисляя, получим

$$x = \frac{hb}{a} = \frac{1\cdot 10^{-3}\cdot 2}{5\cdot 10^{-2}} = 0{,}04 \text{ м} = 4 \text{ см}.$$

Ответ: x = 4 см.

Задача 8. На стеклянный клин (n = 1,5) нормально падает монохроматический свет (λ = 698 нм). Определите угол между поверхностями клина, если расстояние Δx между двумя соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 2 мм.

Дано:
$n = 1{,}5$
$\lambda = 6{,}98\cdot 10^{-7}$ м
$\Delta x = 2\cdot 10^{-3}$ м

α – ?

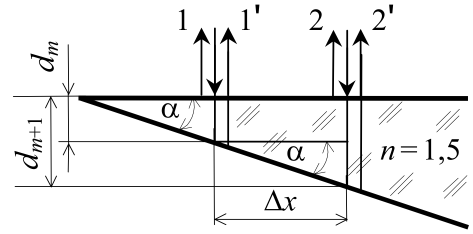

Рис. 2.16

Решение. Так как угол α мал (требование когерентности), то из рис. 2.16 следует

$$\alpha \approx \text{tg}\alpha = \frac{d_{m+1} - d_m}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Темные полосы видны на тех участках, где оптическая разность хода лучей $1\,1'$ и $2\,2'$ равна нечетному числу длин полуволн. Для соседних полос m и $m + 1$ имеем:

$$\Delta_m = 2nd_m = (2m+1)\frac{\lambda}{2}; \qquad (2)$$

$$\Delta_{m+1} = 2nd_{m+1} = (2m+3)\frac{\lambda}{2}. \qquad (3)$$

Тогда из (2) и (3) найдем

$$d_{m+1} - d_m = \frac{\lambda}{2n}.$$

Подставляя в (1), получим:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x} = \frac{6{,}98 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}16 \cdot 10^{-4} \text{ рад}; \quad \alpha = 24''.$$

Задача 9. Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плеч интерферометра Майкельсона помещена закрытая с обеих сторон откачанная до высокого вакуума стеклянная трубка длиной l = 15 см. При заполнении трубки аммиаком интерференционная картина для длины волны λ = 589 нм сместилась на 192 полосы. Определите показатель n преломления аммиака.

Дано:
$l = 0{,}15$ м
$\lambda = 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м
$m = 192$
$n = ?$

Решение. Положение трубки приведено на рис. 2.17.

При заполнении трубки аммиаком возникает дополнительная оптическая разность

$$\Delta_1 = ln - ln_0 = l(n-1), \ (n_0 = 1).$$

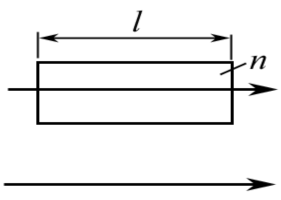

Рис. 2.17

Луч 1 (рис. 2.17) проходит через трубку дважды, поэтому

$$\Delta_2 = 2l(n-1).$$

Условие максимума интерференции для m-й полосы

$$2l(n-1) = m\lambda.$$

Отсюда найдем искомую величину:

$$n = \frac{m\lambda}{2l} + 1 = \frac{192 \cdot 5{,}89 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 0{,}15} + 1 = 1{,}000377.$$

Задача 10. Почему центр колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете, обычно темный, а в проходящем – светлый?

Решение. Рассмотрим установку на рис. 2.6. В проходящем свете на границе «стекло – воздух» электрический вектор не испытывает изменения фазы, а при отражении на границе «воздух – стекло» меняет фазу на 180°, что соответствует приобретению разности хода, равной половине длины волны.

Задача 11. Если между линзами из крона и флинта поместить масло, показатель преломления которого имеет промежуточное значение между значениями показателей преломления крона и флинта, то точка соприкосновения линз будет окружена светлым пятном в отраженном свете и темным – в проходящем. Почему?

Решение. При любом расположении линз свет либо теряет полволны при отражении на обеих границах раздела масла с поверхностями линз, либо совсем не теряет полволны. Поэтому разность хода между лучами, отразившимися от поверхностей линз в месте их соприкосновения, равна нулю. Эти лучи при интерференции усиливают друг друга. Поэтому центр колец в отраженном свете светлый, а в проходящем свете – темный.

Задача 12. Линза из крона (n_{k} = 1,5) лежит на пластинке, одна половина которой сделана из того же крона, а другая – из флинта ($n_{\text{фл}}$ = 1,7). Описать характер ньютоновских колец в отраженном и проходящем свете.

Решение. В обоих случаях будут наблюдаться две системы полуколец, примыкающих друг к другу. В одной системе центр – темный, в другой – светлый, так как показатель преломления флинта больше показателя преломления крона.

Картина в проходящем свете будет дополнительной.

Задача 13. В установке для наблюдения колец Ньютона плосковыпуклая линза сделана подвижной и может перемещаться в направлении, перпендикулярном пластинке. Что будет происходить с кольцами Ньютона при удалении и приближении линзы к пластине? Кольца получаются с помощью монохроматического света.

Решение. Каждое кольцо Ньютона можно определить как линию, вдоль которой разность хода между интерферирующими лучами постоянна. При удалении линзы от пластинки кольца постоянной разности хода будут сжиматься к центру картины, а при приближении – расширяться от центра. Центр картины будет попеременно темным и светлым.

Если отодвинуть линзу на Δh, то новый радиус r' связан со старым формулой $r' = \sqrt{r^2 - R\Delta h}$, где R – радиус кривизны линзы.

Задача 14. Описать, как будет меняться резкость колец Ньютона при перемещении линзы относительно пластинки, если кольца наблюдаются в отраженном свете D-линии натрия, представляющей собой две близкие спектральные линии с $\lambda_1 = 5890$ Å и $\lambda_2 = 5896$ Å.

Решение. Очевидно, что каждой длине волн соответствует своя система колец Ньютона с незначительно отличающимися размерами. Если линза соприкасается с поверхностью пластинки, то в центре картины светлые (темные) кольца одной системы практически совпадают со светлыми (темными) кольцами другой системы. Поэтому вблизи центра кольца видны почти так же резко, как при монохроматическом свете. Но при некотором удалении от центра светлое кольцо одной системы может совпасть по положению с темным кольцом другой системы. В соответствующем месте кольца Ньютона не будут видны, а в окрестности этого места они будут видны нерезко.

Определим номер N светлого кольца для длины волн λ_2, которое совпадает по положению с $(N + 1)$-м темным кольцом для длины волны λ_1. Первому темному кольцу (точнее центральному темному пятну) для длины волны λ_1 соответствует разность хода $\lambda_1/2$, второму темному кольцу – разность хода $\lambda_1 + \lambda_1/2$ и т. д., наконец, $(N + 1)$-темному кольцу – разность хода $N\lambda_1 + \lambda_1/2$. Та же разность хода $N\lambda_1 + \lambda_1/2$, очевидно, должна равняться $N\lambda_2$, так как должно происходить наложение N-го светлого кольца для длины волны λ_2 на $(N + 1)$-е темное кольцо для длины волны λ_1. Можно записать:

$$N\lambda_1 + \lambda_1/2 = N\lambda_2, \text{ или } N = \lambda_1/[2(\lambda_2 - \lambda_1)] = 490.$$

Отсюда следует, что кольца пропадут в окрестности четыреста девяностого кольца. Легко увидеть, что они вновь будут резкими в окрестности $2\times490 = 980$-го кольца. При удалении линзы от пластинки кольца стягиваются к центру. Если линзу переместить на $490\lambda_1$, то через поле зрения пройдет 490 колец, и в центре картины кольца исчезнут. При перемещении линзы $2\times490\lambda_1 = 980\lambda_1$ кольца в центре снова будут резкими; при перемещении на $3\times490\lambda_1 = 1470\lambda_1$ – опять пропадут и т. д.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.1. Во сколько N раз в опыте Юнга нужно изменить расстояние до экрана, чтобы пятая светлая полоса новой интерференционной картины оказалась на том же расстоянии, что и третья в прежней картине? То же для третьей и седьмой темных полос.

Ответ: $N_5 = m_3/m_5 = 3/5$; $N_3 = 2m_3/(2m_3 + 1) = 6/7$;
$N_7 = 2m_3/(2m_7 + 1) = 6/15$.

2.1.2. В опыте Юнга расстояние между щелями $d = 0{,}5$ мм, длина волны $\lambda = 550$ нм. Найти расстояние L от щелей до экрана, если расстояние между соседними полосами $\Delta x = 1$ мм.

Ответ: $L = \Delta x d/\lambda = 91$ см.

2.1.3. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центрального максимума $x = 0{,}05$ см, расстояние от щелей до экрана $L = 5$ м, расстояние между щелями $d = 0{,}5$ см.

Ответ: $\lambda = xd/L = 500$ нм.

2.1.4. Во сколько N раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый ($\lambda_1 = 5\cdot10^{-7}$ м) светофильтр заменить красным ($\lambda_2 = 6{,}5\cdot10^{-7}$ м)?

Ответ: $N = \lambda_{кр}/\lambda_{зел} = 1, 3$.

2.1.5. В опыте с зеркалами Френеля расстояние между мнимыми изображениями источника света $d = 0{,}5$ мм, расстояние до экрана $L = 5$ м. В зеленом свете получились интерференционные полосы на расстоянии $\Delta x = 5$ мм друг от друга. Найти длину волны λ зеленого света.

Ответ: $\lambda = \Delta x d/L = 500$ нм.

2.1.6. На рис. 2.18 изображена принципиальная интерференционная схема с двумя светящимися щелями. Оценить максимальную ширину b_{max} щелей, при которой интерференционные полосы будут еще различимы достаточно отчетливо, считая свет строго монохроматичным.

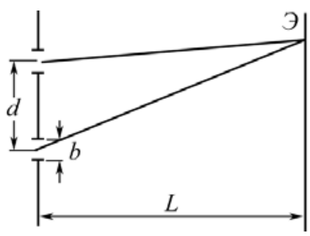

Рис. 2.18

Указание: воспользоваться результатами опыта Юнга для лучей, распространяющихся от крайних точек щели.

Ответ: $b_{max} = \Delta x/4$.

2.1.7. Плоская световая волна падает на бизеркала Френеля, угол между которыми $\alpha = 2'$. Найти длину волны света λ, если ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0{,}55$ мм.

Ответ: $\lambda = 2\alpha\Delta x = 640$ нм.

2.1.8. Расстояния от призмы Френеля с показателем преломления $n = 1{,}5$ до узкой щели и экрана равны, соответственно, $a = 25$ и $b = 100$ см. Преломляющий угол призмы $\beta = 20'$. Найти длину волны света λ, если ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0{,}55$ мм.

Ответ: $\lambda = 2a\beta(n-1)\Delta x/(a+b) = 640$ нм.

2.1.9. В изображенной на рис. 2.19 установке с бизеркалами Френеля S – источник света в виде перпендикулярной к плоскости рисунка щели; Э – экран. Расстояние $r = 0{,}1$ м, $b = 1$ м. Найти: а) значение угла α, при котором для $\lambda = 500$ нм ширина Δx интерференционных полос на экране будет равна 1 мм; б) максимальное N число полос, которое можно наблюдать в этом случае.

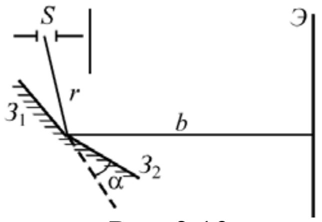

Рис. 2.19

Ответ: а) $\alpha = (r + b)\lambda/(2r\Delta x) = 9{,}5'$; б) $N = (r+b\lambda)^2/\Delta x^2 = 5$.

2.1.10. Выразить расстояние x от центра интерференционной картины до m-й светлой полосы в опыте с бипризмой (рис. 2.20). Показатель преломления призмы n, преломляющий угол θ, длина волны λ. Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно. Учесть, что расстояние между мнимыми источниками равно $2a(n-1)\theta$.

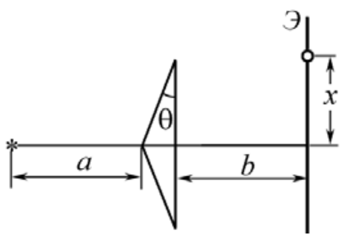

Рис. 2.20

Ответ: $x = m\lambda \dfrac{a+b}{2a(n-1)\theta}$.

2.1.11. В схеме, предложенной Ллойдом, световая волна, падающая на экран Э непосредственно от светящейся щели S, интерферирует с волной, отразившейся от зеркала З (рис. 2.21). Пусть расстояние от щели до плоскости зеркала $h = 1$ мм, расстояние от щели до экрана $L = 1$ м, длина световой волны $\lambda = 500$ нм. Найти: а) ширину интерференционных полос Δx; б) при какой минимальной ширине щели $b_{\min}$ интерференционная картина на экране полностью исчезает.

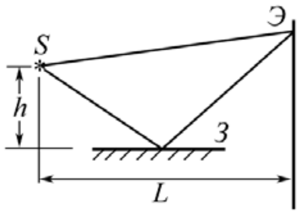

Рис. 2.21

Указание: интерференционная картина исчезает при $\Delta x = \lambda/4$.

Ответ: а) $\Delta x = \lambda L/(2h) = 0{,}25$ мм; б) $b_{\min} = 0{,}25$ мм.

2.1.12. Рассеянный монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм падает на пленку толщиной $d = 15$ мкм с показателем преломления $n = 1{,}5$.

Определить угловое расстояние $\Delta\varphi$ между соседними максимумами, наблюдаемыми в отраженном свете под углами с нормалью, близкими к 45°.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{\lambda\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{d\sin 2\theta} = 3^\circ$.

2.1.13. В опыте Ллойда (см. рис. 2.21) в качестве отражающей взята поверхность стеклянной пластины, а источником света служит параллельная щель, середина которой находится на расстоянии h = 1 мм от продолжения отражающей поверхности. Экран расположен на расстоянии L = 4 м от щели, длина волны λ = 700 нм. Найти число интерференционных полос n, укладывающихся на отрезке экрана длиной l = 4,2 мм.

Ответ: $n = 1 + 2lh/(L\lambda) = 4$.

2.1.14. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны, соответственно, r_m = 4,0 мм и r_{m+1} = 4,38 мм. Радиус кривизны линзы равен R = 6,4 м. Найти порядковые номера m и m + 1 колец и длину волны λ падающего света.

Ответ: $m = \dfrac{r_m^2}{r_{m+1}^2 - r_m^2} = 5$; $\lambda = \dfrac{r_m^2}{mR} = 500$ нм.

2.1.15. Установка для наблюдения колец Ньютона освещена монохроматическим светом с длиной волны λ = 0,6 мкм, падающим нормально. Найти толщину воздушного слоя h между линзой и стеклянной пластиной в том месте, где наблюдается четвертое темное кольцо в отраженном свете.

Ответ: $h = r_m^2/(2R) = 2\lambda = 1{,}2$ мкм.

2.1.16. Найти расстояние l между десятым и одиннадцатым кольцами Ньютона, наблюдаемыми в отраженном свете, если расстояние между вторым и третьим l_1 = 3 мм. Свет падает нормально.

Ответ: $l = l_1\left(\sqrt{11} - \sqrt{10}\right)/\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 1{,}46$ мм.

2.1.17. Диаметр четвертого темного кольца Ньютона в отраженном свете d = 9 мм. Радиус кривизны линзы R = 8,6 м. Монохроматический свет падает нормально. Найти длину волны λ падающего света.

Ответ: $\lambda = \dfrac{d_m^2}{4mR} = 589$ нм.

2.1.18. Найти радиус кривизны R линзы, применяемой для наблюдения колец Ньютона, если расстояние между вторым и третьим светлыми кольцами l = 0,50 мм. Освещение производится монохроматическим светом с длиной волны λ = 550 нм. Наблюдение ведется в отраженном свете.

Ответ: $R = \dfrac{2l^2}{\lambda\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2} = 3{,}6$ м.

2.1.19. Плосковыпуклая стеклянная линза, радиус кривизны которой R = 40 см, соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. При этом в отраженном свете радиус некоторого кольца r = 2,5 мм. Наблюдая за кольцом, линзу осторожно отодвинули от пластинки на Δh = 5,0 мкм. Каким стал радиус r' этого кольца?

Ответ: $r' = \sqrt{r^2 - 2R\Delta h} = 1{,}5$ мм.

2.1.20. Плосковыпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности R = 12,5 см прижата к стеклянной пластинке. Диаметр некоторого темного кольца Ньютона в отраженном свете d_1 = 1,0 мм, диаметр же темного кольца, порядковый номер которого на 5 единиц больше, d_2 = 1,5 мм. Определить длину волны света λ.

Ответ: $\lambda = \left(d_2^2 - d_1^2\right) / \left(20R\right) = 500$ нм.

2.1.21. Найти расстояние l между двадцатым и двадцать первым светлыми кольцами Ньютона, если расстояние между вторым и третьим l_1 = 1 мм, а кольца наблюдаются в отраженном свете.

Ответ: $l = l_1\left(\sqrt{21} - \sqrt{20}\right) / \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 0{,}35$ мм.

2.1.22. Кольца Ньютона наблюдаются в отраженном свете длиной волны λ = 589 нм. Расстояние между первым и вторым светлыми кольцами l = 0,5 мм. Найти радиус кривизны R плосковыпуклой линзы.

Ответ: $R = 2l^2 / \left[\lambda\left(\sqrt{2} - 1\right)\right] = 2$ мм.

2.1.23. Расстояние между пятым и двадцать пятым светлыми кольцами Ньютона l = 9 мм. Радиус кривизны линзы R = 15 м. Наблюдение колец ведется в отраженном свете. Найти длину волны λ монохроматического света, падающего нормально на установку.

Ответ: $\lambda = 2l^2 / \left[R\left(\sqrt{49} - \sqrt{24}\right)\right] = 514$ нм.

2.1.24. На тонкую пленку (n = 1,33) падает параллельный пучок белого света. Угол падения α = 52°. При какой минимальной толщине пленки d отраженный свет будет наиболее сильно окрашен в желтый цвет (λ = 0,60 мкм)?

Ответ: $d = \dfrac{\lambda(2m+1)}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = 0{,}14$ мкм.

2.1.25. Пучок белого света падает нормально на стеклянную пластинку, толщина которой d = 0,4 мкм. Показатель преломления стекла n = 1,5. Какие длины волн λ, лежащие в пределах видимого спектра (от $4\cdot10^{-7}$ до $7\cdot10^{-7}$ м), усиливаются в отраженном пучке?

Ответ: $\lambda = 4nd/(2m + 1) = 480$ нм, при $m = 2$.

2.2.1. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом длиной волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м; расстояние между отверстиями $d = 1$ мм и расстояние от отверстий до экрана $L = 3$ м. Найти расстояние x_i трех первых максимумов от нулевого максимума.

Ответ: $x_m = m\lambda L/d$; $x_1 = 1{,}8$ мм; $x_2 = 3{,}6$ мм; $x_3 = 5{,}4$ мм.

2.2.2. В опыте Юнга экран был удален от отверстий на расстояние $l = 5$ м. Расстояние между отверстиями $d = 0{,}5$ см, расстояние от третьего интерференционного максимума до центральной полосы $x_m = 0{,}15$ см. Определите: а) длину волны монохроматического света λ; б) расстояние между соседними светлыми интерференционными полосами Δx; в) какова будет картина на экране, если его освещать белым светом?

Ответ: а) $\lambda = \dfrac{x_m d}{ml} = 0{,}5$ мкм; б) $\Delta x = \dfrac{\lambda l}{d} = 0{,}5$ мм; в) цветная.

2.2.3. Расстояние между двумя мнимыми изображениями источника света в зеркалах Френеля $d = 0{,}7$ мм, расстояние от изображений до экрана $l = 2{,}267$ м, ширина полосы интерференции $\Delta x = 1{,}9$ мм, расстояние от источника до линии пересечения зеркал $r = 10$ см. Определите: а) длину волны монохроматического света, падающего на зеркала, острый угол между ними и число полос на экране; б) закон распределения интенсивности света на экране.

Ответ: а) $\lambda = \dfrac{xd}{l} = 585$ нм; $\alpha = \dfrac{(r+l)\lambda}{2xr} = 0{,}035$ рад; $N = \dfrac{(r+l)\lambda}{x} = 1200$;

б) $I = I_0 \cos^2\left(\dfrac{\pi d \Delta x}{\lambda l}\right)$.

2.2.4. Тупой угол α стеклянной бипризмы Френеля ($n = 1{,}5$) равен 179°, длина волны источника света $\lambda = 0{,}60$ мкм, расстояние от источника света до призмы $a = 8$ см, до экрана – $b = 5$ м. Определите расстояние Δx между соседними интерференционными полосами и число N полос интерференции.

Указание. Значение угла ($180° - \alpha = \theta$) перевести в радианы.

Ответ: $\Delta x = \dfrac{(a+b)\lambda}{2a(n-1)(180^\circ - \alpha)} = 0{,}43$ мм; $N = \dfrac{4ab(n-1)^2\theta^2}{\lambda(a+b)} = 10$.

2.2.5. В опыте Ллойда по интерференции (см. рис. 2.21) в качестве отражателя света используется поверхность стеклянной пластинки *З*, а источником света служит параллельная ей светящаяся щель. Середина щели находится на расстоянии $h = 1$ мм от продолжения отражающей поверхности, экран *Э* удален от щели на расстояние $L = 4$ м, длина волны $\lambda = 0{,}7$ мкм. На каком расстоянии x от середины центральной полосы находится третья светлая полоса?

Ответ: $x = (2m+1)\dfrac{\lambda L}{4d} = 4{,}9$ мм.

2.2.6. Рассеянный монохроматический свет с длиной волны λ = = 0,60 мкм падает на пленку толщиной d = 15 мкм с показателем преломления n = 1,5. Определите угловое расстояние $\Delta\varphi$ между соседними максимумами, наблюдаемыми в отраженном свете под углами с нормалью, близкими к α = 45°.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{\lambda\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{d\sin 2\alpha} = 3°$.

2.2.7. Интерференция при отражении света наблюдается в тонком стеклянном клине. Расстояние Δx между соседними темными полосами 5 мм, показатель преломления стекла n = 1,5, длина световой волны λ = 0,58 мкм. Определите угол α между гранями клина.

Ответ: $\alpha = \lambda/(2n\Delta x) = 8''$.

2.2.8. Две плоскопараллельные стеклянные пластинки приложены одна к другой так, что между ними образовался воздушный клин с острым углом α = 30″. На одну из пластинок падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ = 0,6 мкм. На каком расстоянии x_1 и x_2 от линии соприкосновения пластинок наблюдаются первая и вторая светлые полосы в отраженном свете?

Ответ: $x = \lambda(2m-1)/(4n\alpha)$; x_1 = 3,1 мм; x_2 = 5,2 мм.

2.2.9. Плосковыпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности R = 12,5 см сильно прижата к стеклянной пластинке. Диаметр десятого темного кольца Ньютона в отраженном свете равен d_{10} = 1,5 мм. Определите длину λ волны света.

Ответ: $\lambda = d^2/(4mR) = 500$ нм.

2.2.10. На стеклянный клин падает нормально пучок света ($\lambda = 5{,}82\cdot10^{-7}$ м). Угол клина θ = 20″. Какое число темных интерференционных полос приходится на единицу длины клина? Показатель преломления света n = 1,5.

Ответ: $N = 2\theta n/\lambda = 5\ \text{см}^{-1}$.

2.2.11. Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. Наблюдая интерференционные полосы в отраженном свете ртутной дуги (λ = 546,1 нм), находим, что расстояние между пятью полосами l = 2 см. Найти угол θ клина. Свет падает перпендикулярно к поверхности пленки. Показатель преломления мыльной воды n = 1,33.

Ответ: $\theta = 5\lambda/(2nl) = 8{,}46''$.

2.2.12. Найти минимальную толщину d_{min} пленки с показателем преломления n = 1,33, при которой свет с длиной волны λ_1 = 0,64 мкм испытывает максимальное отражение, а свет с длиной волны $\lambda_2 = 0{,}40$ мкм не отражается совсем. Угол падения света $\alpha = 30°$.

Ответ: $d_{\min} = \dfrac{(2m+1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = 0{,}65$ мкм.

2.2.13. В опыте Ллойла (рис. 2.22) световая волна, исходящая непосредственно из источника S (узкой щели), интерферирует с волной, отраженной от зеркала *З*. В результате на экране *Э* образуется система интерференционных полос. Расстояние от источника до экрана $l = 100$ см. При некотором положении источника ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0{,}25$ мм, а после того как источник отодвинули от плоскости зеркала на $\Delta h = 0{,}60$ мм, ширина полос уменьшилась в $\eta = 1{,}5$ раза. Найти длину λ волны света.

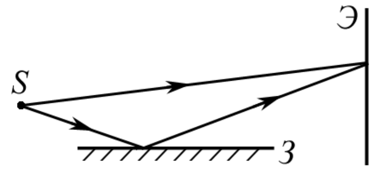

Рис. 2.22

Ответ: $\lambda = \dfrac{2\Delta x \cdot \Delta h}{l(\eta - 1)} = 0{,}6$ мкм.

2.2.14. На рис. 2.23 показана интерференционная схема с бизеркалами Френеля. Угол между зеркалами $\alpha = 12'$, расстояние от линии пересечения зеркал до узкой щели S и экрана Э равно, соответственно, $r = 10{,}0$ см и $b = 130$ см. Длина волны света $\lambda = 0{,}55$ мкм. Определить: а) ширину интерференционной полосы на экране и число возможных максимумов; б) сдвиг интерференционной картины на экране при смещении щели на $\delta l = 1{,}0$ мм по дуге радиуса r с центром в точке O; в) при какой максимальной ширине щели $\delta_{\max}$ интерференционные полосы на экране будут наблюдаться еще достаточно отчетливо?

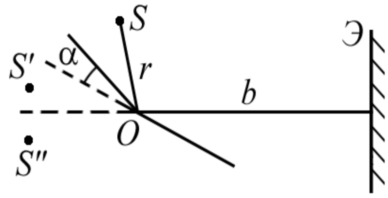

Рис. 2.23

Ответ: а) $\Delta x = \dfrac{\lambda(b+r)}{2\alpha r} = 1{,}1$ мм; $N = 9$; б) $\delta x = \left(\dfrac{b}{r}\right)\delta l = 13$ мм;

в) $\delta_{\max} = \left(1 + \dfrac{r}{b}\right)\dfrac{\lambda}{4\alpha} = 43$ мкм.

2.2.15. Плоская световая волна падает на бизеркала Френеля, угол между которыми $\alpha = 2{,}0'$. Определить длину волны света, если ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0{,}55$ мм.

Ответ: $\lambda = 2\alpha\Delta x = 0{,}64$ мкм.

2.2.16. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на расстоянии $d = 2{,}5$ мм. На экране, расположенном за диафрагмой на $l = 100$ см, образуется система интерференционных полос. На какое расстояние и в какую сторону сместятся полосы, если одну из щелей перекрыть стеклянной (n = 1,5) пластинкой толщиной h = 10 мкм?

Ответ: В сторону перекрытой щели; $\Delta x = hl\,(n - 1)/d = 2$ мм.

2.2.17. На рис. 2.24 показана схема интерферометра, служащего для измерения показателей преломления прозрачных веществ. Здесь S – узкая щель, освещенная монохроматическим светом λ = 589 нм; *1* и *2* – две одинаковые трубки с воздухом, длина каждой из которых l = 10,0 см; *Д* – диафрагма с двумя щелями, интерференционная картина на экране Э сместилась вверх на N = 17 полос. Показатель преломления воздуха n = 1,000277. Определить показатель n' преломления аммиака.

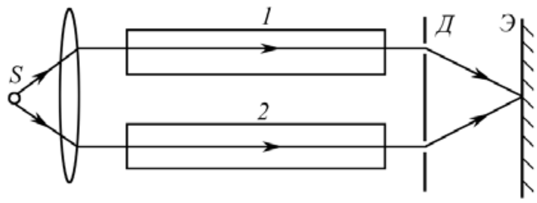

Рис. 2.24

Ответ: $n' = n + N\lambda/l = 1{,}000377$.

2.2.18. На тонкую пленку (n = 1,33) падает параллельный пучок белого света. Угол падения i_1 = 52°. При какой минимальной толщине пленки зеркально отраженный свет будет наиболее сильно окрашен в желтый цвет (λ = 0,60 мкм)?

Ответ: $d_{\min} = \dfrac{2m+1}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\lambda = 0{,}14$ мкм.

2.2.19. Найти минимальную толщину $d_{\min}$ пленки с показателем преломления n = 1,33, при которой свет с длиной волны λ = 0,64 мкм испытывает максимальное отражение. Угол падения α света равен 30°.

Ответ: $d_{\min} = \dfrac{2m+1}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\lambda = 0{,}60$ мкм.

2.2.20. Свет с длиной волны λ = 0,55 мкм падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отраженном свете наблюдают систему интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых Δx = 0,21 мм. Найти: а) угол между гранями клина; б) степень монохроматического света ($\Delta\lambda/\lambda$), если исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии $l \approx 1{,}5$ см от вершины клина.

Ответ: а) $\alpha = \lambda/(2n\Delta x) = 3'$; б) $\Delta\lambda/\lambda = 0{,}014$.

2.2.21. Плосковыпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны R = 40 см соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. При этом в отраженном свете радиус некоторого темного кольца r = 2,5 мм. Наблюдая за данным кольцом, линзу осторожно отодвинули от пластинки на Δh = 10 мкм. Каким стал радиус этого кольца?

Ответ: $r' = \sqrt{r^2 - R\Delta h} = 1{,}5$ мм.

2.2.22. В каких пределах может изменяться толщина пластинки h, чтобы можно было наблюдать максимум 12-го порядка для $\lambda = 600$ нм? Показатель преломления пластинки $n = 1{,}6$. Угол падения света на поверхность пластинки i.

Ответ: $h = \dfrac{2m-1}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\lambda$; $h_{min} = 2{,}16$ мкм; $h_{max} = 2{,}77$ мкм.

2.2.23. В двухлучевом интерферометре используется оранжевая линия ртути, состоящая из двух компонент с длинами волн $\lambda_1 = 576{,}97$ нм и $\lambda_2 = 579{,}03$ нм. При каком наименьшем порядке m интерференции резкость интерференционной картины будет наихудшей?

Ответ: $m = \lambda_1/(2\Delta\lambda) = 140$.

2.2.24. Какова наименьшая возможная толщина h плоскопараллельной пластинки с показателем преломления $n = 1{,}5$, если при освещении белым светом под углами $i = 45°$ и $i = 60°$ она кажется красной ($\lambda = 740$ нм)?

Ответ: $h = \dfrac{\lambda}{2\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2 i_2}\right)} = 3{,}8$ мкм.

2.2.25. В интерферометре Майкельсона использовалась желтая линия натрия, состоящая из двух компонент с длинами волн $\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм. При поступательном перемещении одного из зеркал интерференционная картина периодически исчезала (почему)? Найти перемещение зеркала между двумя последовательными исчезновениями интерференционной картины.

Ответ: $\Delta l = \lambda^2/(2\Delta\lambda) = 0{,}3$ мм.

3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Основные формулы и обозначения

Радиус внешней границы m-й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)} m\lambda}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где a – расстояние от точечного источника света до круглой диафрагмы; b – расстояние от диафрагмы до экрана, на котором наблюдается дифракционная картина; λ – длина волны.

Радиус внешней границы m-й зоны Френеля для плоской волны

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}.$$

Дифракция Фраунгофера на щели, свет падает нормально. Условие минимумов интенсивности света

$$b\sin\varphi = \pm m\lambda, \ \ m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где b – ширина щели; φ – угол дифракции; m – номер минимума.

Условие максимумов интенсивности света на одной щели

$$b\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \ \ m = 1, 2, 3, \ldots,$$

Дифракционная решетка, свет падает нормально. Условие главных фраунгоферовых максимумов интенсивности света:

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda, \ \ m = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

где d – период (постоянная) решетки; φ – угол между нормалью к поверхности решетки и направлением наблюдения дифракции; m – номер главного максимума.

Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

где $\delta\lambda$ – наименьшая разность соседних длин волн спектральных линий (λ и $\lambda+\delta\lambda$), видимые раздельно в спектре, полученном с помощью данной дифракционной решетки; N – число штрихов решетки.

Разрешающая сила объектива

$$R = \frac{1}{\delta\psi} = \frac{D}{1{,}22\lambda},$$

где $\delta\psi$ – наименьшее угловое расстояние, при котором изображения двух точек в фокальной плоскости объектива еще видны раздельно; D – диаметр объектива.

Формула Брэгга – Вульфа. Условие дифракционных максимумов

$$2d\sin\theta = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где d – межплоскостное расстояние; θ – угол скольжения (угол между направлением пучка параллельных лучей, падающих на кристалл, и гранью кристалла).

Задачи с решениями

Задача 1. Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 0{,}50$ мкм расположен на расстоянии $a = 100$ см перед диафрагмой с круглым отверстием радиуса $r = 1{,}0$ мм. Найти расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии составляет $m = 3$.

Дано:
$\lambda = 5\cdot10^{-7}$ м
$a = 1$ м
$r = 1{,}0\cdot10^{-3}$ м
$m = 3$

b – ?

Решение. Радиус внешней границы m-й зоны Френеля $r_m = \sqrt{\dfrac{ab}{a+b}m\lambda}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения

$$r^2 = \frac{ab}{a+b}m\lambda,$$ отсюда

$$b = \frac{ar^2}{m\lambda a - r^2} = \frac{1\cdot\left(10^{-3}\right)^2}{3\cdot5\cdot10^{-7}\cdot1-\left(10^{-3}\right)^2} = 2 \text{ м}.$$

Ответ: $b = 2$ м.

Задача 2. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус r которого можно менять. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны $a = 100$ см и $b = 125$ см. Определить длину волны света λ, если максимум освещенности в центре дифракционной картины наблюдается при $r_1 = 1{,}00$ мм и следующий максимум – при $r_2 = 1{,}29$ мм.

Дано:
$a = 1$ м
$b = 1{,}25$ м
$r_1 = 1{,}0\cdot10^{-3}$ м
$r_2 = 1{,}29\cdot10^{-3}$ м

λ – ?

Решение. Радиус внешней границы m-й зоны Френеля $r_m = \sqrt{\dfrac{ab}{a+b}m\lambda}$.

По условию задачи первый максимум освещенности наблюдается в центре дифракционной картины, т. е. $m_1 = 1$. Тогда следующий максимум будет при $m_2 = 3$.

Эти два последовательных максимума разделены минимумом освещенности с $m = 2$. Тогда радиус 1-й зоны Френеля (центральный максимум): $r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m_1 \lambda}$. Радиус 3-й зоны Френеля ($m_2 = 3$) (следующий по условию задачи максимум): $r_2 = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m_2 \lambda}$. Возведем в квадрат выражения для r_1 и r_2 и найдем разность квадратов этих выражений

$$r_2^2 - r_1^2 = \frac{\lambda ab}{a+b}(m_2 - m_1) = \frac{\lambda ab}{a+b}.$$

Отсюда
$$\lambda = \frac{a+b}{2ab}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

$$\lambda = \frac{1{,}0 + 1{,}25}{2 \cdot 1{,}0 \ \cdot 1{,}25}\left[\left(1{,}29 \cdot 10^{-3}\right)^2 - \left(1{,}0 \cdot 10^{-3}\right)^2\right] \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 600 \text{ нм}.$$

Ответ: $\lambda = 600$ нм.

Задача 3. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность света I за экраном в точке, для которой отверстие: а) равно первой зоне Френеля; б) внутренней половине первой зоны; в) двум зонам Френеля?

Решение. а) Поскольку отверстие в непрозрачном экране открывает только центральную зону (первую зону Френеля), то амплитуда в точке наблюдения P (за экраном) равна A и в 2 раза больше амплитуды A_0 падающей на экран с отверстием световой волны: $A = 2A_0$.

Тогда интенсивность света в точке наблюдения P (за экраном) в 4 раза больше, чем при отсутствии преград между точками, соответствующими источнику света S и точке наблюдения P:

$$I = (A)^2 = (2A_0)^2 = 4I_0.$$

б) Если отверстие равно внутренней половине первой зоны Френеля, то амплитуда световой волны, пришедшей в точку наблюдения P, ослабляется в $\sqrt{2}$ раз: $A = \sqrt{2}A_0$. Тогда интенсивность в точке наблюдения P (за экраном) равна $I = (A)^2 = \left(\sqrt{2}A_0\right)^2 = 2I_0$.

в) Если отверстие составляет две зоны Френеля, то амплитуды от этих зон (примерно одинаковые) придут в точку наблюдения в противофазе, и в ней будет наблюдаться минимум интенсивности света $I \approx 0$.

Ответ: а) $I = 4I_0$; б) $I = 2I_0$; в) $I = 0$.

Задача 4. На пути плоской световой волны с λ = 0,54 мкм поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием F = 50 см, непосредственно за ней – диафрагму с круглым отверстием и на расстоянии b = 75 см от диафрагмы – экран. При каких радиусах отверстия r_m центр дифракционной картины на экране имеет максимальную освещенность?

Дано:
$\lambda = 5{,}4 \cdot 10^{-7}$ м
$F = 0{,}50$ м
$b = 0{,}75$ м
r_m – ?

Решение. Радиус внешней границы m-й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

где a – расстояние от источника света до диафрагмы (линзы); b – расстояние от диафрагмы (линзы) до экрана.

Для нахождения a – расстояния от источника света до линзы – воспользуемся формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда $a = \dfrac{Fb}{b-F}$. Подставим в формулу для определения радиуса зон Френеля.

Воспользуемся формулой тонкой линзы $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F}$, отсюда $\dfrac{ab}{a+b} = F$.

Подставив в (1), найдем радиус зон Френеля

$$r_m = \sqrt{m\lambda F} = \sqrt{m \cdot 5{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}5} = 5{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{m} \text{ м} = 520 \cdot \sqrt{m} \text{ мкм.}$$

Максимумы освещенности будут наблюдаться при нечетных значениях m = 1, 3, 5, …

Ответ: $r_m = 520 \cdot \sqrt{m}$ мкм, где m = 1, 3, 5, …

Задача 5. На дифракционную решетку от разрядной трубки, наполненной гелием, нормально падает пучок света. На какую линию λ_1 (в нанометрах) в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия длиной волны λ_2 = 706 нм в спектре второго порядка?

Дано:
$m_1 = 3$
$m_2 = 2$
$\lambda_2 = 7{,}06 \cdot 10^{-7}$ м
λ_1 – ?

Решение. Условия главных максимумов освещенности для дифракционной решетки выглядят следующим образом:

$$d \sin\varphi_1 = m_1\lambda_1;$$

$$d \sin\varphi_2 = m_2\lambda_2.$$

Спектральные линии накладываются одна на другую, поэтому углы дифракции будут равными, то есть $\varphi_1 = \varphi_2$.

Приравнивая правые части уравнений, получим:

$$\lambda_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \lambda_2 = \frac{2}{3} \cdot 7{,}06 \cdot 10^{-7} \approx 4{,}71 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 471 \text{ нм}.$$

Ответ: λ_1 = 471 нм.

Задача 6. На щель шириной a = 0,1 мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника (λ = 0,6 мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии L = 1 м.

Дано:
$a = 1 \cdot 10^{-4}$ м
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м
L = 1 м
l – ?

Решение. Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности.

Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между двумя минимумами интенсивности (рис. 3.1).

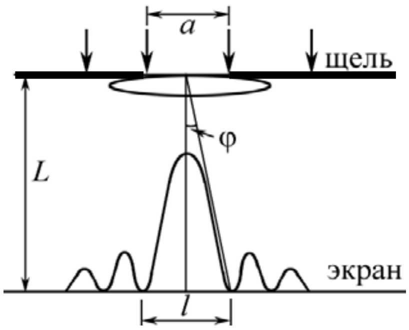

Рис. 3.1

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ, определяемыми условием

$$a \sin\varphi = \pm m\lambda, \qquad (1)$$

где m = 1 – порядок минимума.

Расстояние между двумя минимумами на экране определим по рисунку: $l = 2L\,\text{tg}\varphi$. При малых углах $\text{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, тогда

$$l = 2L \sin\varphi. \qquad (2)$$

Выразим $\sin\varphi$ из уравнения (1) и подставим в (2)

$$l = \frac{2Lm\lambda}{a} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{10^{-4}} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1{,}2 \text{ см}.$$

Ответ: l = 1,2 см.

Задача 7. Дифракционная решетка содержит n = 200 штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет (λ = 0,6 мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

Дано:
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$n = 2 \cdot 10^{5}$ м$^{-1}$
$m_{\max}$ – ?

Решение. Период дифракционной решетки найдем из формулы

$$d = 1/n. \qquad (1)$$

Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение $m_{\max}$, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90°. Постоянная решетки d, длина волны λ и угол отклонения φ, соответствующий m-му дифракционному максимуму, связаны соотношением $d\sin\varphi = m\lambda$.

С учетом (1) получим $$m = \frac{\sin\varphi}{n\lambda}.$$

Максимуму наибольшего порядка соответствует угол $\varphi_{max} = 90°$ – максимально возможный угол отклонения лучей решеткой. Тогда

$$m_{max} = \frac{1}{n\lambda} = \frac{1}{2\cdot10^5\cdot6\cdot10^{-7}} = 8{,}33.$$

Число m обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 9, так как при этом значении $\sin\varphi$ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно, $m_{max} = 8$.

Ответ: $m_{max} = 8$.

Задача 8. На дифракционную решетку, содержащую $n = 100$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум третьего порядка. Чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta\varphi = 20°$. Определить длину волны света λ.

Дано:
$n = 1\cdot10^5$ м$^{-1}$
$\Delta\varphi = 20°$
$m = 3$

λ – ?

Решение. Период дифракционной решетки найдем из формулы

$$d = 1/n. \qquad (1)$$

Максимумы интенсивности света одного порядка при дифракции на дифракционной решетке находятся на одинаковом расстоянии от центрального максимума (см. рис. 3.1) и, следовательно, наблюдаются под одинаковыми углами дифракции φ:

$$d\sin\varphi = m\lambda. \qquad (2)$$

По условию задачи, чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta\varphi = 20°$. Следовательно, угол дифракции $\varphi = \Delta\varphi/2.$ Тогда из уравнений (1) и (2), с учетом, что $\varphi = \Delta\varphi/2,$ длина волны света равна:

$$\lambda = \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{nm} = \frac{\sin 10°}{1\cdot10^5\cdot3} = 5{,}79\cdot10^{-7}\text{ м} = 579\text{ нм}.$$

Ответ: $\lambda = 579$ нм.

Задача 9. Свет с $\lambda = 589$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2{,}5$ мкм, содержащую $N = 10^4$ штрихов. Найти угловую ширину $\delta\varphi$ дифракционного максимума второго порядка.

Дано:	**Решение.** Угловая дисперсия дифракционной решетки $D = \dfrac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \dfrac{m}{d\cos\varphi}$. (1)
$\lambda = 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м	Разрешающая способность дифракционной решетки, содержащей N штрихов, равна $R = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$, отсюда
$d = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ м	
$N = 10^4$	
$m = 2$	
$\delta\varphi$ – ?	

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}. \tag{2}$$

Свет падает на дифракционную решетку нормально. Условие главных максимумов дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = m\lambda, \text{ отсюда}$$

$$\sin\varphi = \frac{m\lambda}{d}. \tag{3}$$

Тогда из уравнений (1) – (3) угловая ширина дифракционного максимума будет равна:

$$\delta\varphi = \frac{\delta\lambda \cdot m}{d\cos\varphi} = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi} = \frac{\lambda}{Nd\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{\lambda}{Nd\sqrt{1-\left(m\lambda/d\right)^2}}.$$

Подставим численные значения

$$\delta\varphi = \frac{5{,}89 \cdot 10^{-7}}{10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}\sqrt{1-\left(2 \cdot 5{,}89 \cdot 10^{-7}/2{,}5 \cdot 10^{-6}\right)^2}} = 2{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 5{,}5''.$$

Ответ: $\delta\varphi = 5{,}5''$.

Задача 10. С помощью дифракционной решетки с периодом $d = 20$ мкм требуется разрешить дублет натрия (λ_1=589 нм и λ_2=589,6 нм) в спектре второго порядка. При какой наименьшей длине решетки l это возможно?

Дано:	**Решение.** Разрешающая способность дифракционной решетки: $R = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$, где N – число штрихов решетки.
$d = 2 \cdot 10^{-5}$ м	Число штрихов решетки можно найти, зная длину решетки l и период решетки d: $N = l/d$.
$\lambda_1 = 589$ нм	
$\lambda_2 = 589{,}6$ нм	
$m = 2$	
l – ?	

Тогда $$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m\frac{l}{d}.$$

Отсюда наименьшая длина решетки, при которой возможно разрешить дублет натрия, $l = \dfrac{\lambda \cdot d}{m \cdot \delta\lambda}$, где $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, а $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$.

Тогда

$$l = \frac{d}{2m}\cdot\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{2\cdot 10^{-5}}{2\cdot 2}\cdot\frac{589+589{,}6}{589{,}6-589} = 9{,}82\cdot 10^{-3}\ \text{м} \approx 10\ \text{мм}.$$

Ответ: l = 10 мм.

Задача 11. При прохождении пучка рентгеновских лучей с λ = 17,8 пм через поликристаллический образец на экране, расположенном на расстоянии l = 15 см от образца, образуется система дифракционных колец. Определить радиус r светлого кольца, соответствующего второму порядку отражения от системы плоскостей с межплоскостным расстоянием d = 155 пм.

Дано:
λ = 17,8 пм
l = 15 см
m = 2
d = 155 пм
r – ?

Решение. При углах падения α, удовлетворяющих условию Брэгга – Вульфа, имеет место зеркальное отражение лучей (дифракционный максимум). В этом случае падающий луч отклоняется от первоначального направления на удвоенный угол скольжения 2θ, рис. 3.2. Из рисунка видно, что радиус r кольца, соответствующего второму порядку отражения, можно определить из прямоугольного треугольника $r = l\,\text{tg}(2\theta)$, где 2θ – угол, под которым можно наблюдать на экране светлое кольцо, соответствующее второму порядку отражения от системы плоскостей. Угол θ – это угол скольжения, определяемый из условия дифракционных максимумов. Согласно формуле Брэгга – Вульфа

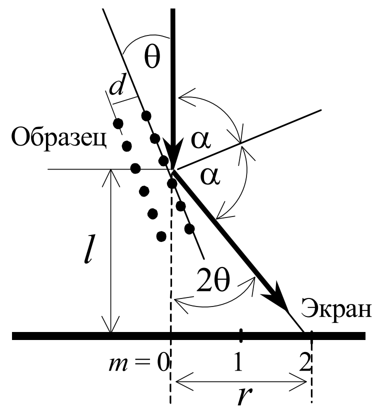

Рис. 3.2

$$2d\sin\theta = \pm m\lambda,\ m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где d – межплоскостное расстояние.

Тогда радиус кольца $r = l\cdot\text{tg}\left[2\left(\arcsin\frac{m\lambda}{2d}\right)\right]$;

$$r = 15\cdot\text{tg}\left[2\left(\arcsin\frac{2\cdot 17{,}8}{2\cdot 155}\right)\right] = 15\cdot\text{tg}13{,}2^\circ = 3{,}5\ \text{см}.$$

Ответ: r = 3,5 см.

Задача 12. Определить максимальное увеличение зрительной трубы с диаметром объектива D = 5 см, при котором разрешающая способность ее объектива будет полностью использована, если диаметр зрачка глаза d_0 = 4 мм.

Дано:	
$D = 5$ см	
$d_0 = 0{,}4$ см	
Γ_{max} – ?	

Решение. Пусть $\delta\psi$ и $\delta\psi'$ – минимальные угловые расстояния, разрешаемые, соответственно, объективом трубы и глазом: $\delta\psi = \dfrac{1{,}22\lambda}{D}$, $\delta\psi' = \dfrac{1{,}22\lambda}{d_0}$.

Тогда искомое увеличение трубы равно:

$$\Gamma_{max} = \frac{\delta\psi'}{\delta\psi} = \frac{D}{d_0} = \frac{5}{0{,}4} = 12{,}5.$$

Ответ: $\Gamma_{max} = 12{,}5$.

Задачи для самостоятельного решения

Дифракция Френеля. Дифракция на кристаллической решетке

3.1.1. На непрозрачную преграду с отверстием радиусом $r = 1$ мм падает плоская монохроматическая световая волна. Когда расстояние от преграды до установленного за ней экрана $b_1 = 0{,}575$ м, в центре дифракционной картины наблюдается максимум интенсивности. При увеличении расстояния до значения $b_2 = 0{,}862$ м максимум интенсивности сменяется минимумом. Определить длину волны λ света.

Ответ: $\lambda = r^2(b_2 - b_1)/(b_1 b_2) = 579$ нм.

3.1.2. На непрозрачном экране сделано круглое отверстие диаметром $d = 4$ мм. Экран освещается падающим нормально пучком параллельных лучей ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Точка наблюдения находится на расстоянии $b = 1$ м от него. Сколько зон Френеля укладывается на отверстии? Темное или светлое пятно будет наблюдаться в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения поместить экран?

Ответ: $m = d^2/(4b\lambda) = 8$ зон, темное пятно.

3.1.3. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии L от точечного источника монохроматического света с $\lambda = 6\cdot10^{-7}$ м. На расстоянии $a = 0{,}5L$ от источника помещена круглая прозрачная преграда диаметром $d = 1$ см. Чему равно расстояние L, если преграда закрывает только центральную зону Френеля?

Ответ: $L = d^2/(m\lambda) = 167$ м.

3.1.4. Монохроматический свет ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падает нормально на круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. На каком расстоянии от отверстия b должна находиться точка наблюдения, чтобы в отверстии помещались: а) одна зона Френеля, б) две зоны Френеля?

Ответ: 1) $b_1 = r^2/\lambda = 50$ м; 2) $b_2 = r^2/(2\lambda) = 25$ м.

3.1.5. Точечный источник монохроматического света расположен перед зонной пластинкой на расстоянии a = 1,5 м от нее. Изображение источника образуется на расстоянии b = 1,0 м от пластинки. Найти фокусное расстояние F зонной пластинки.

Ответ: $F = ab/(a + b)$ = 0,6 м. Это значение соответствует главному фокусу, помимо которого существуют и другие.

3.1.6. Найти радиус третьей и пятой зон Френеля, если расстояние от источника света до волновой поверхности a = 1 м, расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения b = 1 м. Длина волны света λ = 500 нм.

Ответ: $r_3 = \sqrt{3\lambda \cdot ab/(a+b)} = 0{,}86$ мм; $r_5 = \sqrt{5\lambda \cdot ab/(a+b)} = 1{,}58$ мм.

3.1.7. Найти радиус второй и четвертой зон Френеля для плоской волны, если расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения b = 1 м. Длина волны света λ = 500 нм.

Ответ: $r_2 = \sqrt{2b\lambda} = 1$ мм, $r_4 = \sqrt{4b\lambda} = 1{,}41$ мм.

3.1.8. Свет от монохроматического источника (λ = 600 нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия d = 6 мм. За диафрагмой на расстоянии b = 3 м от нее находится экран. Какое число зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым?

Ответ: $m = r^2/(b\lambda)$ = 5; центр дифракционной картины будет светлым.

3.1.9. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии l = 4 м от точечного источника монохроматического света (λ = 500 нм). На расстоянии $a = 0{,}5l$ от источника помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе R отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?

Ответ: $R = \sqrt{m\lambda \cdot \dfrac{ab}{a+b}} = 1$ мм.

3.1.10. На диафрагму с диаметром d = 1,96 мм падает нормально параллельный пучок монохроматического света (λ = 600 нм). При каком наибольшем расстоянии b между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины будет наблюдаться темное пятно?

Ответ: $b = d^2/(8\lambda)$ = 0,8 м.

3.1.11. Вычислить радиус пятой зоны Френеля r_5 для плоского волнового фронта (λ = 0,5 мкм), если построение делается для точки наблюдения, находящейся на расстоянии b = 1 м от фронта волны.

Ответ: $r_5 = \sqrt{5b\lambda} = 1{,}58$ мм.

3.1.12. Радиус четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен r_4 = 3 мм. Определить радиус шестой зоны Френеля.

Ответ: $r_6 = \sqrt{1{,}5r_4^2} = 3{,}67$ мм.

3.1.13. Плоская световая волна λ = 640 нм с интенсивностью I_0 падает нормально на круглое отверстие радиусом r = 1,20 мм. Найти интенсивность в центре дифракционной картины на экране, отстоящем на расстоянии b = 1,50 м от отверстия.

Ответ: $I \approx 2I_0 \cdot \left[1-\cos\left(\pi \cdot r^2/(\lambda \cdot b)\right)\right] = 2I_0$.

3.1.14. Плоская световая волна (λ = 0,7 мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием радиусом r = 1,4 мм. Определить расстояния b_1, b_2, b_3 от диафрагмы до трех наиболее удаленных от нее точек, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.

Ответ: $b_1 = r^2/(2\lambda)$ = 1,4 м; $b_2 = r^2/(4\lambda)$ = 0,7 м; $b_3 = r^2/(6\lambda)$ = 0,47 м.

3.1.15. Точечный источник света (λ = 0,5 мкм) расположен на расстоянии a = 1 м от плоской диафрагмы с круглым отверстием радиусом r = 0,5 мм. Определить расстояние b от экрана до диафрагмы, при котором отверстие открывало бы три зоны Френеля.

Ответ: $b = ar^2/(m\lambda a - r^2)$ = 0,2 м.

3.1.16. Точечный источник света с λ = 500 нм помещен на расстоянии a=0,5 м перед непрозрачной преградой с отверстием радиусом r=0,5 мм. Определить расстояние b от преграды до точки, для которой число открываемых отверстием зон Френеля m равно: а) 1; б) 5; в) 10.

Ответ: $b = a/(am\lambda - r^2)$; а) $b = \infty$, б) b = 125 мм; в) b = 56 мм.

3.1.17. Точечный источник света с λ = 550 нм помещен на расстоянии a = 1 м перед непрозрачной преградой с отверстием радиусом r = 2 мм. Определить минимальное число открытых зон Френеля, которое может наблюдаться при этих условиях.

Ответ: $m_{\min}$ равно наименьшему целому числу, превышающему $r^2/(a\lambda)$ = 8.

3.1.18. Точечный источник света с λ = 550 нм помещен на расстоянии a = 1 м перед непрозрачной преградой с отверстием радиусом r = 2 мм. Определить, при каком значении расстояний b от преграды до точки наблюдения получается минимально возможное число открытых зон?

Ответ: $b = ar^2/(a\lambda m - r^2)$ = 10 м.

3.1.19. При прохождении пучка рентгеновских лучей с λ = 17,8 пм через поликристаллический образец на экране, расположенном на расстоянии l = 15 см от образца образуется система дифракционных колец. Определить радиус r светлого кольца, соответствующего второму порядку отражения от системы плоскостей с межплоскостным расстоянием d = 155 пм.

Ответ: $r = l\,\mathrm{tg}2\theta$ = 3,5 см,
где θ – угол скольжения, определяемый условием $2d\sin\theta = m\lambda$.

3.1.20. Узкий пучок рентгеновских лучей падает под углом скольжения $\theta = 60°$ на естественную грань монокристалла NaCl, плотность которого $\rho = 2{,}16$ г/см^3. При зеркальном отражении от этой грани образуется максимум второго порядка. Определить длину волны излучения λ.

Ответ: $\lambda = \frac{2}{m}\sqrt[3]{\frac{m_{\text{NaCl}}}{2\rho}} \cdot \sin\theta = 244$ пм, где m_{NaCl} – масса молекулы NaCl.

3.1.21. Параллельный пучок рентгеновского излучения падает на грань кристалла. Под углом $\theta = 65°$ к плоскости грани наблюдается максимум первого порядка. Расстояние между атомными плоскостями кристалла $d = 280$ пм. Определить длину волны рентгеновского излучения.

Ответ: $\lambda = 2d\sin\theta = 506$ пм.

3.1.22. Исходя из определения зон Френеля, найти число зон Френеля, которые открывает отверстие радиусом r для точки, находящейся на расстоянии b от центра отверстия, в случае, если волна, падающая на отверстие, плоская.

Ответ: $m = r^2/(b\lambda)$.

3.1.23. Зная формулу радиуса m-й зоны Френеля для сферической волны, $r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}$, вывести соответствующую формулу для плоской волны.

Ответ: $r_m = \sqrt{bm\lambda}$.

3.1.24. Параллельный пучок рентгеновского излучения падает на грань кристалла. Под каким углом θ к плоскости грани наблюдается максимум первого порядка? Расстояние между атомными плоскостями кристалла $d = 280$ пм. Длина волны рентгеновского излучения $\lambda = 506$ пм.

Ответ: $\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right) = 65°$.

3.1.25. На грань кристалла каменной соли падает параллельный пучок рентгеновского излучения $\lambda = 147$ пм. Расстояние между атомными плоскостями кристалла $d = 0{,}28$ нм. Определить, под каким углом θ к плоскости грани кристалла наблюдается дифракционный максимум второго порядка.

Ответ: $\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\right) = 31°30'$.

Дифракция Фраунгофера

3.2.1. Сколько штрихов на 1 мм содержит дифракционная решетка, если при наблюдении в свете ($\lambda = 0{,}6$ мкм) максимум пятого порядка наблюдается под углом $\varphi = 18°$?

Ответ: $n = 10^{-3} \cdot \sin\varphi/(m\lambda) = 103$ штриха.

3.2.2. Свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм падает на щель ширины $b = 10$ мкм под углом $\varphi_0 = 30°$ к ее нормали. Найти угловое положение первых минимумов, расположенных по обе стороны центрального фраунгоферова максимума.

Ответ: $\varphi_{+1} = \arcsin(\lambda/b + \sin\varphi_0) \approx 33°27'$;
$\varphi_{-1} = \arcsin(\sin\varphi_0 - \lambda/b) \approx 26°45'$.

3.2.3. На щель нормально падает пучок монохроматического света. Длина волны укладывается на ширине щели 6 раз. Под каким углом φ будет наблюдаться $m = 3$-й дифракционный минимум света? Сделать чертеж, показать угол дифракции и разность хода между крайними лучами.

Ответ: $\varphi = \arcsin(m\lambda/b) = 30°$, где b – ширина щели.

3.2.4. Определите длину волны λ монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку, период которой $d = 2{,}2$ мкм, если угол между направлениями на фраунгоферовы максимумы первого и второго порядков $\Delta\varphi = 15°$.

Ответ: $\lambda = (d\sin\Delta\varphi)/(5 - 4\cos\Delta\varphi)^{1/2} = 0{,}54$ мкм.

3.2.5. Монохроматический свет падает нормально на щель шириной $b = 11$ мкм. За щелью находится тонкая линза с фокусным расстоянием $F = 150$ мм, в фокальной плоскости которой расположен экран. Найти длину волны света λ, если расстояние между симметрично расположенными минимумами третьего порядка (на экране) равно $x = 50$ мм.

Ответ: $\lambda \approx b\Big/\left(m\sqrt{1+4\left(F/x\right)^2}\right) = 0{,}6$ мкм.

3.2.6. На щель шириной $b = 0{,}05$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Определить угол φ между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

Ответ: $\varphi = \arcsin(4\lambda/b) = 2°45'$.

3.2.7. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения пучков света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, $\varphi = 1°$. Сколько длин волн падающего света укладывается на ширине щели?

Ответ: $b = 2\lambda/\sin\varphi = 115\lambda$.

3.2.8. Свет с длиной волны λ падает нормально на прямоугольную щель шириной b. Найти угловое распределение интенсивности света при фраунгоферовой дифракции, а также угловое положение минимумов.

Ответ: $I_\varphi = I_0\sin^2(\delta/2)/(\delta/2)$; $b\sin\varphi = m\lambda$, $m = 1, 2, \ldots$,
где I_0 – интенсивность в центре дифракционной картины ($\varphi = 0$),
$\delta = 2\pi b\cdot\sin\varphi$ – разность фаз.

3.2.9. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол $\varphi_2 = 14°$. На какой угол φ_3 отклонен максимум третьего порядка?

Ответ: $\varphi_3 = (m_3/m_2)\cdot\sin\varphi_2 = 21°17'$.

3.2.10. На дифракционную решетку, содержащую $n = 400$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Найти общее число $m_{\max}$ дифракционных максимумов, которые дает эта решетка.

Ответ: $m_{\max} = 1 + 0{,}002/(n\lambda) = 9$.

3.2.11. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка отчасти перекрывают друг друга. На какую длину λ_2 волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница ($\lambda_3 = 0{,}4$ мкм) спектра третьего порядка?

Ответ: $\lambda_2 = (m_3/m_2)\lambda_3 = 0{,}6$ мкм.

3.2.12. На дифракционную решетку, содержащую $n = 500$ штрихов на $l = 1$ мм, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить ширину спектра первого порядка b на экране, если расстояние L от линзы до экрана равно 3 м. Границы видимости спектра $\lambda_{кр} = 780$ нм, $\lambda_ф = 400$ нм.

Ответ: $b = mnL\left(\dfrac{\lambda_ф}{\sqrt{l^2-\left(mn\lambda_ф\right)^2}} - \dfrac{\lambda_{кр}}{\sqrt{l^2-\left(mn\lambda_{кр}\right)^2}}\right) = 66$ см.

3.2.13. На щель шириной $a = 2$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 589$ нм). Под какими углами φ будут наблюдаться дифракционные минимумы света?

Ответ: $\varphi_m = \arcsin(m\lambda/a)$, где $m = 1, 2, 3$; $\varphi_1 = 17°8'$; $\varphi_2 = 36°5'$; $\varphi_3 = 62°$.

3.2.14. На щель шириной $a = 20$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Найти ширину изображения щели на экране l, удаленном от щели на расстояние $L = 1$ м. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

Ответ: $l = 2L\lambda/d = 5$ см.

3.2.15. На дифракционную решетку падает нормально пучок света. Для того чтобы увидеть красную линию ($\lambda = 700$ нм) в спектре этого порядка, зрительную трубу пришлось установить под углом $\varphi = 30°$ к оси коллиматора. Найти постоянную d дифракционной решетки. Какое число n штрихов нанесено на единицу длины этой решетки?

Ответ: $d = 2\lambda/\sin\varphi = 2{,}8$ мкм; $n = 1/d = 3571$ см$^{-1}$.

3.2.16. Свет с λ = 589 нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом d = 2,5 мкм, содержащую $N = 10^4$ штрихов. Найти угловую ширину $\Delta\varphi$ дифракционного максимума второго порядка.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{2\lambda}{Nd\sqrt{1-(m\lambda/d)^2}} = 11''$.

3.2.17. Период d дифракционной решетки равен 2 мкм. Определите наибольший порядок спектра, полученный с помощью этой решетки при падении на нее нормально плоской монохроматической волны длиной λ = 600 нм.

Ответ: $m_{\max} = d/\lambda = 3$.

3.2.18. Дифракционная картина получена с помощью решетки длиной l = 1,5 см и периодом d = 5 мкм. Определить, в спектре какого наименьшего порядка этой картины получатся раздельные изображения двух спектральных линий с разностью длин волн $\Delta\lambda$ = 0,1 нм, если линии лежат в крайней красной части спектра ($\lambda \approx$ 760 нм).

Ответ: $m = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}\cdot\dfrac{d}{l} = 3$.

3.2.19. Какой наименьшей разрешающей силой R должна обладать дифракционная решетка, чтобы с ее помощью можно было разрешить спектральные линии калия (λ_1 = 578 нм и λ_2 = 580 нм)? Какое наименьшее число N штрихов должна иметь эта решетка, чтобы разрешение было возможно в спектре второго порядка?

Ответ: $R = \lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1) = 289$; $N = \lambda_1/[m(\lambda_2 - \lambda_1)] = 145$.

3.2.20. Свет падает нормально на дифракционную решетку шириной l = 6,5 см, имеющую n = 200 штрихов на миллиметр. Исследуемый спектр содержит спектральную линию с λ = 670,8 нм, которая состоит из двух компонент, отличающихся на $\delta\lambda$ = 0,015 нм. Найти, в каком порядке спектра эти компоненты будут разрешены.

Ответ: $m_{\min} = \lambda/(\delta\lambda l n) = 4$.

3.2.21. При нормальном падении света на дифракционную решетку шириной l = 10 мм обнаружено, что компоненты желтой линии натрия (λ_1 = 589 нм и λ_2 = 589,6 нм) оказываются разрешенными, начиная с пятого порядка спектра. Оценить период d этой решетки.

Ответ: $d = ml\cdot\delta\lambda/\lambda_1$ = 0,05 мм.

3.2.22. При какой ширине l дифракционной решетки с периодом d = 0,05 мм можно разрешить в третьем порядке дублет спектральной линии с λ = 460 нм, компоненты которого отличаются на $\delta\lambda$ = 0,13 нм?

Ответ: $l = \lambda d/(\delta\lambda\cdot m)$ = 6 см.

3.2.23. Предполагая, что свет падает на дифракционную решетку нормально, получить точное выражение для угловой дисперсии D решетки в зависимости от длины волны λ. Положив период решетки $d = 1000$ нм, вычислить по найденной формуле угловую дисперсию в спектре первого порядка в окрестности длин волн: а) 400 нм; б) 580 нм; в) 760 нм.

Ответ: $D = \dfrac{m}{d\sqrt{1-\left(m\lambda/d\right)^2}}$.

3.2.24. Получить выражение для угловой дисперсии $D = d\varphi/d\lambda$ дифракционной решетки в случае падения света на решетку под углом φ_0 к нормали. Положив период решетки $d = 2250$ нм, длину волны $\lambda = 500$ нм, вычислить угловую дисперсию D в спектре первого порядка для значений φ_0, равных а) нулю, б) 30°; в) 50°; г) 51°.

Ответ: $D = |m| \Big/ \sqrt{1-\left(\sin\varphi_0 + |m|\lambda/d\right)^2}$;

где $-\left(d/\lambda\right)\left(1+\sin\varphi_0\right) \le m \le \left(d/\lambda\right)\left(1-\sin\varphi_0\right)$:

а) $D_1 = 1{,}6$ угл. мин/нм, б) $D_2 = 2{,}2$ угл. мин/нм;

в) $D_3 = 10$ угл. мин/нм, г) $D_4 = 43$ угл. мин/нм.

3.2.25. Можно ли различить невооруженным глазом два находящихся на расстоянии $l = 2$ км столба, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 1$ м? Диаметр зрачка принять равным $D = 4$ мм.

Ответ: $R_{\text{глаза}} = \dfrac{D}{1{,}22\lambda} > \dfrac{l}{\Delta x}$, различить можно.

4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Основные формулы и обозначения

Закон Брюстера

$$\mathrm{tg}\,\theta_Б = n_{21},$$

где $\theta_Б$ – угол Брюстера – угол падения светового луча, при котором отражённый от диэлектрика свет полностью поляризован; $n_{21} = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления; n_2 и n_1 – абсолютный показатель преломления диэлектрика и среды, соответственно.

Закон Малюса

$$I = I_1 \cos^2 \varphi = \frac{I_0}{2} \cos^2 \varphi,$$

где I – интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_1 – интенсивность плоскополяризованного света падающего на анализатор; φ – угол между плоскостью поляризации света, падающего на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора; $I_1 = I_0/2$, где I_0 – интенсивность естественного света.

Коэффициенты:

отражения	$\rho = I_{отр}/I_{пад}$;
пропускания	$\tau = I_{проп}/I_{пад}$;
поглощения	$\alpha = I_{погл}/I_{пад}$,

где $I_{пад}$, $I_{отр}$, $I_{проп}$ и $I_{погл}$ – интенсивность падающего, отраженного, пропущенного и поглощенного света. Следовательно, $\rho + \tau + \alpha = 1$.

Для прозрачной среды $\alpha \approx 0$, тогда $\rho + \tau = 1$.

Интенсивность света, отраженного от поверхности диэлектрика (формулы Френеля):

$$I_\perp = \frac{I_0}{2} \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}, \qquad I_\parallel = \frac{I_0}{2} \frac{\mathrm{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\mathrm{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)},$$

где $I_\perp$ и $I_\parallel$ – интенсивность света, отраженного от поверхности пластинки, с перпендикулярной и параллельной составляющей светового вектора; θ_1 и θ_2 – угол падения и угол преломления луча; I_0 – интенсивность естественного (неполяризованного) света.

Коэффициент отражения света при его нормальном падении на поверхность диэлектрика

$$\rho = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2,$$

где $n_{21} = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления; n_2 и n_1 – абсолютный показатель преломления диэлектрика и среды, соответственно.

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – максимальная и минимальная интенсивность частично поляризованного света, пропускаемого анализатором. Для линейно поляризованного света $P = 1$, поскольку $I_{\min} = 0$. Для неполяризованного света $P = 0$, поскольку $I_{\max} = I_{\min}$.

Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами

$$\Delta = (n_o - n_e)l,$$

где n_o, n_e – показатели преломления, соответственно, обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении перпендикулярном оптической оси; l – длина пути, пройденного светом в направлении перпендикулярном оптической оси.

Угол поворота φ плоскости поляризации света, распространяющегося в оптически активном веществе, определяется соотношениями:

1) в твердых телах

$$\varphi = \alpha l,$$

где α – постоянная вращения; l – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

2) в чистых жидкостях

$$\varphi = [\alpha]\rho l,$$

где $[\alpha]$ – удельное вращение; ρ – плотность жидкости.

3) в растворах

$$\varphi = [\alpha]Cl,$$

где C – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на пути l в ячейке Керра (электрооптический эффект Керра)

$$\Delta = (n_o - n_e)\cdot l = KlE^2,$$

где E – напряженность электрического поля; K – постоянная.

Закон Верде, описывающий количественно эффект Фарадея,

$$\varphi = VlH,$$

где φ – угол поворота плоскости поляризации линейно поляризованного света, распространяющегося в веществе вдоль постоянного магнитного поля, в котором находится это вещество; V – постоянная Верде; l – длина пути света в веществе; H – напряженность магнитного поля.

Задачи с решениями

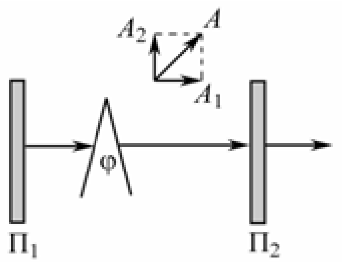

Рис. 4.1

Задача 1. Между двумя скрещенными поляроидами поместили кварцевый клин с преломляющим углом $\varphi = 3{,}5°$, рис. 4.1.

Оптическая ось клина параллельна его ребру и составляет угол 45° с главным направлением поляроидов. При прохождении через эту систему света с длиной волны $\lambda = 550$ нм наблюдаются интерференционные полосы. Ширина каждой полосы $\Delta x = 1$ мм. Определить разность показателей преломления кварца Δn для обыкновенного и необыкновенного лучей данной длины волны.

Дано:
$\varphi = 3{,}5°$
$\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м
$\Delta x = 1 \cdot 10^{-3}$ м

Δn – ?

Решение. Линейно поляризованный луч с амплитудой A, вышедший из поляроида $П_1$ в клине, разделяется на два луча, которые являются когерентными: обыкновенный и необыкновенный с амплитудами A_1 и A_2, рис. 4.1.

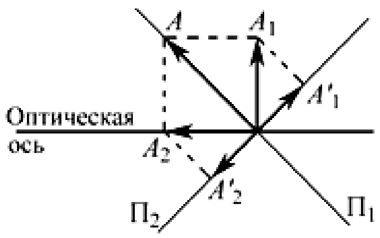

Рис. 4.2

Для получения контрастных темных и светлых интерференционных полос необходимо, чтобы амплитуды A_1 и A_2 были равны. Для этого оптическая ось клина должна составлять угол 45° с главным направлением поляроида $П_1$, рис. 4.1.

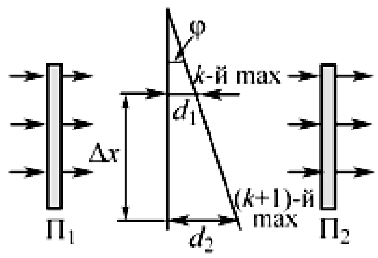

Рис. 4.3

Если в месте прохождения лучей толщина клина d_1, то при выходе оба луча имеют разность хода $\Delta_1 = d_1 \Delta n$, где Δn – разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, рис. 4.3. Поляроид $П_2$ пропускает только часть обыкновенного и необыкновенного луча с амплитудами A_1' и A_2', рис. 4.2. Их колебания происходят в одной плоскости, поэтому можно наблюдать интерференцию. В поле зрения получаются темные и светлые интерференционные полосы. Условием k-го максимума для лучей, прошедших поляроид $П_2$, является

$$\Delta_1 = d_1 \Delta n + \frac{\lambda}{2} = k\lambda . \qquad (1)$$

Соответственно, для $(k + 1)$-го максимума при толщине клина d_2

$$\Delta_2 = d_2 \Delta n + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda, \qquad (2)$$

где d_1 и d_2 – соответствующая толщина клина, где видны светлые интерференционные полосы.

Вычитая из (2) выражение (1), находим

$$d_2 - d_1 = \frac{(k+1-k)\lambda}{\Delta n} = \frac{\lambda}{\Delta n}; \quad \frac{d_2 - d_1}{\Delta x} = \frac{\lambda}{\Delta n \Delta x},$$

$$\frac{d_2 - d_1}{\Delta x} = \mathrm{tg}\,\varphi.$$

Поскольку угол φ мал, то для малых углов $\mathrm{tg}\varphi \approx \varphi$. Следовательно,

$$\varphi = \frac{\lambda}{\Delta x \Delta n}.$$

Отсюда $$\Delta n = \frac{\lambda}{\varphi \Delta x} = \frac{5{,}5\cdot 10^{-7}}{3{,}5\cdot(\pi/180)\cdot 10^{-3}} = 9\cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $\Delta n = 9{\cdot}10^{-3}$.

Задача 2. Естественный монохроматический свет падает на систему из двух скрещенных николей, между которыми находится кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно оптической оси. Найти минимальную толщину пластинки, при которой выходящий из второго николя свет ослаблен по сравнению с падающим в n раз, если постоянная вращения α.

Решение. Интенсивность света, прошедшего николь N_1, $I_1 = I_0/2$ (рис. 4.4). При прохождении света через кварцевую пластинку K плоскость колебаний вектора A_1 поворачивается на угол

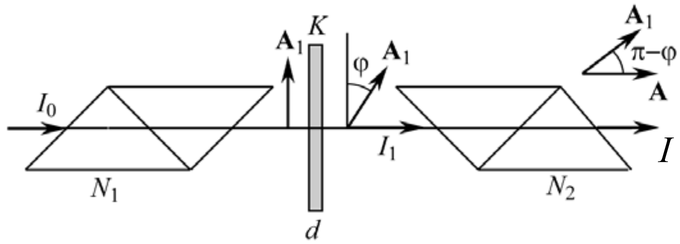

Рис. 4.4

$$\varphi = \alpha d.$$

Здесь d – толщина кварцевой пластинки; α – постоянная вращения кварца. Так как николи скрещены, угол между плоскостью колебаний света, падающего на второй николь N_2, и плоскостью его пропускания при минимальной толщине должен быть ($\pi/2 - \varphi$) и, согласно закону Малюса, интенсивность выходящего света будет равна:

$$I = \frac{I_0}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad \text{или} \quad n = \frac{I_0}{I} = \frac{2}{\sin^2\varphi}.$$

С учетом того что $\varphi = \alpha d$, получим

$$\sin(\alpha d) = \sqrt{2/n}.$$

Следовательно, минимальная толщина пластинки будет равна:

$$d = \frac{1}{\alpha}\arcsin\sqrt{\frac{2}{n}}\,.$$

Ответ: $d = \frac{1}{\alpha}\arcsin\sqrt{2/n}$.

Задача 3. Естественный монохроматический свет интенсивности I_0 падает на систему из двух поляроидов, между которыми находится пластинка, вырезанная параллельно оптической оси. Пластинка вносит разность фаз δ между обыкновенным и необыкновенным лучами. Показать, что интенсивность света, прошедшего через эту систему, равна:

$$I = \frac{I_0}{2}\left[\cos^2(\varphi - \varphi') - \sin 2\varphi \sin 2\varphi' \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right],$$

где φ и φ' – углы между оптической осью кристалла и главными направлениями поляроидов. Рассмотреть случаи скрещенных и параллельных поляроидов.

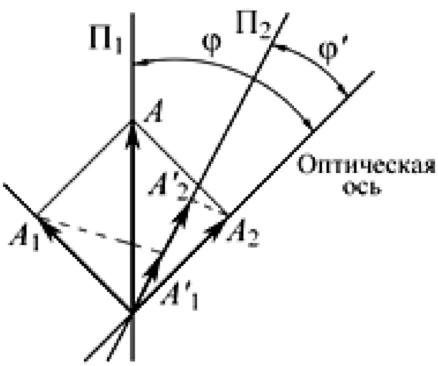

Рис. 4.5

Решение. Амплитуда света, прошедшего через первый поляроид $П_1$, равна:

$$A = A_0/\sqrt{2}\,,$$

где A_0 – амплитуда естественного света. В пластинке свет разделяется на два луча: обыкновенный и необыкновенный с амплитудами A_1 и A_2, рис. 4.5:

$$A_1 = A\sin\varphi \quad \text{и} \quad A_2 = A\cos\varphi.$$

Поляроид $П_2$ пропускает часть обыкновенного и необыкновенного луча с амплитудами A_1' и A_2', рис. 4.5:

$$A_1' = A_1 \sin\varphi' = \frac{A_0}{\sqrt{2}}\sin\varphi\sin\varphi'\,; \qquad A_2' = A_2\cos\varphi' = \frac{A_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi\cos\varphi'\,.$$

Тогда интенсивность света, прошедшего эту систему,

$$I = A_\Sigma^2 = \left(A_1'\right)^2 + \left(A_2'\right)^2 + 2A_1'A_2'\cos\delta, \qquad (1)$$

где δ – разность фаз обыкновенного и необыкновенного лучей; A_Σ – модуль векторной суммы амплитуд.

Интенсивность естественного света $I_0 = A_0^2$.

Подставив в (1) выражения для амплитуд A_1' и A_2', получим интенсивность света, прошедшего через систему:

$$I=\frac{I_0}{2}\left[\sin^2\varphi\sin^2\varphi'+\cos^2\varphi\cos^2\varphi'+2\sin\varphi\sin\varphi'\cos\varphi\cos\varphi'\cos\delta\right]=$$

$$=\frac{I_0}{2}\left[\sin^2\varphi\sin^2\varphi'+\cos^2\varphi\cos^2\varphi'+2\sin\varphi\sin\varphi'\cos\varphi\cos\varphi'-\right.$$

$$\left.-4\sin\varphi\sin\varphi'\cos\varphi\cos\varphi'\sin^2(\delta/2)\right]= \qquad (2)$$

$$=\frac{I_0}{2}\left[\cos^2(\varphi-\varphi')-\sin2\varphi\sin2\varphi'\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right].$$

Интенсивность света для скрещенных поляроидов $I_\perp$ найдем из выражения (2) при условии (см. рис. 4.5)

$$\varphi-\varphi'=90°, \text{ отсюда } 2\varphi'=2\varphi-180°.$$

Тогда $$I_\perp=\frac{I_0}{2}\left(0+\sin^2\varphi\sin^2\frac{\delta}{2}\right)=\frac{I_0}{2}\sin^2 2\varphi\sin^2\frac{\delta}{2}\cdot$$

Интенсивность света при параллельных поляроидах $I_\parallel$ найдем из выражения (2) при условии, что $\varphi=\varphi'$:

$$I_\parallel=\frac{I_0}{2}\left(1-\sin^2 2\varphi\sin^2\frac{\delta}{2}\right)\cdot$$

Задача 4. Две поляроидные пластинки расположены под прямым углом, а третья размещается между ними так, что ее ось составляет угол θ с осью первого поляроида. Какова интенсивность света, проходящего через такое устройство, если поляроиды идеальны (потерь нет)?

Решение. Если начальный пучок не поляризован, то при начальной амплитуде естественного света A_0, первая пластинка ($П_1$) пропустит амплитуду волны

$$A_1=\frac{A_0}{\sqrt{2}}.$$

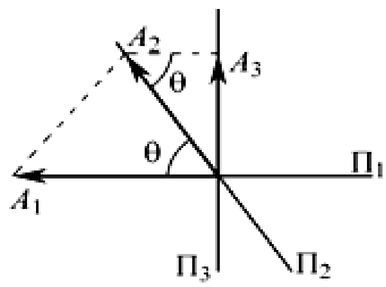

Рис. 4.6

После прохождения среднего поляроида $П_2$ амплитуда световой волны

$$A_2=A_1\cos\theta=\frac{A_0}{\sqrt{2}}\cos\theta.$$

Амплитуда световой волны после прохождения третьей поляроидной пластинки $П_3$ (рис. 4.6):

$$A_3=A_2\sin\theta=\frac{A_0}{\sqrt{2}}\cos\theta\sin\theta\cdot$$

Интенсивность прошедшего света

$$I_3=A_3^2=\frac{A_0^2}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta.$$

Так как $A_0^2 = I_0$ – интенсивность естественного света,

$$\cos\theta \sin\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}.$$

окончательно получим $$I_3 = \frac{I_0}{8}\sin^2 2\theta.$$

Ответ: $I_3 = I_0 \sin^2(2\theta)/8$.

Задача 5. Предположим, что когда пучок плоскополяризованного света падает на поляроидную пластинку, то часть его $\alpha^2 I_0$ (I_0 – интенсивность падающего света) проходит через пластинку, если ось поляроида параллельна направлению поляризации. Если же эти оси образуют прямой угол, то через пластинку проходит только доля падающего света $\varepsilon^2 I_0$. (Если поляроид идеальный, то α^2 должно быть равно единице, а ε^2 – нулю). Неполяризованный свет интенсивностью I_0 проходит через пару поляроидных пластинок, оси которых образуют угол θ. Какова интенсивность прошедшего света? (Пренебречь эффектами отражения).

Решение. Направим ось x по оси первого поляроида и примем амплитуду неполяризованного светового пучка за единицу. Тогда после прохождения первого поляроида составляющие интенсивности I по осям будут равны

$$I_x = \frac{I_0}{2}\alpha^2, \quad I_y = \frac{I_0}{2}\varepsilon^2.$$

Соответственно, проекции амплитуд будут равны:

$$A_x = \alpha/\sqrt{2} \quad \text{и} \quad A_y = \varepsilon/\sqrt{2}.$$

После прохождения второго поляроида:

$$A_x = \left(\frac{\alpha\cos\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)\alpha; \quad A_y = \left(\frac{\alpha\sin\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon.$$

Окончательная интенсивность прошедшего света будет равна:

$$\frac{I}{I_0} = A_x^2 + A_y^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^4 + \varepsilon^4\right)\cos^2\theta + \alpha^2\varepsilon^2\sin^2\theta + \frac{\alpha\varepsilon}{2}\left(\alpha^2 - \varepsilon^2\right)\sin 2\theta.$$

Для идеальных поляризаторов $\alpha = 1$, а $\varepsilon = 0$. Тогда из последней формулы получим закон Малюса: $I = \frac{I_0}{2}\cos^2\varphi$.

Задача 6. Покажите, что для угла Брюстера (угол падения $\theta_Б$, при котором отраженный луч полностью поляризован) справедливо соотношение $\mathrm{tg}\,\theta_Б = n$.

Решение. Для доказательства воспользуемся законом преломления света на границе двух сред $\sin\alpha/\sin\beta = n$, где α – угол падения; β – угол преломления.

При падении света под углом Брюстера ($\alpha = \theta_Б$) прошедший и отраженный лучи взаимно перпендикулярны, т. е. $\sin\beta = \cos\theta_Б$, поэтому

$$\frac{\sin\theta_Б}{\sin\beta} = \frac{\sin\theta_Б}{\cos\theta_Б} = \operatorname{tg}\theta_Б = n,$$

что и требовалось доказать.

Задача 7. Показатели преломления кристаллического кварца для света с длиной волны 600 нм равны $n_о = 1{,}544$ и $n_e = 1{,}553$ для обыкновенного и необыкновенного лучей, соответственно. В кристалле кварца, вырезанном параллельно оптической оси, можно получить максимальную разность скоростей обыкновенного и необыкновенного лучей, если они нормально падают на поверхность кристалла. Какова должна быть толщина кристалла, чтобы произошел сдвиг фаз этих лучей на 90°, если используется свет указанной длины волны?

Дано:
$\Delta\varphi = \pi/2$
$\lambda = 6\cdot10^{-7}$ м
$n_о = 1{,}544$
$n_e = 1{,}553$
d – ?

Решение. Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенными лучами

$$\Delta = (n_е - n_о)d,$$

где $n_о$, $n_е$ – показатели преломления, соответственно, обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении перпендикулярном оптической оси; d – геометрическая длина пути, пройденного светом в этом направлении.

Сдвигу $\Delta\varphi$ фаз лучей соответствует оптическая разность хода Δ. Учитывая, что $\Delta\varphi/2\pi = \Delta/\lambda$, получим $\Delta = (\Delta\varphi\lambda)/2\pi\cdot$.Тогда

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d,$$

где d – толщина кристалла.

Полагая $\Delta\varphi = \pi/2$ и произведя вычисления, находим минимальную толщину пластинки кварца:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = \frac{6\cdot10^{-7}}{4(1{,}553 - 1{,}544)} = 1{,}7\cdot10^{-5}\ \text{м} = 17\ \text{мкм}.$$

В общем случае разность хода для пластинки в четверть длины волны ($\Delta\varphi = \pi/2$),

$$\Delta = (n_e - n_о)d_m = (m + 1/4)\lambda,\ \text{где}\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Отсюда

$$d_m = \frac{(m+1/4)\lambda}{(n_e - n_o)} = \frac{(4m+1)\lambda}{4(n_e - n_o)} = (4m+1)d_{\min},$$

т. е. $d_1 = 5d_{\min} = 85$ мкм; $d_2 = 9d_{\min} = 153$ мкм и т. д.

Ответ: $d_{\min} = 17$ мкм; $d_1 = 5d_{\min} = 85$ мкм; $d_2 = 9d_{\min} = 153$ мкм и т. д.

Задача 8. Показатели преломления кристаллического кварца для света с длиной волны $\lambda_1 = 410$ нм равны $n_о = 1{,}557$ и $n_e = 1{,}567$ для обыкновенного и необыкновенного лучей, соответственно. Кристалл кварца является в данном случае четвертьволновой пластинкой для света с длиной волны $\lambda_2 = 600$ нм. В кристалле кварца, вырезанном параллельно оптической оси, можно получить максимальную разность скоростей обыкновенного и необыкновенного лучей, если лучи нормально падают на поверхность кристалла. Полностью опишите состояние поляризации света с длиной волны λ_1, прошедшего через кристалл, если падающие лучи были линейно поляризованы.

Дано:
$\lambda_1 = 410$ нм
$\lambda_2 = 600$ нм
$n_о = 1{,}557$
$n_e = 1{,}567$
$\Delta\varphi_2 = \pi/2$
$\Delta\varphi_1$ – ?

Решение. Рассмотрим общий случай, когда плоскость поляризации падающего света с амплитудой A образует с оптической осью угол θ. Тогда амплитуда обыкновенной компоненты есть $A_о = A\sin\theta$, а необыкновенной – $A_e = A\cos\theta$. Сдвиг фаз между компонентами на выходе пластинки кварца толщиной d зависит от длины волны света (см. задачу 7).

Кристалл кварца является четвертьволновой пластинкой для света с длиной волны λ_2 ($\Delta\varphi_2 = \pi/2$). Следовательно,

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_2}(n_e - n_o)d, \text{ отсюда } (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_2}{4},$$

где $n_о$ и n_e – показатели преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей, соответственно.

Тогда сдвиг фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами для λ_1 равен:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}(n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{600}{410} = 0{,}73\pi.$$

Таким образом, вектор амплитуды вышедшей волны можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_о\cos\omega t + \mathbf{k}A_e\cos(\omega t - 0{,}73\pi) –$$

это эллиптически поляризованный свет.

Задача 9. На плоскопараллельную стеклянную пластинку (рис. 4.7) с показателем преломления n = 1,5 падает под углом Брюстера $\theta_Б$ узкий пучок света интенсивностью I_0. Определить с помощью формулы Френеля: а) интенсивность прошедшего пучка I_4, если падающий свет линейно поляризован, причем плоскость колебаний его перпендикулярна к плоскости падения; б) степень поляризации P прошедшего через пластинку пучка, если падающий свет – естественный.

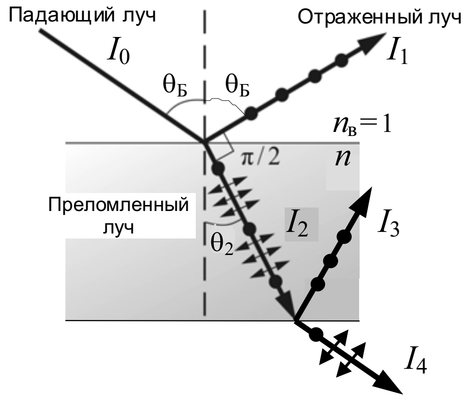

Рис. 4.7

Решение. **а**) Интенсивность света $I_\perp'$, отраженного от одной поверхности пластинки, можно определить с помощью формулы Френеля (для случая $\theta_1 = \theta_Б$, рис. 4.7):

$$I'_\perp = \frac{I_0}{2}\frac{\sin^2(\theta_Б - \theta_2)}{\sin^2(\theta_Б + \theta_2)} = I_\perp \frac{\sin^2(\theta_Б - \theta_2)}{\sin^2(\theta_Б + \theta_2)}, \tag{1}$$

где $I_\perp$ – интенсивность падающего на пластинку линейно поляризованного света; I_0 – интенсивность естественного света.

Так как $\mathrm{tg}\theta_Б = n$, $\theta_Б + \theta_2 = \pi/2$, $\sin\theta_2 = \cos\theta_Б$, $\cos\theta_2 = \sin\theta_Б$, уравнение (1) можно преобразовать следующим образом:

$$I_\perp' = I_\perp(\sin\theta_Б\cos\theta_2 - \cos\theta_Б\sin\theta_2)^2 = I_\perp(\sin^2\theta_Б - \cos^2\theta_Б)^2 = I_\perp(2\sin^2\theta_Б - 1)^2.$$

$$I'_\perp = I_\perp\left(\frac{2\mathrm{tg}^2\theta_Б}{1+\mathrm{tg}^2\theta_Б} - 1\right)^2 = I_\perp\left(\frac{2n^2}{1+n^2} - 1\right)^2 = I_\perp\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2. \tag{2}$$

Таким образом, коэффициент отражения от каждой поверхности пластинки

$$\rho = \frac{I'_\perp}{I_\perp} = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2, \tag{3}$$

поэтому интенсивность прошедшего пучка I_4 будет равна:

$$I_4 = I_2(1-\rho) = I_\perp(1-\rho)^2 = I_\perp\left[1 - \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2\right]^2 = I_\perp\left[1 - \left(\frac{1{,}5^2-1}{1{,}5^2+1}\right)^2\right]^2 = 0{,}726 I_\perp.$$

б) Если падающий свет I_0 естественный, то $I_\perp = I_\parallel = I_0/2$. Интенсивность прошедшего через пластинку света с параллельной $I_\parallel$ составляющей светового вектора (см. рис. 4.7):

$$I_\parallel = I_0/2 = I_{max}, \tag{4}$$

т. к. коэффициент отражения той части луча, световой вектор которой колеблется параллельно плоскости падения, при угле Брюстера равен нулю.

Интенсивность прошедшего пучка с перпендикулярной составляющей светового вектора определена в пункте *а*) и равна:

$$I_4 = 0{,}726 I_\perp = 0{,}363 I_0 = I_{\min}. \qquad (5)$$

Тогда, с учетом выражений (4)–(5), степень поляризации прошедшего через пластинку пучка равна:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{0{,}5 I_0 - 0{,}363 I_0}{0{,}863 I_0} = 0{,}16.$$

Задача 10. На пути естественного пучка света поместили два несовершенных одинаковых поляризатора. Оказалось, что при параллельных плоскостях поляризаторов эта система пропускает в k = 10 раз больше света, чем при скрещенных плоскостях. Найти степень поляризации P света, которую создает: а) каждый поляризатор в отдельности (P_1); б) вся система при параллельных плоскостях поляризаторов (P_2).

Решение. а) Естественный свет можно представить в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих с интенсивностью I_0. Пусть каждый поляризатор пропускает в своей плоскости долю α_1 света с плоскостью колебаний, параллельной плоскости поляризатора, и долю α_2 – в перпендикулярной плоскости. Тогда при параллельных и перпендикулярных плоскостях поляризаторов системы интенсивность прошедшего через нее света будет равна, соответственно:

$$I_{s\|} = \alpha_1^2 I_0 + \alpha_2^2 I_0; \quad I_{s\perp} = \alpha_1\alpha_2 I_0 + \alpha_2\alpha_1 I_0.$$

Установим связь между α_1 , α_2 и k.

$$I_{s\|} - I_{s\perp} = \left(\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2\right) I_0 = \left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2 I_0,$$

$$I_{s\|} + I_{s\perp} = \left(\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2\right) I_0 = \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)^2 I_0,$$

$$\frac{I_{s\|} - I_{s\perp}}{I_{s\|} + I_{s\perp}} = \frac{\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2}{\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)^2}.$$

По условию $I_{s\|}/I_{s\perp} = k$, тогда $\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \sqrt{\dfrac{k-1}{k+1}}$ или

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left(1 + \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\right) \Bigg/ \left(1 - \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\right) = \frac{1{,}905}{0{,}095} = 20{,}05. \qquad (1)$$

С другой стороны, степень поляризации, создаваемая каждым поляризатором в отдельности, равна:

$$P_1=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}=\frac{I_{\|}-I_{\perp}}{I_{\|}+I_{\perp}}=\frac{\alpha_1 I_0-\alpha_2 I_0}{\alpha_1 I_0+\alpha_2 I_0}=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

С учетом (1), получим:

$$P_1=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}=\frac{\alpha_1/\alpha_2-1}{\alpha_1/\alpha_2+1}=\frac{20,05-1}{20,05+1}=0,905.$$

б) Для системы параллельных поляризаторов можно записать:

$$I_{p\|}=\alpha_1^2 I_0, \quad I_{p\perp}=\alpha_2^2 I_0.$$

В этом случае степень поляризации, с учетом (1):

$$P_2=\frac{I_{p\|}-I_{p\perp}}{I_{p\|}+I_{p\perp}}=\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}=\frac{\left(\alpha_1/\alpha_2\right)^2-1}{\left(\alpha_1/\alpha_2\right)^2+1}=\frac{20,05^2-1}{20,05^2+1}=0,995. \qquad (2)$$

Ответ: P_1 = 0,905; P_2 = 0,995.

Примечание. Зависимость $P_2(k)$ можно получить путем достаточно простых, но громоздких преобразований из (2) с учетом (1): $P_2=\sqrt{1-1/k^2}=0,995$.

Задача 11. Луна видна под углом δ = 10° над горизонтом. Рассчитайте яркость ее изображения в спокойном озере по сравнению с яркостью самой Луны, полагая, что излучение от самой Луны не поляризовано. Покажите, что интенсивность отраженных касательных лучей достигает 100 %. Показатель преломления воды n = 1,33.

Решение. Найдем интенсивность отраженного от поверхности озера света с разной поляризацией по формулам Френеля:

$$I_{\perp}=\frac{I_0}{2}\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}, \qquad I_{\|}=\frac{I_0}{2}\frac{\operatorname{tg}^2(\theta_1-\theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_1+\theta_2)}.$$

Здесь I_0 – интенсивность света, падающего на поверхность воды; θ_1 и θ_2 – угол падения и угол преломления; θ_1 = 90° – δ = 80° по условию задачи.

Из закона преломления $\sin\theta_1/\sin\theta_2=n$ получим:

$$\theta_2=\arcsin\left(\frac{\sin\theta_1}{n}\right)=\arcsin\left(\frac{\sin 80^\circ}{1,33}\right)=48^\circ.$$

Интенсивность отраженного от озера лунного света $I=I_{\perp}+I_{\|}$.

Тогда

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}+\frac{\operatorname{tg}^2(\theta_1-\theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_1+\theta_2)}\right]. \qquad (1)$$

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(80^\circ-48^\circ)}{\sin^2(80^\circ+48^\circ)}+\frac{\operatorname{tg}^2(80^\circ-48^\circ)}{\operatorname{tg}^2(80^\circ+48^\circ)}\right]=0,35.$$

Так как яркость светящейся поверхности пропорциональна силе света, то яркость $L_и$ изображения Луны в спокойном озере примерно в 3 раза меньше яркости $L_л$ самой Луны ($L_и/L_л = 0{,}35$).

Для касательных ($\delta \approx 0$) лучей $\theta_1 = 90° - \delta \approx 90°$, тогда

$$\sin^2(90° + \theta_2) = \sin^2(90° - \theta_2);\ \ \mathrm{tg}^2(90° - \theta_2) = \mathrm{tg}^2(90° + \theta_2).$$

Отсюда из формулы (1) получаем для интенсивности отраженных касательных лучей:

$$\frac{I}{I_0}\cdot 100\% = \frac{1}{2}(1+1)\cdot 100\% = 100\%;\quad \rho_{касат} \approx 1.$$

Ответ: $L_и/L_л = 0{,}35$; $\rho_{касат} \approx 1$.

Задача 12. Свет падает перпендикулярно плоскости одной из граней алмаза (n = 2,42). Определить: а) какая доля падающего излучения отражается; б) чему равен угол Брюстера для алмаза.

Решение. а) Найдем интенсивность отраженного света с разной поляризацией с помощью формул Френеля, учтя, что синусы и тангенсы малых углов равны самим углам:

$$I_\perp = \frac{I_0}{2}\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)},\qquad I_\parallel = \frac{I_0}{2}\frac{\mathrm{tg}^2(\theta_1-\theta_2)}{\mathrm{tg}^2(\theta_1+\theta_2)}.$$

Здесь I_0 – интенсивность естественного света; θ_1 – угол падения; θ_2 – угол преломления.

Закон преломления для малых углов $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \approx \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = n$.

Интенсивность отраженного света

$$I = I_\perp + I_\parallel = I_0\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\right)^2 = I_0\left(\frac{\theta_1/\theta_2-1}{\theta_1/\theta_2+1}\right)^2 = I_0\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2.$$

Для отраженного света

$$\rho = \frac{I}{I_0} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{2{,}42-1}{2{,}42+1}\right)^2 = 0{,}17.$$

б) Угол Брюстера $\theta_Б = \mathrm{arctg}\, n = 67{,}5°$.

Ответ: $\rho = 0{,}17$; $\theta_Б = 67{,}5°$.

Задача 13. Если между двумя скрещенными поляроидами поместить третий, оптическая ось которого составляет угол φ с оптической осью анализатора, то поле просветлеет. Найти интенсивность прошедшего света. Потерями света на отражение и поглощение пренебречь. При каком угле φ просветление максимальное?

Решение. У необыкновенного луча, прошедшего через поляризатор, вектор напряженности электрического поля параллелен оптической оси поляризатора *MN* (рис. 4.8, *а*). Разложим этот вектор на обыкновенный $E_{\perp}$ и необыкновенный E_{I} относительно среднего поляроида. Через этот поляроид пройдет только необыкновенный луч с соответствующей напряженностью электрического поля $E_{\mathrm{I}} = E\cos\varphi$. Аналогично через анализатор пройдет необыкновенный луч, у которого напряженность поля (рис. 4.8, *б*).

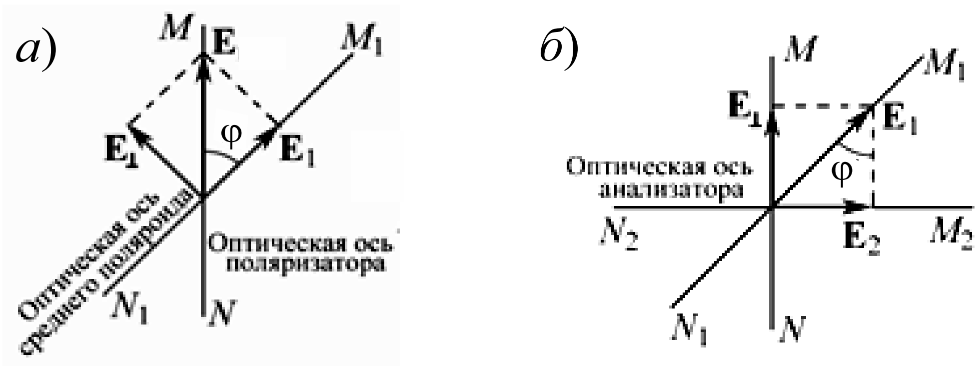

Рис. 4.8

$$E_2 = E_{\mathrm{I}}\sin\varphi = E\sin\varphi\cos\varphi.$$

Интенсивность волны пропорциональна квадрату вектора напряженности, следовательно $I = I_{\text{пол}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi$. Учитывая, что поляризация пропускает половину интенсивности естественного света, получаем

$$I = \frac{1}{2}I_0\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{8}I_0\sin^2 2\varphi.$$

Отсюда видно, что просветление максимально при $\varphi = 45°$.

$$I_{\max} = \frac{1}{8}I_0 \text{ при } \varphi = 45^\circ.$$

Ответ: $I_{\max} = I_0/8$ при $\varphi = 45°$.

Задача 14. Вам дана отполированная пластинка из черного обсидиана (вулканическое стекло), нужно измерить показатель преломления этого материала. Как вы поступите?

Решение. Оценить показатель преломления можно, отражая от обсидиановой пластинки свет, поляризованный в плоскости падения, и меняя угол падения. Резкий спад интенсивности отраженного света будет заметен, когда угол падения сравняется с углом Брюстера для обсидиана, а его тангенс как раз равен показателю преломления: $\mathrm{tg}\theta_{\text{Б}} = n$.

Задача 15. Определить минимальную толщину $d_{\min}$ пластинки из кварца, которая в желтом свете с λ_1 = 5893 Å создаст сдвиг фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, равный $\Delta\varphi_1 = \pi/2$ (пластинка в четверть волны). Какой сдвиг фаз $\Delta\varphi_2$ возникнет при этом в фиолетовом свете (λ_2 = 4047 Å), проходящем через эту же пластинку? Разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для этих волн $\Delta n_1 = 0{,}009$ и $\Delta n_2 = 0{,}01$, соответственно.

Решение. Пластинка кварца толщиной d является четвертьволновой для света с длиной волны λ_1. В этом случае оптическая разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси, равна:

$$\Delta_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_1}{2} = \Delta n_1 d \text{, где } m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Сдвиг фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами для четвертьволновой пластинки минимальной толщины ($m = 0$) равен:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_1}\Delta n_1 d_{\min}\,.$$

Отсюда $d_{\min} = \dfrac{\lambda_1}{4\Delta n_1} = \dfrac{5{,}893\cdot 10^{-7}}{4\cdot 9\cdot 10^{-3}} = 1{,}64\cdot 10^{-5}\ \text{м} = 16{,}4\ \text{мкм}$.

Для λ_2 сдвиг фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами при толщине пластинки $d_{\min}$ равен:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{2\pi\Delta n_2 d_{\min}}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{5893}{4047}\cdot\frac{0{,}01}{0{,}009} = 0{,}81\pi\,.$$

Ответ: $d_{\min}$ = 16,4 мкм; $\Delta\varphi_2 = 0{,}81\pi$.

Задача 16. Ячейка Керра с нитробензолом помещена между скрещенными поляроидами $П_1$ и $П_2$. Оптическая ось ячейки, т. е. направление электрического поля в ней, образует с плоскостями пропускания поляризаторов угол $\varphi = 45°$, толщина слоя жидкости l = 10 см. Постоянная Керра для нитробензола $B = 2{,}2\cdot 10^{-12}$ м/В^2 для t = 20 °C и λ = 600 нм. Определить: а) минимальное значение напряженности электрического поля $E_{\min}$, при котором система будет пропускать максимальную долю падающего на нее света; б) сколько просветлений $N_п$ и затемнений $N_з$ пройдет за время, в течение которого напряженность поля возрастет от 0 до $3{,}38\cdot 10^6$ В/м?

Дано:	
$B = 2{,}2\cdot10^{-12}$ м/В^2	
$\varphi = 45°$	
$E_1 = 0$	
$E_2 = 3{,}38\cdot10^6$ В/м	
$\lambda = 6\cdot10^{-7}$ м	
$l = 0{,}1$ м	
$E_{\min}$ – ? $N_п$ – ? $N_з$ – ?	

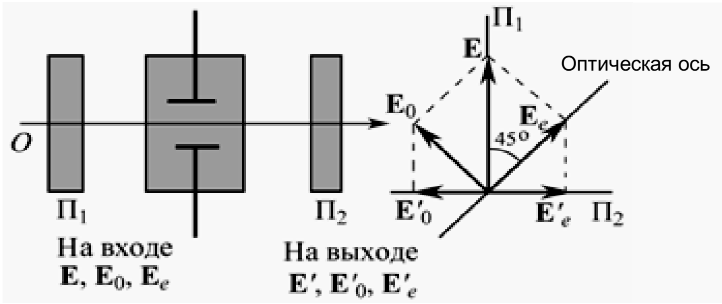

Рис. 4.9

Решение. Ячейка Керра представляет собой герметичный сосуд с жидкостью, в которую введены пластины конденсатора (рис. 4.9). При подаче на пластины напряжения между ними возникает практически однородное электрическое поле. Под его действием жидкость приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, ориентированной вдоль поля. Возникающая разность показателей преломления n_o обыкновенного и n_e необыкновенного лучей пропорциональна квадрату напряженности электрического поля E: $n_o - n_e = KE^2$. Здесь K – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества. На пути l между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает разность хода

$$\Delta = (n_0 - n_e)\cdot l = KlE^2$$

или разность фаз $$\delta = \frac{\Delta}{\lambda}2\pi = 2\pi\frac{K}{\lambda}lE^2 .$$

Это выражение принято записывать в виде

$$\delta = 2\pi BlE^2,$$

где $B = K/\lambda$ – постоянная Керра.

Если поляризаторы П$_1$ и П$_2$ скрещены, то угол α между оптической осью OO' и плоскостями поляризаторов будет равен $\pi/4$. Световые колебания, вышедшие из П$_1$, изображаются вектором $\mathbf{E}$. При входе в пластинку колебание $\mathbf{E}$ возбудит два колебания – $\mathbf{E}_о$ и $\mathbf{E}_e$. Колебания вектора $\mathbf{E}_о$ перпендикулярны оптической оси, а колебания вектора $\mathbf{E}_e$ параллельны оптической оси (рис. 4.9). Через второй поляризатор пройдут составляющие колебаний этих векторов по направлению плоскости П$_2$ – $\mathbf{E}'_o$ и $\mathbf{E}'_e$. Амплитуды в обоих случаях равны:

$$E_o = E_e = E\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = E\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = E\cdot\frac{2}{4} = \frac{E}{2}.$$

В случае скрещенных поляризаторов проекции векторов $\mathbf{E}_o$ и $\mathbf{E}_e$ на направление П$_2$ имеют разные знаки (рис. 4.9). Это означает, что возникнет дополнительно к δ разность фаз, равная π. Тогда суммарная разность фаз будет равна (δ + π), где $\delta = 2\pi BlE^2$. Волны, вышедшие из второго поляризатора, будут интерферировать. Амплитуда результирующей волны в случае скрещенных николей и приложенного к ячейке Керра поля E будет равна:

$$E_{\perp}^2 = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E_o'E_e'\cos(\delta+\pi).$$

При отсутствии внешнего поля E ($\delta = 0$), амплитуда $E_{\perp} = E_{\text{o}} - E_{\text{e}} = 0$.

Интенсивность прошедшей волны

$$I \approx E_{\perp}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + 2\frac{1}{4}E^2\cos(\delta+\pi) = \frac{1}{2}E^2(1-\cos\delta).$$

Максимальному значению I соответствует

$$\delta = (2k+1)\pi, \text{ где } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда $\delta = 2\pi BlE^2 = (2k+1)\pi$ или $2BlE^2 = (2k+1)$.

Минимальному значению напряженности электрического поля соответствует $k = 0$:

$$E_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2lB}} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 0{,}1\cdot 2{,}2\cdot 10^{-12}}} = 1{,}5\cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Значению электрического поля E_2 соответствует

$$k_{\max} = BlE_2^2 - \frac{1}{2} = 2{,}2\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1\cdot(3{,}38\cdot 10^6)^2 - \frac{1}{2} = 2{,}01.$$

Так как k – целое число, то $k_{\max} = 2$.

С учетом $k = 0$ получаем $N_{\text{п}} = 3$ просветления.

Минимум интенсивности $I = (E^2/2)(1 - \cos\delta)$ наблюдается при $\delta = 2k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда $$2k\pi = 2\pi BlE_2^2;$$

$$k_{\min} = BlE_2^2 = 2{,}2\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1\cdot(3{,}38\cdot 10^6)^2 = 2{,}51.$$

Так как k – целое число, то $k_{\min} = 2$.

С учетом $k = 0$ получаем $N_3 = 3$ затмения.

Ответ: $E_{\min} = 1{,}5$ МВ/м; $N_{\text{п}} = 3$; $N_3 = 3$.

Задача 17. Некоторое вещество поместили в продольное магнитное поле соленоида, расположенного между двумя поляризаторами. Длина трубки с веществом l = 30 см. Найти постоянную Верде V, если при напряженности поля H = 56,5 кА/м угол поворота плоскости поляризации $\varphi_1 = +5°10'$ для одного направления и $\varphi_2 = -3°\ 20'$ для противоположного направления.

Дано:	
$l = 0{,}3$ м $H = 5{,}65 \cdot 10^4$ А/м $\varphi_1 = +5°10'$ $\varphi_2 = -3°\,20'$	
V – ?	

Решение. В магнитооптическом эффекте Фарадея (рис. 4.10) направление вращения плоскости поляризации определяется направлением магнитного поля **H** и не зависит от направления распространения света. То есть при изменении направления **H** направление вращения плоскости поляризации изменится на противоположное.

Угол поворота плоскости поляризации описывается законом Верде:

$$\varphi' = VlH,$$

где V – постоянная Верде; l – длина кюветы; H – напряженность магнитного поля.

В оптически активной среде (дополнительно к магнитному вращению) добавляется естественное вращение плоскости поляризации, не зависящее от величины магнитного поля. Угол поворота плоскости поляризации

$$\varphi'' = \alpha l,$$

где α – постоянная вращения.

Тогда полный угол поворота плоскости при одном направлении магнитного поля

$$\varphi_1 = \varphi'' + \varphi' = \alpha l + VlH,$$

и при другом направлении

$$\varphi_2 = \varphi'' - \varphi' = \alpha l - VlH.$$

Отсюда получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2VlH,$$

где $\varphi_1 = 5°10' = 310'$, $\varphi_2 = -3°20' = -200'$.

$$V = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2lH} = \frac{310 + 200}{2 \cdot 0{,}3 \cdot 5{,}65 \cdot 10^4} = 0{,}015 \text{ мин/А}.$$

Ответ: $V = 0{,}015$ мин/А.

Задача 18. Трубка с бензолом длиной $l = 26$ см находится в продольном магнитном поле соленоида, расположенного между двумя поляризаторами. Угол между плоскостями поляризаторов равен $\varphi = 45°$. Найти минимальную напряженность магнитного поля $H_{\min}$, при которой свет с длиной волны $\lambda = 589$ нм будет проходить через эту систему только в одном направлении (оптический вентиль).

Как будет вести себя этот оптический вентиль, если изменить направление данного магнитного поля на противоположное? Постоянная Верде для бензола $V = 2{,}59$ мин/А.

Дано:
l = 0,26 м
φ = 45°
V = 2,59 мин/А =
= $7{,}5\cdot10^{-4}$ рад/А

$H_{\min}$ – ?

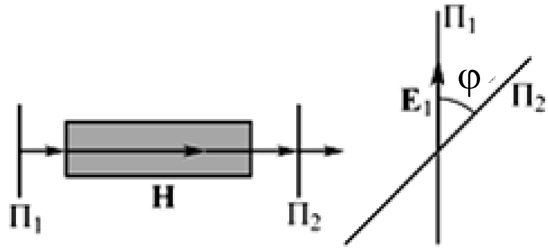

Рис. 4.10

Решение. Величина угла φ поворота плоскости поляризации линейно поляризованного света, распространяющегося в веществе вдоль постоянного магнитного поля напряженностью H, описывается законом Верде: $\varphi = VlH$, где V – постоянная Верде; l – длина пути света в веществе.

Пусть $\mathbf{E}_1$ – электрический вектор волны, прошедшей через первый поляризатор Π_1. Второй поляризатор Π_2 пропускает волну, если слой бензола повернет (по часовой стрелке, рис. 4.10) плоскость поляризации на угол

$$\varphi = \pi/4 + \pi k, \text{ где } k \text{ – целое число.}$$

Так как $\varphi = VlH$, то $VlH = \pi/4 + \pi k$.

Минимальная напряженность $H_{\min}$ соответствует $k = 0$. Отсюда

$$H_{\min} = \frac{\pi}{4Vl} = \frac{3{,}14}{4\cdot 7{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}26} \approx 4\cdot 10^{3} \text{ А/м}.$$

При изменении направления магнитного поля плоскость поляризации повернется на φ = 45° против часовой стрелки, и второй поляризатор не пропустит свет ($2\varphi = \pi/2$).

Ответ: $H_{\min}$ = 4 кА/м.

Задачи для самостоятельного решения

4.1.1. Какой характер поляризации имеет плоская электромагнитная волна, проекции вектора **E** которой на оси x и y, перпендикулярные направлению ее распространения, определяются следующими соотношениями: $E_x = E\cos(\omega t - kz)$, $E_y = E\cos(\omega t - kz + \pi/4)$?

Ответ: Эллиптическая, по часовой стрелке, если смотреть навстречу волне; большая ось эллипса совпадает с прямой $y = x$.

4.1.2. Какой характер поляризации имеет плоская электромагнитная волна, проекции вектора **E** которой на оси x и y, перпендикулярные направлению ее распространения, определяются следующими соотношениями: $E_x = E\cos(\omega t - kz)$, $E_y = E\sin(\omega t - kz)$?

Ответ: Круговая поляризация против часовой стрелки, если смотреть навстречу волне.

4.1.3. Какой характер поляризации имеет плоская электромагнитная волна, проекции вектора **E** которой по оси x и y, перпендикулярные направлению ее распространения, определяются следующими соотношениями: $E_x = E\cos(\omega t - kz)$, $E_y = E\cos(\omega t - kz + \pi)$?

Ответ: плоская поляризация вдоль прямой $y = -x$.

4.1.4. Степень поляризации частично поляризованного света P = 0,25. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

Ответ: $I_{пол}/I_{ест} = P/(1 - P) = 0{,}3$.

4.1.5. В частично поляризованном свете амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в k = 2 раза больше амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности. Определить степень поляризации света.

Ответ: $P = \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \dfrac{k-1}{k+1} = 0{,}33$.

4.1.6. Степень поляризации частично поляризованного света P = 0,5. Во сколько раз отличается максимальная $I_{\max}$ интенсивность света, пропускаемого через анализатор, от минимальной $I_{\min}$?

Ответ: $\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}} = \dfrac{1+P}{1-P} = 3$.

4.1.7. Пучок плоскополяризованного света (λ = 589 нм) падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно к его оптической оси. Найти длины волн λ_o и λ_e обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей равны n_o = 1,66 и n_e = 1,49.

Ответ: $\lambda_o = \lambda/n_o$ = 355 нм, $\lambda_e = \lambda/n_e$ = 395 нм.

4.1.8. Определить минимальную толщину пластинки из кальцита, которая в желтом свете с длиной волны λ_0 = 5893 Å создает сдвиг фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, равный $\pi/2$ (пластинка в четверть волны). Какой сдвиг возникает при этом в фиолетовом свете (λ_1 = 4047 Å), проходящем через эту пластинку? Разность показателей преломления в этом диапазоне длин волн считать Δn = 0,009.

Ответ: $d_{\min} = \lambda_0/(4\Delta n)$ = 16,4 мкм; $\Delta\varphi = 2\pi d_{\min}\Delta n/\lambda_1 = 0{,}73\pi$.

4.1.9. Определите минимальную толщину пластинки кварца, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий на нее нормально плоскополяризованный свет выходил циркулярно поляризованным. Показатели преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей $n_о$ = 1,541 и n_e = 1,550, длина световой волны λ = 687 нм.

Ответ: $d_{\min} = \dfrac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 19{,}1$ мкм.

4.1.10. Под каким углом β к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были полностью поляризованы?

Ответ: $\beta = \pi/2 - \mathrm{arctg}(n) = 0{,}645$ рад; $\beta = 37°$.

4.1.11. Параллельный пучок света переходит из глицерина ($n_1 = 1{,}47$) в стекло ($n_2 = 1{,}5$) так, что пучок, отраженный от границы раздела этих сред, оказывается максимально поляризованным. Определить угол γ между падающим и преломленным лучами.

Ответ: $\gamma = \pi/2 + 2\mathrm{arctg}(n_2/n_1) = 3{,}16$ рад; $\gamma = 181{,}2°$.

4.1.12. Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный сосуд ($n = 1{,}5$), и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом $\alpha_Б = 42°37'$. Найти показатель преломления n_1 жидкости. Под каким углом $\alpha_{пр}$ должен падать на дно сосуда луч света, проходящий через жидкость, чтобы наступило полное внутреннее отражение?

Ответ: $n_1 = n/\mathrm{tg}(\alpha_Б) = 1{,}63$; $\alpha_{пр} = \arcsin(n/n_1) = 66°56'$.

4.1.13. Пучок плоскополяризованного света падает на пластинку исландского шпата толщиной $d = 100$ мкм, вырезанную параллельно оптической оси. Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей, соответственно, $n_o = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$, определить оптическую разность хода этих лучей, прошедших сквозь пластинку.

Ответ: $\Delta = d(n_o - n_e) = 17$ мкм.

4.1.14. Пучок естественного света падает на стеклянную ($n = 1{,}6$) призму (рис. 4.11). Определить двугранный угол θ призмы, если отраженный пучок максимально поляризован.

Ответ: $\theta = \pi/2 - \mathrm{arctg}(n) = 0{,}559$ рад; $\theta = 32°$.

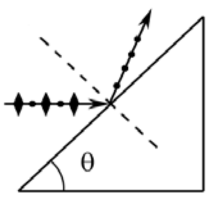

Рис. 4.11

4.1.15. Параллельный пучок естественного света падает на сферическую каплю воды. Найти угол φ между отраженным и падающим лучами в точке A (рис. 4.12).

Ответ: $\varphi = 2\mathrm{arctg}(n) = 1{,}85$ рад; $\varphi = 106°$.

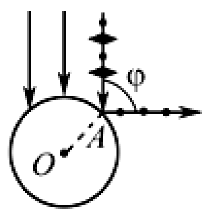

Рис.4.12

4.1.16. Предельный угол $\alpha_{пр}$ полного отражения пучка света на границе жидкости с воздухом равен 43°. Определить угол Брюстера $\alpha_Б$ для падения луча из воздуха на поверхность этой жидкости.

Ответ: $\alpha_Б = \mathrm{arctg}(1/\sin\alpha_{пр}) = 0{,}972$ рад; $\alpha_Б = 55°45'$.

4.1.17. Угол Брюстера $\alpha_Б$ при падении света из воздуха в кристалл каменной соли равен 57°. Определить скорость света в этом кристалле.

Ответ: $v = c/\mathrm{tg}(\alpha_Б) = 1{,}95\cdot10^8$ м/с.

4.1.18. Пучок естественного света падает на систему из $N = 6$ поляризаторов, плоскость пропускания каждого из которых повернута на угол $\varphi = 15°$ и относительно плоскости пропускания предыдущего поляризатора. Какая часть η светового потока проходит через эту систему?

Ответ: $\eta = \dfrac{1}{2}(\cos\varphi)^{2(N-1)} = 0{,}354$.

4.1.19. При падении естественного света на некоторый поляризатор проходит $\eta_1 = 30$ % светового потока, а через два таких поляризатора $\eta_2 = 13{,}5$ %. Найти угол φ между плоскостями пропускания поляризаторов.

Ответ: $\varphi = \arccos\sqrt{\eta_2/\left(2\eta_1^2\right)} = 30°$.

4.1.20. Под каким углом нужно отразить луч от кристалла каменной соли ($n = 1{,}544$), чтобы получить максимальную поляризацию отраженного луча? Падающий луч – естественный.

Ответ: $\alpha_Б = \mathrm{arctg}(n) = 57°$.

4.1.21. Естественный свет падает на систему из трех последовательно расположенных одинаковых поляроидов, причем плоскость пропускания среднего поляроида составляет угол $\varphi = 60°$ с плоскостями пропускания двух других поляроидов. Каждый поляроид обладает поглощением таким, что при падении на него линейно поляризованного света максимальный коэффициент пропускания составляет $\tau = 0{,}81$. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы?

Ответ: $\dfrac{I_0}{I} = \dfrac{2}{\tau^3\cos^4\varphi} = 60{,}2$.

4.1.22. Угол φ между плоскостями пропускания поляроидов равен $\varphi = 30°$. Естественный свет, проходя через такую систему, ослабляется в $N = 4$ раза. Пренебрегая потерей света при отражении, определить коэффициент поглощения α света в поляроидах.

Ответ: $\alpha = 1 - \dfrac{\sqrt{2/N}}{\cos\varphi} = 0{,}184$.

4.1.23. При прохождении света через трубку длиной $l_1 = 15$ см, содержащую десятипроцентный раствор сахара ($C_1 = 10$ %), плоскость поляризации света повернулась на угол $\varphi_1 = 12{,}9°$. В другом растворе сахара, налитом в трубку длиной $l_2 = 12$ см, плоскость поляризации повернулась на $\varphi_2 = 7{,}2°$. Определить концентрацию C_2 второго раствора.

Ответ: $C_2 = C_1\varphi_2 l_1/(\varphi_1 l_2) = 7$ %.

4.1.24. Пластинку толщиной d_1 = 2 мм, вырезанную перпендикулярно оптической оси, поместили между николями и определили, что после прохождения пластинки плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол $\varphi_1 = 53°$. Определить толщину d_2 пластинки, при которой данный монохроматический свет не проходит через анализатор между параллельными николями.

Ответ: $d_2 = d_1\varphi_2/\varphi_1 = 3{,}4$ мм,
где φ_2 – угол, при котором свет не проходит через анализатор.

4.1.25. Никотин (чистая жидкость), содержится в стеклянной трубке длиной l = 8 см, поворачивает плоскость поляризации желтой линии натрия на угол $\varphi = 137°$. Плотность никотина $\rho = 1{,}01\cdot10^3$ кг/м^3. Определить удельное вращение $[\alpha]$ никотина.

Ответ: $[\alpha] = \varphi/(l\rho) = 1{,}7$ (град)/(м·кг·м$^{-3}$).

4.2.1. Найти степень P поляризации естественного света, отраженного от поверхности стекла под углом $\theta_1 = 56°51'$. Показатель преломления стекла n = 1,53.

Ответ: $$P = \frac{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) - \cos^2(\theta_1 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) + \cos^2(\theta_1 + \theta_2)} = 1,$$
где $\theta_2 = \arcsin(\sin\theta_1/n)$ – угол преломления луча.

4.2.2. При каких условиях луч света, падающий на боковую грань прозрачной изотропной призмы с преломляющим углом $\alpha = 60°$, проходит через нее без потерь на отражение?

Ответ: $n = 1/\mathrm{tg}(\alpha/2) = 1{,}73$; электрический вектор должен лежать в плоскости падения.

4.2.3. Один поляроид пропускает δ = 30 % света, если на него падает естественный свет I_0. После прохождения света через два таких поляроида интенсивность падает до 9 % ($I_2 = 0{,}09I_0$). Найти угол φ между осями поляроидов.

Ответ: $$\varphi = \arccos\sqrt{\frac{I_2}{2\delta^2 I_0}} = 45°.$$

4.2.4. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен φ. Как поляризатор, так и анализатор поглощают α = 8 % падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча I_2, вышедшего из анализатора, равна 9 % интенсивности света I_0, падающего на поляризатор. Найти угол φ.

Ответ: $$\varphi = \arccos\sqrt{\frac{2I_2}{(1-\alpha)^2 I_0}} = 62{,}5°.$$

4.2.5. Имеются два одинаковых несовершенных поляризатора, каждый из которых в отдельности обусловливает степень поляризации $P_1 = 0{,}8$. Какова будет степень поляризации света, прошедшего последовательно через оба поляризатора, если плоскости поляризаторов: а) параллельны, б) перпендикулярны друг к другу?

Ответ: а) $P_{\parallel} = \dfrac{2P_1}{1+P_1^2} = 0{,}976$; б) $P_{\perp} = 0$.

4.2.6. На пути частично поляризованного пучка поместили николь. При повороте николя на угол $\varphi = 60°$ из положения, соответствующего максимуму пропускания света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\eta = 3$ раза. Найти степень P поляризации падающего света.

Ответ: $P = \dfrac{\eta - 1}{1 - \eta\cos 2\varphi} = 0{,}8$.

4.2.7. Найти степень P поляризации естественного света, отраженного от поверхности стекла под углом $\theta_1 = 45°$. Показатель преломления стекла $n = 1{,}53$.

Ответ: $P = \dfrac{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) - \cos^2(\theta_1 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) + \cos^2(\theta_1 + \theta_2)} = 0{,}82$,

где $\theta_2 = \arcsin(\sin\theta_1/n)$ – угол преломления луча.

4.2.8. Определить разность Δn показателей преломления обыкновенного n_o и необыкновенного n_e лучей и сдвиг фаз δ между ними при наблюдении эффекта Керра в хлорбензоле в электрическом поле с напряженностью $1\cdot10^6$ В/м. Постоянная Керра для хлорбензола $B = K/\lambda = = 2{,}5\cdot10^{-12}$ м/В^2 при $\lambda = 0{,}546$ мкм. Длина пластин конденсатора $l = 5$ см.

Ответ: $\Delta n = n_o - n_e = \lambda B E^2 = 1{,}37\cdot10^{-6}$; $\delta = 2\pi B E^2 l = \pi/4$ рад $\approx 45°$.

4.2.9. Плоскопараллельная пластинка из исландского шпата с минимальной толщиной $d_{\min} = 1{,}93$ мкм (служит пластинкой в полдлины волны для оранжевого света $\lambda = 656$ нм). Определить показатель преломления n_e для необыкновенного луча, если показатель преломления для обыкновенного луча $n_o = 1{,}655$.

Ответ: $n_e = n_o - \lambda/(2d_{\min}) = 1{,}485$.

4.2.10. Определить, во сколько раз изменится интенсивность I частично поляризованного света, рассматриваемого через николь, при повороте николя на угол $\varphi = 60°$ по отношению к положению, соответствующему максимальной интенсивности. Степень поляризации света $P = 0{,}5$.

Ответ: $\dfrac{I_{\max}}{I} = \dfrac{1+P}{1 - P + 2P\cos^2\varphi} = 2$.

4.2.11. Степень поляризации частично поляризованного света P = 0,25. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

Ответ: $I_{пол}/I_0 = P/(1 - P) = 0{,}3$.

4.2.12. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла (n = 1,5). Определить с помощью формул Френеля: а) коэффициент отражения ρ; б) степень поляризации P преломленного света.

Ответ: а) $\rho = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 = 0{,}074$; б) $P = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{\left(n^2+1\right)^2 - 4n^2}{\left(n^2+1\right)^2 + 4n^2} \approx 0{,}08 \cdot$

4.2.13. Чтобы скомпенсировать сдвиг фаз, вызванный пластинкой кальцита толщиной d_1 в четверть волны, на пути светового пучка поставили пластинку из кварца толщиной d_2 в четверть волны. Сопоставить толщину пластин. Опыт проводится в зеленом участке спектра (5086 Å). Показатель преломления кальцита равен n_o = 1,654 для обыкновенного луча и n_e = 1,488 для необыкновенного луча; для кристаллического кварца n'_o = 1,550 для обыкновенного луча и n'_e = 1,541 для необыкновенного луча.

Ответ: $\dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{n_o - n_e}{n'_o - n'_e} = 18{,}4 \cdot$

4.2.14. Какой минимальной толщины $d_{\min}$ кварцевую пластинку нужно поместить между скрещенными поляроидами, чтобы поле стало: а) синим; б) красным? Постоянная вращения для кварца: $\alpha_с$ = 41,9 град/мм для $\lambda_с$ = 430 нм, $\alpha_с$ = 17,1 град/мм для $\lambda_к$ = 670 нм.

Ответ: $d = (2m + 1)\cdot\varphi/\alpha$, где $\varphi = 90°$; m = 0, 1, 2, 3 … .
$d_{\min}(\lambda_с)$ = 2,15 мм; $d_{\min}(\lambda_к)$ = 5,26 мм.

4.2.15. В эффекте Фарадея наблюдается вращение плоскости поляризации при прохождении света через вещество, помещенное в магнитное поле. Направление вращения связано только с направлением магнитного поля и не зависит от направления распространения света. Поэтому эффект Фарадея усиливают за счет удлинения пути света в веществе (на рис. 4.13 луч проходит ячейку N = 11 раз). Определить, при каком значении индукции B магнитного поля угол поворота φ плоскости поляризации в воде равен 45°. Длина ячейки d = 10 см. Для воды при комнатной температуре и λ = 546 нм постоянная Верде V = 257 град/(Тл·м).

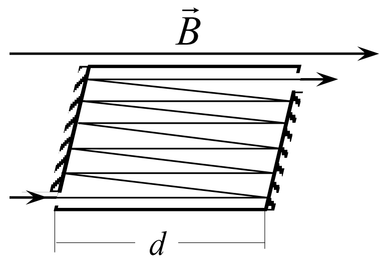

Рис. 4.13

Ответ: $B = \dfrac{\varphi}{NVd} = 0{,}16$ Тл $\cdot$

4.2.16. Угол поворота плоскости поляризации желтого света натрия при прохождении через трубку с раствором сахара на угол φ = 17°. Длина трубки L = 25 см. Удельное вращение сахара $[\alpha] = 1{,}17\cdot10^{-2}$ рад·м^2/кг. Определить концентрацию C сахара в растворе.

Ответ: $C = \varphi/([\alpha]l) = 0{,}1$ г/см^3.

4.2.17. Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора φ_1 = 30°. Во сколько раз η уменьшится интенсивность света, вышедшего из анализатора, если угол увеличить до φ_2 = 80°?

Ответ: $\eta = \cos^2\varphi_1/\cos^2\varphi_2 = 24{,}8$.

4.2.18. Анализатор в k = 4 раза ослабляет интенсивность падающего на нее поляризованного света. Каков угол φ между главными плоскостями поляризатора и анализатора? Потерями света на поглощение, рассеяние и отражение пренебречь.

Ответ: $\varphi = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) = 60^\circ$.

4.2.19. На систему из двух скрещенных поляроидов падает свет с длиной волны λ = 589 нм. Какой толщины $d_{\min}$ нужно поставить оптически активную кварцевую пластинку, чтобы после второго поляроида наблюдался максимум интенсивности? Постоянная вращения для кварца α = 21,7 град/мм.

Ответ: $d_{\min} = (2m+1)\varphi/\alpha$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$; $\varphi = 90^\circ$.
$d_{\min}$ = 4,15 мм; d_1 = 12.4 мм; d_2 = 20,7 мм и т. д.

4.2.20. Определить, при каком минимальном значении напряженности E электрического поля в жидком нитробензоле оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами в ячейке Керра (рис. 4.14) будет равна $\lambda/4$? Длина пластин конденсатора l = 4 см. Постоянная Керра $B = K/\lambda$ в нитробензоле равна $5\cdot10^{-12}$ м/В^2 при λ = 550 нм.

Ячейка Керра

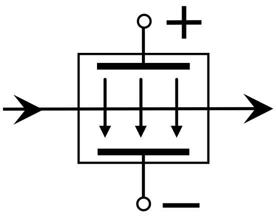

Рис. 4.14

Ответ: $E = \sqrt{\dfrac{2}{4lB}} = 1{,}1$ МВ/м.

4.2.21. Во сколько раз ослабевает естественный свет, проходя через два николя, главные плоскости которых составляют между собой угол 63°, если в каждом из николей теряется 10 % падающего света?

Ответ: $\dfrac{I_0}{I_2} = \dfrac{2}{(1-\alpha)^2\cos^2\varphi} \approx 12$.

4.2.22. На боковую грань призмы, изготовленной из стекла с показателем преломления n = 1,5, падает под углом Брюстера $\alpha_Б$ световой пучок, электрический вектор которого лежит в плоскости падения. Каким должен быть преломляющий угол призмы θ, чтобы свет прошел через нее, не испытав потерь на отражение?

Ответ: $\theta = \pi - 2\operatorname{arctg} n = 68°$.

4.2.23. В эффекте Фарадея наблюдается вращение плоскости поляризации при прохождении света через вещество, помещенное в магнитное поле. Кювета с жидким бромом помещена между скрещенными поляроидами $П_1$ и $П_2$ (рис. 4.15). Определить, при каком значении индукции B магнитного поля после второго поляроида наблюдается максимум интенсивности. Длина ячейки $d = 10$ см. Для жидкого брома при комнатной температуре и $\lambda = 700$ нм постоянная Верде $V = 885$ град/(Тл·м).

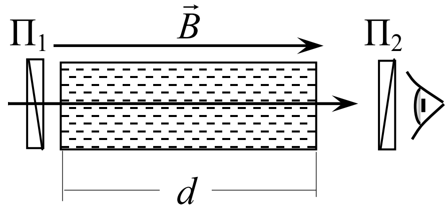

Рис. 4.15

Ответ: $B = \varphi/(Vd) = 1{,}0$ Тл.

4.2.24. Ячейка Керра (см. рис. 4.14) с жидким нитробензолом помещена между скрещенными поляроидами $П_1$ и $П_2$. Оптическая ось ячейки, т. е. направление электрического поля в ней, образует с плоскостями пропускания поляризаторов угол 45°, толщина слоя жидкости $l = 4$ см. Постоянная Керра для нитробензола $B = 5\cdot 10^{-12}$ м/В^2 при $\lambda = 550$ нм. Определить минимальное значение напряженности электрического поля $E_{\min}$, при котором система будет пропускать максимальную долю падающего на нее света.

Ответ: $E_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{2Bl}} = 1{,}59\cdot 10^{6}$ В/м.

4.2.25. Свет падает перпендикулярно плоскости одной из граней монокристалла NaCl. Какая доля падающего излучения отражается от грани кристалла и чему равен угол Брюстера для NaCl?

Ответ: $\rho = \dfrac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = 0{,}047 = 4{,}7\,\%$; $\theta_Б = \operatorname{arctg} n = 57{,}2°$.

4.3.1. Между двумя скрещенными поляризаторами находится клиновидная пластинка, вырезанная из ирландского шпата так, что оптическая ось пластинки параллельна ребру клина. Угол при вершине клина $\beta = 4{,}72'$. Ось пластинки образует с плоскостями поляризаторов углы, равные 45°. Найти ширину Δx интерференционных полос, наблюдаемых за вторым поляризатором при прохождении через систему света с $\lambda = 486$ нм. Для этой длины волны показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей n_o = 1,668 и n_e = 1,491.

Ответ: $\Delta x = \lambda \big/ \left[\beta \left(n_o - n_e \right) \right] = 2$ мм.

4.3.2. Белый естественный свет падает на систему из двух скрещенных николей, между которыми находится кварцевая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, толщиной d = 1,5 мм. Ось пластинки составляет угол 45° с главными направлениями николей. Прошедший через эту систему свет разложили на спектр. Сколько темных полос N будет наблюдаться в интервале длин волн от λ_1 = 550 нм до λ_2 = 660 нм? Разность показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей в этом интервале длин волн считать равной Δn = 0,009.

Ответ: целые числа m, соответствующие условию минимума, лежат в интервале значений: $m_1 \geq \dfrac{d\Delta n}{\lambda_1} = 20{,}45$; $m_2 \leq \dfrac{d\Delta n}{\lambda_2} = 24{,}54$. Отсюда $N = 4$.

4.3.3. Кристаллическая пластинка в полволны установлена между двумя совершенными поляризаторами. На первый (по ходу) поляризатор падает естественный монохроматический свет интенсивностью I_0 с длиной волны, соответствующей полуволновой пластинке. Оптическая ось пластинки образует с вертикалью угол α = 30°. Первый поляризатор закреплен в положении, в котором его плоскость вертикальна. Второй поляризатор может вращаться. Определить интенсивность I света, вышедшего из второго поляризатора, для случаев, когда плоскости поляризаторов: а) параллельны, б) взаимно перпендикулярны.

Ответ: а) $I_{\parallel} = \dfrac{I_0}{2}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)^2 = \dfrac{I_0}{8}$; б) $I_{\perp} = 2I_0 \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \dfrac{3I_0}{8}$.

4.3.4. Имеется горизонтальный параллельный пучок эллиптически поляризованного света. Обнаружено, что при прохождении пучка через пластинку $\lambda/4$ при определенной ее ориентации свет оказывается линейно поляризованным под углом α_1 = 23° к вертикали. Если пластинку повернуть на угол 90°, то свет снова оказывается линейно поляризованным под углом α_2 = 83° к вертикали. Найти отношение a/b полуосей эллипса поляризации и угол φ наклона большой оси.

Ответ: $\dfrac{a}{b} = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \sqrt{3}$; $\varphi = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 53^\circ$.

Примечание. В эллиптически поляризованном свете колебания, направленные вдоль главных осей эллипса, имеют разность фаз, равную $\pm\pi/2$. Пластинка $\lambda/4$ превращает свет в плоскополяризованный, доводя разность фаз до 0 или $\pm\pi$.

4.3.5. Кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, имеет толщину d = 0,25 мм и служит пластинкой в четверть волны для λ = 530 нм. Для каких длин волн в области от λ_1 = 0,40 мкм до λ_2 = 0,76 мкм она будет также пластинкой в четверть волны? Считать, что для всех длин волн видимого спектра разность показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей Δn = 0,009.

Ответ: $\lambda = 4d\Delta n/(2m+1)$, где m – целые числа, заключенные в интервале: $m_1 \geq \dfrac{2d\Delta n}{\lambda_2} - \dfrac{1}{2} = 5,4$; $m_2 \leq \dfrac{2d\Delta n}{\lambda_1} - \dfrac{1}{2} = 10,75$; λ: 0,43; 0,47; 0,60; 0,69 мкм.

4.3.6. Естественный свет проходит через систему из двух одинаковых несовершенных поляризаторов, каждый из которых пропускает в своей плоскости τ = 95 % интенсивности соответствующего колебания и обусловливает степень поляризации P = 0,90. Какую долю η первоначальной интенсивности света составляет интенсивность света, прошедшего через эту систему, если плоскости поляризаторов взаимно перпендикулярны (поляризаторы скрещены)?

Ответ: $\eta = \dfrac{\tau^2}{2} \cdot \dfrac{1-P}{1+P} = 0,024$.

4.3.7. Некогерентная смесь линейно-поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через поляроид. Найдено положение поляроида, соответствующее максимальной интенсивности прошедшего света. При повороте поляроида на угол α = 30° интенсивность света уменьшилась на η = 20 %. Найти отношение интенсивности света $I_к$, поляризованного по кругу, к интенсивности линейно-поляризованного света $I_л$.

Ответ: $I_к/I_л = 2(\sin^2\alpha - \eta)/\eta = 0,5$.

4.3.8. Плоская волна монохроматического света длиной λ, поляризованного по кругу, создает в точке P интенсивность I_0. На пути волны ставят большую пластинку из идеального поляроида, как показано на рис. 4.16. Найти толщину d пластинки, при которой интенсивность света в точке P будет максимальной. Чему равна I_{max}?

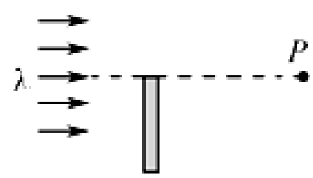

Рис. 4.16

Ответ: $d = \dfrac{m\lambda}{n-1}$, где m = 1, 2, …; $I_{max} = \dfrac{5}{8} I_0$.

4.3.9. Кварцевую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, поместили между двумя скрещенными николями. Угол между главными направлениями николей и пластинки равен 45°. Толщина пластинки d = 0,5 мм. При каких длинах волн в интервале 0,5–0,6 мкм интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота заднего николя? Разность показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей в этом интервале длин волн $\Delta n = 0{,}009$.

Ответ: $\lambda_m = 4d\Delta n/(2m+1)$; λ: 0,58, 0,55, 0,51 мкм при m = 15, 16, 17.

4.3.10. Кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, помещена между двумя скрещенными николями так, что ее оптическая составляет угол 45° с главными направлениями николей. При какой наименьшей толщине пластины свет с λ_1 = 643 нм будет проходить через эту систему с максимальной интенсивностью, а свет с длиной волны λ_2 = 564 нм будет сильно ослаблен? Разность Δn показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей $\Delta n = 0{,}009$.

Ответ: $d = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{\lambda_1}{\Delta n} = 0{,}25$ мкм, где $m = 4$.

4.3.11. Плоская монохроматическая волна естественного света с интенсивностью I_0 нормально падает на круглое отверстие, которое представляет собой первую зону Френеля для точки наблюдения P. Найти интенсивность света в точке P после того, как отверстие перекрыли двумя одинаковыми поляроидами, плоскости пропускания которых взаимно перпендикулярны, а граница их раздела проходит по диаметру отверстия.

Ответ: $I = I_0$.

4.3.12. Стопа Столетова состоит из десяти плоскопараллельных тонких стеклянных пластинок, на которые падает луч под углом $\alpha_Б$ полной поляризации. Показатель преломления $n = 1{,}5$. Падающий естественный свет. Вычислить степень поляризации P_N преломленного луча в зависимости от числа N проходимых им пластинок. Чему равно P_N при N = 1, 2, 5 и 10? Многократные отражения в стопе не учитывать.

Ответ: $I_{max} = I_0/2$; $I_{min} = I_0(1-\rho_\perp)^{2N}/2$, где $\rho_\perp = \left(n^2-1\right)^2/\left(n^2+1\right)^2$ для $\alpha_Б$;

$P_N = \left(1-\alpha^{4N}\right)/\left(1+\alpha^{4N}\right)$, где $\alpha = 2n/\left(1+n^2\right)$.

$P_1 = 0{,}16$; $P_2 = 0{,}31$; $P_5 = 0{,}67$; $P_{10} = 0{,}95$.

4.3.13. Естественный свет пропускают через два одинаковых поставленных один за другим несовершенных поляризатора. Интенсивность прошедшего через эту систему света при параллельных плоскостях поляризаторов ($I_\parallel$) превышает интенсивность при взаимно перпендикулярных плоскостях ($I_\perp$) в $\eta = 9{,}53$ раза. Определить: а) степень поляризации P_1 света, прошедшего только через один из поляризаторов; б) степень поляризации $P_\parallel$ света, обусловливаемую системой при параллельных плоскостях поляризаторов.

Ответ: а) $P_1 = \sqrt{(\eta-1)/(\eta+1)} = 0{,}9$; б) $P_\parallel = \sqrt{\eta^2-1}/\eta = 0{,}994$.

4.3.14. Каким показателем преломления n должно обладать вещество, чтобы при помощи однократного полного внутреннего отражения на границе его с воздухом можно было превращать линейно поляризованный свет в поляризованный по кругу? Азимут колебаний падающего света равен 45°.

Пояснение. При максимальной разности фаз между отраженными электрическими компонентами волны $\mathrm{tg}(\Delta\varphi/2) = (1 - n^2_{\text{отн}})/(2n_{\text{отн}})$, где $n_{\text{отн}} = 1/n$.

Ответ: $n \geq 1\big/\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 2{,}41$.

4.3.15. На поверхность воды под углом Брюстера падает пучок плоско-поляризованного света. Плоскость колебаний светового вектора составляет угол $\varphi = 45°$ с плоскостью падения. Найти коэффициент отражения. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Ответ: из формулы для коэффициента отражения перпендикулярной составляющей $\rho_{\perp} = \left[\left(\cos\theta_1 - n\cos\theta_2\right)\big/\left(\cos\theta_1 + n\cos\theta_2\right)\right]^2$, где θ_1 и θ_2 – угол падения и угол преломления, следует: $\rho = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 \sin^2\varphi = 0{,}038$.

4.3.16. На периодическую структуру, состоящую из тонких параллельных диэлектрических пластин, падает плоская монохроматическая волна (4.17). Толщина пластин равна d_0, расстояние между ними d. Диэлектрическая проницаемость пластин равна ε_1, окружающей среды ε. Длина волны λ значительно больше d_0 и d. Показать, что структура аналогична одноосному кристаллу, и определить показатели преломления обыкновенного n_o и необыкновенного n_e лучей.

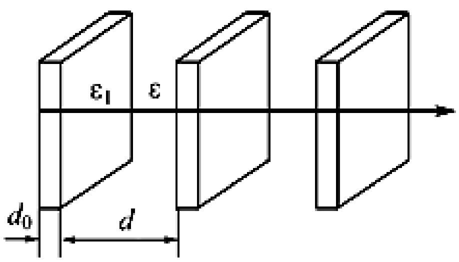

Рис. 4.17

Пояснения. Показать, что диэлектрическая проницаемость системы в случае электрического поля, направленного:

1) параллельно пластинам, равна $\left(\varepsilon_1 d_0 + \varepsilon d\right)\big/\left(d + d_0\right)$;

2) перпендикулярно пластинам – $\varepsilon\varepsilon_1\left(d + d_0\right)\big/\left(\varepsilon d_0 + \varepsilon_1 d\right)$.

Ответ: $n_o = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1 d_0 + \varepsilon d}{d + d_0}}$; $n_e = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_1 \dfrac{d + d_0}{\varepsilon d_0 + \varepsilon_1 d}}$.

4.3.17. Линейно поляризованный световой пучок падает на поляризатор, вращающийся вокруг оси с угловой скоростью $\omega = 21$ рад/с. Найти световую энергию E, проходящую через поляризатор за один оборот, если поток энергии в падающем пучке $\Phi_0 = 4$ мВт.

Ответ: $E = \pi\Phi_0/\omega = 0{,}6$ мДж.

4.3.18. Показатель преломления кристаллического кварца для длины волны λ = 589 нм равен n_o = 1,544 для обыкновенного луча и n_e = 1,553 для необыкновенного луча. На пластинку кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает линейно поляризованный свет указанной длины волны, занимающий спектральный интервал $\Delta\lambda$ = 40 нм. Найти толщину пластинки d и направление поляризации падающего света, если свет после пластинки оказался неполяризованным.

Ответ: два пучка света перестают быть когерентными при порядке интерференции превышающем величину $m = \lambda/\Delta\lambda$.
$d > \lambda^2/[\Delta\lambda\cdot(n_e - n_0)]$ = 1 мм. Падающий свет должен быть поляризован под углом 45° к оптической оси пластинки.

4.3.19. Свет с длиной волны λ падает на систему из скрещенных поляризатора *П* и анализатора *А*, между которыми находится компенсатор Бабине *К* (см. рис. 4.18). Он состоит из двух кварцевых клиньев с шириной основания d, оптическая ось одного из которых параллельна ребру клина, другого – перпендикулярна ему. Плоскости пропускания поляризатора и анализатора составляют угол 45° с оптическими осями компенсатора. Известны также преломляющий угол θ клиньев ($\theta \ll 1$) и разность показателей преломления кварца $n_e - n_o$. При введении исследуемого двупреломляющего образца *О* (его оптическая ось ориентирована так, как показано на рис. 4.18) наблюдаемые интерференционные полосы сдвинулись вверх на δx мм. Найти: а) ширину интерференционной полосы Δx; б) величину и знак оптической разности хода обыкновенного и необыкновенного лучей $d(n'_e - n'_o)$ в образце *О*.

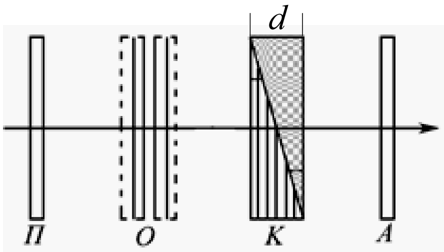

Рис. 4.18

Ответ: а) для m-го максимума, находящегося на расстоянии x от вершины левого клина,

можно записать $x\theta(n_e - n_o) + (d - x\theta)(n_o - n_e) - \lambda/2 = m\lambda$, $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2\theta(n_e - n_o)}$;

б) $d(n'_o - n'_e) = -2(n_o - n_e)\theta\delta x < 0$.

4.3.20. Плоскополяризованный свет с λ = 589 нм проходит вдоль оси цилиндрического стеклянного сосуда, заполненного слегка замутненным раствором сахара с концентрацией C = 500 г/л. При наблюдении сбоку видна система винтообразных полос, причем расстояние между соседними темными полосами вдоль оси равно l = 50 см. Объяснить возникновение полос и определить удельную постоянную вращения раствора.

Ответ: положение темных полос задается направлением вектора **E** напряженности электрического поля, т. к. в направлении **E** не наблюдается рассеяния света; $\alpha = \varphi/(Cl) = 7{,}2$ град·см^2/г.

4.3.21. Опыт показывает, что телу, облучаемому поляризованным по кругу светом, сообщается вращательный момент (эффект Садовского). Это связано с тем, что данный свет обладает моментом импульса, плотность потока которого в вакууме $M = I/\omega$, где I – интенсивность света; ω – его круговая частота колебаний. Пусть поляризованный по кругу свет с длиной волны $\lambda = 0{,}70$ мкм падает нормально на однородный черный диск массой $m = 10$ мг, который может свободно вращаться вокруг своей оси. Через какое время его угловая скорость станет $\omega_0 = 1{,}0$ рад/с, если $I = 10$ Вт/см^2?

Ответ: $t = mc\omega_0/(\lambda I) = 12$ ч.

4.3.22. Узкий пучок естественного света с длиной волны $\lambda = 589$ нм падает нормально на поверхность призмы Волластона, сделанной из исландского шпата, как показано на рис. 4.19. Оптические оси обеих частей призмы взаимно перпендикулярны. Найти угол α между направлениями пучков за призмой, если угол $\theta = 30°$. Показатели преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей для исландского шпата, соответственно, равны $n_o = 1{,}658$; $n_e = 1{,}486$.

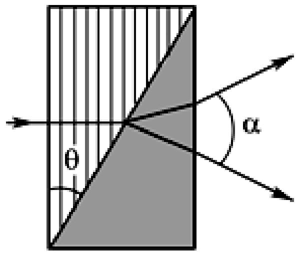

Рис. 4.19

Ответ: $\alpha = \arcsin[n_e(\beta_1 - \theta)] + \arcsin[n_o \sin(\theta - \beta_2)] = 11°$,

где $\beta_1 = \arcsin\left(\dfrac{n_o}{n_e}\sin\theta\right)$; $\beta_2 = \arcsin\left(\dfrac{n_e}{n_o}\sin\theta\right)$.

4.3.23. Монохроматический поляризованный по кругу свет падает нормально на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. За пластинкой находится поляризатор, плоскость пропускания которого составляет угол φ с оптической осью пластинки. Показать, что интенсивность света, прошедшего эту систему, равна $I \approx I_0(1 + \sin 2\varphi \sin\delta)$, где δ – разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, вносимая пластинкой.

4.3.24. Линейнополяризованный свет с $\lambda = 0{,}59$ мкм падает на трехгранную кварцевую призму *П* (см. рис. 4.20) с преломляющим углом $\theta = 30°$. В призме свет распространяется вдоль оптической оси, направление которой показано штриховкой. За поляризатором *P* наблюдают систему светлых и темных полос, ширина которых $\Delta x = 15{,}0$ мм. Найти постоянную α вращения кварца, а также характер распространения интенсивности света за поляризатором.

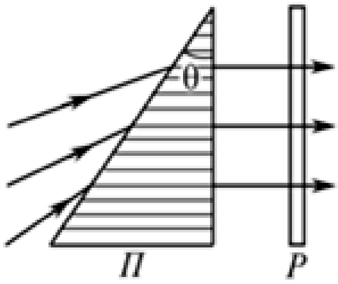

Рис. 4.20

Ответ: $\alpha = \pi/(\Delta x \operatorname{tg}\theta) = 0{,}363$ рад/мм $= 20{,}8$ град/мм;
$I(x) \sim \cos^2(\pi x/\Delta x)$, где x – расстояние от максимума.

4.3.25. Монохроматический плоскополяризованный свет с круговой частотой ω проходит через вещество вдоль однородного поля с напряженностью H. Найти разность Δn показателей преломления для право- и левополяризованных по кругу компонент светового пучка, если постоянная Верде равна V.

Ответ: скорости волн, поляризованных по правому и левому кругу:
$v^{\text{п}} = \omega/(k - \alpha)$, $v^{\text{л}} = \omega/(k + \alpha)$, где k – волновой вектор, $\alpha = VH$.
$\Delta n = 2cHV/\omega$, где c – скорость света в вакууме.

5. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Основные формулы и обозначения

Поток энергии или мощность излучения

$$\Phi = \frac{dW}{dt},$$

где dW – энергия, излучаемая (или поглощаемая) всей поверхностью S тела за время dt.

Спектральная испускательная способность или спектральная плотность энергетической светимости тела по шкале частот ω и длин волн λ, соответственно,

$$r_{\omega,T} = \frac{dW}{S \cdot dt \cdot d\omega}, \quad r_{\lambda,T} = \frac{dW}{S \cdot dt \cdot d\lambda},$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота, $\lambda = c/\nu$, c – скорость света в вакууме.

Соотношение между спектральной испускательной способностью тела по шкале частот и шкале длин волн:

$$r_{\lambda,T} = r_{\omega,T} \cdot \frac{d\omega}{d\lambda} = r_{\omega,T} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda^2}.$$

Знак «минус» у производной $d\omega/d\lambda$ опущен. Он показывает, что с возрастанием длины волны λ частота ω убывает.

Интегральная испускательная способность или энергетическая светимость тела

$$R_T = \frac{dW}{S \cdot dt} = \frac{\Phi}{S}, \qquad R_T = \int_0^\infty r_{\omega,T} d\omega = \int_0^\infty r_{\lambda,T} d\lambda.$$

Спектральная поглощательная способность (монохроматический коэффициент поглощения) тела

$$a_{\omega,T} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega} \le 1,$$

где $d\Phi_\omega$ и $d\Phi'_\omega$ – поток энергии, падающий на поверхность тела, и поток энергии, поглощенный телом в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$, соответственно.

Интегральная поглощательная способность тела

$$A_T = \int_0^\infty a_{\omega,T} d\omega.$$

Поглощательная способность абсолютно черного тела

$$A^{\text{а.ч.т.}} = A \equiv 1.$$

Закон Кирхгофа:

$$\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = r^*_{\omega,T} \text{ или } \frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = r^*_{\lambda,T},$$

где $r^*_{\omega,T}$ или $r^*_{\lambda,T}$ – испускательная способность абсолютно черного тела.

Формула Планка;

$$r^*_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{1}{\exp[\hbar\omega/(kT)]-1}, \qquad r^*_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp[hc/(\lambda kT)]-1},$$

где h = 6,63·10^{-34} Дж·с – постоянная Планка; $\hbar = h/(2\pi)$ = 1,055·10^{-34} Дж·с; k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана; c = 3·10^8 м/с – скорость света в вакууме; T – термодинамическая температура.

Формула Рэлея – Джинса ($h\nu \ll kT$):

$$r^*_{\omega,T} = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^2}kT \text{ или } r^*_{\nu,T} = 2\pi r^*_{\omega,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT.$$

Закон Стефана–Больцмана:

$$R_T = \sigma T^4,$$

где R_T – интегральная испускательная способность (энергетическая светимость) абсолютно черного тела; $\sigma = \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}$ = 5,67·10^{-8} (Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$) – постоянная Стефана–Больцмана.

Энергетическая светимость серого тела

$$R = A_T\sigma T^4,$$

где $A_T < 1$ – поглощательная способность серого тела, или коэффициент поглощения.

Закон смещения Вина:

$$\lambda_{max} = b/T,$$

где λ_{max} – длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела; b = 2,9·10^{-3} м·К – постоянная Вина.

Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела:

$$(r_{\lambda,T})_{max} = CT^5,$$

где C = 1,3·10^{-5} Вт/(м^3·К^5).

Объемная плотность энергии теплового излучения

$$u = \frac{4R_T}{c}.$$

Давление теплового излучения

$$p_T = u/3.$$

Связь радиационной T_p и истинной T температур:

$$T_p = \sqrt[4]{A_T}\cdot T.$$

Задачи с решениями

Задача 1. Определить энергию, излучаемую за 1 мин из смотрового окошка площадью отверстия 8 см^2 плавильной печи, если её температура $°t$ = 1000 °C.

Дано:	Решение.
t = 60 с $S = 8\cdot10^{-4}$ м^2 T = 1273 К $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4)	**Решение.** Смотровое окошко плавильной печи можно принять за абсолютно черное тело. Энергия, испускаемая из смотрового окошка, $W = R_T St$, (1) где R_T – энергетическая светимость абсолютно черного тела.
W – ?	

По закону Стефана–Больцмана

$$R_T = \sigma T^4. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомое выражение:

$$W = \sigma T^4 St.$$

$$W = 5{,}67\cdot10^{-8}\cdot1273^4\cdot8\cdot10^{-4}\cdot60 = 7147 \text{ Дж} = 7{,}15 \text{ кДж}.$$

Ответ: W = 7,15 кДж.

Задача 2. Определите количество теплоты, теряемой в результате теплового излучения металлическим кубиком объемом 125 см^3 за 1 мин, если поглощательная способность поверхности A_T = 0,8 при температуре кубика 1227 °C.

Дано:	Решение.
$V = 1{,}25\cdot10^{-4}$ м^3 t = 60 с A_T = 0,8 T = 1500 К $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4)	**Решение.** Количество теплоты, теряемой кубиком, равно энергии, излучаемой его раскаленной поверхностью: $Q = W = A_T R_T St$, (1) где R_T – энергетическая светимость абсолютно черного тела; S – поверхность кубика.
Q – ?	Согласно закону Стефана – Больцмана

$$R_т = \sigma T^4. \qquad 2)$$

Поверхность кубика

$$S = 6a^2 = 6\sqrt[3]{V^2} = 6V^{2/3}, \qquad (3)$$

где $a = \sqrt[3]{V}$ – длина ребра кубика.

Подставив (2) и (3) в (1), найдем искомое количество теплоты, теряемое раскаленным кубиком за время t,

$$Q = 6A_T\sigma T^4 V^{2/3} t.$$

Вычисляя, получим:

$$Q = 6\cdot0{,}8\cdot5{,}67\cdot10^{-8}\cdot1500^4\cdot(1{,}25\cdot10^{-4})^{2/3}\cdot60 = 2{,}07\cdot10^4 \text{ Дж} = 20{,}7 \text{ кДж}.$$

Ответ: Q = 20,7 кДж.

Задача 3. Максимум спектральной плотности энергетической светимости зачерненного металлического шара соответствует длине волны λ_{max} = 1400 нм. Принимая шар за абсолютно черное тело, определить: 1) энергетическую светимость R_T шара; 2) поток энергии Ф, излучаемый шаром; 3) массу m электромагнитных волн (всех длин), излучаемых шаром за 1 ч. Радиус шара $r = 0{,}1$ м.

Дано:
$\lambda_{max} = 1{,}4\cdot10^{-6}$ м
$r = 0{,}1$ м
$t = 3600$ с
$\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
$b = 2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К
$c = 3\cdot10^{8}$ м/с
$R_т$ – ? Ф – ? m – ?

Решение. **1)** Энергетическая светимость R_T абсолютно черного тела выражается формулой Стефана – Больцмана

$$R_T = \sigma T^4. \qquad (1)$$

Выразив из закона смещения Вина температуру $T = b/\lambda_{max}$ и подставив в (1), получим

$$R_T = \sigma(b/\lambda_{max})^4 . \qquad (2)$$

Подставив в (2) численные значения, найдем:

$$R_T = 5{,}67\cdot10^{-8}\cdot(2{,}9\cdot10^{-3}/1{,}4\cdot10^{-6})^4 = 1{,}04\cdot10^{6}\ (\text{Вт/м}^2) \approx 1\ \text{МВт/м}^2.$$

2) Поток энергии Ф, излучаемый шаром в единицу времени, равен произведению энергетической светимости R_T шара и площади S его поверхности:

$$\Phi = R_T S, \text{ или } \Phi = 4\pi r^2 R_T. \qquad (3)$$

Подставив значения в формулу (3), получим:

$$\Phi = 4\cdot3{,}14\cdot0{,}1^2\cdot1\cdot10^{6} = 1{,}26\cdot10^{5}\ \text{Вт} = 0{,}126\ \text{МВт}.$$

3) Массу m электромагнитных волн (всех длин), излучаемых шаром за время t, определим, применив закон пропорциональности массы и энергии,

$$W = mc^2.$$

Энергия электромагнитных волн, излучаемых за время t, равна:

$$W = \Phi t.$$

Следовательно, $m = \Phi t/c^2$.

Вычисление по формуле дает

$$m = 1{,}26\cdot10^{5}\cdot3600/9\cdot10^{16} = 5\cdot10^{-9}\ \text{кг} = 5\ \text{мкг}.$$

Ответ: $R_T = 1$ МВт/м^2; Ф = 0,126 МВт; $m = 5$ мкг.

Задача 4. Длина волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, λ_{max} = 580 нм. Определите энергию излучения ΔR с единицы поверхности тела в единицу времени в диапазоне длин волн $\lambda_{max} \pm \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ = 0,5 нм.

Дано:
$\lambda_{max} = 5{,}8\cdot10^{-7}$ м
$\Delta\lambda = 5\cdot10^{-10}$ м
$b = 2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К
$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с
$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
$c = 3\cdot10^{8}$ м/с

ΔR – ?

Решение. Энергия излучения ΔR с единицы поверхности в единицу времени в диапазоне длин волн $\lambda_{max} \pm \Delta\lambda$, при $\Delta\lambda \ll \lambda_{max}$, равна:

$$\Delta R = \int_{\lambda_{max}-\Delta\lambda}^{\lambda_{max}+\Delta\lambda} r_{\lambda,T}\, d\lambda \approx \int_{\lambda_{max}-\Delta\lambda}^{\lambda_{max}+\Delta\lambda} (r_{\lambda,T})_{max}\, d\lambda. \qquad (1)$$

Спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела при $\lambda = \lambda_{max}$ определяется формулой Планка

$$(r_{\lambda,T})_{max} = r_{\lambda_{max},T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_{max}^5}\frac{1}{\exp[hc/(\lambda_{max}kT)]-1}. \qquad (2)$$

По закону смещения Вина

$$\lambda_{max} = b/T. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получим, что $(r_{\lambda,T})_{max}$ зависит только от температуры T тела:

$$(r_{\lambda,T})_{max} = \frac{2\pi hc^2T^5}{b^5}\frac{1}{\exp[hc/(bT)]-1} = CT^5, \qquad (4)$$

где $C = \dfrac{2\pi hc^2}{b^5}\cdot\dfrac{1}{\exp[hc/(bT)]-1} = 1{,}3\cdot10^{-5}$ Вт·м$^{-3}$·К$^{-5}$.

Подставляя (4) в (1), получим $\Delta R = \int_{\lambda_{max}-\Delta\lambda}^{\lambda_{max}+\Delta\lambda} CT^5 d\lambda = CT^5\cdot 2\Delta\lambda$.

Так как $T = b/\lambda_{max}$, то $\Delta R = 2\Delta\lambda\cdot C\cdot(b/\lambda_{max})^5$.

Вычисляя, получим

$$\Delta R = 2\cdot5\cdot10^{-10}\cdot1{,}3\cdot10^{-5}\cdot(2{,}9\cdot10^{-3}/5{,}8\cdot10^{-7})^5 = 4{,}06\cdot10^4\ \text{Вт/м}^2 = 40{,}6\ \text{кВт/м}^2.$$

Ответ: $\Delta R = 40{,}6$ кВт/м^2.

Задача 5. Найдите солнечную постоянную C, т. е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся вне земной атмосферы на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля. Температуру поверхности Солнца принять T = 5800 К. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Радиус Солнца $R_С = 7\cdot10^8$ м, расстояние от Солнца до Земли $L = 1{,}5\cdot10^{11}$ м.

Дано:
T = 5800 К
$R_с = 7\cdot10^8$ м
$L = 1{,}5\cdot10^{11}$ м
$\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)

K – ?

Решение. По определению

$$C = W/S_L t, \qquad (1)$$

где W – энергия, излучаемая Солнцем за время t; S_L – площадь сферы радиусом L.

$$S_L = 4\pi L^2. \qquad (2)$$

Энергия, излучаемая Солнцем за время t,

$$W = R_T S_C t, \qquad (3)$$

где R_T – энергетическая светимость поверхности Солнца,

$$R_T = \sigma T^4; \qquad (4)$$

S_C – площадь поверхности Солнца,

$$S_C = 4\pi R_C^2. \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (1)–(5), получим

$$C = \sigma T^4 R_C^2 / L^2.$$

$$C = 5{,}67\cdot10^{-8}\cdot(5{,}8\cdot10^3)^4\cdot(7\cdot10^8)^2/(1{,}5\cdot10^{11})^2 = 1{,}4\cdot10^3\ \text{Вт/м}^2.$$

Ответ: $C = 1{,}4\cdot10^3$ Вт/м^2.

Задача 6. Считая, что атмосфера поглощает 10 % лучистой энергии, посылаемой Солнцем, найдите мощность излучения, получаемую от Солнца горизонтальным участком Земли площадью S = 0,5 га. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$. Солнечная постоянная C = 1,4 кВт/м^2.

Дано:
$\delta = 0{,}1$
$\varphi = 30^\circ$
$S = 5\cdot10^3$ м^2
$C = 1{,}4\cdot10^3$ Вт/м^2
$P_З$ – ?

Решение. Мощность $P_\perp$, падающая на площадку $S_\perp$, расположенную перпендикулярно к солнечным лучам (рис. 5.1), равна:

$$P_\perp = C\cdot S_\perp.$$

Мощность P, падающая на площадку S, расположенную под углом φ к солнечным лучам равна:

$$P = C\cdot S\cdot\sin\varphi.$$

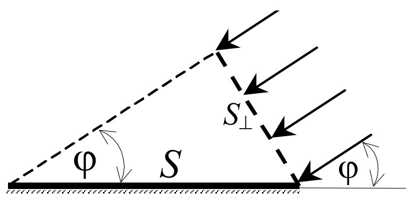

Рис. 5.1

Потери мощности за счет поглощения в атмосфере Земли

$$\Delta P = \delta\cdot P.$$

Таким образом,

$$P_З = P - \Delta P = (1 - \delta)\cdot P = (1 - \delta)\cdot C\cdot S\cdot\sin\varphi.$$

$$P_З = (1 - 0{,}1)\cdot1{,}4\cdot10^3\cdot5\cdot10^3\cdot\sin30° = 3{,}15\cdot10^6\ \text{Вт} = 3{,}15\ \text{МВт}.$$

Ответ: $P_З$ = 3,15 МВт.

Задача 7. Вольфрамовая нить диаметром 0,1 мм и длиной 5 см нагревается в вакуумной колбе электрическим током. Температура нити 1000 К, температура окружающей среды 300 К. Поглощательная способность вольфрама при данной температуре A_T = 0,31, удельное сопротивление $\rho = 9\cdot10^{-5}$ Ом·см. Определите разность потенциалов на концах нити.

Дано:	
$d = 1\cdot10^{-4}$ м	
$l = 5\cdot10^{-2}$ м	
$T = 1000$ К	
$T_0 = 300$ К	
$A_T = 0{,}31$	
$\rho = 9\cdot10^{-7}$ Ом·м.	
$\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)	
U – ?	

Решение. Мощность $P_{изл}$, излучаемая нитью, равна потребляемой нитью мощности $P_{пот}$:

$$P_{изл} = P_{пот}.$$

Нить потребляет мощность теплового излучения окружающей среды P_0 и мощность электрического тока $P_{эл}$:

$$P_{пот} = P_0 + P_{эл}.$$

Таким образом,

$$P_{изл} = P_0 + P_{эл}; \qquad (1)$$

где

$$P_{изл} = A_T\sigma T^4\cdot S, \qquad (2)$$

$$P_0 = A_T\sigma T_0{}^4\cdot S; \qquad (3)$$

$$P_{эл} = U^2/R; \qquad (4)$$

площадь поверхности нити

$$S = \pi d\cdot l; \qquad (5)$$

сопротивление нити

$$R = \rho l/S_п; \qquad (6)$$

площадь поперечного сечения нити

$$S_п = \pi d^2/4. \qquad (7)$$

Решая систему уравнений (1) – (7), найдем искомую величину:

$$U = \sqrt{\frac{4A_T l^2\rho\sigma(T^4 - T_0^4)}{d}}.$$

$$U = \sqrt{\frac{4\cdot0{,}31\cdot0{,}05^2\cdot9\cdot10^{-7}\cdot5{,}67\cdot10^{-8}\cdot(1000^4 - 300^4)}{1\cdot10^{-4}}} = 1{,}25 \text{ В}.$$

Ответ: $U = 1{,}25$ В.

Задача 8. Объясните, почему открытые днем окна домов со стороны улиц кажутся черными?

Решение. Моделью абсолютно черного тела является замкнутая полость с небольшим отверстием. Если размер отверстия в 10 раз меньше диаметра полости, то падающее на отверстие излучение почти полностью поглощается. Вследствие этого открытые окна со стороны улицы кажутся черными, хотя внутри комнат достаточно светло из-за многократного отражения света от стен.

Задача 9. В спектре излучения огненного шара радиусом 100 м, возникающего при ядерном взрыве, максимум энергии приходится на длину волны 290 нм. Определить максимальное расстояние, на котором будут воспламеняться деревянные предметы, если их поглощательная способность равна 0,7. Теплота воспламенения сухого дерева $5 \cdot 10^4$ Дж/м^2. Излучение шара считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Дано:	
$r = 100$ м	
$\lambda_{max} = 2{,}9 \cdot 10^{-7}$ м	
$A_T = 0{,}7$	
$q = 5 \cdot 10^4$ Дж/м^2	
$b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К	
$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)	
L – ?	

Решение. Для воспламенения дерева с площадью поверхности S необходима энергия

$$E_{min} = q \cdot S. \qquad (1)$$

Поток энергии Ф от огненного шара площадью $S_ш$ равен:

$$\Phi = R_T \cdot S_ш = \sigma T^4 \cdot \pi r^2.$$

Энергия E, падающая на единицу поверхности сферы S_L, радиусом L, т. е. на расстоянии расположения дерева, равна:

$$E = \frac{\Phi}{S_L} = \frac{\sigma T^4 \pi r^2}{\pi L^2} = \sigma T^4 \left(\frac{r}{L}\right)^2.$$

Дерево поглощает часть A_T энергии E, падающей на его площадь S,

$$E_{min} = A_T E S = A_T S \sigma T^4 \left(\frac{r}{L}\right)^2. \qquad (2)$$

Приравнивая уравнения (1) и (2), получим $q = A_T \sigma T^4 \left(\frac{r}{L}\right)^2$.

Так как $T = b/\lambda_{max}$, то $q = A_T \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{max}}\right)^4 \cdot \left(\frac{r}{L}\right)^2$.

Отсюда
$$L = r \cdot \sqrt{\frac{A_T \sigma}{q}} \cdot \left(\frac{b}{\lambda_{max}}\right)^2.$$

$$L = 100 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}{5 \cdot 10^4}} \cdot \left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{2{,}9 \cdot 10^{-7}}\right)^2 = 8{,}9 \cdot 10^3 \text{ м} = 8{,}9 \text{ км}.$$

Ответ: $L = 8{,}9$ км.

Задача 10. Медный шарик радиусом $r = 1$ см с абсолютно черной поверхностью поместили в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика $T_0 = 300$ К. Через какое время его температура уменьшится в $n = 1{,}5$ раза? Удельная плотность меди $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c_{Cu} = 380$ Дж/(кг·К).

Дано:	**Решение.** Так как температура стенок сосуда близка к абсолютному нулю, то, согласно закону Стефана – Больцмана, стенка не излучает энергию. Поэтому медный шарик излучает тепловую энергию, не получая тепла от стенок сосуда.
$r = 10^{-2}$ м $T_0 = 300$ К $n = 1{,}5$ $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 $c_{Cu} = 380$ Дж/(кг·К) $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)	За время dt шарик, имеющий температуру T, теряет за счет теплового излучения энергию,
t – ?	

$$dW = SR_T dt = \sigma S T^4 dt, \qquad (1)$$

где $S = 4\pi r^2$ – площадь поверхности шарика; R_T – полная (интегральная) испускательная способность абсолютно черного тела.

В результате теплового излучения внутренняя энергия шарика за время dt уменьшается на

$$dQ = -mc_{Cu}dT, \qquad (2)$$

где $m = \rho V = \rho(4/3)\pi r^3$ – масса шарика; dT – изменение температуры шарика.

Учитывая, что $dW = dQ$, из (1) и (2) получим

$$dT = -\frac{mc_{Cu}}{\sigma S}\frac{dT}{T^4}. \qquad (3)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (3), получим ответ в алгебраической форме:

$$\int_0^t dt = -\frac{mc_{Cu}}{\sigma S}\int_{T_0}^{T_0/n}\frac{dT}{T^4};$$

$$t = -\frac{mc_{Cu}}{\sigma S}\left(-\frac{1}{3T^3}\right)\Bigg|_{T_0}^{T_0/n} = \frac{mc_{Cu}}{3\sigma S}\left(\frac{n^3}{T_0^3} - \frac{1}{T_0^3}\right) = \frac{mc_{Cu}}{3\sigma S T_0^3}(n^3 - 1);$$

$$t = \frac{\rho(4/3)\pi r^3 c_{Cu}}{3\sigma \cdot 4\pi r^2 T_0^3}(n^3 - 1) = \frac{\rho c_{Cu} r}{9\sigma \cdot T_0^3}(n^3 - 1);$$

$$t = \frac{8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 380 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 300^3}(1{,}5^3 - 1) = 5830 \text{ с} \approx 1{,}6 \text{ ч}.$$

Ответ: $t = 1{,}62$ ч.

Задача 11. Найти температуру T полностью ионизованной водородной плазмы плотностью $\rho = 0{,}10$ г/см^3, при которой давление $p_Т$ теплового излучения равно газокинетическому давлению $p_Г$ частиц плазмы. При высоких температурах вещества подчиняются уравнению состояния идеальных газов. Масса протона $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано:	**Решение.** Давление теплового излучения в водородной плазме равно:
$\rho = 100$ кг/м^3 $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$К^4) $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К $c = 3 \cdot 10^8$ м/с	$$p_\text{Т} = u/3,$$ где $u = 4\sigma T^4/c$ – объемная плотность энергии излучения. Таким образом, $$p_T = \frac{4\sigma T^4}{3c}. \qquad (1)$$
T – ?	

При высоких температурах водородная плазма представляет собой смесь протонов и свободных электронов.

Газокинетическое давление $p_\text{Г}$ частиц водородной плазмы равно сумме парциальных давлений протонов и электронов, т. е.

$$p_\text{Г} = p_p + p_e. \qquad (2)$$

Учитывая, что в плазме концентрация протонов n_p равна концентрации электронов n_e, можно записать:

$$p_p = p_e = n_p kT. \qquad (3)$$

Концентрация протонов

$$n_p = \rho_p/m_p. \qquad (4)$$

Плотность водородной плазмы

$$\rho = \rho_p + \rho_e = n_p m_p + n_p m_e.$$

Учитывая, что масса m_p протона много больше массы m_e электрона, имеем

$$\rho \approx n_p m_p = \rho_p. \qquad (5)$$

Решая с учетом (5) систему уравнений (2) – (4), получим выражение для газокинетического давления частиц водородной плазмы:

$$p_\text{Г} = p_p + p_e = 2\frac{\rho}{m_p}kT. \qquad (6)$$

Приравнивая правые части уравнений (1) и (6), найдем алгебраическое выражение для температуры водородной плазмы:

$$T = \sqrt[3]{\frac{3\rho kc}{2\sigma m_p}}; \qquad T = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 100 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}}} = 1{,}87 \cdot 10^7 \text{ К}.$$

Ответ: $T = 1{,}87 \cdot 10^7$ К.

Задача 12. Определить с помощью формулы Планка, во сколько раз возрастет спектральная интенсивность излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм при увеличении температуры абсолютно черного тела от $T_1 = 2000$ до $T_2 = 2300$ К.

Дано:	**Решение.** Формула Планка для спектральной испускательной способности абсолютно черного тела имеет вид
$\lambda = 6{\cdot}10^{-7}$ м $T_1 = 2000$ К $T_2 = 2300$ К $h = 6{,}63{\cdot}10^{-34}$ Дж·с $k = 1{,}38{\cdot}10^{-23}$ Дж/К $c = 3{\cdot}10^{8}$ м/с	{ EMBED Equation.3 $r_{\lambda,T} = \dfrac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\dfrac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$. Учтем, что спектральная интенсивность излучения $I_{\lambda,T}$ пропорциональна спектральной испускательной способности $r_{\lambda,T}$ абсолютно черного тела:
I_2/I_1 – ?	

$$I_{\lambda,T} = \beta r_{\lambda,T},$$

где β – некоторый коэффициент пропорциональности.

Тогда для отношения I_2/I_1 имеем

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\beta r_{\lambda,T_2}}{\beta r_{\lambda,T1}} = \frac{e^{hc/(\lambda kT_1)} - 1}{e^{hc/(\lambda kT_2)} - 1} = \frac{e^{\alpha/T_1} - 1}{e^{\alpha/T_2} - 1}, \qquad (1)$$

где $\alpha = hc/(\lambda k) = 6{,}63{\cdot}10^{-34}{\cdot}3{\cdot}10^{8}/(6{\cdot}10^{-7}{\cdot}1{,}38{\cdot}10^{-23}) = 2{,}4{\cdot}10^{4}$ К.

Подставляя в (1) значения температур, получим

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\exp(2{,}4\cdot 10^4/2000) - 1}{\exp(2{,}4\cdot 10^4/2300) - 1} \approx 4{,}8.$$

Ответ: $I_2/I_1 = 4{,}8$.

Примечание. Учитывая, что $\alpha >> T$, единицей в числителе и знаменателе выражения (1) можно пренебречь. Тогда выражение (1) существенно упрощается: $I_2/I_1 = \exp(\alpha/T_1 - \alpha/T_2) = 4{,}8$.

Задача 13. Замкнутая полость объемом $V = 1$ дм^3 заполнена тепловым излучением при температуре стенок $T = 1000$ К. Определите теплоемкость C_V теплового излучения.

Дано:	**Решение.** По определению
$V = 10^{-3}$ м^3 $T = 10^3$ К $\sigma = 5{,}67{\cdot}10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) $c = 3{\cdot}10^{8}$ м/с	$C_V = \left(\dfrac{dW}{dT}\right)_{V=\mathrm{const}} = \left(\dfrac{d(uV)}{dT}\right)_{V=\mathrm{const}}$, где u – объемная плотность теплового излучения полости при температуре стенок T.
C_V – ?	

$$C_V = \left(\frac{dW}{dT}\right)_{V=\mathrm{const}} = \left(\frac{d(uV)}{dt}\right)_{V=\mathrm{const}} \quad u = \frac{4R_T}{c} = \frac{4\sigma T^4}{c}.$$

Таким образом, $C_V = \dfrac{d}{dT}\left(\dfrac{4\sigma T^4}{c}\cdot V\right)_{V=\mathrm{const}} = \dfrac{16\sigma T^3}{c}V$;

$$C_V = \frac{16\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 1000^3\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^8} = 3\cdot 10^{-9}\ \text{Дж/К} = 3\ \text{нДж/К}.$$

Ответ: $C_V = 3$ нДж/К.

Задача 14. Слой вещества поглощает практически все фотоны солнечного спектра с энергией $h\nu_0 \geq 0{,}2$ эВ и полностью прозрачен для фотонов с меньшей энергией. Определить, какую долю солнечной энергии пропускает слой вещества. Считать спектр Солнца планковским с температурой $T = 6500$ К.

Дано:	**Решение.**
$h\nu_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-20}$ Дж $T = 6500$ К $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с	Формула Планка для испускательной способности абсолютно черного тела имеет вид:
$W_{\text{проп}}/W_{\text{пад}}$ – ?	

$$r_{\omega,T} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left[\hbar\omega/(kT)\right] - 1}$$

или

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Солнечную энергию $W_{\text{проп}}$, которую пропускает слой вещества, можно определить из выражения

$$W_{\text{проп}} = \beta \int_0^{\nu_0} r_{\nu,T} d\nu, \qquad (1)$$

где β – некоторый коэффициент пропорциональности, учитывающий геометрию облучения Солнцем слоя вещества.

Энергия, падающая на слой вещества, равна:

$$W_{\text{пад}} = \beta \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = \beta R_T = \beta \sigma T^4, \qquad (2)$$

где R_T – интегральная испускательная способность (энергетическая светимость) Солнца; σ – постоянная Стефана–Больцмана,

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}.$$

Тогда

$$W_{\text{пад}} = \beta \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = \beta \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}. \qquad (3)$$

В области малых частот формулу Планка можно заменить формулой Рэлея – Джинса для упрощения интегрирования:

$$W_{\text{проп}} = \beta \int_0^{\nu_0} \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT d\nu = \frac{2\pi\beta kT}{c^2} \int_0^{\nu_0} \nu^2 d\nu = \frac{2\pi\beta kT}{c^2} \cdot \frac{\nu_0^2}{3}. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) определим искомую величину:

$$\frac{W_{\text{проп}}}{W_{\text{пад}}} = \frac{5}{\pi^4} \cdot \left(\frac{h\nu_0}{kT}\right)^3 = \frac{5}{3{,}14^4} \cdot \left(\frac{3{,}2 \cdot 10^{-20}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 6500}\right)^3 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $W_{\text{проп}}/W_{\text{пад}} = 0{,}23$ %.

Задача 15. Имеются две полости *1* и *2* с малыми отверстиями одинакового радиуса r = 5 мм и абсолютно отражающими наружными поверхностями. Полости отверстиями обращены друг к другу, причем расстояние между этими отверстиями l = 100 мм. В полости *1* поддерживается температура T_1 = 1250 К. Найти установившуюся температуру в полости *2*. Иметь в виду, что абсолютно черное тело с плоской излучающей поверхностью является равноярким косинусоидальным излучателем, для которого справедливо $R_T = \pi L_т$, где L_T – яркость поверхности излучателя.

Дано:
$r = 5\cdot10^{-3}$ м
$l = 0{,}1$ м
T_1 = 1250 К
$r_1 = r_2 = r$
$S_1 = S_2 = S$
T_2 – ?

Решение. Поток энергии $d\Phi_\alpha$, излучаемый равнояркой площадкой S в единицу времени в направлении α, равен произведению энергетической яркости $L_т$ поверхности, проекции площади поверхности $S\cdot\cos\alpha$ на выбранное направление (косинусоидальный излучатель) и телесного угла $d\Omega$, в пределах которого распространяется этот поток (рис. 5.2):

$$d\Phi_\alpha = L_т\cdot S\cdot\cos\alpha\cdot d\Omega, \qquad (1)$$

где $d\Omega = 2\pi\cdot\sin\alpha\, d\alpha$ – величина телесного угла, ограниченного конусами с углом α и $(\alpha + d\alpha)$.

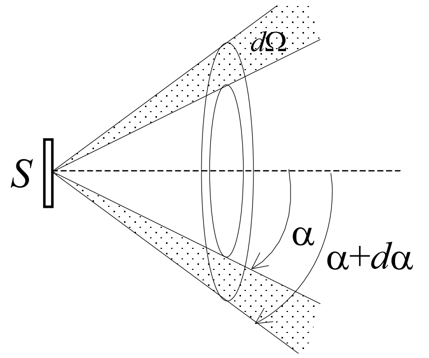

Рис. 5.2

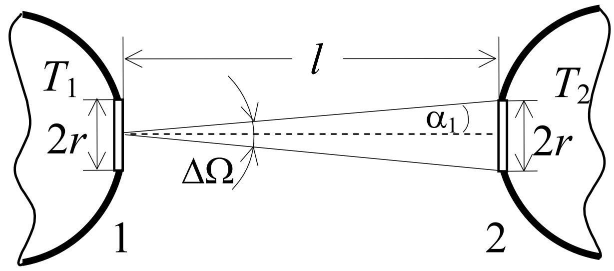

Рис. 5.3

Поток энергии излучения Φ, испускаемый поверхностью S в конусе от 0 до α (см. рис. 5.2), равен:

$$\Phi = 2\pi L_T S\int_0^\alpha \cos\alpha\sin\alpha d\alpha = 2R_T S\left.\frac{\sin^2\alpha}{2}\right|_0^\alpha.$$

С учетом того, что $r \ll l$, $\sin\alpha_1 \approx \alpha_1 \approx r/l$, определим поток энергии Φ_1 излучения, проникающего в полость 2 из полости 1 (рис. 5.3):

$$\Phi_1 = 2R_{T_1} S\left.\frac{\sin^2\alpha}{2}\right|_0^{\alpha_1} = 2R_{T_1} S\left.\frac{\sin^2\alpha}{2}\right|_0^{r/l} = \sigma T_1^4 S\frac{r^2}{l^2}. \qquad (2)$$

Поток энергии излучения $Ф_2$, выходящей из полости 2, в конусе от 0 до $\pi/2$ равен:

$$Ф_2 = 2R_{T_2} S \frac{\sin^2 \alpha}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \sigma T_2^4 S. \qquad (3)$$

При тепловом равновесии поток энергии излучения $Ф_1$, проникающего в полость 2, равен потоку энергии излучения $Ф_2$, выходящей из полости 2.

Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), найдем искомую величину:

$$T_2 = T_1\sqrt{r/l} = 1250 \cdot \sqrt{5 \cdot 10^{-3}/0{,}1} \approx 280 \text{ К}.$$

Ответ: T_2 = 280 К.

Примечание. Из приведенного решения [формула (3)] видно, что для косинусоидального излучателя весь поток энергии излучения пропорционален площади поверхности абсолютно черного тела:

$$Ф = R_T S = \sigma T^4 S.$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1.1. Поток энергии, излучаемый из смотрового окна плавильной печи, равен Ф = 36 Вт. Определить температуру T печи, если площадь отверстия окна S = 8 см^2.

Ответ: $T = \sqrt[4]{Ф/(\sigma S)} = 944$ К.

5.1.2. Определить энергию, излучаемую за t = 5 мин из смотрового окошка площадью отверстия S = 8 см^2 плавильной печи, если ее температура t = 927 °С.

Ответ: $W = \sigma T^4 S t = 28{,}2$ кДж .

5.1.3. Найти температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью S = 6,1 см^2 имеет мощность P = 34,6 Вт. Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: $T = \sqrt[4]{P/(\sigma S)} = 1000$ К.

5.1.4. Какую мощность P излучения имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца T = 5800 К, радиус $R_С = 7 \cdot 10^8$ м.

Ответ: $P = 4\pi R_C^2 \sigma T^4 = 3{,}95 \cdot 10^{26}$ Вт .

5.1.5. Мощность P излучения раскаленной металлической поверхности 0,67 кВт. Температура поверхности T = 2500 К, ее площадь S = 10 см^2. Какую мощность $P_{ачт}$ излучения имела бы эта поверхность, если бы она была абсолютно черной? Найти отношение энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Ответ: $P_{ачт} = \sigma T^4 S = 2{,}2$ кВт ; $P/P_{ачт}$ = 0,3.

5.1.6. Температура верхних слоев звезды Сириус равна $T = 10^4$ К. Определить поток энергии, излучаемый с поверхности площадью $S = 5$ м^2 этой звезды. Излучение считать близким к излучению черного тела.

Ответ: $P = \sigma T^4 S = 2{,}8$ ГВт.

5.1.7. Определить относительное увеличение $\Delta R_T/R_T$ энергетической светимости абсолютно черного тела при увеличении его температуры на $\delta = 1$ %.

Ответ: $\Delta R_T/R_T = (1+\delta)^4 - 1 = 0{,}0406 = 4{,}06\%$.

5.1.8. Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру абсолютно черного тела (T_2/T_1), чтобы его энергетическая светимость R_T возросла в 2 раза?

Ответ: в $T_2/T_1 = \sqrt[4]{R_{T_2}/R_{T_1}} = 1{,}19$ раза.

5.1.9. Какую энергетическую светимость R имеет затвердевающий свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры равно $A_T = 0{,}6$. Температура плавления свинца $t = 327$ °C.

Ответ: $R = A_T \sigma T^4 = 4{,}41$ кВт/м^2.

5.1.10. При какой температуре t интегральная испускательная способность абсолютно черного тела равна $R = 10$ кВт/м^2?

Ответ: $t = \sqrt[4]{R/\sigma} - 273 = 375$ °C.

5.1.11. Температура абсолютно черного тела изменилась от $T_1 = 1000$ K до $T_2 = 3000$ K. Во сколько раз увеличилась при этом его энергетическая светимость R?

Ответ: в $R_{T_2}/R_{T_1} = (T_2/T_1)^4 = 81$ раз.

5.1.12. Определить, во сколько раз необходимо уменьшить термодинамическую температуру абсолютно черного тела, чтобы его энергетическая светимость уменьшилась в 16 раз.

Ответ: в $T_2/T_1 = \sqrt[4]{R_{T_2}/R_{T_1}} = 2$ раза.

5.1.13. Эталон силы света представляет собой полый (излучающий волны всех длин) излучатель с излучающей поверхностью $S = 0{,}5305$ мм^2, который имеет температуру затвердевания платины $t = 1063$ °C. Определить мощность излучателя.

Ответ: $P = \sigma(t + 273)^4 S = 95{,}8$ мВт.

5.1.14. Определить температуру абсолютно черного тела, при которой оно излучает поток энергии Ф, равный 20 кВт с площади $S = 1$ м^2.

Ответ: $T = \sqrt[4]{\Phi/(\sigma S)} = 771$ K.

5.1.15. С поверхности сажи площадью $S = 2$ см^2 при температуре $T = 400$ К за время $t = 5$ мин излучается энергия $W = 83$ Дж. Определить интегральную поглощательную способность $A_\text{Т}$ сажи.

Ответ: $A_T = W/\left(\sigma T^4 St\right) = 0{,}953.$

5.1.16. Муфельная печь потребляет мощность $P = 1$ кВт. Температура ее внутренней поверхности при открытом отверстии площадью $S = 25$ см^2 равна $T = 1200$ К. Считая, что отверстие печи излучает как абсолютно черное тело, определить, какая часть δ мощности излучается открытым отверстием печи.

Ответ: $\delta = \sigma T^4 S/P = 0{,}29.$

5.1.17. Температура T внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии площадью $S = 30$ см^2 равна 1300 К. Потребляемая печью мощность P составляет 1,5 кВт. Принимая, что отверстие печи излучает как абсолютно черное тело, определить, какая часть η потребляемой мощности рассеивается внешними стенками печи.

Ответ: $\eta = 1 - \sigma T^4 S/P = 0{,}676.$

5.1.18. Принимая интегральную поглощательную способность $A_\text{Т}$ угля при температуре $T = 600$ К равной 0,8, определить: 1) энергетическую светимость $R_\text{С}$ угля; 2) энергию W, излучаемую с поверхности угля площадью $S = 5$ см^2 за время $t = 10$ мин.

Ответ: $R_\text{С} = A_T \sigma T^4 = 5{,}88$ кВт/м^2; $W = R_\text{С} St = 1{,}76$ кДж.

5.1.19. Металлическая поверхность площадью $S = 15$ см^2, нагретая до температуры $T = 3000$ К, излучает за $t = 1$ мин $W = 100$ кДж. Определить: 1) энергию $W_\text{ачт}$, излучаемую этой поверхностью за то же время, считая её абсолютно черным телом; 2) отношение энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре – $R/R_\text{ачт}$.

Ответ: $W_\text{ачт} = \sigma T^4 St = 413$ кДж; $R/R_\text{ачт} = W/W_\text{ачт} = 0{,}242.$

5.1.20. Мощность P излучения металлического кубика объемом $V = 0{,}027$ м^3 при некоторой температуре равна 1 кВт. Найти эту температуру, если коэффициент поглощения поверхности кубика $A_T = 0{,}6$.

Ответ: $T = \sqrt[4]{P/\left(A_T \sigma \cdot 6V^{2/3}\right)} = 483$ К.

5.1.21. Мощность P излучения шара радиусом $R = 10$ см при некоторой постоянной температуре T равна 1 кВт. Найти эту температуру, считая шар серым телом с коэффициентом поглощения $A_T = 0{,}25$.

Ответ: $T = \sqrt[4]{P/\left(A_T \sigma \cdot 4\pi R^2\right)} = 866$ К.

5.1.22. Определить температуру T тела, при которой оно при температуре окружающей среды t_0 = 23 °С излучало энергии в η = 10 раз больше, чем поглощало.

Ответ: $T = \sqrt[4]{\eta} \cdot T_0 = 533$ К.

5.1.23. Температура вольфрамовой спирали в P = 25-ваттной электрической лампочке T = 2450 К. Найти площадь S излучающей поверхности спирали, считая, что при установившемся равновесии все выделяющееся в спирали тепло теряется в результате излучения. Поверхность спирали принять в качестве серой с коэффициентом поглощения A_T = 0,3.

Ответ: $S = P\Big/\left(A_T \sigma T^4\right) = 0{,}4$ см^2.

5.1.24. Внутри шарика, изготовленного из белого вещества с коэффициентом поглощения A_{T_1} = 0,10, вмонтирован нагреватель, поддерживающий температуру поверхности шарика равной T_1 = 1000 К. На поверхность шарика нанесли тонкий слой сажи с коэффициентом поглощения A_{T_2} = 0,96. Определите вновь установившуюся температуру T_2 зачерненной поверхности шарика при неизменной мощности нагревателя. Теплопроводность воздуха не учитывать.

Ответ: $T_2 = \sqrt[4]{A_{T_1} / A_{T_2}} \cdot T_1 = 568$ К.

5.1.25. Считая шарик абсолютно черным телом, определить мощность, необходимую для поддержания температуры шарика T = 1726 К неизменной, если площадь его поверхности S = 0,5 см^2. Чему будет равна эта мощность, если на поверхность шарика нанести тонкий слой с коэффициентом поглощения A_T = 0,12? Теплопроводность воздуха не учитывать.

Ответ: $P_{\text{ачт}} = \sigma T^4 S = 25{,}2$ Вт; $P = A_T P_{\text{ачт}} = 3$ Вт.

5.2.1. Для вольфрамовой нити при температуре T = 3500 К поглощательная способность A_T = 0,35. Определить радиационную температуру нити.

Ответ: $T_p = \sqrt[4]{A_T} \cdot T = 2692$ К.

5.2.2. Определить температуру T абсолютно черного тела, при которой максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на красную границу видимого спектра (λ_1 = 760 нм); на фиолетовую (λ_2 = 380 нм).

Ответ: $T_1 = b/\lambda_1$ = 3,82 кК; T_2 = 7,63 кК.

5.2.3. Определить мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела, приходящегося на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda$ = 5 нм около максимума спектральной плотности энергетической светимости, если температура абсолютно черного тела T = 2500 К.

Ответ: $P = CT^5\Delta\lambda$ = 6,35 кВт/м^2.

5.2.4. Какую энергетическую светимость имеет абсолютно черное тело, если максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны λ = 484 нм?

Ответ: $R_T = \sigma\left(b/\lambda\right)^4 = 73$ МВт/м^2.

5.2.5. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если источником света служит: а) спираль электрической лампочки (T_1 = 2900 К); б) поверхность Солнца (T_2 = 5800 К); в) атомная бомба в момент взрыва ($T_3 = 10^7$ К)? Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: $\lambda_1 = b/T_1$ = 1 мкм; λ_2 = 500 нм; λ_3 = 290 пм.

5.2.6. Определить, как и во сколько раз изменится мощность P излучения абсолютно черного тела, если длина волны, соответствующая максимуму его спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с λ_1 = 720 нм до λ_2 = 400 нм.

Ответ: увеличится в $P_2/P_1 = (\lambda_1/\lambda_2)^4$ = 10,5 раза.

5.2.7. При нагревании абсолютно черного тела длина волны λ, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от λ_1 = 690 нм до λ_2 = 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

Ответ: в $P_2/P_1 = (\lambda_1/\lambda_2)^4$ = 3,6 раза.

5.2.8. На какую длину волны λ приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, имеющего температуру, равную температуре человеческого тела (t = 37 °C)?

Ответ: $\lambda = b/(t + 273)$ = 9,35 мкм.

5.2.9. При какой температуре давление теплового излучения p = 1 атм?

Ответ: $T = \sqrt[4]{3cp_T/\left(4\sigma\right)} = 1{,}4\cdot10^5$ К.

5.2.10. Максимум спектральной плотности энергетической светимости яркой звезды Арктур приходится на длину волны λ_{max} = 580 нм. Принимая, что звезда Арктур излучает как абсолютно черное тело, определить температуру T поверхности звезды.

Ответ: $T = b/\lambda$ = 5 кК.

5.2.11. Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела равно $4{,}1\cdot10^{11}$ Вт/м^3. На какую длину оно приходится?

Ответ: $\lambda = b\sqrt[5]{C/\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max}} = 1{,}45$ мкм.

5.2.12. Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости серого тела с коэффициентом поглощения A_T = 0,5 приходится на длину волны λ_{max} = 967 нм. Определить температуру T этого тела.

Ответ: $T = b/\lambda_{max}$ = 3 кК.

5.2.13. Абсолютно черное тело находится при температуре T_1 = 3 кК. При остывании тела максимум спектральной плотности энергетической светимости сместился на $\Delta\lambda$ = 8 мкм. Определить температуру T_2, до которой тело охладилось.

Ответ: $T_2 = b/(b/T_1 + \Delta\lambda)$ = 323 К.

5.2.14. Температура T абсолютно черного тела изменилась от T_1 = 1000 до T_2 = 3000 К. На сколько изменилась длина волны λ_{max}, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости тела?

Ответ: уменьш. на $\Delta\lambda = b(1/T_1 - 1/T_2)$ = 1,93 мкм.

5.2.15. Абсолютно черное тело имеет температуру T_1 = 2900 К. В результате остывания тела длина волны λ_{max}, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости тела, сместилась на $\Delta\lambda$ = 9 мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

Ответ: $T_2 = \dfrac{1}{1/T_1 + \Delta\lambda/b} = 290\ \text{К}$.

5.2.16. Температура абсолютно черного тела равна T = 2000 К. Определите длину волны $\lambda_{мах}$, соответствующую максимуму спектральной плотности энергетической светимости тела. Рассчитайте энергию W, излучаемую за 1 секунду площадью S = 5 см^2 в интервале длин волн $\lambda_{max} \pm \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ = 5 нм.

Ответ: $\lambda_{max} = b/T$ = 1450 нм, $W = 2\Delta\lambda S{\cdot}CT^5$ = 2,08 Вт.

5.2.17. Энергетическая светимость R_T серого тела с коэффициентом поглощения A_T = 0,4 равна 40 кВт/м^2. Определить длину волны λ_{max} максимальной спектральной плотности энергетической светимости серого тела.

Ответ: $\lambda_{max} = b \cdot \sqrt[4]{A_T\sigma/R_T} = 2{,}52$ мкм.

5.2.18. Энергетическая светимость абсолютно черного тела 3 Вт/см^2. Определить длину волны максимальной спектральной плотности энергетической светимости тела.

Ответ: $\lambda_{max} = b \cdot \sqrt[4]{\sigma/R_T} = 3{,}4$ мкм.

5.2.19. Температура абсолютно черного тела равна T = 5800 К. Определить: 1) спектральную плотность энергетической светимости для длины волны λ = 500 нм; 2) энергию, излучаемую с S = 1 м^2 поверхности в интервале длин волн от λ_1 = 490 нм до λ_2 = 510 нм.

Ответ: $(r_{\lambda,T})_{max} = CT^5 = 8{,}53 \cdot 10^{13}$ Вт/м^3;
$W = (\lambda_2 - \lambda_1)S{\cdot}(r_{\lambda,T})_{max} = 1{,}7 \cdot 10^6$ Вт/м^2.

5.2.20. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум спектральной плотности энергетической светимости сместился с $\lambda_1 = 2400$ до $\lambda_2 = 800$ нм. Как и во сколько раз изменились энергетическая светимость тела и максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости?

Ответ: в $R_2/R_1 = (\lambda_1/\lambda_2)^4 = 81$ раз; в $(r_{\lambda 2})_m/(r_{\lambda 1})_m = (\lambda_1/\lambda_2)^5 = 243$ раза.

5.2.21. При увеличении температуры T абсолютно черного тела в два раза ($T_2 = 2T_1$) длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400$ нм. Определить начальную и конечные температуры T_1 и T_2 тела.

Ответ: $T_1 = b/(2\Delta\lambda) = 3625$ K; $T_2 = 2T_1 = 7250$ K.

5.2.22. Абсолютно черное тело нагрели от температуры $T_1 = 600$ K до $T_2 = 2400$ K. Определить: 1) во сколько раз увеличилась его энергетическая светимость; 2) как изменилась длина волны λ_{max}, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости тела.

Ответ: увеличится в $R_2/R_1 = (T_2/T_1)^4 = 256$ раз;
уменьшится на $\Delta\lambda = b(1/T_1 - 1/T_2) = 3{,}62$ мкм.

5.2.23. При переходе от температуры T_1 к температуре T_2 площадь, ограниченная графиком функции распределения плотности энергии равновесного излучения по длинам волн, увеличивается в 16 раз. Как изменится при этом длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум испускательной способности абсолютно черного тела?

Ответ: уменьш. в $\lambda_{1_{max}}/\lambda_{2_{max}} = \sqrt[4]{R_2/R_1} = 2$ раза.

5.2.24. Абсолютно черное тело находилось при температуре $T_1 = 725$ K. При увеличении температуры тела площадь, ограниченная графиком функции распределения плотности энергии равновесного излучения по длинам волн, увеличилась в 256 раз. Определите длину волны λ_2, на которую приходится максимум испускательной способности тела при новой температуре.

Ответ: $\lambda_{2\max} = b \cdot \sqrt[4]{R_1/R_2}/T_1 = 1$ мкм.

5.2.25. Определить световое давление в центре атомной бомбы в момент её взрыва, предполагая, что излучение – равновесное. Температура в центре бомбы $T = 10^8$ K.

Ответ: $p_T = 4\sigma T^4/(3c) = 2{,}5 \cdot 10^{16}$ Па $= 2{,}5 \cdot 10^{11}$ атм.

5.3.1. В настоящее время мощность всех промышленных источников энергии на Земле составляет $P = 10^{13}$ Вт, в то время как средняя мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, $P_{ср} = 10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят промышленные источники? Оценить максимально значение мощности P_{max} всех промышленных источников энергии, если предельный перегрев, допустимый из экологических соображений, составляет ΔT_{max} = 0,1 К. Коэффициент поглощения A_T Земли принять равным 0,55. При решении воспользуйтесь отношением $(1 \pm x)^{1/4} \approx 1 \pm x/4$, если $x << 1$.

Ответ: $\Delta T \approx \dfrac{P}{4 \cdot \sqrt[4]{4\pi R_З^2 A_T \sigma P_{ср}^3}} = 7 \cdot 10^{-3}$ К;

$P_{max} \approx 4\Delta T_{max} \cdot \sqrt[4]{4\pi R_З^2 A_T \sigma P_{ср}^3} = 1{,}42 \cdot 10^{14}$ Вт.

5.3.2. Металлический шар радиусом r = 1 см и теплоемкостью C = 14 Дж/К при температуре T_0 = 1200 К выброшен в межпланетное пространство. Через какое время температура шара уменьшится вдвое (η = 2), если коэффициент поглощения поверхности шара $A_Т$ = 0,4? Влиянием солнечного излучения пренебречь.

Ответ: через $\tau = \dfrac{(\eta^3 - 1)C}{12\pi r^2 A_T \sigma T_0^3} = 663$ с $= 11$ мин.

5.3.3. Вольфрамовая нить диаметром d_1 = 0,1 мм соединена последовательно с другой вольфрамовой нитью. Нити нагреваются в вакууме электрическим током, причем первая нить имеет температуру T_1 = 2000 К, а вторая T_2 = 3000 К. Каков диаметр d_2 второй нити?

Ответ: $d_2 = d_1 (T_1/T_2)^{4/3} = 58{,}2$ мкм.

5.3.4. Зная значение солнечной постоянной для Земли, найти значение солнечной постоянной $C_М$ для Марса. Солнечная постоянная для Земли $C_З$ = 1,4 кДж/(м^2·с). Солнечная постоянная равна энергии излучения Солнца, падающей в единицу времени на единицу поверхности, расположенной перпендикулярно потоку энергии вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца. Расстояние от Солнца до Земли $L_З = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м, от Солнца до Марса – $L_М = 2{,}28 \cdot 10^{11}$ м.

Ответ: $C_М = C_З(L_З/L_М)^2$ = 606 Вт/м^2.

5.3.5. Считая, что атмосфера поглощает η = 10 % лучистой энергии, посылаемой Солнцем, найти мощность излучения, получаемую от Солнца горизонтальным участком Земли площадью S = 1 га. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 60°$. Солнечная постоянная C = 1,4 кВт/м^2.

Ответ: $P = (1 - \eta)CS\sin\varphi$ = 10,9 МВт.

5.3.6. Пренебрегая потерями на теплопроводность, подсчитать мощность электрического тока, необходимого для накаливания нити диаметром d = 1 мм и длиной l = 20 см до температуры T = 3500 К. Считать, что нить излучает, подчиняясь закону Стефана–Больцмана.

Ответ: $P = \sigma T^4 \cdot \pi d l$ = 5,35 кВт.

5.3.7. Определить установившуюся температуру зачерненной тонкой металлической пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца. Солнечная постоянная C = 1,4 кДж/(м^2·с). Солнечная постоянная равна энергии излучения Солнца, падающей в единицу времени на единицу поверхности, расположенной перпендикулярно потоку энергии вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца.

Ответ: $T = \sqrt[4]{C/(2\sigma)} = 333$ К.

5.3.8. Одна сторона тонкого плоского металлического экрана покрыта отражающим слоем с коэффициентом поглощения A_1 = 0,05, а вторая – платиновой чернью с коэффициентом поглощения A_2 = 0,95. Определите температуру экрана (в °С) в случае, когда он, находясь на околоземной орбите, повернут к Солнцу: а) отражающей поверхностью; б) поглощающей поверхностью. Солнечная постоянная вблизи Земли C = 1,4 кДж/(м^2·с).

Ответ: $t_1 = \sqrt[4]{\dfrac{A_1}{A_1 + A_2}\dfrac{C}{\sigma}} - 273 = -86\ ^\circ\text{C}$; $t_2 = \sqrt[4]{\dfrac{A_2}{A_1 + A_2}\dfrac{C}{\sigma}} - 273 = 118\ ^\circ\text{C}$.

5.3.9. На сколько уменьшится масса Солнца за год вследствие излучения? За какое время масса Солнца уменьшится вдвое? Температура поверхности Солнца T = 5800 К. Излучение Солнца считать постоянным и излучающим как черное тело. Радиус Солнца R = 6,95·10^8 м. Масса Солнца M = 2·10^{30} кг.

Ответ: $m = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 t/c^2 = 1{,}36\cdot 10^{17}$ кг;
$\tau = Mc^2/(8\pi R^2\sigma T^4) = 7{,}33\cdot 10^{12}$ лет.

5.3.10. Поверхность тела нагрета до температуры T = 1000 К. Затем одна половина его поверхности нагревается на ΔT = 100 К, другая половина его поверхности охлаждается на ΔT = 100 К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость поверхности этого тела?

Ответ: в $\dfrac{P_1}{P} = \dfrac{(T + \Delta T)^4 + (T + \Delta T)^4}{2T^4} = 1{,}06$ раза.

5.3.11. Поверхность тела нагрета до температуры T = 1000 К. Затем одна половина его поверхности нагревается на ΔT = 200 К, другая половина его поверхности охлаждается на ΔT = 200 К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость поверхности этого тела?

Ответ: в $\dfrac{P_1}{P} = \dfrac{(T + \Delta T)^4 + (T + \Delta T)^4}{2T^4} = 1{,}24$ раза.

5.3.12. Считая, что тепловые потери обусловлены только излучением, определить, какую мощность необходимо подводить к свинцовому шарику диаметром d = 2 см, чтобы при температуры окружающей среды

t_0 = 13 °С поддерживать его температуру равной t = 17 °С. Принять поглощательную способность свинца $A_Т$ = 0,6.

Ответ: $P = A_T \sigma \pi d^2 \left(T^4 - T_0^4\right) = 16{,}3$ мВт.

5.3.13. Какую мощность надо подводить к зачерненному металлическому шарику (абсолютно черное тело) диаметром d = 4 см, чтобы поддерживать его температуру на ΔT = 27 К выше температуры окружающей среды? Температура окружающей среды T = 293 К. Считать, что тепло теряется вследствие излучения.

Ответ: $P = \sigma \pi d^2 \left[\left(T + \Delta T\right)^4 - T^4\right] = 0{,}89$ Вт.

5.3.14. Определить силу тока, протекающего по вольфрамовой проволоке диаметром d = 0,8 мм, температура которой в вакууме поддерживается постоянной и равной t = 2800 °С. Поверхность проволоки принять в качестве серой с поглощательной способностью $A_Т$ = 0,343. Удельное сопротивление проволоки при данной температуре ρ = 9,2·10^{-5} Ом·см. Температура окружающей проволоку среды t_0 = 17 °С.

Ответ: $I = \sqrt{\dfrac{A_T \sigma}{4\rho}\left[\left(t + 273\right)^4 - \left(t_0 + 273\right)^4\right] \cdot \pi^2 d^3} = 48{,}8\,\text{А};$

при $t_0 \ll t$ $I \approx \dfrac{\left(t + 273\right)^2 \pi}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{A_T \sigma d^3}{\rho}} = 48{,}8\,\text{А}.$

5.3.15. Считая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело с температурой поверхности T = 6000 К, определить объемную плотность энергии u солнечного излучения на верхней границе земной атмосферы. Радиус Солнца R = 6,95·10^8 м; расстояние его от Земли $L_З$ = 1,5·10^{11} м.

Ответ: $u = 4C/c = 4\sigma T^4 \left(R/L_З\right)^2 / c = 21{,}1$ мкДж / м^3.

5.3.16. Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке d = 0,3 мм, длина спирали l = 5 см. При включении лампочки в сеть напряжением U = 127 В через лампочку течет ток I = 0,31 А. Найти температуру T спирали. Считать, что при установившемся равновесии все выделяющееся в спирали тепло теряется в результате излучения. Поверхность проволоки принять в качестве серой с поглощательной способностью $A_Т$ = 0,31.

Ответ: $T = \sqrt[4]{IU/\left(A_T \sigma \cdot \pi d l\right)} = 2630$ К.

5.3.17. Газообразный неон находится в замкнутом сосуде с постоянным объемом в равновесии с тепловым излучением. При каком давлении p неона его теплоемкость и теплоемкость теплового излучения в том же объеме при T = 500 К сравняются?

Ответ: $p_{\text{Ne}} = 32\sigma T^4 / \left(3c\right) = 1{,}28 \cdot 10^{-4}$ Па $= 128$ мкПа.

5.3.18. В черный тонкостенный металлический сосуд, имеющий форму куба, налит m = 1 кг воды, нагретой до t_0 = 50 °С. Определите время τ остывания сосуда до t_1 = 10 °С, если он помещен в черную полость, температура стенок которой поддерживается близкой к абсолютному нулю, а вода заполняет весь объем сосуда. Удельная теплоемкость воды $c_в$ = 4,2 кДж/(кг·К); $\rho = 10^3$ кг/м^3 – плотность воды.

Ответ: $\tau = \dfrac{c_в \sqrt[3]{m\rho^2}}{18\sigma} \cdot \left(\dfrac{1}{T_1^3} - \dfrac{1}{T_0^3} \right) = 1,65$ ч.

5.3.19. На корпусе космической лаборатории, летящей вокруг Солнца по круговой орбите, радиус R которой равен $1,5 \cdot 10^{11}$ м, установлено устройство, моделирующее абсолютно черное тело. Наружная поверхность оболочки этого устройства является абсолютно отражающей. Небольшое отверстие в оболочке все время обращено к Солнцу. Измерения показали, что внутри устройства установилась равновесная температура $T_Р$ = 401,6 К. Какова средняя температура $T_С$ поверхности Солнца? Радиус r Солнца принять равным $6,95 \cdot 10^8$ м. Теплообменом через крепление устройства к корпусу лаборатории пренебречь.

Ответ: $T_C = T_Р \sqrt{R/r} = 5900$ К.

5.3.20. Имеются две полости 1 и 2 с малыми отверстиями радиусами r_1 и r_2 и абсолютно отражающими наружными поверхностями. Полости отверстиями обращены друг к другу, причем расстояние между этими отверстиями l ($l >> r_1$ и r_2). В полости 1 поддерживается температура T_1. Докажите, что установившееся значение температуры T_2 в полости 2 не зависит от величины радиуса r_2 отверстия в этой полости. Иметь в виду, что абсолютно черное тело с *плоской излучающей поверхностью* является косинусоидальным излучателем.

Ответ: $T_2 = T_1 \sqrt{r_1/l}$.

5.3.21. Вселенная, возраст которой $t_1 = 10^{10}$ лет, заполнена равновесным реликтовым излучением, температура которого в настоящее время равна $T_1 \approx 3$ К. Начиная с эпохи, когда его температура составляла $T_0 \approx 3000$ К и образовались нейтральные атомы, излучение слабо взаимодействовало с веществом, расширяясь вместе со Вселенной. Оценить возраст Вселенной к моменту образования нейтральных атомов. Скорость расширения Вселенной считать постоянной.

Ответ: $t_0 = t_1 \left(T_1/T_0 \right)^{4/3} = 10^6$ лет.

5.3.22. При какой концентрации n молекул газа газокинетическое давление $p_Г$ равно давлению $p_Т$ теплового излучения при той же температуре T = 300 К?

Ответ: $n = 4\sigma T^3 / (3kc) = 4,9 \cdot 10^{14}$ м$^{-3}$.

5.3.23. Слой вещества пропускает практически все фотоны солнечного спектра с энергией $h\nu_0 \geq 0{,}15$ эВ и полностью поглощает фотоны с меньшей энергией. Определить, какую долю η солнечной энергии поглощает слой вещества. Считать спектр Солнца планковским с температурой $T = 6000$ К.

Ответ: при $h\nu_0 \ll kT$ $\eta = \dfrac{2\pi k\left(h\nu_0\right)^3}{3c^2h^3\sigma T^3} = 1{,}25\cdot 10^{-3} = 0{,}125$ %.

5.3.24. В закрытом сосуде находится идеальный одноатомный газ с концентрацией молекул $n = 2{,}7\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. При какой температуре объемная плотность кинетической энергии молекул будет равна объемной плотности u равновесного теплового излучения при той же температуре?

Ответ: $T = \sqrt[3]{3kcn/\left(8\sigma\right)} \approx 9\cdot 10^5$ К.

5.3.25. Черное тело радиусом $r = 10$ см при температуре T_r окружено зачерненной с обеих сторон тонкой оболочкой радиусом $R = 20$ см. Найти, во сколько раз увеличится скорость охлаждения тела (W_r/W_R), если радиационный экран удалить. Потерь, связанных с теплопроводностью, нет.

Ответ: $(W_r/W_R) = (R^2 + r^2)/R^2 = 1{,}25$.

6. ФОТОЭФФЕКТ. ФОТОНЫ. ДАВЛЕНИЕ СВЕТА. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

Основные формулы и обозначения

Мощность излучения (поглощения) или поток излучения

$$\Phi_e = \frac{W}{t},$$

где W – излученная источником за время t энергия; $[W]$ = Дж (джоуль). Если мощность изменяется со временем, то

$$\Phi_e = \frac{dW}{dt}; \quad [\Phi_e] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт (ватт)}.$$

Энергетическая освещенность (или поверхностная плотность потока излучения) в точке поверхности:

$$E_e = \frac{\Phi_e}{\Delta S}; \qquad [E_e] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},$$

где Φ_e – световой поток излучения, падающий на малый элемент поверхности ΔS, содержащий рассматриваемую точку.

Сила света источника

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}.$$

Здесь Φ – световой поток излучения источника; Ω – телесный угол, в пределах которого распространяется излучение; $[I]$ = кд (кандела); $[\Omega]$ = ср (стерадиан); $\Phi = I\Omega$; $[\Phi]$ = кд·ср = лм (люмен).

Телесный угол $\Omega = S/r^2$, здесь r – расстояние от источника света до освещаемой поверхности S, соответствующей Ω. В направлении, составляющем угол α с нормалью **n** к равнояркой излучающей поверхности, сила света равна $I_0 \cdot \cos\alpha$, где I_0 – сила света по направлению нормали к поверхности.

Яркость

$$B = I/S_{\text{ист}}; \quad [B] = \text{кд/м}^2,$$

где $S_{\text{ист}}$ – площадь светящейся поверхности.

Световая энергия

$$Q = \Phi \cdot t; \quad [Q] = \text{лм·с (люмен·секунда)}.$$

Освещенность поверхности (или облучённость) – фотометрическая величина, отражающая субъективное восприятие света человеком,

$$E = \frac{\Phi}{S}; \quad [E] = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} = \text{лк (люкс)}.$$

$$E=\frac{I\Omega}{S}=\frac{IS}{r^2S}=\frac{I}{r^2}, \qquad (1а)$$

а при наклонном падении лучей

$$E=\frac{I\cdot\cos\alpha}{r^2}, \qquad (1б)$$

где α – угол между направлением падения световых лучей на поверхность и нормалью к этой поверхности.

Формулы 1а и 1б справедливы, если размеры источника света малы по сравнению с его удалением r от освещаемой поверхности .

Фотоэффект

Уравнение А. Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A_{вых} + T_{max},$$

где $h\nu$ – квант энергии, получаемой электроном; $A_{вых}$ – работа выхода электрона из вещества; T_{max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов в нерелятивистском (а) и релятивистском (б) случаях выражается различными формулами:

а) если $h\nu < 50$ кэВ, то $T_{max}=\frac{1}{2}m_0 v_{max}^2$, где m_0 – масса покоя электрона;

б) если $h\nu \geq 50$ кэВ, то

$$T_{max}=\left(m-m_0\right)c^2 \text{ или } T_{max}=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right),$$

где $\beta = v/c$; v – скорость электрона; c – скорость света в вакууме.

Фотоны. Давление света

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}=\hbar\omega,$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота, $\hbar = h/(2\pi)$.

Импульс фотона

$$p=\frac{\varepsilon}{c}=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}=\frac{\hbar\omega}{c}.$$

Давление, оказываемое на какую-либо поверхность,

$$P=\frac{F}{S},$$

где F – значение действующей перпендикулярно площадке S силы.

Если все фотоны поглощаются телом, то давление

$$P = p \cdot j = \frac{\varepsilon}{c} \cdot j = \frac{E_e}{c} \cdot$$

Здесь: j – плотность потока фотонов, то есть число фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени; $E_e = \varepsilon \cdot j$ – энергетическая освещенность (или поверхностная плотность потока излучения).

При условии, что все фотоны отражаются ($\rho = 1$),

$$P = \frac{\varepsilon}{c} \cdot j - \left(-\frac{\varepsilon}{c} \cdot j \right) = 2\frac{\varepsilon}{c} \cdot j = 2\frac{E_e}{c} \cdot$$

В реальных условиях доля фотонов, определяемая коэффициентом отражения ρ, отражается, а доля фотонов, определяемая величиной $(1 - \rho)$, поглощается:

$$P = (1 + \rho)\frac{\varepsilon}{c} j = (1 + \rho)\frac{E_e}{c}.$$

Так как $w = E_e / c$ – объемная плотность энергии, то

$$P = w(1 + \rho).$$

Эффект Комптона

Изменение длины волны λ фотона при его рассеянии свободным электроном или нуклоном, а также при рассеянии рентгеновских лучей на электронных оболочках атомов и при рассеянии гамма-лучей на атомных ядрах, равно:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda, \quad \Delta\lambda = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

или

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta).$$

Здесь λ и λ' – длины волн, соответствующие первичному и вторичному фотону (после рассеяния); h – постоянная Планка; m_0 – масса покоя частицы; θ – угол между направлениями первичного и рассеянного фотона.

Комптоновская длина волны

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = \begin{cases} 2{,}426 \cdot 10^{-12} \text{ м (для электрона);} \\ 1{,}32 \cdot 10^{-15} \text{ м (для нуклона).} \end{cases}$$

Задачи с решениями

Задача 1. Определите фототок насыщения в вакуумном фотоэлементе, интегральная чувствительность которого составляет 140 мкА/лм, если средняя освещенность фотокатода составляет 900 лк, а площадь его поверхности $S = 2$ см^2.

Дано:
$k = 1{,}4\cdot10^{-4}$ А/лм
$S = 2\cdot10^{-4}$ м^2
$E_{ср} = 9\cdot10^{2}$ лк

$J_{нас}$ – ?

Решение. Фототок насыщения определяется выражением

$$J_{нас} = k\Phi_{пад},$$

где $\Phi_{пад}$ – световой поток, падающий на поверхность фотокатода.

По определению $\Phi_{пад} = E_{ср}S$.

$$J_{нас} = kE_{ср}S.$$

$$J_{нас} = 1{,}4\cdot10^{-4}\cdot9\cdot10^{2}\cdot2\cdot10^{-4} = 25{,}2\cdot10^{-6}\ \Phi = 25{,}2\ \text{мкА}.$$

Ответ: $J_{нас} = 25{,}2$ мкА.

Задача 2. На расстоянии 30 см от изотропного точечного источника света с силой света 21 кд находится фотоэлемент. Направленный поток излучения от источника падает под углом 30° к поверхности фотокатода, площадь которой равна 2,5 см^2. Определите фототок насыщения фотоэлемента, интегральная чувствительность которого составляет 150 мкА/лм.

Дано:
$r = 0{,}3$ м
$I = 21$ кд
$\beta = 30°$
$S = 2{,}5\cdot10^{-4}$ м^2
$k = 1{,}5\cdot10^{-4}$ А/лм

$J_{нас}$ – ?

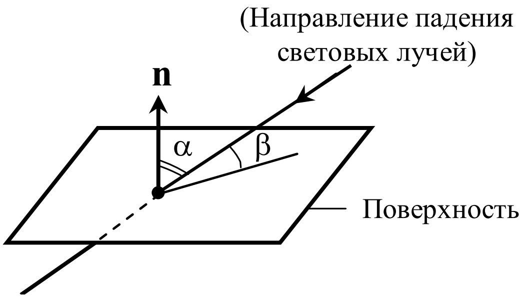

Рис. 6.1

Решение. Фототок насыщения равен:

$$J_{нас} = k\Phi_{пад},\quad \text{где } \Phi_{пад} = ES.$$

Воспользуемся соотношением (1б)

$$E = \frac{I\cdot\cos\alpha}{r^2}.$$

Здесь α – угол между направлением падения световых лучей на поверхность и нормалью **n** к этой поверхности, рис. 6.1.

Следовательно,

$$\alpha = \pi/2 - \beta = 60°.$$

$$J_{нас} = kES = \frac{kSI}{r^2}\cos\alpha = \frac{1{,}5\cdot10^{-4}\cdot2{,}5\cdot10^{-4}\cdot21}{0{,}09}\cdot\cos 60° \approx 4{,}4\cdot10^{-6}\ \text{А} = 4{,}4\ \text{мкА}.$$

Ответ: $J_{нас} = 4{,}4$ мкА.

Задача 3. Источник (типа прожектора, рис. 6.2) дает пучок света в виде усечённого конуса в пределах телесного угла 0,1π стерадиан. Допуская, что световой поток распределен внутри конуса равномерно, определите фототок насыщения, который возникает в фотоэлементе с интегральной чувствительностью 100 мкА/лм, если сила света источника составляет 30 кд.

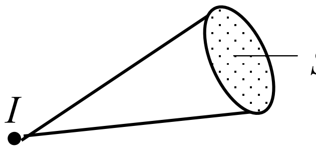

Рис. 6.2

Дано:
$\Omega = 0{,}1\pi$ ср
$k = 10^{-4}$ А/лм
$I = 30$ кд

$J_{нас}$ – ?

Решение. Фототок насыщения

$$J_{нас} = k \cdot \Phi_{пад},$$

где $\Phi_{пад} = I\Omega$.

$$J_{нас} = kI\Omega = 10^{-4} \cdot 30 \cdot 0{,}1 \cdot 3{,}14 = 9{,}42 \cdot 10^{-4}\ \text{А} = 942\ \text{мкА}.$$

Ответ: $J_{нас} = 942$ мкА.

Задача 4. В 1916 г. Р. Милликеном при исследовании фотоэффекта с поверхности натрия были получены данные, приведенные ниже.

ν, 10^{14} $с^{-1}$ (Гц)	5,97	6,89	7,48	8,52	9,96	11,09
$U_з$, В	0,47	0,82	1,26	1,75	2,33	3,02

Здесь: ν – частота света; $U_з$ – задерживающее напряжение. Используя эти данные, определите работу выхода электрона $A_{вых}$ для натрия, принимая $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Решение. Графическая зависимость экспериментальных данных $U_з(\nu)$ показана на рис. 6.3. Точка пересечения экспериментальной прямой с осью частот соответствует минимальной частоте, при которой возможен фотоэффект для натрия, т. е. $\nu_{кр}$. Для красной границы фотоэффекта справедлива формула

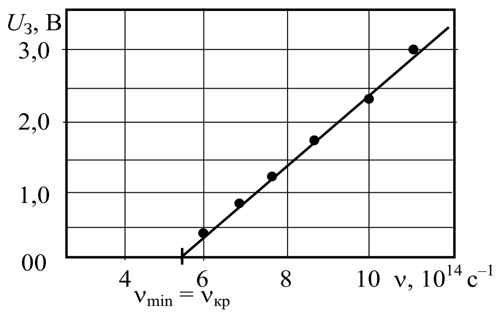

Рис. 6.3

$$A_{вых} = h\nu_{кр} = h\nu_{min}.$$

Подставляя значение $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с и определяя из построенной на основании табличных данных зависимости $U_з(\nu)$ значение $\nu_{min} = 5{,}4 \cdot 10^{14}$ Гц, получим

$$A_{вых} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 5{,}4 \cdot 10^{14} = 3{,}58 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 2{,}2\ \text{эВ}.$$

Ответ: $A_{вых} = 2{,}2$ эВ.

Задача 5. На уединенный медный шарик падает монохроматический свет, длина волны которого $\lambda = 0{,}1665$ мкм (ультрафиолет). До какого максимального потенциала зарядится шарик?

Дано:	
$\lambda = 1{,}665 \cdot 10^{-7}$ м	
$A_{вых} = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж	
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с	
$c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с	
$\lvert q_e \rvert = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
U_{max} – ?	

Решение. Под действием падающего ультрафиолетового излучения происходит вырывание электрона из металла (фотоэффект). Вследствие вылета электронов медный шарик заряжается положительно.

Максимальный потенциал U_{max}, до которого может зарядиться шарик, определяется наибольшей начальной кинетической энергией T_{max} электронов, с которой электроны вылетают из меди

$$U_{max} \lvert q_e \rvert = T_{max}.$$

Эта энергия может быть определена из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта: $h\nu = A_{вых} + T_{max}$.

Найдем максимальную кинетическую энергию при вылете электронов из меди:

$$T_{max} = h\nu - A_{вых} = hc/\lambda - A_{вых}.$$

Тогда

$$U_{max} = \frac{T_{max}}{\lvert q_e \rvert} = \frac{hc/\lambda - A_{вых}}{\lvert q_e \rvert} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} / 1{,}665 \cdot 10^{-7} - 7{,}2 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 2{,}97 \text{ В}.$$

Ответ: $U_{max} = 2{,}97$ В.

Задача 6. Определите максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 155$ нм; 2) γ-излучением с длиной волны $\lambda_2 = 2{,}47$ пм.

Дано:
$\lambda_1 = 1{,}55 \cdot 10^{-7}$ м
$\lambda_2 = 2{,}47 \cdot 10^{-12}$ м
$A_{вых} = 7{,}55 \cdot 10^{-19}$ Дж
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
$c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с
$m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
υ_{1max} – ? υ_{2max} – ?

Решение. Максимальную скорость фотоэлектронов определим из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{вых} + T_{max} \quad (1)$$

или

$$hc/\lambda = A_{вых} + T_{max}.$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона в зависимости от того, какая скорость ему сообщается, может быть выражена или по классической формуле

$$T_{max} = \frac{1}{2} m_0 \upsilon_{max}^2, \quad (2)$$

или по релятивистскому соотношению

$$T_{max} = (m - m_0)c^2. \quad (3)$$

Выбор пути решения задачи зависит от величины энергии фотона, вызывающего фотоэффект. Если энергия фотона ε много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ, то применима формула (1); если же энергия ε сравнима по величине с E_0, то необходимо использовать формулу (3).

1. В формулу, определяющую энергию фотона, $\varepsilon_1 = hc/\lambda_1$, подставляем значения величин h, c и λ_1 и, произведя вычисления для УФ-излучения, получаем $\varepsilon_1 = 6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8/1{,}55\cdot10^{-7} = 12{,}8\cdot10^{-19}$ Дж = 8 эВ; $\varepsilon_1 \ll E_0 = 0{,}51\cdot10^6$ эВ.

Следовательно, для этого случая $T_{1\max}$ в выражении (1) может быть определена по классической формуле (2)

$$h\frac{c}{\lambda_1} = A_{\text{вых}} + \frac{1}{2}m_0 \upsilon_{1_{\max}}^2,$$

отсюда

$$\upsilon_{1_{\max}} = \sqrt{\frac{2}{m_0}\left(hc/\lambda_1 - A_{\text{вых}}\right)} = \sqrt{\frac{2\left(6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8/1{,}55\cdot10^{-7} - 7{,}55\cdot10^{-19}\right)}{9{,}1\cdot10^{-31}}} \approx 1{,}1\cdot10^6 \text{ м/с.}$$

2. Вычислим энергию фотона γ-излучения:

$$\varepsilon_2 = hc/\lambda_2 = 6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8/2{,}47\cdot10^{-12} \approx 8\cdot10^{-14} \text{ Дж} \approx 0{,}5 \text{ МэВ.}$$

Полученное значение ε_2 соизмеримо со значением энергии покоя электрона $E_0 = 0{,}51$ МэВ и значительно больше $A_{\text{вых}} = 4{,}72$ эВ. Поэтому в выражении (1) $A_{\text{вых}}$ можно пренебречь и считать, что $T_{2\max} \approx \varepsilon_2$.

Таким образом, кинетическая энергия электрона в данном случае должна определяться соотношением (3).

Используя выражение для релятивистской массы электрона

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ где } \beta = \upsilon/c,$$

преобразуем (3) $$T_{2_{\max}} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right);$$

$$\left(T_{2_{\max}} + m_0c^2\right)^2\left(1-\beta^2\right) = \left(m_0c^2\right)^2;$$

$$\beta = \sqrt{1-\left[\left(m_0c^2\right)/\left(T_{2_{\max}} + m_0c^2\right)\right]^2} = \sqrt{1-\left[E_0/\left(\varepsilon_2 + E_0\right)\right]^2};$$

$$\beta = \sqrt{1-\left[(0{,}51)/(0{,}5+0{,}51)\right]^2} = 0{,}863.$$

Следовательно, максимальная скорость фотоэлектронов, вырываемых γ-излучением,

$$\upsilon_{2\max} = \beta c = 0{,}863\cdot3\cdot10^8 = 259\cdot10^6 \text{ м/с} = 259 \text{ Мм/с.}$$

Ответ: 1) $\upsilon_{1\max} = 1{,}1$ Мм/с; 2) $\upsilon_{2\max} = 259$ Мм/с.

Задача 7. Сколько фотонов N' рентгеновского излучения с длиной волны 1,5 нм должно падать в секунду на поверхность абсолютно черного тела площадью S = 2,4 см^2, чтобы создать на него такое же давление, какое создается солнечным светом на чёрную поверхность, полностью поглощающую лучи и находящуюся на орбите Земли? Солнечная постоянная E_c = 1370 Дж/(м^2·с).

Дано:
$\lambda = 1{,}5\cdot10^{-9}$ м
$\Delta t = 1$ с
$\rho = 0$
$S = 2{,}4\cdot10^{-4}$ м^2
$c = 3\cdot10^{8}$ м/с
$h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с
$E_c = 1370$ Дж/(м^2·с)
N' – ?

Решение. Давление определяется выражением

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho),$$

где E_e – энергетическая освещенность (или поверхностная плотность потока излучения).

Для чёрной поверхности ($\rho = 0$)

$$P = \frac{E_e}{c}.$$

Так как по условию $P_1 = P$, то

$$\frac{E_{e_1}}{c} = \frac{E_c}{c} \text{ или } E_{e1} = E_c, \qquad (1)$$

где E_{e1} – поверхностная плотность потока рентгеновского излучения, падающего на поверхность абсолютно черного тела (энергетическая освещенность поверхности),

$$E_{e_1} = \frac{N_0\varepsilon}{S\Delta t}.$$

Здесь $\varepsilon = hc/\lambda$ – энергия одного фотона; N_0 – число фотонов, падающих за время Δt на поверхность S; $N_0\varepsilon$ – энергия всех фотонов, падающих за время Δt на поверхность S. Используя условие (1) , запишем

$$E_c = \frac{N_0 hc}{\lambda S\Delta t}.$$

$$N' = \frac{N_0}{\Delta t} = \frac{E_c\lambda S}{hc} = \frac{1370\cdot1{,}5\cdot10^{-9}\cdot2{,}4\cdot10^{-4}}{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}} = 2{,}5\cdot10^{15}\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $N' = 2{,}5\cdot10^{15}$ с$^{-1}$.

Задача 8. Параллельный пучок монохроматического света (λ = 662 нм) падает перпендикулярно на зеркальную поверхность и производит на нее давление P = 0,3 мкПа. Определите концентрацию n фотонов в световом пучке.

Дано:	
$\lambda = 6{,}62\cdot10^{-7}$ м	
$P = 3\cdot10^{-7}$ Па	
$\rho = 1$	
$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с	
$c = 3\cdot10^{8}$ м/с	
n – ?	

Решение. Концентрация n фотонов в пучке может быть найдена как частное от деления объемной плотности энергии w на энергию ε одного фотона,

$$n = \frac{w}{\varepsilon}, \text{ где } \varepsilon = \frac{hc}{\lambda}.$$

Из выражения для давления света

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho)$$

найдем объемную плотность энергии $w = P/(1 + \rho)$.

Тогда

$$n = \frac{w}{\varepsilon} = \frac{P}{(1+\rho)\varepsilon} = \frac{P\lambda}{(1+\rho)hc} = \frac{3\cdot10^{-7}\cdot6{,}62\cdot10^{-7}}{2\cdot6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}} = 5\cdot10^{11}\ \text{м}^{-3}.$$

Ответ: $n = 5\cdot10^{11}$ м $^{-3}$.

Задача 9. Фотон с энергией ε = 300 кэВ рассеялся под углом θ = 120° на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите энергию ε′ и длину волны λ′ рассеянного фотона.

Дано:	
$\varepsilon = 4{,}8\cdot10^{-14}$ Дж	
$\theta = 120°$	
$m_0 = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг	
$c = 3\cdot10^{8}$ м/с	
$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с	
ε′ – ? λ′ –?	

Решение. Изменение длины волны в эффекте Комптона Δλ будет наиболее существенным при рассеянии на свободных электронах (то есть в условиях, когда энергия, которую передает фотон электрону при столкновении, значительно больше энергии связи электронов с атомами) и определяется выражением

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta). \tag{1}$$

Энергия падающего и рассеянного фотонов, соответственно,

$$\varepsilon = h\frac{c}{\lambda} \quad \text{и} \quad \varepsilon' = h\frac{c}{\lambda'}.$$

Отсюда
$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}; \quad \lambda' = \frac{hc}{\varepsilon'}.$$

После подстановки в (1), найдем искомые величины:

$$\varepsilon' = \frac{hc\cdot\varepsilon}{hc + \varepsilon\cdot\lambda_c(1-\cos\theta)} = \frac{\varepsilon}{1+\dfrac{\varepsilon\lambda_c}{hc}(1-\cos\theta)} = \frac{\varepsilon}{1+\dfrac{\varepsilon}{m_0c^2}(1-\cos\theta)};$$

$$\varepsilon' = \frac{4{,}8\cdot 10^{-14}}{1+\dfrac{4{,}8\cdot 10^{-14}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)} = 2{,}55\cdot 10^{-14}\ \text{Дж};$$

$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon'} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{2{,}55\cdot 10^{-14}} = 7{,}8\cdot 10^{-12}\ \text{м} = 7{,}8\ \text{пм}.$$

Ответ: $\varepsilon' = 2{,}55\cdot 10^{-14}$ Дж; $\lambda' = 7{,}8$ пм.

Задача 10. Определите максимальное изменение длины волны при комптоновском рассеянии на свободных протонах.

Дано:	
$m_0 = 1{,}673\cdot 10^{-27}$ кг $c = 3\cdot 10^{8}$ м/с $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ Дж·с	**Решение.** Наибольшее изменение длины волны $\Delta\lambda_{\max}$ в эффекте Комптона имеет место при $\theta = 180°$:
$\Delta\lambda_{\max}$ – ?	

$$\Delta\lambda_{\max} = \lambda_c(1 - \cos\theta) = \lambda_c(1 + 1) = 2\lambda_c.$$

Комптоновская длина волны $\lambda_c = h/(m_0 c)$.

Тогда $\Delta\lambda_{\max} = 2\lambda_c = \dfrac{2h}{m_0 c} = \dfrac{2\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}}{1{,}673\cdot 10^{-27}\cdot 3\cdot 10^{8}} = 2{,}64\cdot 10^{-15}$ м = 2,64 фм.

Ответ: $\Delta\lambda_{\max} = 2{,}64$ фм.

Задача 11. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 0{,}04$ нм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 60°$. Определите величину импульса электрона отдачи.

Дано:	
$\lambda = 4\cdot 10^{-11}$ м $\theta = 60°$ $m_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг	**Решение.** Рассеяние фотона на свободном электроне можно рассматривать как процесс их упругого столкновения. Для системы соударяющихся тел силы, возникающие при взаимодействии, являются внутренними силами.
p_e – ?	

В течение всего времени взаимодействия импульс внутренних сил системы значительно больше результирующего импульса всех внешних сил, приложенных к системе за то же время. Поэтому в течение соударения влиянием на систему всех внешних сил можно пренебречь и считать систему соударяющихся тел (фотон + электрон) замкнутой системой, для которой выполняется закон сохранения импульса и энергии. Из закона сохранения импульса имеем

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ – вектор импульса падающего и рассеянного фотона, соответственно; $\mathbf{p}_e$ – вектор импульса электрона отдачи.

Векторная диаграмма для импульсов приведена на рис. 6.4. Все векторы проведены из точки O, где находился электрон в момент соударения с фотоном.

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}; \qquad p' = \frac{h}{\lambda'}.$$

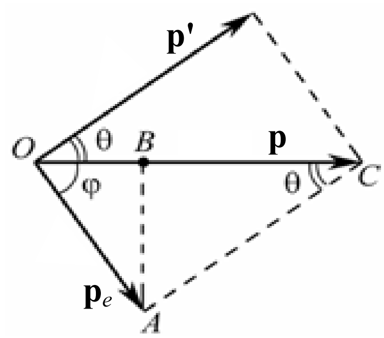

Рис. 6.4

Изменение длины волны $\Delta\lambda$ в эффекте Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}\left(1 - \cos\theta\right);$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}\left(1 - \cos\theta\right) = \frac{6,63\cdot 10^{-34}}{9,\cdot 10^{-31}\cdot 3\cdot 10^{8}}\left(1 - 0,5\right) = 1,22\cdot 10^{-12} \text{ м};$$

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 4,0\cdot 10^{-11} + 1,22\cdot 10^{-12} = 4,122\cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

Для величины импульса электрона отдачи p_e, исходя из векторной диаграммы импульсов (рис. 6.4), можно получить выражение

$$p_e = \sqrt{p^2 + \left(p'\right)^2 - 2pp'\cos\theta} = h\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda'}\right)^2 - \frac{1}{\lambda\lambda'}} =$$

$$= 6,63\cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{10^{22}}{4,0^2} + \frac{10^{22}}{4,122^2} - \frac{10^{22}}{4,0\cdot 4,122}} = 1,62\cdot 10^{-23} \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

Ответ: $p_e = 1,62\cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

Задача 12. Фотон с энергией $\varepsilon = 0,15$ МэВ испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны увеличилась на $\Delta\lambda = 1,5$ пм. Определите угол φ, под которым вылетел комптоновский электрон отдачи (относительно направления движения падающего фотона). Комптоновская длина волны для электрона $\lambda_c = 2,436\cdot 10^{-12}$ м.

Дано:
$\varepsilon = 2,4\cdot 10^{-14}$ Дж
$\Delta\lambda = 1,5\cdot 10^{-12}$ м
$\lambda_c = 2,436\cdot 10^{-12}$ м
$c = 3\cdot 10^{8}$ м/с
$h = 6,63\cdot 10^{-34}$ Дж·с

φ – ?

Решение. На рис. 6.4 угол, под которым вылетел комптоновский электрон отдачи, обозначен φ. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB}{OC - BC} = \frac{AC\cdot\sin\theta}{OC - BC};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p'\cdot\sin\theta}{p - p'\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\left(p/p'\right) - \cos\theta}.$$

Так как

$$\frac{p}{p'} = \frac{\varepsilon\cdot c}{c\cdot\varepsilon'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \quad \text{то} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{\left(\varepsilon/\varepsilon'\right) - \cos\theta}, \qquad (1)$$

где ε' – энергия рассеянного фотона, равная

$$\varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{hc}{\frac{hc}{\varepsilon} + \Delta\lambda}; \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon \cdot \Delta\lambda}{hc}}.$$

Преобразуем полученное выражение (1) так, чтобы угол φ выражался непосредственно через величины ε и Δλ, заданные в условии данной задачи.

Из формулы Комптона $\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$ найдем

$$\cos\theta = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}; \qquad \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}\sqrt{\frac{2\lambda_c}{\Delta\lambda} - 1}.$$

Используя полученные формулы, выразим (1) через данные условия задачи

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}\sqrt{\frac{2\lambda_c}{\Delta\lambda} - 1}}{\left(1 + \frac{\varepsilon\Delta\lambda}{hc}\right) - \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{2\lambda_c}{\Delta\lambda} - 1}}{\frac{\varepsilon\lambda_c}{hc} + 1} = 1{,}155; \quad \varphi = \operatorname{arctg}1{,}155 = 49°.$$

Ответ: $\varphi = 49°$.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Законы фотоэффекта

6.1.1. Определите фототок насыщения $J_{нас}$ в фотоэлементе, интегральная чувствительность которого составляет k = 100 мкА/лм, если на фотокатод падает световой поток Ф = 0,18 лм.

Ответ: $J_{нас} = k\Phi$ = 18 мкА.

6.1.2. Какова средняя освещенность E фотокатода площадью S = 4 см^2, если фототок насыщения фотоэлемента составляет $J_{нас}$ = 25 мкА, а его интегральная чувствительность равна k = 150 мкА/лм?

Ответ: $E = J_{нас}/(kS)$ = 417 лк.

6.1.3. Какова площадь S поверхности фотокатода фотоэлемента с интегральной чувствительностью k = 120 мкА/лм, если фототок насыщения равен $J_{нас}$ = 50 мкА, а средняя освещенность фотокатода составляет $E = 10^3$ лк?

Ответ: $S = J_{нас}/(kE)$ = 4,2 см^2.

6.1.4. Определите силу света I источника, освещающего фотоэлемент пучком света в виде усеченного конуса в пределах телесного угла $\Omega = 0{,}2\pi$ стерадиан, допуская, что световой поток распределен внутри конуса равномерно. Интегральная чувствительность k фотоэлемента равна 100 мкА/лм, а фототок насыщения $J_{нас}$ составляет 314 мкА.

Ответ: $I = J_{нас}/(k\Omega)$ = 5 кд.

6.1.5. Источник, сила света которого равна I = 20 кд, дает пучок света в виде усеченного конуса в пределах телесного угла Ω = 0,1π стерадиан. Допуская, что световой поток распределён внутри конуса равномерно, определите интегральную чувствительность k освещаемого данным источником фотоэлемента, если возникающий в нём фототок насыщения $J_{нас}$ = 628 мкА.

Ответ: $k = J_{нас}/(I\Omega)$ = 100 мкА/лм.

6.1.6. На расстоянии r = 20 см от изотропного точечного источника света с силой света I = 20 кд, находится фотоэлемент, интегральная чувствительность которого составляет k = 100 мкА/лм. Направленный поток излучения от источника падает на поверхность фотокатода, площадью S = 1 см^2 так, что угол между направлением пучка и нормалью **n** к поверхности фотокатода составляет α = 60°. Определите фототок насыщения $J_{нас}$.

Ответ: $J_{нас} = kSI\cos\alpha/r^2 =$ 2,5 мкА.

6.1.7. Определите силу света I источника, находящегося на расстоянии r = 20 см от фотоэлемента с интегральной чувствительностью k = 100 мкА/лм. Направленный поток излучения от источника падает на фотокатод под углом α = 30° к его поверхности, площадью S = 2 см^2, а фототок насыщения составляет $J_{нас}$ = 10 мкА.

Ответ: $I = J_{нас}r^2/(kS\sin\alpha)$ = 40 кд.

6.1.8. Поверхность фотокатода фотоэлемента освещалась лампой с силой света I_1 = 80 кд; затем эту лампу заменили другой с силой света I_2 = 20 кд. Во сколько раз нужно уменьшить расстояние r от лампы до фотоэлемента, чтобы значение фототока насыщения не изменилось?

Ответ: $r_1/r_2 = \sqrt{I_1/I_2} = 2$.

6.1.9. Фотоэлемент находится от источника света (с силой света I_1 = 20 кд) на расстоянии r_1 = 10 см; затем фотоэлемент перемещают на бóльшее расстояние r_2 = 20 см. Какой новый источник света нужно взять, чтобы фототок насыщения в фотоэлементе не изменился? Какова сила света I_2 этого источника?

Ответ: $I_2 = I_1 \cdot \left(r_2/r_1\right)^2 = 80$ кд.

6.1.10. Во сколько раз увеличится фототок насыщения $J_{нас}$ фотоэлемента, если падающий световой поток Ф возрастает в 1,5 раза?

Ответ: $J_{2нас}/J_{1нас} = \Phi_2/\Phi_1$ = 1,5. В 1,5 раза.

6.1.11. Расстояние r от точечного источника света до фотоэлемента увеличили в 1,5 раза. Как изменится фототок насыщения $J_{нас}$ фотоэлемента?

Ответ: $J_{1нас}/J_{2нас} = (r_2/r_1)^2$ = 2,25. Уменьшится в 2,25 раза.

6.1.12. Яркость B источника света, с площадью светящейся поверхности $S_{ист} = 2$ см^2, равна 10 кд/см^2. Источник дает пучок света в виде усеченного конуса в пределах телесного угла $\Omega = 0{,}1\pi$ стерадиан. Допуская, что световой поток распределен внутри конуса равномерно, определите фототок насыщения $J_{нас}$, который создается этим источником в фотоэлементе с интегральной чувствительностью $k = 100$ мкА/лм.

Ответ: $J_{нас} = kBS_{ист}\Omega = 628$ мкА.

6.1.13. Определите яркость B источника света с площадью светящейся поверхности $S_{ист} = 1$ см^2, если пучок света (в виде усеченного конуса в пределах телесного угла $\Omega = 0{,}2\pi$ стерадиан) создает в фотоэлементе с интегральной чувствительностью $k = 100$ мкА/лм фототок насыщения $J_{нас} = 314$ мкА.

Ответ: $B = J_{нас}/kS_{ист}\Omega = 5$ кд/см^2.

6.1.14. Определите интегральную чувствительность k фотоэлемента, если при падении на поверхность его фотокатода потока $\Phi = 0{,}1$ лм фототок насыщения составляет $J_{нас} = 10$ мкА.

Ответ: $k = J_{нас}/\Phi = 100$ мкА/лм.

6.1.15. Определите падающий на фотокатод фотоэлемента световой поток Φ, если интегральная чувствительность фотоэлемента составляет $k = 150$ мкА/лм, а фототок насыщения $J_{нас} = 300$ мкА.

Ответ: $\Phi = J_{нас}/k = 2$ лм.

6.1.16. Определите среднюю освещенность E фотокатода площадью $S = 2$ см^2, если фототок насыщения фотоэлемента составляет $J_{нас} = 50$ мкА, а его интегральная чувствительность равна $k = 100$ мкА/лм.

Ответ: $E = J_{нас}/(kS) = 2{,}5\cdot 10^3$ лк.

6.1.17. Определите площадь S поверхности фотокатода фотоэлемента с интегральной чувствительностью $k = 100$ мкА/лм, если фототок насыщения $J_{нас} = 100$ мкА, а средняя освещенность E фотокатода составляет 2500 лк.

Ответ: $S = J_{нас}/(kE) = 4$ см^2.

6.1.18. Какова сила света I источника, дающего пучок света в виде усеченного конуса в пределах телесного угла $\Omega = 0{,}1\pi$ стерадиан (световой поток распределен внутри конуса равномерно), если интегральная чувствительность фотоэлемента равна $k = 200$ мкА/лм, а фототок насыщения составляет $J_{нас} = 628$ мкА?

Ответ: $I = J_{нас}/(k\Omega) = 10$ кд.

6.1.19. Источник, сила света которого равна $I = 25$ кд, дает пучок света в виде усеченного конуса в пределах телесного угла $\Omega = 0{,}2\pi$ стерадиан (световой поток распределен внутри конуса равномерно). Какова интегральная чувствительность k освещаемого фотоэлемента, если в нем возникает фототок насыщения $J_{нас} = 314$ мкА?

Ответ: $k = J_{нас}/(I\Omega) = 20$ мкА/лм.

6.1.20. На расстоянии r = 20 см от изотропного точечного источника света с силой света I = 25 кд находится фотоэлемент, интегральная чувствительность которого составляет k = 150 мкА/лм. Направленный поток излучения от источника падает на поверхность фотокатода площадью S = 0,5 см^2 так, что угол между направлением распространения пучка света и нормалью **n** к поверхности фотокатода составляет $\alpha = 30°$. Каков фототок насыщения $J_{нас}$ фотоэлемента?

Ответ: $J_{нас} = kIS\cos\alpha/r^2$ = 4 мкА.

6.1.21. Фотоэлемент освещается двумя одинаковыми источниками света (сила света $I_1 = I_2 = I$). Как нужно изменить расстояние r от источника света до фотоэлемента, чтобы фототок насыщения фотоэлемента остался неизменным, если один из этих источников убрать?

Ответ: $r_2/r_1 = \sqrt{I_2/(I_1 + I_2)} = 1/\sqrt{2}$. Уменьшить в $\sqrt{2}$ раз.

6.1.22. Определите фототок насыщения $J_{нас}$ фотоэлемента, интегральная чувствительность которого составляет k = 150 мкА/лм и который расположен на расстоянии r = 20 см от изотропного точечного источника света с силой I = 20 кд. Направленный поток излучения от источника света падает под углом $\alpha = 60°$ к поверхности фотокатода, площадь которой равна S = 2 см^2.

Ответ: $J_{нас} = kIS\sin\alpha/r^2$ = 13 мкА.

6.1.23. Фототок насыщения $J_{нас}$, протекающий через вакуумный фотоэлемент при его освещении светом, равен $5 \cdot 10^{-10}$ А. Определите число N фотоэлектронов, покидающих поверхность фотокатода в единицу времени. Элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $N = J_{нас}/e = 3{,}1 \cdot 10^9$ с$^{-1}$.

6.1.24. Число N фотоэлектронов, покидающих в единицу времени поверхность фотокатода, освещаемого светом, равно $4 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. Определите фототок насыщения $J_{нас}$, протекающий через вакуумный фотоэлемент.

Ответ: $J_{нас} = eN$ = 641 мкА.

6.1.25. За Δt = 10 с с единицы поверхности фотокатода вылетает $n = 2{,}3 \cdot 10^{16}$ фотоэлектронов. Поверхность фотокатода составляет S = 2 см^2. Определите фототок насыщения $J_{нас}$.

Ответ: $J_{нас} = enS/\Delta t = 7{,}37 \cdot 10^{-8}$ А.

6.2. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Красная граница фотоэффекта

6.2.1. Определите красную границу $\lambda_{кр}$ фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовыми лучами с длиной волны λ = 400 нм, максимальная скорость фотоэлектронов равна υ_{max} = 650 км/с.

Ответ: $\lambda_{кр} = \left[1/\lambda - m_0\upsilon_{max}^2/(2hc)\right]^{-1} = 654$ нм.

6.2.2. Определите работу выхода $A_{вых}$ электронов (в эВ) из натрия, если красная граница фотоэффекта $\lambda_{кр}$ = 5470 Å.

Ответ: $A_{вых} = hc/\lambda_{кр}$ = 2,27 эВ.

6.2.3. Будет ли иметь место фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовые лучи с длиной волны λ = 3000 Å?

Ответ: $A_{вых} > hc/\lambda$. Нет.

6.2.4. Какая доля δ энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_{кр}$ = 3070 Å и максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона T_{max} = 1 эВ?

Ответ: $\delta = \left[1 + T_{max}\lambda_{кр}/(hc)\right]^{-1} = 0,8$.

6.2.5. На цинковую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны λ = 2200 Å. Определите максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов.

Ответ: $\upsilon_{max} = \sqrt{\dfrac{2}{m_0}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A_{вых}\right)} = 760$ км/с.

6.2.6. Возникает ли фотоэффект в цинке под действием излучения, имеющего длину волны λ = 0,45 мкм?

Ответ: $A_{вых} > hc/\lambda$. Нет.

6.2.7. Какой длины волны λ свет падает на поверхность цезия, если максимальная скорость вылета из него электрона равна υ_{max} = $6 \cdot 10^5$ м/с? Результат представьте в нанометрах и округлите до целого числа.

Ответ: $\lambda = \dfrac{hc}{A_{вых} + m_0\upsilon_{max}^2/2} = 425$ нм.

6.2.8. Максимальная кинетическая энергия T_{max} электронов, вырываемых из некоторого металла светом с длиной волны λ = 300 нм, равна $3,42 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определите работу выхода электрона из металла. Результат представьте в электронвольтах.

Ответ: $A_{вых} = hc/\lambda - T_{max}$ = 3 эВ.

6.2.9. При освещении фотокатода светом с длиной волны λ_1 = 350 нм, а затем с λ_2 = 540 нм было обнаружено, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в

$\eta = \upsilon_1/\upsilon_2 = 2$ раза. Найдите работу выхода $A_{вых}$ электрона с поверхности этого металла (в эВ).

Ответ: $A_{вых} = \dfrac{hc}{\eta^2 - 1}\left(\dfrac{\eta^2}{\lambda_2} - \dfrac{1}{\lambda_1}\right) = 1{,}9$ эВ.

6.2.10. Какая доля δ энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_{кр} = 450$ нм и максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона равна $T_{max} = 1$ эВ?

Ответ: $\delta = \left[1 + T_{max}\lambda_{кр}/(hc)\right]^{-1} = 0{,}73$.

6.2.11. Определите длину волны излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов $\upsilon_{max} = 1$ Мм/с. Работа выхода электрона из металла $A_{вых} = 2$ эВ.

Ответ: $\lambda = \dfrac{hc}{A_{вых} + m_0\upsilon_{max}^2/2} = 257$ нм.

6.2.12. Какими лучами нужно освещать кадмий, чтобы максимальная скорость вылетающих электронов $\upsilon_{max} = 7{,}2\cdot10^5$ м/с?

Ответ: $\lambda = \dfrac{hc}{A_{вых} + m_0\upsilon_{max}^2/2} = 223$ нм.

6.2.13. При освещении какими лучами с поверхности стронция будут вылетать электроны с максимальной кинетической энергией $T_{max} = 1{,}8\cdot10^{-19}$ Дж? Красная граница фотоэффекта для стронция $\lambda_{кр} = 552$ нм.

Ответ: $\lambda = \dfrac{hc}{hc/\lambda_{кр} + T_{max}} = 367$ нм.

6.2.14. На поверхность вольфрама падает излучение с длиной волны $\lambda = 220$ нм. Определите максимальную скорость υ_{max} вылетающих из него электронов, если поверхностный скачок потенциала $U_{вых}$ для вольфрама равен 4,5 В.

Ответ: $\upsilon_{max} = \sqrt{\dfrac{2}{m_0}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - eU_{вых}\right)} = 0{,}63$ Мм/с.

6.2.15. Максимальная кинетическая энергия T_{max} электронов, вылетающих из рубидия при его освещении ультрафиолетовыми лучами с $\lambda = 317$ нм, равна $2{,}84\cdot10^{-19}$ Дж. Определите работу выхода $A_{вых}$ электрона из рубидия (в эВ) и красную границу $\lambda_{кр}$ фотоэффекта.

Ответ: $A_{вых} = hc/\lambda - T_{max} = 2{,}13$ эВ; $\lambda_{кр} = hc/A_{вых} = 584$ нм.

6.2.16. Определите максимальную кинетическую энергию T_{max} электронов, вылетающих из калия, при его освещении светом с длиной волны $\lambda = 345$ нм.

Ответ: $T_{max} = hc/\lambda - A_{вых} = 2{,}15\cdot10^{-19}$ Дж.

6.2.17. Возникает ли фотоэффект, если на поверхность ртути будет падать видимый свет?

Ответ: $A_{вых} > hc/\lambda_{min}$; $\lambda_{min} = 380$ нм. Нет.

6.2.18. Определите красную границу фотоэффекта для золота.

Ответ: $\lambda_{кр} = hc/A_{вых} =$ 261 нм.

6.2.19. Определите длину волны красной границы $\lambda_{кр}$ фотоэффекта для серебра.

Ответ: $\lambda_{кр} = hc/A_{вых} =$ 263 нм.

6.2.20. Длина волны $\lambda_{кр}$, соответствующая красной границе фотоэффекта для натрия, составляет 547 нм. Определите работу выхода $A_{вых}$ электрона для натрия (в эВ).

Ответ: $A_{вых} = hc/\lambda_{кр} =$ 2,27 эВ.

6.2.21. Поверхность цезия облучается ультрафиолетовыми лучами с длиной волны λ = 75 нм. Определите максимальную кинетическую энергию T_{max} электронов, вылетающих из цезия.

Ответ: $T_{max} = hc/\lambda - A_{вых} = 2{,}35 \cdot 10^{-18}$ Дж.

6.2.22. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта для некоторого металла, $\lambda_{кр}$ = 2750 Å. Определите: 1) работу выхода $A_{вых}$ электрона из этого металла (в эВ); 2) максимальную кинетическую энергию T_{max} электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны λ = 180 нм.

Ответ: $A_{вых} = hc/\lambda_{кр} =$ 4,5 эВ; $T_{max} = hc/\lambda - A_{вых} = 3{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж.

6.2.23. Длина волны света $\lambda_{кр}$, соответствующая красной границе фотоэффекта для некоторого металла, равна 2750 Å. Чему равно минимальное значение энергии фотона ε (в эВ), вызывающего фотоэффект?

Ответ: $\varepsilon = hc/\lambda_{кр} =$ 4,5 эВ.

6.2.24. Определите работу выхода $A_{вых}$ электрона из цинка (в эВ), с которым работал Столетов в своих опытах, если для наблюдения фотоэффекта им использовалось излучение с длиной волны λ не более 310 нм.

Ответ: $A_{вых} = hc/\lambda =$ 4,0 эВ.

6.2.25. Определите длину волны $\lambda_{кр}$ света, соответствующую красной границе фотоэффекта для цезия.

Ответ: $\lambda_{кр} = hc/A_{вых} = 654$ нм.

6.3. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Задерживающий потенциал ($U_з$). Релятивистское выражение для кинетической энергии фотоэлектронов, максимальная скорость которых соизмерима со скоростью света

6.3.1. На поверхность лития падает монохроматический свет (λ = 3100 Å). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_з$ не менее 1,7 В. Определите работу выхода $A_{вых}$ электрона из лития (в эВ).

Ответ: $A_{вых} = hc/\lambda - eU_з = 2{,}3$ эВ.

6.3.2. На платиновую пластинку падают ультрафиолетовые лучи. Для прекращения фотоэффекта нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_{з1}$ не менее 3,7 В. Если платиновую пластинку заменить пластинкой из другого металла, то задерживающую разность потенциалов $U_{з2}$ придется увеличить до 6 В. Определите работу выхода $A_{вых}$ электрона с поверхности этой пластинки (в эВ).

Ответ: $A_{вых} = A_{Pt} - e(U_{з2} - U_{з1}) = 3$ эВ.

6.3.3. Определите максимальную скорость υ_{max} электронов, вылетающих из металла под действием гамма-излучения с длиной волны λ = 0,2 Å. Работой выхода пренебречь.

Ответ: $\upsilon_{max} = c\sqrt{1-\left(\dfrac{m_0c^2}{hc/\lambda + m_0c^2}\right)^2} = 0{,}452c \approx 1{,}36\cdot 10^8$ м/с.

6.3.4. Определите максимальную скорость υ_{max} электронов, вылетающих из металла при облучении гамма-квантами с энергией ε = 1,53 МэВ; работой выхода пренебречь.

Ответ: $\upsilon_{max} = c\sqrt{1-\left(\dfrac{m_0c^2}{\varepsilon + m_0c^2}\right)^2} = 2{,}90\cdot 10^8$ м/с.

6.3.5. Максимальная скорость υ_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении гамма-квантами, равна $2{,}9\cdot10^8$ м/с. Определите энергию ε гамма-квантов (в МэВ). Работой выхода пренебречь.

Ответ: $\varepsilon = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon_{max}/c)^2}} - 1\right) = 1{,}53$ МэВ.

6.3.6. Определите максимальную скорость электронов (υ_{max}), вылетающих из цинка под действием гамма-излучения с длиной волны λ = 0,1 Å. Как изменится υ_{max}, если гамма-лучи заменить ультрафиолетовыми лучами?

Ответ: $hc/\lambda \gg A_{вых}$; $\upsilon_{max} = c\sqrt{1-\left(\dfrac{m_0c^2}{hc/\lambda + m_0c^2}\right)^2} = 1{,}8\cdot 10^8$ м/с;

υ_{max} – уменьшится.

6.3.7. Плоский алюминиевый электрод освещается ультрафиолетовым светом с длиной волны λ = 83 нм. На какое минимальное расстояние Δl от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью E = 750 В/м? Красная граница фотоэффекта для алюминия $\lambda_{кр}$ = 332 нм.

Ответ: $\Delta l = \left(hc/\lambda - A_{вых}\right)/\left(eE\right) = 1{,}47$ см.

6.3.8. При освещении фотокатода светом с длиной волны λ_1 = 400 нм, а затем с λ_2 = 500 нм обнаружено, что задерживающее напряжение $U_з$, прекращающее фотоэффект, изменилось в 2 раза. Определите работу выхода $A_{вых}$ электрона из материала фотокатода. Результат представьте в электронвольтах.

Ответ: $A_{вых} = hc/\lambda_2 - eU_{з2} = 1{,}86$ эВ, где $U_{з2} = \dfrac{hc}{e}\left(\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}\right)$.

6.3.9. До какого максимального потенциала φ_{max} зарядится удаленный от других тел медный шарик при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны λ = 140 нм?

Ответ: $\varphi_{max} = \dfrac{hc}{e\lambda} - \dfrac{A_{вых}}{e} = 4{,}38$ В.

6.3.10. Найдите постоянную Планка h, если фотоэлектроны, вырываемые с поверхности некоторого металла электромагнитным излучением с частотой $\nu_1 = 1{,}2\cdot10^{15}$ Гц, задерживаются потенциалом $U_{з1}$ = 3,1 В, а вырываемые электромагнитным излучением с длиной волны λ_2 = 125 нм – потенциалом $U_{з2}$ = 8,1 В.

Ответ: $h = e\left(U_{з2} - U_{з1}\right)/\left(c/\lambda_2 - \nu_1\right) = 6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

6.3.11. Шар радиусом r = 1 см, несущий заряд $q = 1{,}11\cdot10^{-10}$ Кл, облучается светом с длиной волны λ = 331 нм. Определите, на какое расстояние Δl удалится электрон, если работа выхода $A_{вых}$ электрона с поверхности металла, из которого изготовлен шар, равна $2\cdot10^{-19}$ Дж.

Ответ: $\Delta l = \dfrac{keq}{keq/r - hc/\lambda + A_{вых}} - r = 0{,}255$ мм, где $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.

6.3.12. Изолированная металлическая пластинка облучается монохроматическим светом с длиной волны λ = 450 нм. До какого потенциала φ_{max} зарядится пластинка при длительном освещении, если работа выхода $A_{вых}$ электрона с ее поверхности равна 2 эВ?

Ответ: $\varphi_{max} = hc/\left(e\lambda\right) - A_{вых}/e = 0{,}76$ В.

6.3.13. На поверхность лития падает монохроматический свет с длиной волны λ = 310 нм. Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов не менее $U_з$ = 1,7 В. Определите работу выхода $A_{вых}$ для лития (в эВ).

Ответ: $A_{вых} = hc/\lambda - eU_з = 2{,}3$ эВ.

6.3.14. Определите максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием гамма-излучения с частотой $\nu = 10^{18}$ Гц. Работой выхода пренебречь.

Ответ: $\upsilon_{max} = c\sqrt{1 - m_0^2c^4/\left(h\nu + m_0c^2\right)^2} = 2{,}49 \cdot 10^6$ м/с.

6.3.15. Определите максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием гамма-квантов с энергией ε = = 1,53 МэВ. Работой выхода пренебречь.

Ответ: $\upsilon_{max} = c\sqrt{1 - m_0^2c^4/\left(\varepsilon + m_0c^2\right)^2} = 2{,}91 \cdot 10^8$ м/с.

6.3.16. Максимальная скорость υ_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его гамма-фотонами, равна 291 Мм/с. Определите энергию ε γ-фотона (в МэВ). Работой выхода пренебречь.

Ответ: $\varepsilon = m_0c^2\left(1/\sqrt{1-\left(\upsilon_{max}/c\right)^2} - 1\right) = 1{,}53$ МэВ.

6.3.17. Поверхностный скачок потенциала у магния φ_{Mg} = 3,64 В, а у цезия φ_{Cs} = 1,90 В. Они освещаются светом с длиной волны λ = 590 нм. Возникает ли при этом фотоэффект у каждого из металлов?

Ответ: $\lambda_{кр} = hc/(e\varphi)$. Фотоэффект возникает у Cs ($\lambda_{кр(Cs)}$ = 654 нм > λ), а у Mg – нет ($\lambda_{кр(Mg)}$ = 341 нм < λ).

6.3.18. Поверхностный скачок потенциала для алюминия φ = 3,74 В. Определите длину волны $\lambda_{кр}$ красной границы фотоэффекта у алюминия.

Ответ: $\lambda_{кр} = hc/(e\varphi)$ = 332 нм.

6.3.19. Кванты света с энергией ε = 4,93 эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A_{вых}$ = 4,5 эВ. Определите максимальный импульс p_{max}, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

Ответ: $p_{max} = \dfrac{\varepsilon}{c} + \sqrt{2m_0\left(\varepsilon - A_{вых}\right)} = 3{,}57 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с.

6.3.20. Определите частоту ν света, вырывающего с поверхности металла электроны, полностью задерживаемые потенциалом $U_з$ = 3 В. Фотоэффект у этого металла начинается при частоте падающего света $\nu_{кр} = 6 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$.

Ответ: $\nu = \nu_{кр} + eU_з/h = 1{,}32 \cdot 10^{15}$ Гц.

6.3.21. Определите величину задерживающего потенциала $U_з$ для фотоэлектронов, испускаемых при освещении калия светом, длина волны которого равна λ = 3300 Å.

Ответ: $U_з = \dfrac{hc}{e\lambda} - \dfrac{A_{вых}}{e} = 1{,}5$ В.

6.3.22. При фотоэффекте с платиновой поверхности величина задерживающего потенциала оказалась равной $U_з$ = 0,8 В. Определите: 1) длину волны λ применяемого излучения; 2) максимальную длину волны λ_{max}, при которой еще возможен фотоэффект.

Ответ: $\lambda = \dfrac{hc}{A_{вых} + eU_з} = 204$ нм; $\lambda_{max} = \dfrac{hc}{A_{вых}} = 234$ нм.

6.3.23. Определите постоянную Планка h, если известно, что фотоэлектроны, вырываемые с поверхности некоторого металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_{з1}$ = 6,6 В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ – разностью потенциалов $U_{з2}$ = 16,5 В.

Ответ: $h = e\left(U_{з2} - U_{з1}\right) / \left(\nu_2 - \nu_1\right) = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с.

6.3.24. Вакуумный фотоэлемент состоит из вольфрамового катода и анода. Контактная разность потенциалов между электродами, численно равная $\Delta\varphi$ = 0,6 В, ускоряет вылетающие электроны. Фотоэлемент освещается светом, длина волны которого $\lambda = 2{,}3 \cdot 10^{-7}$ м. Какую задерживающую разность потенциалов $U_з$ надо приложить между электродами, чтобы фототок упал до нуля?

Ответ: $U_з = \dfrac{hc}{e\lambda} - \dfrac{A_{вых}}{e} + \Delta\varphi = 1{,}5$ В.

6.3.25. Между электродами фотоэлемента предыдущей задачи приложена задерживающая разность потенциалов $U_з$ = 1 В. При каком предельном значении длины волны λ_{max} падающего на катод света начинается фотоэффект?

Ответ: $\lambda_{max} = \dfrac{hc}{hc/\lambda + e\left(\Delta\varphi - U_з\right)} \le 248$ нм.

6.4. Фотоны. Давление света

6.4.1. Определите энергию ε, массу m и импульс p кванта света (фотона), если его длина волны равна λ = 0,016 Å.

Ответ: $\varepsilon = hc/\lambda = 1{,}15\cdot10^{-13}$ Дж; $m = \varepsilon/c^2 = 1{,}37\cdot10^{-30}$ кг; $p = \varepsilon/c = 4{,}1\cdot10^{-22}$ кг·м/с.

6.4.2. Какую энергию ε должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе m_0 покоящегося электрона?

Ответ: $\varepsilon = m_0c^2 = 8{,}2\cdot10^{-14}$ Дж = 0,51 МэВ.

6.4.3. Определите давление P света на стенки колбы электрической лампы мощностью $P_{эл}$ = 100 Вт. Колба лампы представляет собой стеклянный сферический сосуд радиусом r = 5 см. Коэффициент отражения света стенками лампы ρ = 0,1, а коэффициент пропускания τ = 0,85. (Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение).

Ответ: $P = \dfrac{(1-\tau)P_{эл}(1+\rho)}{4\pi r^2 c} = 1{,}75$ мкПа.

6.4.4. Ртутная дуга имеет мощность $P_{эл}$ = 125 Вт. Сколько квантов света N испускается ежесекундно излучением двух спектральных линий: λ_1 = 6123 Å; λ_2 = 2537 Å? Интенсивность I этих линий равна, соответственно: 2 % и 4 % от интенсивности ртутной дуги I_0 ($\delta = I/I_0$). Считать, что η = 80 % мощности идет на излучение.

Ответ: $N = \delta\cdot\eta\lambda P_{эл}/(hc)$; $N_1 = 6{,}2\cdot10^{18}$ с$^{-1}$; $N_2 = 5{,}1\cdot10^{18}$ с$^{-1}$.

6.4.5. Определите массу m кванта рентгеновских лучей ($\lambda_1 = 2{,}5\cdot10^{-9}$ см) и гамма-лучей ($\lambda_2 = 1{,}24\cdot10^{-10}$ см).

Ответ: $m_1 = h/(\lambda_1 c) = 8{,}8\cdot10^{-32}$ кг; $m_2 = h/(\lambda_2 c) = 1{,}8\cdot10^{-30}$ кг.

6.4.6. Сколько фотонов N рентгеновского излучения с длиной волны λ = 3 нм должно падать в секунду на поверхность абсолютно чёрного тела площадью S = 4,8 см^2, чтобы создать на него такое же давление, какое создаётся солнечным светом, падающего нормально, на чёрную поверхность, полностью поглощающую лучи и находящуюся на орбите Земли? Солнечная постоянная E_c = 1370 Дж/(м^2·с).

Ответ: $N = \lambda S E_c/(hc) = 10^{16}$ с$^{-1}$.

6.4.7. Сколько фотонов N рентгеновского излучения с длиной волны λ = 1,5 нм должно падать в секунду на поверхность абсолютно чёрного тела площадью S = 2,4 см^2, чтобы создать на него такое же давление, какое создаётся солнечным светом, падающим перпендикулярно на зеркальную поверхность, полностью отражающую солнечные лучи и находящуюся на орбите Земли? Солнечная постоянная E_c = 1370 Дж/(м^2·с).

Ответ: $N = 2\lambda S E_c/(hc) = 5{,}0\cdot10^{15}$ с$^{-1}$.

6.4.8. Принимая Землю за абсолютно чёрное тело, определите силу F давления солнечного излучения на земной шар. Радиус R Земли считать равным 6400 км. Солнечная постоянная E_c = 1370 Дж/(м^2·с).

Ответ: $F = \pi R^2 E_c / c = 5{,}9\cdot10^8$ Н.

6.4.9. На каждый квадратный сантиметр чёрной поверхности ежесекундно падает $n = 2{,}8\cdot10^{17}$ квантов света с длиной волны λ = 400 нм. Какое давление P создаёт это излучение на поверхность?

Ответ: $P = hn/\lambda$ = 4,6 мкПа.

6.4.10. Сколько энергии Φ_e должно приносить световое излучение на каждый квадратный миллиметр площади S чёрной поверхности за секунду, чтобы световое давление P на эту поверхность равнялось 1 Н/м^2?

Ответ: $\Phi_e = PcS$ = 300 Вт.

6.4.11. Световое давление P, создаваемое зёлеными лучами с длиной волны λ = 550 нм на чёрную поверхность, равно 1 Н/м^2. Сколько квантов N света ежесекундно попадает на S = 1 мм^2 этой поверхности?

Ответ: $N = P\lambda S/h = 8{,}3\cdot10^{20}$ с$^{-1}$.

6.4.12. Метеорит диаметром d = 1,2 мм находится на орбите Земли. Во сколько раз сила F_G его притяжения к Солнцу больше силы $F_{св}$ светового давления, если плотность вещества метеорита $\rho = 7{,}0\cdot10^3$ кг/м^3? Считать, что метеорит полностью поглощает падающее на него излучение. (Масса Солнца $M_C = 1{,}989\cdot10^{30}$ кг. Солнечная постоянная E_c = 1370 Дж/(м^2·с). Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2. Средний радиус орбиты Земли $r = 1{,}49\cdot10^{11}$ м). Как будет изменяться ответ в задаче при уменьшении диаметра метеорита?

Ответ: $\dfrac{F_G}{F_{св}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{GM_C\rho cd}{E_C r^2} = 7300$; будет уменьшаться.

6.4.13. Монохроматический пучок света (λ = 490 нм), падая нормально на поверхность, производит световое давление P = 4,9 мкПа. Какое число N фотонов падает в единицу времени на единицу площади этой поверхности? Коэффициент отражения света ρ = 0,25.

Ответ: $N = P\lambda / \left[h(1+\rho)\right] = 2{,}9\cdot10^{21}$ с$^{-1}\cdot$м$^{-2}$.

6.4.14. На поверхность площадью S = 0,01 м^2 нормально падает световой поток Φ_e = 1,05 Вт. Определите световое давление P на эту поверхность, если она полностью отражает падающие на нее лучи.

Ответ: $P = 2\Phi_e/(Sc)$ = 0,7 мкПа.

6.4.15. На поверхность площадью S = 100 см^2 в течение каждой секунды (Δt = 1 с) падает световое излучение с энергией W = 1,05 Дж. Определите давление P света в том случае, если поверхность полностью поглощает падающие на неё лучи.

Ответ: $P = W/(Sc\Delta t)$ = 0,35 мкПа.

6.4.16. Определите световое давление P на стенки электрической лампы мощностью $P_{эл}$ = 100 Вт. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом r = 5 см. Стенки лампы отражают ρ = 4 % и пропускают τ = 90 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

Ответ: $P = \dfrac{(1-\tau)P_{эл}(1+\rho)}{4\pi r^2 c} = 1{,}1$ мкПа.

6.4.17. Пучок монохроматического света (λ = 662 нм) падает на зачерненную поверхность и производит на неё давление P = 0,3 мкПа. Определите концентрацию n фотонов в световом пучке.

Ответ: $n = P\lambda/(hc) = 10^{12}$ м$^{-3}$.

6.4.18. Монохроматическое излучение с длиной волны λ = 500 нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой F = 10 нН. Определите число N фотонов, ежесекундно падающих на эту поверхность.

Ответ: $N = F\lambda/(2h) = 3{,}77\cdot10^{18}$ с$^{-1}$.

6.4.19. Давление P монохроматического света (λ = 600 нм) на чёрную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,1 мкПа. Определите число N фотонов, падающих за 1 с на поверхность площадью S = 1 см^2.

Ответ: $N = PS\lambda/h = 9\cdot10^{15}$ с$^{-1}$.

6.4.20. Определите длину волны λ фотона, масса которого равна массе покоя протона ($m_{0p} = 1{,}672\cdot10^{-27}$ кг).

Ответ: $\lambda = h/(m_{0p}c) = 1{,}32\cdot10^{-15}$ м = 1,32 фм.

6.4.21. Определите длину волны λ, массу m и импульс p фотона с энергией ε = 1 МэВ.

Ответ: $\lambda = hc/\varepsilon = 1{,}24\cdot10^{-12}$ м; $m = \varepsilon/c^2 = 1{,}8\cdot10^{-30}$ кг;
$p = \varepsilon/c = 5{,}3\cdot10^{-22}$ кг·м/с.

6.4.22. Определите длину волны λ фотона, импульс p которого равен импульсу электрона, обладающего скоростью v = 10 Мм/с.

Ответ: $\lambda = \dfrac{h}{m_0 v}\sqrt{1-(v/c)^2} = 7{,}3\cdot10^{-11}$ м = 73 пм.

6.4.23. Определите энергию ε (в эВ), массу m и импульс фотона p, которому соответствует длина волны λ = 380 нм (фиолетовая граница видимого спектра).

Ответ: $\varepsilon = hc/\lambda = 3{,}27$ эВ; $m = \varepsilon/c^2 = 5{,}8\cdot10^{-36}$ кг;
$p = \varepsilon/c = 1{,}74\cdot10^{-27}$ кг·м/с.

6.4.24. Спутник в форме шара движется вокруг Земли на такой высоте, что поглощением солнечного света в атмосфере можно пренебречь. Диаметр спутника составляет d = 40 м. Принимая, что поверхность спутника полностью отражает свет, определите силу давления солнечного света на спутник. Солнечная постоянная E_c = 1370 Дж/(м^2·с).

Ответ: $F = \dfrac{\pi d^2 E_C (1+\rho)}{4c} = 11{,}5$ мН.

6.4.25. Поток энергии Φ_e, излучаемый электрической лампой, равен 600 Вт. На расстоянии, равном r = 1 м от лампы, перпендикулярно падающим лучам, расположено круглое плоское зеркало диаметром d = 2 см. Принимая, что излучение лампы одинаково во всех направлениях и что зеркало полностью отражает падающий на него свет (ρ = 1), определите силу F светового давления на зеркало.

Ответ: $F = \dfrac{(1+\rho)\Phi_e d^2}{16 r^2 c} = 0{,}1$ нН.

6.5. Эффект Комптона

6.5.1. Фотон с энергией ε, равной энергии покоя электрона (m_0c^2), рассеялся на свободном электроне на угол θ = 120°. Определите энергию ε′ рассеянного фотона и кинетическую энергию T электрона отдачи (в единицах m_0c^2).

Ответ: $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon(1-\cos\theta)/(m_0c^2)} = 0{,}4 m_0 c^2$; $T = \varepsilon - \varepsilon' = 0{,}6\ m_0c^2$.

6.5.2. Определите угол θ рассеяния фотона, испытавшего соударение со свободным электроном, если изменение длины волны при рассеянии Δλ = 3,63 пм.

Ответ: $\theta = \arccos(1-\Delta\lambda/\lambda_c) = 120^\circ$.

6.5.3. Фотон с энергией ε = 0,75 МэВ рассеялся на свободном электроне под углом θ = 60°. Считая электрон до соударения с фотоном покоящимся, определите направление его движения.

Ответ: $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{m_0c^2}{\varepsilon + m_0c^2}\mathrm{ctg}(\theta/2) = 0{,}70;\quad \varphi \approx 35^\circ$.

6.5.4. Длина волны λ фотона равна комптоновской длине волны λ_c для электрона. Определите энергию ε и импульс p фотона.

Ответ: $\varepsilon = hc/\lambda_c$ = 0,511 МэВ; $p = h/\lambda_c = 2{,}7\cdot10^{-22}$ кг·м/с.

6.5.5. Фотон с энергией ε = 0,4 МэВ рассеялся под углом θ = 90° на свободном электроне. Определите энергию ε′ рассеянного фотона и кинетическую энергию *T* электрона отдачи.

Ответ: $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon(1-\cos\theta)\big/\left(m_0c^2\right)} = 0{,}224$ МэВ; $T = \varepsilon - \varepsilon' = 0{,}176$ МэВ.

6.5.6. Фотон был рассеян на угол θ = 90° при соударении с электроном. Определите энергию фотона ε до рассеяния, если энергия рассеянного фотона ε′ = 0,4 МэВ.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon' m_0c^2}{m_0c^2 - \varepsilon'} = 1{,}84$ МэВ.

6.5.7. Рентгеновские лучи с длиной волны λ = 0,0708 нм испытывают комптоновское рассеяние на парафине. Определите длину волны λ′ рентгеновских лучей, рассеянных под углом θ = 60° к направлению падающих лучей.

Ответ: $\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta) = 0{,}0720$ нм.

6.5.8. Энергия ε падающего фотона равна энергии покоя электрона (m_0c^2). Определите долю δ_1 энергии ε′, полученной рассеянным фотоном от падающего фотона с энергией ε, и долю δ_2 энергии, переданной электрону отдачи, если θ = 90°.

Ответ: $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \dfrac{1}{1+\varepsilon\big/\left(m_0c^2\right)} = 0{,}5$; $\delta_2 = 1 - \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 0{,}5$.

6.5.9. Энергия ε падающего фотона равна энергии покоя электрона (m_0c^2), а угол θ рассеяния фотона составляет 180°. Определите долю δ энергии падающего фотона, полученную электроном отдачи.

Ответ: $\delta = 1 - \dfrac{1}{2\varepsilon\big/\left(m_0c^2\right)+1} = 0{,}67$.

6.5.10. Фотон с длиной волны λ = 0,01 Å рассеялся на свободном электроне под углом θ = 90°. Определите, какую долю δ своей энергии фотон передал электрону отдачи.

Ответ: $\delta = 1 - \dfrac{1}{h\big/\left(m_0c\lambda\right)+1} = 0{,}71$.

6.5.11. Фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол θ = 180°. Определите импульс *p* электрона отдачи при эффекте Комптона.

Ответ: $p = 2m_0c\big/\sqrt{3} = 3{,}2\cdot10^{-22}$ кг·м/с.

6.5.12. При соударении с электроном фотон в результате эффекта Комптона был рассеян на угол $\theta = 60°$. Энергия ε' рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определите энергию ε фотона до рассеяния.

Ответ: $\varepsilon = 2m_0c^2\varepsilon' \Big/ \left(2m_0c^2 - \varepsilon'\right) = 0{,}249$ МэВ.

6.5.13. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}5$ МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90°$. Считая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определите направление движения электрона отдачи.

Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{1 + \varepsilon \big/ \left(m_0c^2\right)}\right) = 27°$.

6.5.14. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}25$ МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 120°$. Полагая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном малы (по сравнению с другими величинами), определите кинетическую энергию T электрона отдачи.

Ответ: $T = 3\varepsilon^2 \Big/ \left(3\varepsilon + 2m_0c^2\right) = 0{,}11$ МэВ.

6.5.15. При соударении с электроном фотон в результате эффекта Комптона был рассеян на угол $\theta = 120°$. Энергия ε' рассеянного фотона равна 0,1 МэВ. Определите энергию ε фотона до рассеяния.

Ответ: $\varepsilon = 2m_0c^2\varepsilon' \Big/ \left(2m_0c^2 - 3\varepsilon'\right) = 0{,}142$ МэВ.

6.5.16. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}25$ МэВ рассеялся на свободном электроне. Энергия ε' рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определите угол рассеяния θ фотона.

Ответ: $\theta = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{m_0c^2\left(\varepsilon - \varepsilon'\right)}{2\varepsilon\varepsilon'}} = 60°40'$.

6.5.17. Фотон, при комптоновском рассеянии на свободном электроне под углом $\theta = 120°$, после рассеяния имеет энергию $\varepsilon' = 0{,}2$ МэВ. Определите энергию ε фотона до рассеяния.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{2m_0c^2\varepsilon'}{2m_0c^2 - 3\varepsilon'} = 0{,}48$ МэВ.

6.5.18. Фотон с энергией $\varepsilon = 250$ кэВ рассеялся под углом $\theta = 120°$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите энергию ε' рассеянного фотона.

Ответ: $\varepsilon' = \dfrac{2m_0c^2\varepsilon}{2m_0c^2 + 3\varepsilon} = 144$ кэВ.

6.5.19. Рентгеновские лучи с длиной волны λ = 0,02 нм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90°$. Определите длину волны λ' рассеянных рентгеновских лучей.

Ответ: $\lambda' = \lambda + \lambda_c = 0{,}022$ нм.

6.5.20. Определите кинетическую энергию T электрона отдачи при комптоновском рассеянии под углом $\theta = 90°$ рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 0{,}02$ нм.

Ответ: $T = \dfrac{hc\lambda_c}{\lambda(\lambda + \lambda_c)} = 6{,}7$ кэВ.

6.5.21. Энергия рентгеновских лучей равна ε = 0,6 МэВ. Определите энергию T электрона отдачи, если относительное изменение δ длины волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния составило 20 %.

Ответ: $T = \delta\varepsilon/(1+\delta) = 0{,}1$ МэВ.

6.5.22. Рентгеновские лучи с длиной волны λ = 0,02 нм испытывают комптоновское рассеяние. Определите энергию T электрона отдачи, если относительное изменение δ длины волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния составляет 30 %.

Ответ: $T = \dfrac{\delta}{1+\delta} \cdot \dfrac{hc}{\lambda} = 14{,}3$ кэВ.

6.5.23. Определите длину волны λ рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии максимальная энергия электрона отдачи $T = 0{,}19$ МэВ.

Ответ: $\lambda = \sqrt{\lambda_c^2 + 2hc\lambda_c/T} - \lambda_c = 3{,}7$ пм.

6.5.24. Фотон с энергией ε = 0,5 МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 30°$. Полагая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определите направление движения электрона отдачи.

Ответ: $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{m_0c^2}{m_0c^2 + \varepsilon}\mathrm{ctg}(\theta/2)$; $\varphi \approx 62°$.

6.5.25. Фотон с энергией ε = 0,3 МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 60°$. Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определите направление движения электрона отдачи.

Ответ: $\varphi = \mathrm{arctg}\left[\dfrac{\mathrm{ctg}(\theta/2)}{1 + \varepsilon/(m_0c^2)}\right] \approx 45°$.

7. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ФИЗИКА АТОМА

Основные формулы и обозначения

Длина волны де Бройля

$$\lambda = h/p,$$

где h = 6,626·10^{-34} Дж·с, $\hbar = h/(2\pi)$ = 1,054·10^{-34} Дж·с – постоянная Планка; p – импульс частицы.

Связь длины волны де Бройля и кинетической энергией K частицы массой покоя m_0:

а) нерелятивистский (классический) случай $\lambda_Б = h\big/\sqrt{2m_0K}$;

б) релятивистский случай $\lambda_Б = hc\Big/\sqrt{K\left(K + 2m_0c^2\right)}$.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \qquad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar, \qquad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar,$$

где Δx, Δy, Δz – неопределенности координат; Δp_x, p_y, Δp_z – неопределенности соответствующих проекций импульса частицы на оси координат.

Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \left|\Psi\left(x\right)\right|^2 dx,$$

где $\Psi(x)$ – волновая функция, описывающая состояние частицы.

Среднее значение физической величины L, характеризующей частицу, находящуюся в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(x, y, z)$

$$\left\langle L \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* L \Psi dV = \int_{-\infty}^{+\infty} L\left|\Psi\right|^2 dV.$$

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)

$$m_e v r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где m_e – масса электрона; v – скорость электрона на n-й орбите радиусом r_n.

Второй постулат Бора (правило частот)

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m,$$

где E_n и E_m – энергии стационарных состояний до и после излучения (поглощения).

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\Psi + U\Psi = E\Psi,$$

где $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ – оператор Лапласа; $\Psi(x, y, z)$ – волновая функция, E и U – полная и потенциальная энергии частицы.

Стационарное уравнение Шредингера для одного измерения

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-U(x)\right]\Psi=0.$$

Нормированная собственная функция, отвечающая $1s$-состоянию (основному состоянию) и $2s$-состоянию атома водорода:

$$\Psi_{1s}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\cdot e^{-r/a},\ \Psi_{2s}(r)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}}\left(2-\frac{r}{a}\right)\cdot e^{-r/(2a)},$$

где $a = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(me^2) = 5{,}29\cdot10^{-11}$ м – радиус первой боровской орбиты.

Коэффициент прозрачности потенциального барьера высотой U:

$$D\cong\exp\left[-\frac{2x}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\right],$$

где x – ширина барьера; E – полная энергия частицы.

Энергия гармонического осциллятора

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Энергия частицы в яме с бесконечно высокими стенками и шириной l

$$E_n=n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}.$$

Энергия фотона, испущенного атомом водорода,

$$E_{nm}=h\nu=hR\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)\ \text{или}\ E_{nm}=chR'\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)\quad(m>n),$$

где $R=\dfrac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}=3{,}29\cdot10^{15}\ \text{с}^{-1}$ и $R' = 1{,}10\cdot10^7$ м$^{-1}$ – постоянная Ридберга.

Энергетические уровни атома водорода

$$E_n=-\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Коэффициент преломления n волн де Бройля на границе низкого потенциального барьера ($U_0 < E$) бесконечной ширины для частицы движущейся из области I в II (рис. 7.1):

$$n=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{k_2}{k_1},$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн де Бройля в областях I и II; k_1 и k_2 – соответствующие значения волновых чисел: $k_1=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k_2=\dfrac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$.

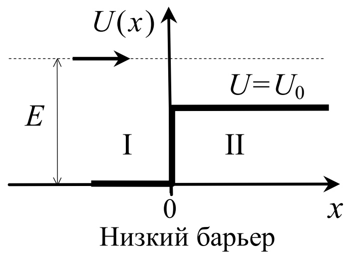

Рис. 7.1

Коэффициент отражения r волн де Бройля на границе потенциального барьера, изображенного на рис. 7.1:

$$r = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2.$$

Орбитальный момент импульса электрона

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где l – орбитальное квантовое число, $l = 0, 1, \ldots, n-1$ (всего n значений).

Задачи с решениями

Задача 1. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля λ для двух случаев: 1) $U_1 = 51$ В; $U_2 = 510$ кВ.

Дано:
$U_1 = 51$ В
$U_2 = 5{,}1\cdot10^5$ В
$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
$m_0 = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг
$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с
λ_1 – ? λ_2 – ?

Решение. Связь длины волны де Бройля и кинетической энергией K частицы массой покоя m_0:

а) нерелятивистский (классический) случай

$$\lambda_Б = h\Big/\sqrt{2m_0K};$$

б) релятивистский случай

$$\lambda_Б = hc\Big/\sqrt{K\left(K + 2m_0c^2\right)}.$$

Работа сил электрического поля равна изменению кинетической энергии электрона

$$A = K_{кон} - K_{нач}.$$

Здесь $A = eU$, так как $K_{нач} = 0$, $K_{кон} = eU$.

Теперь необходимо определить характер движения электрона – нерелятивистский или релятивистский. Для этого сравним кинетическую энергию электрона $K_{кон}$ (в двух случаях) с энергией покоя электрона E_0.

$$E_0 = m_0c^2 = 9{,}1\cdot10^{-31}\cdot(3\cdot10^8)^2 = 8{,}19\cdot10^{-14}\text{ Дж} = 0{,}51\text{ МэВ}.$$

В первом случае

$$K_1 = eU_1 = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot51 = 8{,}16\cdot10^{-18}\text{ Дж} = 51\text{ эВ}.$$

Во втором случае

$$K_2 = eU_2 = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5{,}1\cdot10^5 = 8{,}16\cdot10^{-14}\text{ Дж} = 0{,}51\text{ МэВ}.$$

Следовательно, в первом случае $K_1 << E_0$ – нерелятивистское движение электрона и его длину волны де Бройля λ_1 необходимо рассчитывать по классической формуле, во втором случае $K_2 \approx E_0$ и λ_2 рассчитывается по формуле, учитывающей релятивистский эффект.

Принимая во внимание, что $K_1 = 10^{-4}E_0$, а $K_2 = E_0$, рассчитаем λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0K_1}} = \frac{h}{\sqrt{2(E_0/c^2)\cdot 10^{-4}E_0}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}}\frac{hc}{E_0} =$$

$$= \frac{10^2\cdot 6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{\sqrt{2}\cdot 8,19\cdot 10^{-14}} = 1,71\cdot 10^{-10}\text{ м} = 171\text{ пм}.$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{K_2(2E_0+K_2)}} = \frac{hc}{\sqrt{E_0(2E_0+E_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{3}E_0} =$$

$$= \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{\sqrt{3}\cdot 8,19\cdot 10^{-14}} = 1,40\cdot 10^{-12}\text{ м} = 1,4\text{ пм}.$$

Ответ: λ_1 = 171 пм; λ_2 = 1,4 пм.

Задача 2. Волновая функция $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике шириной l. Вычислить вероятность P нахождения частицы в малом интервале $\Delta l = 0,01l$ в двух случаях: 1) вблизи стенки ($0 \le x \le \Delta l$); 2) в средней части ящика ($l/2 - \Delta l/2 \le x \le l/2 + \Delta l/2$).

Дано:
$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$
$\Delta l = 0,01l$

P_1 – ? P_2 – ?

Решение. Вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале от x_1 до x_2, запишется в виде

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \left|\Psi(x)\right|^2 dx.$$

В первом случае вероятность найдется интегрированием в пределах от 0 до $0,01l$ (рис. 7.2):

$$P_1 = \frac{2}{l}\int_0^{0,01l}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx.$$

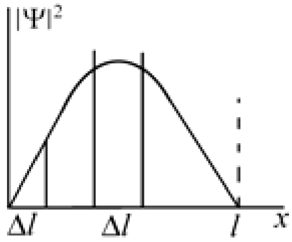

Рис. 7.2

Знак модуля опущен, так как Ψ-функция в данном случае не является комплексной.

Так как x изменяется в интервале $0 \le x \le 0,01l$ и, следовательно, $\pi x/l \ll 1$, справедливо приближенное равенство

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) \approx \left(\frac{\pi}{l}x\right)^2.$$

С учетом этого искомая вероятность примет вид

$$P_1 = \frac{2}{l}\int_0^{0,01l}\left(\frac{\pi}{l}x\right)^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,01l} = \frac{2\pi^2}{3}\cdot 10^{-6} = 6,6\cdot 10^{-6}.$$

Во втором случае можно обойтись без интегрирования, так как квадрат модуля волновой функции вблизи ее максимума в заданном малом интервале (Δl = 0,01l) практически не изменяется (см. рис. 7.2). Искомая вероятность во втором случае определяется выражением

$$P_2 = \left|\Psi\left(\frac{l}{2}\right)\right|^2 \cdot \Delta l = \frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\frac{l}{2}\right)\Delta l = \frac{2}{l}\cdot 1^2 \cdot 0,01l = 0,02.$$

Из сравнения видно, что $P_1 << P_2$ и, следовательно, частица с наибольшей вероятностью находится в средней части ящика.

Ответ: $P_1 = 6{,}6\cdot10^{-6}$; $P_2 = 0{,}02$.

Задача 3. Кинетическая энергия K электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные размеры атома.

Дано:
$K = 1{,}6\cdot10^{-18}$ Дж
$l_{\min} - ?$

Решение. Для решения воспользуемся соотношением неопределенностей

$$\Delta x\cdot\Delta p_x \ge \hbar.$$

Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно и энергия частицы.

Пусть атом имеет линейные размеры l, тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2$. Соотношение неопределенностей можно записать в этом случае в виде

$$(l/2)\cdot\Delta p_x \ge \hbar,$$

отсюда
$$l \ge 2\hbar/\Delta p_x.$$

Физическая разумная неопределенность импульса Δp_x во всяком случае не должна превышать значения самого импульса p_x, т. е. $\Delta p_x \le p_x$.

Импульс p_x связан с кинетической энергией K соотношением

$$p_x = \sqrt{2m_0K}.$$

Заменим Δp_x на p_x (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2m_0K}} = \frac{2\cdot1,05\cdot10^{-34}}{\sqrt{2\cdot9,1\cdot10^{-31}\cdot1,6\cdot10^{-18}}} = 1,24\cdot10^{-10}\ \text{м} = 124\ \text{пм}.$$

Ответ: $l_{\min}$ = 124 пм.

Задача 4. Электрон в атоме водорода перешел с четвертого энергетического уровня на второй. Определить энергию испущенного при этом фотона.

Дано:	**Решение.** Для решения воспользуемся формулой для расчета энергии фотона, испущенного атомом водорода:
$n_1 = 2$ $n_2 = 4$ $R = 3{,}29\cdot10^{15}$ с$^{-1}$	$$E_ф = hR\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right);$$
$E_ф$ – ?	

$$E_ф = 6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3{,}29\cdot10^{15}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 4{,}08\cdot10^{-19}\ \text{Дж} = 2{,}55\ \text{эВ}.$$

Ответ: $E_ф = 2{,}55$ эВ.

Задача 5. Найти вероятность P нахождения частицы с наименьшей энергией в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками в области $a/3 < x < 2a/3$, где a – ширина ямы.

Решение. Из решения стационарного уравнения Шредингера, описывающего поведение частицы внутри ямы с бесконечными стенками и шириной a, известно, что

$$\Psi(x) = A\sin(kx + \alpha),$$

где A – амплитуда волны; $k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$.

Вне ямы волновая функция равна нулю, т. е. $\Psi_{вне}(x) = 0$.

Из условия $\Psi(0) = 0$ $\sin(\alpha) = 0$, что соответствует $\alpha = 0$.

Из условия $\Psi(a) = 0$ $\sin(ka) = 0$. Это справедливо при $k = n\pi/a$, где n – целое число.

Применим условие нормировки $\int\limits_0^a \Psi\Psi^* dx = 1$.

$$\int\limits_0^a A^2\sin^2\frac{2\pi x}{a}dx = A^2\int\limits_0^a \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi x}{a}\right)dx = \frac{A^2}{2}x\Big|_0^a - \frac{A^2}{2}\frac{a}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{a}\Big|_0^a = \frac{A^2}{2}a = 1.$$

Отсюда $A = \sqrt{2/a}$.

Таким образом, волновая функция, описывающая состояние частицы внутри ямы, имеет вид

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),\ \text{где } n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

Вероятность нахождения частицы в заданном интервале вычисляется:

$$P = \int\limits_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2\, dx.$$

Наименьшей энергии соответствует состояние с $n = 1$.

$$P = \frac{2}{a}\int\limits_{a/3}^{2a/3}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}61.$$

Ответ: $P = 0{,}61$.

Задача 6. Найти средний электростатический потенциал, создаваемый $1s$-электроном в центре атома водорода.

Решение. $1s$ – основное состояние атома водорода, которое характеризуется набором квантовых чисел,

$$n = 1,\ l = 0,\ m_l = 0,\ m_s = \pm 1/2.$$

Нормированная собственная функция, отвечающая $1s$ – основному состоянию атома водорода, имеет вид

$$\Psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_Б^3}} \cdot e^{-r/a_Б},$$

где $a_Б = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м – радиус первой боровской орбиты (наиболее вероятное расстояние $1s$-электрона от ядра).

Среднее значение потенциала φ определим как

$$\langle \varphi_{1s} \rangle = \int\limits_V \Psi_{1s}^* \hat{\varphi}_{1s} \Psi_{1s} dV \quad \text{или} \quad \langle \varphi_{1s} \rangle = \int\limits_V \hat{\varphi}_{1s} \left|\Psi_{1s}\right|^2 dV,$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$ – объем сферического слоя радиусом r и толщиной dr; оператор $\hat{\varphi}_{1s} = e/r$.

Подставим найденные волновую функцию Ψ_{1s}, элемент объема dV и оператор $\hat{\varphi}_{1s}$ в выражение для $\langle \varphi_{1s} \rangle$:

$$\langle \varphi_{1s} \rangle = \frac{4\pi e}{\pi a_Б^3} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_Б}} \frac{r^2 dr}{r} = \frac{4e}{a_Б^3} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_Б}} r dr.$$

Табличный интеграл имеет вид

$$\int\limits_0^\infty x^n e^{\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Тогда

$$\langle \varphi_{1s} \rangle = \frac{e}{a_Б}.$$

Задача 7. Поведение частицы в потенциальной яме с бесконечными стенками и шириной l описывается волновой функцией $\Psi = A\sin(2\pi x/l)$, где $0 \le x \le l$. Определить нормировочный множитель A.

Решение. Вероятность нахождения частицы определена условием задачи и равна 1:

$$\int\limits_0^l \left|\Psi(x)\right|^2 dx = 1.$$

Подставим значение волновой функции и вычислим интеграл:

$$\int\limits_0^l A^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx = A^2 \int\limits_0^l \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi x}{l}\right) dx = \frac{A^2}{2} x \Big|_0^l - \frac{A^2}{2} \frac{l}{4\pi} \sin\frac{4\pi x}{l} \Big|_0^l = \frac{A^2}{2} l = 1.$$

Отсюда легко видеть, что $A = \sqrt{2/l}$.

Задача 8. Параллельный пучок моноэнергетических электронов направлен нормально на узкую щель a шириной 1 мкм. Определить скорость электронов, если на экране, отстоящем на расстоянии l = 0,4 м от щели, наблюдается дифракционный максимум шириной Δx = 24 мкм.

Дано:	
$a = 10^{-6}$ м	
$l = 0{,}4$ м	
$\Delta x = 2{,}4\cdot10^{-5}$ м	
υ_x – ?	

Решение. Ширина изображения щели на экране и ширина щели a связаны соотношением неопределенностей

$$\Delta p_x \cdot a \geq \hbar.$$

Так как $\Delta p_x = m_e \Delta \upsilon_x$, то

$$m_e \Delta \upsilon_x a \geq \hbar. \qquad (1)$$

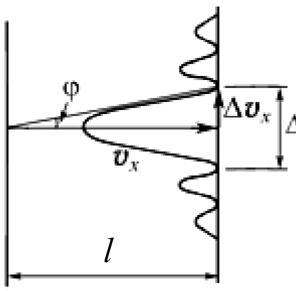

Рис. 7.3

В свою очередь, из рис. 7.3 видно, что

$$\Delta \upsilon_x = \upsilon_x \operatorname{tg}\varphi, \text{ где } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta x}{2l}.$$

Так как $a << \Delta x$, то $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$. Следовательно,

$$\Delta \upsilon_x = \upsilon_x \Delta x/(2l). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) окончательно получаем

$$\upsilon_x \geq \frac{2\hbar l}{\Delta x m_e a} = \frac{2\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}\cdot 0{,}4}{1\cdot 10^{-6}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 2{,}4\cdot 10^{-5}} = 3{,}85\cdot 10^{6}\ \text{м} = 3{,}85\ \text{Мм}.$$

Таким образом, скорость υ_x должна быть не меньше чем 3,85 Мм.

Ответ: $\upsilon_x \geq 3{,}85$ Мм.

Альтернативное решение. Любой движущейся микрочастице можно сопоставить волну де Бройля, отражающую её квантовую природу. Длина волны де Бройля для электрона, имеющего скорость υ_x, равна $\lambda = h/p = h/(m_e \upsilon_x)$. Отсюда

$$\upsilon_x = h/(m_e \lambda). \qquad (1)$$

Запишем (см. гл. 3) условие для первого минимума интенсивности при дифракции на щели: $a\sin\varphi = \lambda$. Имеем $\sin\varphi \approx \varphi = \Delta x/(2l)$ (рис. 7.3). Тогда $a\Delta x/(2l) = \lambda$. Подставляя в (1), получим:

$$\upsilon_x = 2hl/(\Delta x m_e a) = 2{,}4\cdot 10^{7}\ \text{м/с} = 24\ \text{Мм}.$$

Задача 9. Электрон перешел из возбужденного состояния в основное, испустив фотон с длиной волны λ = 102 нм. Определить изменение орбитального механического момента электрона.

Дано:	
$n = 1$	
$\lambda = 1{,}02\cdot10^{-7}$ м	
$R' = 1{,}1\cdot10^{7}$ м$^{-1}$	
ΔL – ?	

Решение. Из первого постулата Бора (постулат стационарных состояний) $m_e \upsilon r_n = n\hbar$, где m_e и υ – масса и скорость электрона на n-й орбите радиусом r_n, следует, что орбитальный момент $L = m_e \upsilon r_n$ электрона кратен $\hbar$.

Следовательно, изменение орбитального момента ΔL электрона равно:

$$\Delta L = (m - n)\hbar,$$

где m – энергетический уровень, характеризующий возбужденное состояние; $n = 1$.

Длина волны λ и значения квантовых уровней энергии m и n связаны посредством постоянной Ридберга следующим соотношением:

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

После несложных преобразований находим $m = \sqrt{\frac{\lambda R'}{\lambda R' - 1}}$.

Тогда

$$\Delta L = \left(\sqrt{\frac{\lambda R'}{\lambda R' - 1}} - 1\right)\hbar = \left(\sqrt{\frac{1{,}02 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-7}}{1{,}02 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-7} - 1}} - 1\right) \cdot \hbar = 2\hbar = 2{,}1 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Изменение ΔL должно быть кратно $\hbar$.

Ответ: $\Delta L = 2\hbar = 2{,}1 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Задача 10. Определите энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй.

Дано:	**Решение.** Изменение энергии, согласно второму постулату Бора, равно
$n = 2$	$h\nu_{mn} = E_n - E_m,$
$m = 3$	где E_m и E_n – энергии стационарных состояний до и после излучения.
$R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$	
E_{32} – ?	

Определим энергию перехода:

$$E_{mn} = E_n - E_m = h\nu = hR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$E_{32} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}29 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 3{,}03 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1{,}89 \text{ эВ}.$$

Ответ: $E_{32} = 1{,}89$ эВ.

Задача 11. Протон с энергией $E = 10{,}07$ эВ взаимодействует с прямоугольным потенциальным барьером высотой $U_0 = 12{,}0$ эВ и шириной $l = 0{,}2$ нм. Определить вероятность прохождения протоном данного барьера. Движение одномерное, протон движется прямолинейно вдоль оси $+x$. Аналогичный расчет проведите для электрона.

Дано:
$E = 1{,}61 \cdot 10^{-18}$ Дж
$U_0 = 1{,}92 \cdot 10^{-18}$ Дж
$l = 2 \cdot 10^{-10}$ м
$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
$D_\text{р}$ – ? $D_\text{е}$ – ?

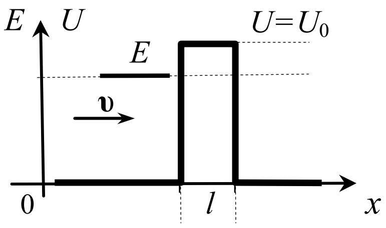

Рис. 7.4

Решение. Для нахождения вероятности (коэффициента прозрачности) прохождения потенциального барьера (рис. 7.4) воспользуемся выражением

$$D_\text{р} \cong \exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_p(U_0 - E)}\right] =$$

$$= \exp\left[-\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{1{,}05 \cdot 10^{-34}}\sqrt{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}(1{,}92 - 1{,}61) \cdot 10^{-18}}\right] =$$

$$= \exp\left[-3{,}81 \cdot 10^{24} \cdot 3{,}22 \cdot 10^{-23}\right] = \exp\left[-122{,}68\right] \approx 5{,}3 \cdot 10^{-54}.$$

Ответ: $D_\text{р} = 5{,}3 \cdot 10^{-54}$; $D_\text{е} = 0{,}057$.

Задача 12. Частица с энергией E = 12 эВ движется в положительном направлении оси x и взаимодействует с бесконечно широким прямоугольным барьером с высотой U_0 = 8 эВ. Определить коэффициент преломления волн де Бройля частицы на границе потенциального барьера.

Дано:
E = 12 эВ
U_0 = 8 эВ
n – ?

Решение. Известно, что коэффициент преломления волн де Бройля равен

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1},$$

где волновые вектора k_1 и k_2 можно вычислить, зная стационарное уравнение Шредингера, описывающего движение частицы до барьера (k_1) и над барьером ($k_2 \neq 0$),

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + k_1^2 \cdot \Psi_1 = 0, \text{ где } k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E;$$

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + k_2^2 \cdot \Psi_2 = 0, \text{ где } k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U_0\right).$$

Тогда $\dfrac{k_2^2}{k_1^2} = \dfrac{E - U_0}{E}$. Или $n = \sqrt{\dfrac{E - U_0}{E}} = \sqrt{\dfrac{12 - 8}{12}} \cong 0{,}58$.

Ответ: $n = 0{,}58$.

Задача 13. Какова минимальная полная энергия электрона в атоме водорода? Для вывода формулы использовать соотношение неопределенностей Гейзенберга. Принять неопределенность координаты, равной радиусу r атома водорода.

Решение. Запишем соотношение неопределенностей в виде

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar, \tag{1}$$

где $\Delta x = r$.

Известно, что полная энергия электрона равна сумме его кинетической и потенциальной энергий:

$$E = K + U = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{2}$$

Изменение импульса Δp_x не может быть больше, чем величина p_x. Поэтому из (1) находим, что

$$p_x = \frac{\hbar}{r}. \tag{3}$$

Комбинируя (2) и (3) получаем, что энергия электрона равна:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{4}$$

$$\frac{dE}{dr} = 0, \text{ при } r = r_{\min}.$$

Вычисляя производную по r, находим:

$$\frac{dE}{dr} = -2\frac{\hbar^2}{2m}r^{-3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}r^{-2} = 0; \quad r_m = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}.$$

Подставляя в (4), получим

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2mr_m^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_m} = \frac{me^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2\hbar^2} - \frac{me^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2\hbar^2} = -\frac{me^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2\hbar^2}.$$

Отсюда легко видеть, что

$$E_{\min} = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}. \tag{5}$$

Подстановка фундаментальных констант в формулу (5) позволяет получить значение $E_{\min} = -13{,}6$ В.

Полученное значение хорошо согласуется с экспериментальным значением энергии ионизации атома водорода.

Ответ: $E_{\min} = -13{,}6$ В.

Задачи для самостоятельного решения

7.1.1. Определить радиус a_0 первой боровской орбиты и скорость электрона υ на ней.

Ответ: $a_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(me^2) = 5{,}3\cdot10^{-11}$ м; $\upsilon = \hbar/(ma_0) = 2{,}19$ Мм/с.

7.1.2. Согласно представлениям классической электродинамики мощность излучения электрона, движущегося с ускорением a, равна $N = \dfrac{2e^2a^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}$. Оценить время жизни атома He^+ ($Z = 2$), предполагая, что электрон равномерно вращается по круговой орбите с начальным радиусом $r = 10^{-10}$ м.

Ответ: $\tau = \dfrac{4\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 c^3 r^3}{Ze^4} = 5\cdot10^{-11}$ с.

7.1.3. Определить частоту света, излучаемого водородоподобным ионом при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом n, если радиус орбиты изменился в k раз.

Ответ: $\nu = \dfrac{RcZ^2}{n^2}(1-k)$, где R – постоянная Ридберга.

7.1.4. Фотон с энергией ε = 15,0 эВ выбивает электрон из покоящего атома водорода, находящегося в основном состоянии. С какой скоростью υ движется электрон вдали от ядра, если энергия ионизации атома водорода E_i = 13,6 эВ?

Ответ: $\upsilon = \sqrt{2(\varepsilon - E_i)/m_e} = 7\cdot10^5$ м/с.

7.1.5. Какую скорость υ приобретает первоначально покоившийся атом водорода при испускании фотона, соответствующего головной линии серии: а) Лаймана; б) Бальмера?

Ответ: а) $\upsilon = \dfrac{3\hbar R}{4m_{\text{H}}c} = 3{,}25$ м/с; б) $\upsilon = \dfrac{5\hbar R}{36m_{\text{H}}c} = 0{,}6$ м/с.

7.1.6. Покоившийся атом водорода испустил фотон, соответствующий головной линии серии Лаймана. Найдите скорость отдачи, которую получил атом.

Ответ: $\upsilon = 3\hbar R/(4m_H c) = 3{,}27$ м/с.

7.1.7. Свободный покоящийся атом лития поглотил фотон частотой $\omega = 2{,}81\cdot10^{15}$ с$^{-1}$, в результате чего перешел на первый возбужденный уровень и начал двигаться с некоторой скоростью. Затем атом вернулся в основное состояние, испустив новый фотон в направлении, перпендикулярном направлению своего движения. С какой скоростью υ движется после этого атом?

Ответ: $\upsilon = \sqrt{2}\hbar\omega/(4m_{\text{Li}}c) = 0{,}12$ м/с.

7.1.8. Определить скорость v_1, с которой электрон движется по первой боровской орбите в атоме водорода.

Ответ: $v_1 = \left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\dfrac{e^2}{\hbar} = 2{,}2\cdot 10^6$ м / с.

7.1.9. Используя постоянную Планка $\hbar$, массу m_e и заряд e электрона, составить выражение для величины, имеющей размерность длины. Что это за величина?

Ответ: $r = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ – это боровский радиус ($5{,}28\cdot 10^{-11}$ м).

7.1.10. Используя постоянную Планка $\hbar$, массу m_e и заряд e электрона, составить выражение для величины, имеющей размерность энергии. Что это за величина?

Ответ: $E_R = \dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\hbar^2\varepsilon_0^2}$ – энергия ионизации атома водорода.

7.1.11. Определить магнитный момент μ_1 электрона, находящегося в атоме водорода, на первой боровской орбите. Сравните полученный результат с магнетоном Бора $\mu_Б$.

Ответ: $\mu = e\hbar/(2m_e) = 9{,}27\cdot 10^{-28}$ Дж/Тл

7.1.12. Найти для электрона, находящегося в атоме водорода на n-й боровской орбите, отношение магнитного момента μ_n к механическому моменту M_n.

Ответ: $\mu_n/M_n = e/(2m_e)$.

7.1.13. Основываясь на том, что потенциал ионизации водородного атома равен φ_i = 13,6 В, определить длину волны λ_1 первой линии: а) Лаймана; б) Бальмера; в) Пашена.

Ответ: а) $\lambda_1 = \dfrac{4hc}{3e\varphi_i} = 122$ нм; б) $\lambda_1 = \dfrac{36hc}{5e\varphi_i} = 657$ нм; в) $\lambda_1 = \dfrac{144hc}{7e\varphi_i} = 1876$ нм.

7.1.14. Исходя из того что первый потенциал возбуждения водородного атома φ_1 = 10,2 В, найти длину волны: а) линии H_α; б) границы серии Бальмера H_∞.

Ответ: $\lambda_\alpha = 54hc/(10e\varphi_1) = 658$ нм; $\lambda_\infty = 3hc/(e\varphi_1) = 365$ нм.

7.1.15. Потенциал ионизации водородного атома равен φ_i = 13,6 В. Исходя из этого определить, сколько линий серии Бальмера попадает в видимую часть спектра.

Ответ: 4 линии.

7.1.16. Атом водорода находится в основном состоянии. Вычислить: а) вероятность того, что электрон находится внутри области, ограниченной сферой радиусом, равным боровскому радиусу a; б) вероятность того, что электрон находится вне этой области. Волновую функцию считать известной $\Psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$.

Ответ: $P_1 = 0{,}324$; $P_2 = 0{,}674$.

7.1.17. Определить: а) потенциал ионизации атома водорода; б) первый потенциал возбуждения атома водорода.

Ответ: а) $\varphi_i = E_{св}/e = 13{,}6$ В,

где $E_{св} = \hbar R = 13{,}6$ эВ – энергия связи;

б) $\varphi_i = 3\hbar R/(4e) = 10{,}2$ В.

7.1.18. Найти радиусы первых трех боровских орбит атома водорода и скорости электрона на этих орбитах.

Ответ: $r_n = n^2 \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$; $\upsilon_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n}$; $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м; $r_2 = 2{,}10 \cdot 10^{-10}$ м; $r_3 = 4{,}73 \cdot 10^{-10}$ м; $\upsilon_1 = 2{,}2$ Мм/с; $\upsilon_2 = 1{,}1$ Мм/с; $\upsilon_3 = 0{,}7$ Мм/с.

7.1.19. Определить длину волны линии спектра испускания атома водорода, излучаемой при переходе электрона с орбиты 4 на орбиту 2.

Ответ: $\lambda = \frac{cm^2n^2}{R(n^2 - m^2)} = 486$ нм.

7.1.20. Воспользовавшись формулой для коэффициента прозрачности в случае потенциального барьера произвольной формы, найти для электрона с энергией E вероятность прохождения потенциального барьера, ширина которого l и высота U_0, если барьер имеет форму, показанную на рис. 7.5.

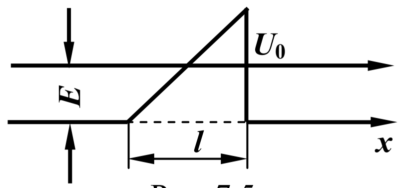

Рис. 7.5

Ответ: $D = \exp\left[\frac{8l\sqrt{2m}}{3\hbar U_0}(U - E)^{3/2}\right]$.

7.1.21. Зная, что нормированная собственная волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, найти среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра.

Ответ: $\langle r \rangle = 3a/2$.

7.1.22. Какой серии принадлежит спектральная линия атомарного водорода, волновое число которой равно разности волновых чисел следующих двух линий серии Бальмера: $\lambda_1 = 486{,}1$ нм; $\lambda_2 = 410{,}2$ нм? Какова длина волны этой линии?

Ответ: $\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 2{,}63$ мкм; $m = \sqrt{\frac{\lambda R}{c}} = 5$ – серия Пфунда.

7.1.23. Определить коэффициент пропускания прямоугольного потенциального барьера высотой U_0 = 10 эВ и шириной $d = 5\cdot10^{-10}$ м для электронов с энергией E = 9 эВ.

Ответ: $D \cong \exp\left[-\dfrac{2d}{\hbar}\sqrt{2m_e\left(U_0 - E\right)}\right] = 5{,}9\cdot10^{-3}$.

7.1.24. Найти: а) наименьшую и наибольшую длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра (серия Бальмера); б) наименьшую и наибольшую длины волн спектральных линий водорода в ультрафиолетовой области спектра (серия Лаймана); в) наименьшую и наибольшую длины волн спектральных линий водорода серии Пашена в инфракрасной области спектра.

Ответ: а) $\lambda_{min} = 4c/R$ = 365 нм; $\lambda_{max} = 36c/(5R)$ = 656 нм;

б) $\lambda_{min} = c/R$ = 91 нм; $\lambda_{max} = 4c/(3R)$ = 122 нм;

в) $\lambda_{min} = 9c/R$ = 820 нм; $\lambda_{max} = 144c/(7R)$ = 1875 нм.

7.1.25. Электрон находится в потенциальной яме шириной l = 0,5 нм. Определить наименьшую разность ΔE энергетических уровней электрона (в электронвольтах). Яма с бесконечно высокими стенками.

Ответ: $\Delta E = \dfrac{3}{8}\dfrac{h^2}{m_e l^2} = 4{,}512$ эВ.

7.2.1. Волновая функция $\Psi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\left(\dfrac{\pi}{l}x\right)$ описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике шириной l. Вычислить вероятность P нахождения частицы в малом интервале $\Delta l = 0{,}01l$ в двух случаях: 1) вблизи стенки ($0 \le x \le \Delta l$); 2) в средней части ящика $\left(\dfrac{l}{2} - \dfrac{\Delta l}{2} \le x \le \dfrac{l}{2} + \dfrac{\Delta l}{2}\right)$.

Ответ: $P_1 = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^{0{,}01l}\left(\dfrac{\pi}{l}x\right)^2 dx = 6{,}6\cdot10^{-6}$; $P_2 = \left|\Psi\left(\dfrac{l}{2}\right)\right|^2 \Delta l = 0{,}02$.

7.2.2. Кинетическая энергия K электрона в атоме водорода составляет величину порядка 12 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные размеры атома l_{min}.

Ответ: $l_{min} = 2\hbar\big/\sqrt{2m_eK} = 113$ пм.

7.2.3. Электрон находится в одномерном с бесконечными стенками прямоугольном потенциальном ящике шириной l. Вычислить вероятность P того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии (n = 2), будет находиться в средней третьей части ящика.

Ответ: $P = \dfrac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\sin^2\left(\dfrac{2\pi x}{l}\right)dx = 0{,}195$.

7.2.4. Электрон в потенциальном ящике шириной l характеризуется волновым числом $k = \pi n/2$, где n = 1, 2, 3, ... Используя связь энергии E с волновым вектором k, получить формулу для собственных значений энергии E_n.

Ответ: $E_n = \dfrac{(\pi\hbar n)^2}{2ml^2}$.

7.2.5. Частица находится в возбужденном состоянии (n = 2) в одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность P обнаружения частицы в области $\frac{3}{8}l \le x \le \frac{5}{8}l$.

Ответ: $P = \dfrac{2}{l}\int\limits_{3l/8}^{5l/8} \sin^2\left(\dfrac{2\pi x}{l}\right)dx = 0{,}09.$

7.2.6. Электрон находится в возбужденном состоянии (n = 3) в одномерном потенциальном ящике шириной l с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность P обнаружения электрона в средней третьей части ящика.

Ответ: $P = \dfrac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3} \sin^2\left(\dfrac{3\pi x}{l}\right)dx = 0{,}33.$

7.2.7. Частица находится в потенциальном ящике. Найдите отношение разности соседних энергетических уровней $E_{n+1,n}$ к энергии E_n в двух случаях 1) n = 3; 2) n = 10.

Ответ: $\dfrac{\Delta E_{n+1,n}}{E_n} = \dfrac{2n+1}{n^2}$; 1) 0,78; 2) 0,21.

7.2.8. Электрон с энергией E = 5 эВ движется в положительном направлении оси x и встречает потенциальный прямоугольный барьер шириной l = 0,1 нм и высотой U = 10 эВ. Определить коэффициент прозрачности D барьера.

Ответ: $D = \exp\left\{-\dfrac{2}{\hbar}\sqrt{2m_e(U-E)}\cdot l\right\} = 0{,}1.$

7.2.9. Вероятность прохождения электроном прямоугольного потенциального барьера шириной l = 0,1 нм равна D = 0,5. Определить высоту барьера U, если кинетическая энергия электрона E = 2,0 эВ.

Ответ: $U = \dfrac{\hbar^2 \ln^2 D}{8m_e l^2} + E = 2{,}45$ эВ.

7.2.10. Определить высоту барьера U прямоугольного потенциального барьера шириной l = 0,1 нм, если коэффициент отражения электрона, имеющего энергию E = 3,1 эВ, равен D = 0,5.

Ответ: $U = \dfrac{\hbar^2 \ln^2 D}{8m_e l^2} + E = 3{,}55$ эВ.

7.2.11. Электрон с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно длинный широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U, такой, что $E < U$. Запишите уравнение Шредингера для электрона внутри барьера и вне его.

7.2.12. Частица с энергией E = 50 эВ движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный барьер высотой U = 20 эВ. Определить коэффициент отражения r частицы от барьера.

Ответ: $r = \left| \dfrac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U}} \right|^2 = 0{,}016.$

7.2.13. Электрон с длиной волны де Бройля λ_1 = 180 пм движется в положительном направлении оси x и сталкивается с барьером высотой U = 100 эВ. Определить длину волны λ_2 де Бройля после прохождения барьера.

Ответ: $\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{1 - m_e U \lambda_1^2 / \left(2\pi^2 \hbar^2\right)}} = 172$ пм.

7.2.14. Частица в потенциальном ящике шириной l находится в возбужденном состоянии (n = 2). Определить, в каких точках ямы ($0 < x < l$) плотность вероятности $|\Psi(x)|^2$ нахождения частицы имеет максимальное и минимальное значения.

Ответ: max (x_1 = l/4; x_3 = 3l/4); min (x_2 = l/2).

7.2.15. Электрон с энергией E = 25 эВ встречает на своем пути потенциальный барьер с высотой U = 9 эВ. Определить коэффициент преломления n волн де Бройля на границе барьера.

Ответ: $n = \sqrt{1 - U/E} = 0{,}8$.

7.2.16. Электрон с энергией E = 100 эВ попадает на потенциальный барьер высотой U = 64 эВ. Определить коэффициент отражения r электрона от барьера.

Ответ: $r = \left| \dfrac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U}} \right|^2 = 0{,}0625.$

7.2.17. Коэффициент отражения протона r от потенциального барьера равен $2{,}5 \cdot 10^{-5}$. Найти отношение высоты барьера к кинетической энергии протона. Ответ выразить в процентах.

Ответ: 2 %.

7.2.18. Определить коэффициент преломления волн де Бройля для протонов на границе потенциального барьера (рис. 7.6), если кинетическая энергия протонов E = 16 эВ, высота барьера U = 9 эВ.

Ответ: $n = \sqrt{1 + U/E} = 1{,}25$.

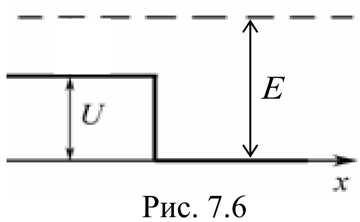

Рис. 7.6

7.2.19. Коэффициент прохождения протонов через потенциальный барьер $\tau = 0{,}8$. Определить показатель преломления волн де Бройля протонов на границе барьера.

Ответ: $n_1 = 0{,}384$; $n_2 = 2{,}61$.

7.2.20. Атом водорода находится в состоянии $1s$. Определить вероятность пребывания электрона в атоме внутри сферы радиусом $r = 0{,}1a$, где a – радиус первой боровской орбиты.

Ответ: $P = \dfrac{4}{a^3}\displaystyle\int_0^{0{,}1a} e^{-2r/a} r^2 dr = 0{,}00113$.

7.2.21. Электрон в возбужденном атоме водорода находится в $3p$-состоянии. Определить изменение магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона при переходе в основное состояние.

Ответ: $\Delta\mu_l = -\mu_B\sqrt{2} = -1{,}31\cdot10^{-23}$ Дж/Тл,

где $\mu_B = 9{,}274\cdot10^{-24}$ Дж/Тл – магнетон Бора.

7.2.22. На грань кристалла никеля падает параллельный пучок электронов. Кристалл поворачивают так, что угол скольжения изменяется. При угле скольжения, равном $\theta = 64°$, наблюдается максимум отражения электронов, соответствующий дифракционному максимуму ($m = 1$). Расстояние между атомными плоскостями $d = 2$ Å. Определить длину волны де Бройля и скорость электронов.

Ответ: $\lambda = 2d\sin\theta/m = 3{,}6$ Å; $v = h/(m_e\lambda) = 2$ Мм/с.

7.2.23. На грань некоторого кристалла падает под углом $\theta = 60°$ к поверхности грани параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью. Определить скорость электронов, если они испытывают дифракционное отражение первого порядка. Расстояние между гранями кристалла равно $d = 2$ Å.

Ответ: $v = h/(2m_e d\cdot\sin\theta) = 2{,}1$ Мм/с.

7.2.24. Определить дебройлеровскую длину электрона, находящегося в атоме водорода в основном состоянии.

Ответ: $\lambda = 2\pi a = 33$ нм, где a – первый боровский радиус.

7.2.25. Определите среднюю потенциальную энергию электрона в поле ядра протона, если нормированная волновая функция для $1s$-состояния имеет вид $\Psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где a – первый боровский радиус.

Ответ: $U = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

8. ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

Основные формулы и обозначения

Энергия фонона

$$E_m = \hbar\omega_m = k\theta_D,$$

где k – постоянная Больцмана; $\theta_D = \hbar\omega_m/k$ – характеристическая температура Дебая; ω_m – наибольшая частота упругих колебаний кристаллической решетки.

Квазиимпульс фонона $\quad p = \dfrac{2\pi\hbar}{\lambda}.$

Скорости продольных (υ_l) и поперечных (υ_τ) волн в кристалле:

$$\upsilon_l = \sqrt{E/\rho} \quad \text{и} \quad \upsilon_\tau = \sqrt{G/\rho},$$

где E и G – модули продольной и поперечной упругости; ρ – плотность кристалла.

Усредненное значение скорости звука связано с υ_l и υ_τ соотношением

$$\frac{3}{\upsilon^3} = \frac{2}{\upsilon_\tau^3} + \frac{1}{\upsilon_l^3}.$$

Энергия Ферми

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3},$$

где n – число электронов в единице объема.

Молярная теплоемкость кристаллической решетки, по Дебаю, в области низких температур ($T << \theta_D$)

$$C_\mu = \frac{12\pi^4 R}{5}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3,$$

где $R = 8{,}31$ Дж/моль – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура.

Закон Дюлонга и Пти. Молярная теплоемкость химически простых (состоящих из одинаковых атомов) твердых тел при $T \geq \theta_D$:

$$C_\mu = 3R.$$

Закон Неймана – Копа. Молярная теплоемкость химически сложных тел (состоящих из различных атомов)

$$C_\mu = 3R \cdot n,$$

где n – число частиц в формуле сложного соединения.

Молярная теплоемкость электронного газа

$$C_{\mu e} = \frac{\pi^2}{2} ZR \frac{T}{\theta_F},$$

где $\theta_F = E_F/k$ – температура Ферми (температура вырождения электронного газа); Z – атомный номер.

Распределение Ферми–Дирака

$$f(E_i) = \frac{1}{\exp[(E_i - E_F)/(kT)] + 1},$$

где E_F – энергия Ферми; E_i – энергия электронов.

Распределение Бозе–Эйнштейна

$$f(E_i) = \frac{1}{\exp[(E_i - E_F)/(kT)] - 1}.$$

Молярная внутренняя энергия кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна

$$U_\mu = U_{\mu 0} + 3R \frac{\theta_E}{\exp(\theta_E/T) - 1},$$

где $U_{\mu 0} = \dfrac{3}{2} R\theta_E$ – молярная нулевая энергия, по Эйнштейну; $\theta_E = \hbar\omega/k$ – характеристическая температура Эйнштейна.

Молярная теплоемкость кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна

$$C_\mu = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{\exp(\theta_E/T)}{\left[\exp(\theta_E/T) - 1\right]^2}.$$

При низких температурах ($T \ll \theta_E$) $\quad C_\mu = 3R(\theta_E/T)^2 \exp(-\theta_E/T)$.

Удельное сопротивление полупроводника

$$\rho = \frac{1}{enb},$$

где b – подвижность, $b = b_n + b_p$; b_n – подвижность электронов; b_p – подвижность дырок; n – концентрация электронов проводимости.

Электропроводность полупроводника

$$\sigma = 1/\rho = enb.$$

Электропроводность собственного полупроводника, ширина запрещенной зоны которого $\Delta\varepsilon$,

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{2kT}\right).$$

Задачи с решениями

Задача 1. Алмаз обладает аномально высоким значением температуры Дебая θ_D = 1860 К. Фотон какой длины волны λ обладал бы энергией, равной максимальной энергии фонона в кристалле алмаза?

Дано:	**Решение.** Наибольшая частота ω_m колебаний фонона связана с температурой Дебая соотношением $\hbar\omega_m = k\theta_D$, где k – постоянная Больцмана, $\hbar$ – постоянная Планка, $\hbar = h/(2\pi)$. Следовательно, максимальная энергия E_m фонона определится как $E_m = \hbar\omega_m = k\theta_D$.
$\theta_D = 1860$ К	
$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с	
$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К	
$c = 3\cdot10^{8}$ м/с	
λ – ?	

Энергия фотона $\qquad E = h\nu = hc/\lambda.$

Отсюда $\qquad \lambda = hc/E.$

По условию $E = E_m$, следовательно

$$\lambda = hc/(k\theta_D).$$

$$\lambda = 6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}/(1{,}38\cdot10^{-23}\cdot1860) = 7{,}75\cdot10^{-6}\ \text{м} = 7{,}75\ \text{мкм}.$$

Ответ: λ = 7,75 мкм.

Задача 2. Во сколько раз изменится при повышении температуры от 300 К до 310 К электропроводность σ собственного полупроводника, ширина запрещенной зоны которого $\Delta\varepsilon$ = 0,3 эВ?

Дано:	**Решение.** Зависимость электропроводности σ собственного полупроводника от температуры определяется следующим выражением: $$\sigma = \sigma_0 \exp\left(\frac{-\Delta\varepsilon}{2kT}\right),$$ где σ_0 – некоторая константа.
$T_1 = 300$ К	
$T_2 = 310$ К	
$\Delta\varepsilon = 4{,}8\cdot10^{-20}$ Дж	
$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К	
σ_2/σ_1 – ?	

Отсюда запишем отношение:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 \exp\left(-\dfrac{\Delta\varepsilon}{2kT_2}\right)}{\sigma_0 \exp\left(-\dfrac{\Delta\varepsilon}{2kT_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta\varepsilon}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = \exp\left[\frac{4{,}8\cdot10^{-20}}{2\cdot1{,}38\cdot10^{-23}}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{310}\right)\right] = 1{,}21.$$

Ответ: σ_2/σ_1 = 1,21.

Задача 3. Определить температуру, при которой теплоемкость электронного газа будет равна теплоемкости кристаллической решетки лития. Энергия Ферми для лития E_F = 4,72 эВ, характеристическая температура Дебая θ_D = 404 К.

Дано:	Решение.
$E_F = 7{,}55 \cdot 10^{-19}$ Дж $\theta_D = 404$ К $Z = 3$ $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	**Решение.** По условию молярная теплоемкость $C_{\mu e}$ электронного газа равна теплоемкости C_μ кристаллической решетки лития: $C_{\mu e} = C_\mu$. Молярная теплоемкость кристаллической решетки в области низких температур ($T \ll \theta_D$)
T – ?	

$$C_\mu = \frac{12\pi^4 R}{5}\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3,$$

где R – молярная газовая постоянная.

$$C_{\mu e} = \frac{\pi^2}{2} ZR \frac{T}{\theta_F}; \quad \theta_F = \frac{E_F}{k},$$

где Z – атомный номер лития; E_F – энергия Ферми.

Из условия $C_{\mu e} = C_\mu$, получим:

$$T = \sqrt{\frac{5kZ\theta_D^3}{24\pi^2 E_F}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 404^3}{24 \cdot 3{,}14^2 \cdot 7{,}55 \cdot 10^{-19}}} = 4{,}3 \text{ К}.$$

Ответ: $T = 4{,}3$ К.

Задача 4. Вычислить удельное сопротивление собственного германия при температуре $T = 300$ К, если известно, что концентрация электронов при этой температуре $n = 2{,}2 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$. Подвижность электронов $3{,}8 \cdot 10^3$ см^2/(В·с); дырок – $1{,}8 \cdot 10^3$ см^2/(В·с).

Дано:	Решение.
$T = 300$ К $n = 2{,}2 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$ $b_p = 0{,}18$ м^2/(В·с) $b_n = 0{,}38$ м^2/(В·с) $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	**Решение.** Удельное сопротивление полупроводника $\rho = \frac{1}{enb}$, где b – подвижность, $b = b_n + b_p$; b_n – подвижность электронов; b_p –подвижность дырок. Окончательно имеем
ρ – ?	

$$\rho = \frac{1}{en(b_n + b_p)};$$

$$\rho = \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{19}(0{,}38 + 0{,}18)} = 0{,}51 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $\rho = 0{,}51$ Ом·м.

Задача 5. Чему равно среднее число электронов проводимости в металле при 80 К в состоянии с энергией в 6 эВ, если энергия Ферми для этого металла 9 эВ?

Дано:
$T = 80$ К
$E_i = 6$ эВ
$E_{\text{F}} = 9$ эВ
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

$\langle n_i \rangle$ – ?

Решение. Так как электроны являются фермионами, то они подчиняются статистке Ферми-Дирака. Обозначим E_{F} – энергия Ферми, $\langle n_i \rangle$ – среднее число электронов проводимости.

Функция распределения электронов по состояниям:

$$f(E_i) = \frac{1}{\exp[(E_i - E_{\text{F}})/(kT)] + 1}.$$

В общем случае среднее число электронов проводимости в E_i-состоянии равно

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left[(E_i - E_{\text{F}})/(kT)\right] + 1}.$$

При $T = 80$ К величина $kT = 6{,}9 \cdot 10^{-3}$ эВ, что много меньше величины разности $|E_i - E_{\text{F}}| = 3$ эВ. Очевидно, что при таких значениях

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left[(E_i - E_{\text{F}})/(kT)\right] + 1} \cong 1.$$

То есть все уровни с энергией $E_i = 6$ эВ заняты электронами, рис. 8.1. Следовательно, эти электроны не участвуют в проводимости.

Ответ: $\langle n_i \rangle \cong 1$.

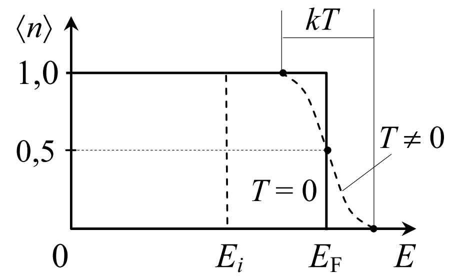

Рис. 8.1

Задача 6. Найти максимальную энергию E_m фонона, который может возбудиться в кристалле, температура Дебая которого $\theta_D = 300$ К.

Дано:
$\theta_D = 300$ К
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

E_m – ?

Решение. Наибольшая частота упругих колебаний, которые могут возбудиться в кристаллической решетке, связана с температурой Дебая соотношением $\hbar\omega_m = k\theta_D$,

где ω_m – наибольшая частота колебаний кристаллической решетки.

Следовательно, E_m определится как

$$E_m = \hbar\omega_m = k\theta_D = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 4{,}14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 0{,}026 \text{ эВ}.$$

Ответ: $E_m = 0{,}026$ эВ.

Задача 7. Определите отношение импульса фотона с энергией 5 МэВ к среднеквадратичному импульсу атомов аргона при температуре $T = 420$ К.

Дано:	
$E_ф = 8 \cdot 10^{-13}$ Дж	
$T = 420$ К	
$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	
$\mu = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	
$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$	
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с	
$p_ф / p_{Ar}$ – ?	

Решение. Обозначим: $p_ф$ – импульс фотона; p_{Ar} – импульс аргона; μ – малярная масса аргона.

Импульс фотона:

$$p_ф = h/\lambda; \;\; E_ф = hc/\lambda; \;\; p_ф = E_ф/c.$$

Импульс аргона:

$$p_{Ar} = m v_{кв} = \sqrt{3kTm} = \sqrt{3kT\frac{\mu}{N_A}}.$$

Тогда

$$\frac{p_ф}{p_{Ar}} = \frac{E_ф}{c\sqrt{3kT\mu/N_A}}.$$

$$\frac{p_ф}{p_{Ar}} = \frac{E_ф}{c\sqrt{3kT\mu/N_A}} = \frac{8 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^8 \sqrt{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 420 \cdot 40 \cdot 10^{-3} / 6,02 \cdot 10^{23}}} = 78,5.$$

Ответ: $p_ф / p_{Ar} = 78,5$.

Задача 8. Оцените давление электронного газа в некотором металле при абсолютном нуле, энергия Ферми которого равна 13 эВ, если концентрация электронного газа равна $2,87 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$. Ответ представьте в мегапаскалях.

Дано:	
$T = 0$ К	
$E_F = 2,08 \cdot 10^{-18}$ Дж	
$n = 2,87 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$	
P – ?	

Решение. Давление электронного газа определим по классической формуле, считая электронный газ идеальным,

$$P = \frac{2}{3} n \langle E \rangle.$$

Средняя энергия электронов равна:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F.$$

Отсюда

$$P = \frac{2}{5} n E_F = \frac{2}{5} \cdot 2,87 \cdot 10^{28} \cdot 2,08 \cdot 10^{-18} = 2,39 \cdot 10^{10} \text{ Па} = 2,39 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Ответ: $P = 2,39 \cdot 10^4$ МПа.

Задача 9. Какова вероятность заполнения электронами в металле энергетического уровня, расположенного на 44 мэВ выше уровня Ферми, при температуре $T = 276$ К?

Дано:	
$\Delta E = 7,04 \cdot 10^{-21}$ Дж	
$T = 276$ К	
$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	
$f(E_i)$ – ?	

Решение. Распределение Ферми – Дирака для электронов:

$$f(E_i) = \frac{1}{\exp\left[(E_i - E_F)/(kT)\right] + 1} = \frac{1}{\exp\left[\Delta E/(kT)\right] + 1},$$

где E_F – энергия Ферми; E_i – энергия энергетического уровня.

Это распределение и будет вероятностью заполнения электронами энергетического уровня E_i:

$$f(E_i)=\frac{1}{\exp\left(\dfrac{7{,}04\cdot 10^{-21}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 276}\right)+1}=0{,}136.$$

Ответ: $f(E_i)$ = 0,136.

Задача 10. Определите максимальную энергию, которой могут обладать свободные электроны в металле при абсолютном нуле. Принять, что на каждый атом металла приходится по одному электрону. Молярная масса металла $67\cdot10^{-3}$ кг/моль, а плотность металла ρ = 8737 кг/м^3. Ответ представьте в электронвольтах.

Дано:
$\mu = 67\cdot10^{-3}$ кг/моль
$\rho = 8737$ кг/м^3
$\hbar = 1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с
$N_\text{A} = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
$m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг
E_F – ?

Решение. Максимальная энергия, которой могут обладать свободные электроны в металле при абсолютном нуле, равна энергии Ферми E_F.

Энергию Ферми определим по формуле

$$E_\text{F}=\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3},$$

$n=\rho N_\text{A}/\mu$ – число электронов в единице объема.

Окончательно получим

$$E_\text{F}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\rho\frac{N_A}{\mu}\right)^{2/3};$$

$$E_\text{F}=\frac{\left(1{,}05\cdot10^{-34}\right)^2}{2\cdot 9{,}1\cdot10^{-31}}\left(3\cdot 3{,}14^2\cdot 8737\cdot\frac{6{,}02\cdot10^{23}}{67\cdot10^{-3}}\right)^{2/3}=1{,}06\cdot10^{-18}\text{ Дж}=6{,}63\text{ эВ}.$$

Ответ: E_F = 6,63 эВ.

Задача 11. До какой температуры надо было бы нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась равной средней энергии электронов в металле при T_M = 0 К? Принять, что на каждый атом приходится один электрон. Плотность металла 8805 кг/м^3, молярная масса $58\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Дано:
$T_\text{M} = 0$ К
$\mu = 58\cdot10^{-3}$ кг/моль
$\rho = 8805$ кг/м^3
$\hbar = 1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с
$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
$N_\text{A} = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
$m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг
T – ?

Решение. Средняя энергия электронов

$$\langle E\rangle=\frac{3}{2}kT\,.$$

С другой стороны, $\langle E_\text{F}\rangle=\dfrac{3}{5}E_\text{F}\,.$

Отсюда имеем $T=\dfrac{2}{5}\dfrac{E_\text{F}}{k}$;

$$E_\text{F}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}.$$

Концентрация электронов $n = \rho N_A / \mu$.

Окончательно получим $T = \dfrac{\hbar^2}{5mk}\left(3\pi^2\rho\dfrac{N_A}{\mu}\right)^{2/3}$;

$$T = \frac{\left(1,05\cdot10^{-34}\right)^2}{5\cdot9,1\cdot10^{-31}\cdot1,38\cdot10^{-23}}\cdot\left(3\cdot3,14^2\cdot8805\cdot\frac{6,02\cdot10^{23}}{58\cdot10^{-3}}\right)^{2/3} = 3,41\cdot10^4\ \text{К}.$$

Ответ: $T = 3,41\cdot10^4$ К.

Задача 12. Найти среднее число фотонов в состоянии с энергией $E_i = 77$ МэВ, при $T = 655$ К.

Дано:
$E_i = 1,23\cdot10^{-20}$ Дж
$T = 655$ К
$\langle n_i\rangle$ – ?

Решение. Так как фотоны являются бозонами, то они подчиняются распределению Бозе – Эйнштейна. Следовательно, среднее число фотонов в состоянии с определенной энергией E_i равно:

$$n_i = \frac{1}{\exp\left[E_i/(kT)\right]-1};$$

$$\langle n_i\rangle = \frac{1}{\exp\left[1,23\cdot10^{-20}\big/\left(1,38\cdot10^{-23}\cdot655\right)\right]-1} = 0,344.$$

Ответ: $\langle n_i\rangle = 0,344$.

Задача 13. Определите температуру вырождения электронного газа в металле, если концентрация электронов равна $n = 5,3\cdot10^{28}$ м$^{-3}$.

Дано:
$n = 5,3\cdot10^{28}$ м$^{-3}$
$\hbar = 1,05\cdot10^{-34}$ Дж·с
$k = 1,38\cdot10^{-23}$ Дж/К
$m = 9,1\cdot10^{-31}$ кг
T – ?

Решение. Энергия Ферми для электронов

$$E_ф = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}.$$

Температура вырождения электронного газа

$$T = E_F/k.$$

Отсюда

$$T = \frac{E_F}{k} = \frac{\hbar^2}{2mk}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3};$$

$$T = \frac{\left(1,05\cdot10^{-34}\right)^2}{2\cdot9,1\cdot10^{-31}\cdot1,38\cdot10^{-23}}\cdot\left[3\cdot3,14^2\cdot5,3\cdot10^{28}\right]^{2/3} = 5,97\cdot10^4\ \text{К}.$$

Ответ: $T = 5,97\cdot10^4$ К.

Задача 14. Определите число фотонов с частотой, заключенной в интервале от $\nu_1 = 641$ ТГц до $\nu_2 = 648$ ТГц в объеме $V = 330$ см^3 при температуре $T = 302$ К.

Дано:	**Решение.** Число квантовых состояний излучения в объеме V равно $dq = 2\dfrac{4\pi p^2 dp}{h^3}V$.
$\nu_1 = 6{,}41\cdot10^{14}$ Гц $\nu_2 = 6{,}48\cdot10^{14}$ Гц $V = 3{,}3\cdot10^{-4}$ м^3 $T = 302$ К $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К	Так как импульс p и энергия E фотона связаны соотношением $p = E/c$, то число квантовых состояний излучения в объеме V равно:
ΔN – ?	

$$dq = \frac{8\pi E^2 dE}{h^3 c^3}V.$$

Учитывая, что $E = h\nu$, получаем

$$dq = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}V.$$

Так как фотоны являются бозонами, то они подчиняются распределению Бозе–Эйнштейна. Следовательно, $f(\nu) = \dfrac{1}{\exp\left[h\nu/(kT)\right]-1}$.

Число фононов, заключенных в интервале частот $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = 7\cdot10^{12}$ Гц и средней частотой $\nu_{ср} = (\nu_1 + \nu_2)/2 = 6{,}445\cdot10^{14}$ Гц, равно:

$$dN = dq\cdot f(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 d\nu V}{c^3\left[\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right)-1\right]} \approx \frac{8\pi\nu_{ср}^2\Delta\nu V}{c^3\left[\exp\left(\dfrac{h\nu_{ср}}{kT}\right)-1\right]}.$$

Так как $\exp[h\nu_{ср}/(kT)] >> 1$, то распределение Бозе – Эйнштейна переходит в классическое распределение Больцмана:

$$\Delta N = \frac{8\pi\nu_{ср}^2\Delta\nu V}{c^3}\cdot\exp\left(-\frac{h\nu_{ср}}{kT}\right).$$

$$\Delta N = \frac{8\cdot3{,}14\cdot\left(6{,}445\cdot10^{14}\right)^2\cdot7\cdot10^{12}\cdot3{,}3\cdot10^{-4}}{\left(3\cdot10^8\right)^3}\cdot\exp\left(-\frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot6{,}445\cdot10^{14}}{1{,}38\cdot10^{-23}\cdot302}\right) = 3{,}1\cdot10^{-30}.$$

Ответ: $\Delta N = 3{,}1\cdot10^{-30}$.

Задача 15. Уровень Ферми некоторого металла при $T_0 = 0$ К равен 8 эВ. Определите, на сколько уровень Ферми E_F при $T = 1280$ К отличается от уровня Ферми $E_{F(0)}$ при абсолютном нуле. Ответ представьте в электронвольтах.

Дано:	**Решение.** Зависимость уровня Ферми от температуры для металла имеет вид
$T_0 = 0$ К $T = 1280$ К $E_{F(0)} = 1{,}28\cdot10^{-18}$ Дж $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К	$E_F = E_{F(0)}\left[1-\dfrac{\pi^2}{12}\left(\dfrac{kT}{E_{F(0)}}\right)^2\right].$
ΔE_F – ?	Так как $\Delta E_F = E_{F(0)} - E_F$, то

$$\Delta E_{\text{F}} = E_{\text{F}(0)} - E_{\text{F}(0)} + E_{\text{F}(0)} \frac{\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{E_{\text{F}(0)}^2} = \frac{\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{E_{\text{F}(0)}},$$

$$\Delta E_{\text{F}} = \frac{3{,}14^2}{12} \cdot \frac{\left(1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 1280\right)^2}{1{,}28 \cdot 10^{-18}} = 2 \cdot 10^{-22} \text{ Дж} = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}.$$

Ответ: $\Delta E_{\text{F}} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ эВ.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Вычислить по классической теории теплоемкости теплоемкость C кристалла бромида алюминия $AlBr_3$ объемом $V = 1$ м^3. Плотность ρ кристалла бромида алюминия равна $3{,}01 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\mu = 0{,}267$ кг/моль.

Ответ: $C = 12\rho VR/\mu = 1{,}12$ МДж/К.

8.2. Определить изменение ΔU внутренней энергии кристалла никеля при нагревании его от $t_1 = 0$ °C до $t_2 = 200$ °C. Масса m кристалла равна 20 г. Теплоемкость C вычислить.

Ответ: $\Delta U = 3\dfrac{m}{\mu} R\left(T_2 - T_1\right) = 1{,}7$ кДж.

8.3. Определить: 1) среднюю энергию $\langle\varepsilon_1\rangle$ линейного одномерного квантового осциллятора при температуре $T = \theta_{\text{E}}$ ($\theta_{\text{E}} = 200$ K); 2) энергию U системы, состоящей из $N = 10^{25}$ квантовых трехмерных независимых осцилляторов, при температуре $T = \theta_{\text{E}}$ ($\theta_{\text{E}} = 300$ K).

Ответ: 1) $\langle\varepsilon_1\rangle = k\theta_{\text{E}}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\exp\left(\hbar\omega/kT\right) - 1}\right) = 3 \cdot 10^{-21}$ Дж;

2) $U = 3N\langle\varepsilon_2\rangle = 134$ кДж.

8.4. Найти частоту ν колебаний атомов кристалла серебра по теории теплоемкости Эйнштейна, если характеристическая температура θ_{E} серебра равна 165 K.

Ответ: $\nu = k\theta_{\text{E}}/h = 3{,}44 \cdot 10^{12}$ Гц.

8.5. Во сколько раз изменится средняя энергия $\langle\varepsilon\rangle$ квантового осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы, при повышении температуры от $T_1 = \theta_{\text{E}}/2$ до $T_2 = \theta_{\text{E}}$? Учесть нулевую энергию.

Ответ: $\langle\varepsilon_2\rangle/\langle\varepsilon_1\rangle = (e + 1)^2/(e^2 + 1) = 1{,}65$.

8.6. Определить отношение $\langle\varepsilon\rangle/\langle\varepsilon_T\rangle$ средней энергии квантового осциллятора к средней энергии теплового движения молекул идеального газа при температуре $T = \theta_{\text{E}}$.

Ответ: $\langle\varepsilon\rangle/\langle\varepsilon_T\rangle = 2/(e - 1) = 1{,}16$.

8.7. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить изменение ΔU_μ молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2$ К от температуры $T = \theta_E/2$.

Ответ: $\Delta U_\mu = \dfrac{12e^2 R\cdot\Delta T}{\left(e^2-1\right)^2} = 36$ Дж/моль.

8.8. Пользуясь теорией теплоемкости Эйнштейна, определить изменение ΔU_μ молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T_1 = 0{,}1\theta_E$. Характеристическую температуру θ_E Эйнштейна принять для данного кристалла равной 300 К.

Ответ: $\Delta U_\mu = 3R\theta_E/(\exp 10 - 1) = 0{,}34$ Дж/моль.

8.9. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если при вычислении теплоемкости C вместо значения, даваемого теорией Эйнштейна (при $T = \theta_E$), воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти.

Ответ: $\dfrac{C_0 - C_1}{C_0} = \dfrac{\left(e-1\right)^2}{e} - 1 = 8{,}6\%$.

8.10. Вычислить, по теории Эйнштейна, молярную нулевую энергию $U_{\mu 0}$ кристалла цинка. Характеристическая температура для цинка θ_E=230 К.

Ответ: $U_{m_0} = \dfrac{3}{2}R\theta_E = 2{,}87$ кДж/моль.

8.11. Вычислить, по теории Дебая, молярную нулевую энергию $U_{\mu 0}$ кристалла меди. Характеристическая температура θ_D меди равна 320 К.

Ответ: $U_{m_0} = \dfrac{9}{8}R\theta_D = 2{,}99$ кДж/моль.

8.12. Определить максимальную частоту ω_{max} собственных колебаний в кристалле золота, по теории Дебая. Характеристическая температура θ_D равна 180 К.

Ответ: $\omega_{max} = k\theta_D/\hbar = 2{,}36\cdot 10^{13}$ с$^{-1}$.

8.13. Вычислить максимальную частоту ω_{max} Дебая, если известно, что молярная теплоемкость C_μ серебра при $T = 20$ К равна 1,7 Дж/(К·моль).

Ответ: $\omega_{max} = \dfrac{kT}{\hbar}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{12\pi^4 R}{5C_\mu}} = 2{,}75\cdot 10^{13}$ с$^{-1}$.

8.14. Найти отношение изменения ΔU внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0{,}1\theta_D$ к нулевой энергии U_0. Считать $T \ll \theta_D$.

Ответ: $\dfrac{\Delta U}{U_0} = \dfrac{8}{15}\pi^4\cdot 10^{-4} = 5{,}2\cdot 10^{-3}$.

8.15. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, определить изменение ΔU_μ молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0{,}1\theta_D$. Характеристическую температуру θ_D Дебая принять для данного кристалла равной 300 К. Считать $T << \theta_D$.

Ответ: $\Delta U_\mu = \frac{3}{5}\pi^4 R T^4 \theta_D = 14{,}57$ Дж/моль.

8.16. Используя квантовую теорию теплоемкости Дебая, вычислить изменение ΔU_μ молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на ΔT = 2 К от температуры $T = \theta_D/2$. Молярная теплоемкость C_μ = 20,7 Дж/(моль·К).

Ответ: $\Delta U_\mu = C_m \Delta T$ = 41,4 Дж/моль.

8.17. При нагревании серебра массой m = 10 г от T_1 = 10 К до T_2 = 20 К было подведено ΔQ = 0,71 Дж теплоты. Определить характеристическую температуру θ_D Дебая серебра. Считать $T << \theta_D$.

Ответ: $\theta_D = \sqrt[3]{\frac{3\pi^4 Rm}{5\mu\Delta Q}\left(T_2^4 - T_1^4\right)} = 212$ К.

8.18. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если при вычислении теплоемкости кристалла вместо значения, даваемого теорией Дебая (при $T = \theta_D$), воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти.

Ответ: $\frac{C'_\mu - C_\mu}{C_\mu} = 4{,}83$ %.

8.19. Найти энергию ε фонона, соответствующего максимальной частоте ω_{max} Дебая, если характеристическая температура θ_D Дебая равна 250 К.

Ответ: $\varepsilon = k\theta_D = 3{,}45\cdot10^{-21}$ Дж = 0,022 эВ.

8.20. Определить квазиимпульс p фонона, соответствующего частоте $\omega = 0{,}1\omega_{max}$. Усредненная скорость $\langle v\rangle$ звука в кристалле равна 1380 м/с, характеристическая температура θ_D Дебая равна 100 К. Дисперсией звуковых волн в кристалле пренебречь.

Ответ: $p = k\theta_D/(10\langle v\rangle) = 1\cdot10^{-25}$ Н·м.

8.21. Длина волны λ фонона, соответствующего частоте $\omega = 0{,}01\omega_{max}$, равна 52 нм. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить характеристическую температуру θ_D Дебая, если усредненная скорость звука $\langle v\rangle$ в кристалле равна 4,8 км/с.

Ответ: $\theta_D = 20\pi\hbar\langle v\rangle / k\theta_D = 443$ К.

8.22. Вычислить усредненную скорость $\langle v \rangle$ фононов (скорость звука) в кристалле серебра. Модули продольной E и поперечной G упругости, а также плотность серебра ρ считать известными.

Ответ: $\langle v \rangle = \left(\dfrac{EG}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\dfrac{3}{2E^{3/2}+G^{3/2}}} = 1{,}77$ км/с.

8.23. Характеристическая температура θ_D Дебая для вольфрама равна 310 К. Определить длину волны λ фононов, соответствующих частоте $\nu = 0{,}1\nu_{max}$. Предварительно вычислить усредненную скорость $\langle v \rangle$ звука в вольфраме. Дисперсией волн в кристалле пренебречь.

Ответ: $\lambda = 20\pi\hbar\langle v \rangle / (k\theta_D) = 4{,}61$ нм.

8.24. Период d решетки одномерного кристалла, атомы которого образуют цепи, не взаимодействующие друг с другом, равен 0,3 нм. Определить максимальную энергию ε_{max} фононов, распространяющихся вдоль этой цепочки атомов. Усредненная скорость $\langle v \rangle$ звука в кристалле равна 5 км/с.

Ответ: $\varepsilon_{max} = 2\pi\hbar\langle v \rangle / d = 1{,}1 \cdot 10^{-20}$ Дж $= 0{,}069$ эВ.

8.25. Определить уровень Ферми E_F в собственном полупроводнике, если энергия ΔE_0 активации равна 0,1 эВ. За нулевой уровень отсчета кинетической энергии электронов принять низший уровень зоны проводимости.

Ответ: $E_F = \Delta E / 2 = -0{,}05$ эВ.

9. СТРОЕНИЕ АТОМНЫХ ЯДЕР. РАДИОАКТИВНОСТЬ

Основные формулы и обозначения

Нейтральный атом и его ядро обозначаются одним и тем же символом

$$^A_Z\mathrm{X},$$

где X – символ химического элемента; Z – зарядовое число (число протонов в ядре, равное числу электронов в электронной оболочке нейтрального атома); A – массовое число (число нуклонов в ядре).

Число нейтронов в ядре

$$N = A - Z.$$

Радиус ядра

$$r = r_0 A^{1/3},$$

где r_0 – коэффициент пропорциональности, который для всех ядер считается постоянным и равным $1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м.

Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N – число нераспавшихся атомов в момент времени t; N_0 – число нараспавшихся атомов в момент, принятый за начальный (при t = 0); e – основание натуральных логарифмов; λ – постоянная радиоактивного распада.

Число распавшихся атомов

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

Период полураспада $T_{1/2}$ – промежуток времени, за который число нераспавшихся атомов уменьшается в 2 раза. Период полураспада связан с постоянной распада соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Среднее время жизни τ радиоактивного изотопа – промежуток времени, за который число нераспавшихся атомов уменьшается в e раз,

$$\tau = 1/\lambda.$$

Число атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе,

$$N = \frac{m}{\mu} N_\mathrm{A},$$

где m – масса изотопа; μ – его молярная масса; N_A – число Авогадро.

Активность a радиоактивного препарата:

$$a = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \text{ или } a = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Активность радиоактивного препарата в начальный момент времени

$$a_0 = \lambda N_0.$$

Активность радиоактивного препарата изменяется со временем по тому же закону, что и число нераспавшихся ядер:

$$a = a_0 e^{-\lambda t}.$$

Удельная активность – активность единицы массы радиоактивного вещества

$$a_{\text{уд}} = \frac{a}{m}.$$

Состояние радиоактивного равновесия:

$$\lambda_\text{м} N_\text{м} = \lambda_\text{д} N_\text{д},$$

где индексы «м» и «д» относятся, соответственно, к «материнскому» и «дочернему» веществам. Это состояние наступает через промежуток времени, значительно превосходящий период полураспада «дочернего» вещества, и, кроме того, при условии, что $\lambda_\text{м} \ll \lambda_\text{д}$.

Задачи с решениями

Задача 1. Оцените плотность ядерной материи.

Решение. Плотность ρ ядерной материи – это отношение массы m к объему V. Масса ядра

$$m = A \cdot m_\text{н},$$

где $m_\text{н} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг – масса одного нуклона (в предположении, что массы протона и нейтрона одинаковы).

Радиус ядра

$$r = r_0 A^{1/3}, \text{ где } r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

Объем ядра

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(r_0 A^{1/3}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A.$$

Таким образом, плотность ядерной материи

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3A \cdot m_\text{н}}{4\pi r_0^3 A} = \frac{3m_\text{н}}{4\pi r_0^3}.$$

Плотность ядерной материи не зависит от массового числа A.

Произведем вычисления:

$$\rho = \frac{3 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(1{,}4 \cdot 10^{-15}\right)^3} = 1{,}45 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho = 1{,}45 \cdot 10^{17}$ кг/м^3.

Задача 2. Бор представляет смесь двух изотопов с относительными массами A_{r1} = 10,013 и A_{r2} = 11,009. Определить массовые доли ω_1 и ω_2 первого и второго изотопов в естественном боре. Относительная масса A_r бора равна 10,811.

Дано:	**Решение.** Массовые доли первого и второго изотопов бора находим из соотношений
A_{r1} = 10,013	$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}; \qquad \omega_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$
A_{r2} = 11,009	
A_r = 10,811	
ω_1 – ?	где m_1 и m_2 – массы первого и второго изотопов в общей массе бора.
ω_2 – ?	

Запишем эти массы в виде

$$m_1 = \omega_1 (m_1 + m_2); \;\; m_2 = \omega_2 (m_1 + m_2).$$

Молярная масса μ смеси изотопов может быть представлена в виде

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2}, \qquad (1)$$

где μ_1 и μ_2 – молярные массы компонентов смеси.

После подстановки в (1) m_1 и m_2 получим

$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\omega_1 \mu_2 + \omega_2 \mu_1}. \qquad (2)$$

Так как молярные массы μ, μ_1 и μ_2 изотопов пропорциональны их относительным атомным массам, то выражение (2) можно записать в виде

$$A_r = \frac{A_{r1} A_{r2}}{\omega_1 A_{r2} + \omega_2 A_{r1}}. \qquad (3)$$

Следует также учесть, что сумма массовых долей компонентов смеси должна быть равна единице:

$$\omega_1 + \omega_2 = 1. \qquad (4)$$

Решив совместно (3) и (4), получим

$$\omega_1 = \frac{A_{r1} \cdot A_{r2} - A_r \cdot A_{r1}}{A_r (A_{r2} - A_{r1})}; \quad \omega_2 = \frac{A_{r1} \cdot A_{r2} - A_r \cdot A_{r2}}{A_r (A_{r1} - A_{r2})}.$$

После подстановки числовых значений будем иметь:

$$\omega_1 = \frac{10,013 \cdot 11,009 - 10,811 \cdot 10,013}{10,811 \cdot (11,009 - 10,013)} = 0,184; \;\; \omega_2 = 1 - \omega_1 = 0,816.$$

Ответ: ω_1 = 0,184; ω_2 = 0,816.

Задача 3. Определите отношение сечений σ_1/σ_2 ядер золота $^{197}_{79}\mathrm{Au}$ и серебра $^{107}_{47}\mathrm{Ag}$.

Дано:	**Решение.** Будем рассматривать ядро как шар радиусом r. Тогда площадь поперечного сечения ядра можно найти по формуле $\sigma = \pi r^2$,
$A_1 = 197$	
$A_2 = 107$	
σ_1/σ_2 – ?	где r – радиус ядра, зависящий от массового числа A,

$$r = r_0 A^{1/3},$$

где r_0 – коэффициент пропорциональности, практически одинаковый для всех ядер.

Тогда $$\sigma = \pi r_0^2 A^{2/3}.$$

Для ядер золота с массовым числом A_1 и серебра с массовым числом A_2 сечения σ_1 и σ_2 запишутся в виде

$$\sigma_1 = \pi r_0^2 A_1^{2/3}; \qquad \sigma_2 = \pi r_0^2 A_2^{2/3}.$$

Отношение сечений ядер ${}^{197}_{79}\mathrm{Au}$ и ${}^{107}_{47}\mathrm{Ag}$:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{2/3} = \left(\frac{197}{107}\right)^{2/3} = 1{,}5.$$

Ответ: $\sigma_1/\sigma_2 = 1{,}5$.

Задача 4. Ядро бериллия ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$ захватило электрон из k-оболочки атома. Какое ядро образовалось в результате k-захвата?

Решение. При k-захвате электрон из k-оболочки атома захватывается ядром. В результате этого процесса один из протонов ядра превращается в нейтрон. Массовое число ядер при k-захвате не изменяется, а зарядовое число уменьшается на единицу.

Следовательно, образовавшееся при k-захвате ядро будет иметь зарядовое число $Z = 4 - 1 = 3$, а массовое останется прежним, то есть $A = 7$. По периодической системе элементов Д.И. Менделеева находим, что образовавшимся ядром является стабильный изотоп лития ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$.

Ответ: Стабильный изотоп лития ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$.

Примечание. Заметим, что в результате k-захвата из ядра выбрасывается электронное нейтрино ν_e, но для решения данной задачи этот процесс не является существенным.

Задача 5. Ядро нептуния ${}^{237}_{93}\mathrm{Np}$, испытав серию α- и β-распадов, превратилось в ядро висмута ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$. Определите общее количество α- и β-распадов.

Решение. С учетом законов сохранения зарядового Z и массового A чисел символические схемы α- и β-распадов могут быть представлены в виде

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \quad (\alpha\text{-распад});$$

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \quad (\beta\text{-распад}).$$

При α-распаде массовое A уменьшается на 4 единицы, а зарядовое Z – на 2 единицы. Следовательно, количество n_α α-распадов в процессе превращения ядра ${}^{237}_{93}\mathrm{Np}$ в ядро ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$ равно:

$$n_\alpha = \frac{A_{\mathrm{Np}} - A_{\mathrm{Bi}}}{A_{\mathrm{He}}} = \frac{237 - 209}{4} = 7.$$

Если бы в данном процессе происходило только 7 α-распадов, то зарядовое число Z конечного ядра было бы равно 79:

$$Z = Z_{\mathrm{Np}} - 7 \cdot Z_{\mathrm{He}} = 93 - 7 \cdot 2 = 79.$$

Однако зарядовое число конечного ядра равно 83. Это означает, что в данном процессе радиоактивных превращений произошло 4 β-распада:

$$n_\beta = Z_{\mathrm{Bi}} - Z = 83 - 79 = 4,$$

так как при каждом β-распаде зарядовое число увеличивается на единицу.

Таким образом, общее число α- и β-распадов в процессе превращения ядра нептуния ${}^{237}_{93}\mathrm{Np}$ в ядро висмута ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$

$$n = n_\alpha + n_\beta = 7 + 4 = 11.$$

Ответ: $n = 11$.

Задача 6. Ионизационный счетчик, установленный вблизи короткоживущего радиоактивного изотопа, в начале наблюдения ($t = 0$) показывает скорость счета $n_1 = 6$ импульсов/с, а по истечении времени $t = 16$ мин – $n_2 = 2$ импульса/с. Определите период полураспада данного изотопа.

Дано:
$n_1 = 6$ импульсов/с
$n_2 = 2$ импульса/с
$t = 16$ мин

$T_{1/2}$ – ?

Решение. Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_1(1 - e^{-\lambda t}),$$

где N_1 – первоначальное число ядер (в момент времени $t = 0$); λ – постоянная радиоактивного распада.

Скорость счета импульсов пропорциональна числу ΔN распавшихся за время $\Delta t = 1$ с радиоактивных ядер,

$$n_1 = k\Delta N_1; \quad n_2 = k\Delta N_2.$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности, зависящий от конструкции счетчика и его расположения относительно радиоактивного изотопа.

Таким образом,

$$n_1 = kN_1(1 - e^{-\lambda\Delta t}),$$

где N_1 – количество радиоактивных ядер в момент времени, соответствующий началу счета импульсов.

$$n_2 = kN_2(1 - e^{-\lambda\Delta t}),$$

где N_2 – количество радиоактивных ядер в момент времени, соответствующий началу второго измерения.

N_1 и N_2 связаны между собой на основе закона радиоактивного распада:

$$N_2 = N_1 e^{-\lambda t}.$$

Тогда

$$n_2 = kN_1 e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda \Delta t}).$$

Коэффициент пропорциональности k в обоих случаях постоянен, так как расположение счетчика относительно радиоактивного препарата оставалось неизменным.

Отношение $$\frac{n_1}{n_2} = \frac{kN_1\left(1 - e^{-\lambda\Delta t}\right)}{kN_1 e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda\Delta t}\right)} = e^{\lambda t}.$$

Отсюда $$\lambda t = \ln\frac{n_1}{n_2} \text{ или } \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t = \ln\frac{n_1}{n_2}.$$

Период полураспада

$$T_{1/2} = \frac{t \cdot \ln 2}{\ln\left(n_1 / n_2\right)} = \frac{16 \cdot \ln 2}{\ln 3} = 10{,}1 \text{ мин}.$$

Ответ: $T_{1/2} = 10{,}1$ мин.

Задача 7. Во сколько раз число распадов ядер радона ^{222}Rn в течение первых суток больше числа распадов в течение вторых суток? Период полураспада ^{222}Rn равен 3,8 сут.

Дано:
^{222}Rn
$T_{1/2} = 3{,}8$ сут
$t = 1$ сут
$\Delta N_1/\Delta N_2$ – ?

Решение. Количество распадов ΔN_1 в течение первых суток

$$\Delta N_1 = N_0 - N_1.$$

Количество распадов ΔN_2 в течение вторых суток

$$\Delta N_2 = N_1 - N_2.$$

Здесь N_0 и N_1 – количество ядер радона-222 к началу первых и вторых суток, соответственно; N_2 – количество ядер радона-222 к исходу вторых суток.

Согласно закону радиоактивного распада

$$N_1 = N_0 \cdot e^{-\lambda t}, \; N_2 = N_1 \cdot e^{-\lambda t},$$

где t – время, равное продолжительности одних суток; λ – постоянная радиоактивного распада.

Тогда $$\Delta N_1 = N_0 - N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0\,(1 - e^{-\lambda t}),$$

$$\Delta N_2 = N_0 \cdot e^{-\lambda t} - N_0\, e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = N_0\,(1 - e^{-\lambda t}) \cdot e^{-\lambda t}.$$

Отношение $$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = e^{\lambda t}.$$

Используя связь между постоянной радиоактивного распада λ и периодом полураспада $T_{1/2}$, последнее выражение можно представить в виде

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \exp\left(\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right) = \exp\left(\frac{\ln 2}{3,8} \cdot 1\right) = 1,2.$$

Ответ: $\Delta N_1 / \Delta N_2 = 1,2$.

Задача 8. Период полураспада ^{235}U равен $7,07 \cdot 10^8$ лет. Определите удельную активность этого изотопа.

Дано:	Решение.
^{235}U $T_{1/2} = 2,23 \cdot 10^{16}$ с $\mu = 0,235$ кг/моль	**Решение.** Активность a радиоактивного изотопа $$a = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N,$$ где λ – постоянная радиоактивного распада; N – количество радиоактивных ядер; $T_{1/2}$ – период полураспада.
a/m – ?	

Удельная активность, т. е. активность, рассчитанная на единицу массы вещества,

$$\frac{a}{m} = \frac{\ln 2}{m \cdot T_{1/2}} N. \tag{1}$$

Здесь m – масса радиоактивного вещества.

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \tag{2}$$

где μ – молярная масса вещества; N_A – постоянная Авогадро.

Подставляя (2) в (1), получим

$$\frac{a}{m} = \frac{\ln 2}{\mu \cdot T_{1/2}} N_A.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{a}{m} = \frac{\ln 2}{0,235 \cdot 2,23 \cdot 10^{16}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 7,96 \cdot 10^7 \ \frac{\text{Бк}}{\text{кг}} = 2,15 \ \frac{\text{мкКи}}{\text{г}}.$$

Ответ: $a/m = 2,15$ мкКи/г.

Задача 9. Определите массу свинца, возникающего из 1 кг чистого изотопа урана ^{238}U за период, равный возрасту Земли ($2,5 \cdot 10^9$ лет).

Дано:	Решение.
$m_U = 1$ кг $t = 2,5 \cdot 10^9$ лет $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ лет $\mu_{Pb} = 0,206$ кг/моль $\mu_U = 0,238$ кг/моль	**Решение.** Массу свинца, получившегося при распаде изотопа урана ^{238}U, найдем по формуле $$m_{Pb} = \frac{\mu_{Pb}}{N_A} \cdot N_{Pb}, \tag{1}$$ где μ_{Pb} – молярная масса свинца; N_A – постоянная Авогадро; N_{Pb} – количество ядер свинца, образовавшегося за время распада урана ^{238}U.
m_{Pb} – ?	

$$N_{\mathrm{Pb}} = N_{0\mathrm{U}} - N_{\mathrm{U}} = N_{0\mathrm{U}}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t}\right).$$

Здесь $N_{0\mathrm{U}}$ – начальное количество ядер урана; N_{U} – количество ядер урана к моменту времени t.

Так как $N_{0\mathrm{U}} = \dfrac{m_{\mathrm{U}}}{\mu_{\mathrm{U}}} N_{\mathrm{A}}$, то

$$N_{\mathrm{Pb}} = \frac{m_{\mathrm{U}}}{\mu_{\mathrm{U}}} N_{\mathrm{A}}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t}\right), \qquad (2)$$

где m_{U} – исходная масса урана $^{238}\mathrm{U}$; μ_{U} – его молярная масса.

Подставляя (2) в (1), получим искомое выражение для массы свинца, возникшего при распаде урана $^{238}\mathrm{U}$:

$$m_{\mathrm{Pb}} = m_{\mathrm{U}} \cdot \frac{\mu_{\mathrm{Pb}}}{\mu_{\mathrm{U}}}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t}\right).$$

Произведем вычисления:

$$m_{\mathrm{Pb}} = 1 \cdot \frac{0,206}{0,238} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\ln 2}{4,5 \cdot 10^9} \cdot 2,5 \cdot 10^9\right)\right] = 0,277 \text{ кг}.$$

Ответ: $m_{\mathrm{Pb}} = 0,277$ кг.

Задача 10. В урановой руде отношение числа ядер урана $^{238}\mathrm{U}$ к числу ядер свинца $^{206}\mathrm{Pb}$ составляет $\eta = 2,8$. Оценить возраст руды, считая, что весь свинец $^{206}\mathrm{Pb}$ является конечным продуктом распада уранового ряда.

Дано:
$\eta = N_{\mathrm{U}}/N_{\mathrm{Pb}} = 2,8$
$T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ лет
$t - ?$

Решение. Число ядер свинца, возникшего при распаде урана-238,

$$N_{\mathrm{Pb}} = N_{0\mathrm{U}} - N_{\mathrm{U}} = N_{0\mathrm{U}}(1 - e^{-\lambda t}),$$

где $N_{0\mathrm{U}}$ – начальное число ядер $^{238}\mathrm{U}$; λ – постоянная распада этого изотопа; t – время распада.

Отношение числа N_{U} нераспавшихся ядер $^{238}\mathrm{U}$ к числу ядер свинца:

$$\eta = \frac{N_{\mathrm{U}}}{N_{\mathrm{Pb}}} = \frac{N_{0\mathrm{U}} e^{-\lambda t}}{N_{0\mathrm{U}}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}.$$

Отсюда $$e^{-\lambda t} = \eta(1 - e^{-\lambda t}).$$

Решив последнее уравнение относительно времени t с учетом, что $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$, получим:

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln\frac{1+\eta}{\eta} = \frac{4,5 \cdot 10^9}{\ln 2} \ln\frac{1+2,8}{2,8} = 1,98 \cdot 10^9 \text{ лет}.$$

Ответ: возраст урановой руды $t \approx 2 \cdot 10^9$ лет.

Задача 11. В результате α-распада радий ^{226}Ra превратился в радон ^{222}Rn. Какой объем радона при нормальных условиях будет находиться в равновесии с 2 г радия?

Дано:	
$m_{Ra} = 2\cdot10^{-3}$ кг $T_{1/2(Ra)} = 1{,}62\cdot10^3$ лет $T_{1/2(Rn)} = 3{,}8$ сут	**Решение.** При установившемся радиоактивном равновесии количество радиоактивных ядер обоих изотопов и их постоянные распада связаны уравнением
V_{Rn} – ?	$$\lambda_{Ra}\cdot N_{Ra} = \lambda_{Rn}\cdot N_{Rn}. \quad (1)$$

Отсюда количество ядер радона

$$N_{Rn} = \frac{\lambda_{Ra} N_{Ra}}{\lambda_{Rn}} = \frac{T_{1/2}(\mathrm{Rn})}{T_{1/2}(\mathrm{Ra})} N_{Ra}. \quad (2)$$

Количество ядер радия $N_{Ra} = \dfrac{m_{Ra}}{\mu_{Ra}} N_A$, (3)

где m_{Ra} и μ_{Ra} –масса и молярная масса радия; N_A – постоянная Авогадро.

Объем радона при нормальных условиях

$$V_{Rn} = \nu_{Rn} V_\mu = \frac{N_{Rn}}{N_A} V_\mu, \quad (4)$$

где ν_{Rn} – число молей радона; $V_\mu = 22{,}4\cdot10^{-3}$ м^3/моль – молярный объем газа при нормальных условиях.

С учетом (2) и (3) выражение (4) можно представить в виде

$$V_{Rn} = \frac{T_{1/2}(\mathrm{Rn})}{T_{1/2}(\mathrm{Ra})} \frac{m_{Ra}}{\mu_{Ra}} V_\mu.$$

Подставляя числовые значения и произведя вычисления, получим:

$$V_{Rn} = \frac{3{,}8}{1{,}62\cdot10^3\cdot365}\cdot\frac{2\cdot10^{-3}}{0{,}226}\cdot22{,}4\cdot10^{-3} = 1{,}274\cdot10^{-9}\ \text{м}^3.$$

Ответ: $V_{Rn} = 1{,}274$ мм^3.

Задача 12. Определите количество теплоты, которое выделяет 1 мг препарата полония ^{210}Po за период, равный среднему времени жизни этих ядер, если испускаемые α-частицы имеют кинетическую энергию 5,3 МэВ и практически все дочерние ядра образуются непосредственно в основном состоянии.

Дано:	
$m = 10^{-6}$ кг $t = 1/\lambda$ $E_\alpha = 8{,}48\cdot10^{-13}$ Дж $\mu_{Po} = 0{,}21$ кг/моль $A_{He} = 4$ $A_{Pb} = 206$	**Решение.** Процесс α-распада ядер полония (с учетом законов сохранения зарядового и массового чисел) имеет вид $^{210}_{84}\mathrm{Po} \xrightarrow{\alpha} {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$ Количество теплоты, выделяемой в этом процессе, можно найти, используя выражение
Q – ?	$$Q = E\cdot\Delta N, \quad (1)$$

где $E = (E_\alpha + E_{Pb})$ – суммарная кинетическая энергия α-частицы и дочернего ядра (в данном случае – ядра свинца); ΔN – количество ядер полония, распавшихся за время t.

Кинетическая энергия E_{Pb} дочернего ядра, которую оно получило в результате отдачи:

$$E_{Pb} = \frac{m_{Pb} \upsilon_{Pb}^2}{2}, \quad (2)$$

где m_{Pb} – масса дочернего ядра; υ_{Pb} – его скорость отдачи.

Скорость υ_{Pb} найдем на основе закона сохранения импульса для α-распада покоящегося ядра полония

$$m_{Pb}\boldsymbol{\upsilon}_{Pb} + m_\alpha \boldsymbol{\upsilon}_\alpha = 0$$

или в проекциях на направление вылета α-частицы

$$-m_{Pb}\upsilon_{Pb} + m_\alpha \upsilon_\alpha = 0,$$

отсюда

$$\upsilon_{Pb} = m_\alpha \upsilon_\alpha / m_{Pb}. \quad (3)$$

Здесь m_α и υ_α – масса и скорость вылета α-частицы.

Подставляя (3) в (2), получим выражение для кинетической энергии ядра свинца в виде

$$E_{Pb} = \frac{m_{Pb}}{2} \cdot \frac{m_\alpha^2 \upsilon_\alpha^2}{m_{Pb}^2} = \frac{m_\alpha}{m_{Pb}} E_\alpha.$$

Тогда суммарная кинетическая энергия α-частицы и дочернего ядра

$$E = E_\alpha + \frac{m_\alpha}{m_{Pb}} E_\alpha = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Pb}}\right).$$

Заменив отношение масс ядер отношением их массовых чисел, получим

$$E = E_\alpha \left(1 + \frac{A_{He}}{A_{Pb}}\right). \quad (4)$$

Количество ядер ΔN полония, распавшихся за время $t = 1/\lambda$:

$$\Delta N = N_0(1 - e^{-\lambda t}) = N_0(1 - e^{-1}). \quad (5)$$

Начальное количество ядер N_0 препарата полония ^{210}Po:

$$N_0 = \frac{m}{\mu_{Po}} N_A. \quad (6)$$

Здесь m – исходная масса препарата полония; μ_{Po} – молярная масса полония ^{210}Po; N_A – постоянная Авогадро.

Следовательно, количество распавшихся ядер полония

$$\Delta N = \frac{m}{\mu_{Po}} N_A \left(1 - \frac{1}{e}\right). \quad (7)$$

Подставляя (4) и (7) в (1), находим тепловыделение Q в процессе распада ядер полония за указанный промежуток времени:

$$Q = \frac{m}{\mu_{\mathrm{Po}}} N_{\mathrm{A}} E_{\alpha} \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(1 + \frac{A_{\mathrm{He}}}{A_{\mathrm{Pb}}}\right).$$

Произведем вычисления:

$$Q = \frac{10^{-6}}{0,21} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 8,48 \cdot 10^{-13} \cdot \left(1 - \frac{1}{2,718}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{206}\right) = 1,57 \cdot 10^{6} \text{ Дж}.$$

Ответ: Q = 1,57 МДж.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Определите концентрацию n нуклонов в ядре.

Ответ: $n = 3/4\pi r_0^3 = 8,7 \cdot 10^{43}\, м^{-3}$, $n = 3\big/\left(4\pi r_0^3\right) = 8,7 \cdot 10^{43}\,\text{м}^{-3}$.

9.2. Определите отношение сечений σ_1/σ_2 ядер титана $^{48}\mathrm{Ti}$ и алюминия $^{27}\mathrm{Al}$.

Ответ: $\sigma_{\mathrm{Ti}}/\sigma_{\mathrm{Al}} = \sqrt[3]{\left(A_{\mathrm{Ti}}/A_{\mathrm{Al}}\right)^2} = 1,47.$

9.3. Хлор представляет смесь двух изотопов с относительными атомными массами A_{r1} = 34,969 и A_{r2} = 36,966. Определите относительную атомную массу A_r хлора, если массовые доли ω_1 и ω_2 первого и второго изотопов, соответственно, равны 0,754 и 0,246.

Ответ: $A_r = \dfrac{A_{r1}A_{r2}}{\omega_1 A_{r2} + \omega_2 A_{r1}} = 35,44$.

9.4. В ядре изотопа кремния $^{27}_{14}\mathrm{Si}$ один из протонов превратился в нейтрон (β^+-распад). Какое ядро получилось в результате такого превращения?

Ответ: $^{27}_{13}\mathrm{Al}$.

9.5. Вследствие радиоактивного распада изотоп урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$ превращается в свинец $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$. Сколько α- и β-распадов он при этом испытывает?

Ответ: 8 α-распадов и 6 β-распадов.

9.6. Ядро цинка $^{62}_{30}\mathrm{Zn}$ захватило электрон из K-оболочки и через некоторое время испустило позитрон. Какое ядро получилось в результате таких превращений?

Ответ: $^{62}_{28}\mathrm{Ni}$.

9.7. За время t = 33,2 сут распалось 80 % ($\Delta N/N_0$ = 0,8) начального количества ядер радиоактивного изотопа. Определите его период полураспада.

Ответ: $T_{1/2} = \dfrac{t \cdot \ln 2}{\ln\left[1\big/\left(1 - \Delta N/N_0\right)\right]} = 14,3\,\text{сут}$.

9.8. Какая часть $\Delta N/N_0$ начального количества радиоактивного изотопа распадается за время t, равное средней продолжительности τ жизни этого изотопа?

Ответ: $\frac{\Delta N}{N_0} = \left(1 - e^{-1}\right) = 0,632$.

9.9. За время t_1 = 1 год количество радиоактивного изотопа уменьшилось в 3 раза (n_1 = 3). Во сколько раз оно уменьшится за время t_2 = 2 года?

Ответ: $n_2 = \exp\left(\frac{t_2}{t_1}\ln n_1\right) = 9$.

9.10. Ионизационный счетчик, установленный вблизи радиоактивного препарата, регистрирует в начале наблюдения n_1 = 560 импульсов в течение времени Δt = 5 с, а через t = 48 ч после начала наблюдения счетчик регистрирует в течение того же промежутка времени n_2 = 35 импульсов. Определите период полураспада изотопа.

Ответ: $T_{1/2} = \frac{t \cdot \ln 2}{\ln\left(n_1 / n_2\right)} = 12$ ч.

9.11. Определите массу m полония ^{210}Po, активность которого $a = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Ответ: $m = \frac{\mu_{\text{Po}} a T_{1/2}}{N_{\text{A}} \ln 2} = 0,22$ мг.

9.12. Определите, какая масса Δm радия ^{226}Ra распадается в течение времени t = 1 сут из чистого препарата массой m = 1 г.

Ответ: $\Delta m = m\left[1 - \exp\left(-\frac{t \cdot \ln 2}{T_{1/2}}\right)\right] = 1{,}17$ мкг.

9.13. Определите активность a радона ^{228}Rn, образовавшегося из радия ^{226}Ra массой m = 1 г в течение времени t = 1 ч.

Ответ: $a = \frac{m \cdot N_{\text{A}} \cdot \ln 2}{\mu_{\text{Ra}} \cdot T_{1/2}(\text{Rn})}\left[1 - \exp\left(-\frac{t \cdot \ln 2}{T_{1/2}(\text{Ra})}\right)\right] = 2,75 \cdot 10^8$ Бк.

9.14. Начальная активность a_0 некоторого радиоактивного изотопа равна 100 Бк. Какова его активность a по истечении времени, равного половине периода полураспада?

Ответ: $a = a_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) = 70,7$ Бк.

9.15. Какой активностью обладает изотоп висмута ^{210}Bi массой m_0 = 1 мг, выдержанный в течение времени t = 10 сут?

Ответ: $a = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m_0 N_A}{\mu_{\text{Bi}}} \cdot \exp\left(-\frac{t \cdot \ln 2}{T_{1/2}}\right) = 31$ Ки.

9.16. Определите объем радона ^{228}Rn активностью a = 1 Ки при нормальных условиях (T = 273 К, $P = 10^5$ Па).

Ответ: $V = \dfrac{aRT}{N_A P \ln 2} \cdot T_{1/2} = 0{,}66\ \text{мм}^3$.

9.17. Определите удельную активность плутония ^{239}Pu.

Ответ: $\dfrac{a}{m} = \dfrac{N_\text{A} \ln 2}{\mu_\text{Pu} T_{1/2}} = 62{,}3\ \dfrac{\text{мКи}}{\text{г}}$.

9.18. Определите возраст t урановой руды, если известно, что в этой руде на массу m_U = 1 кг урана ^{238}U приходится свинец ^{206}Pb массой m_Pb = 32 г.

Ответ: $t = \dfrac{T_{1/2}(\text{U})}{\ln 2} \cdot \ln\left(\dfrac{m_\text{U}\mu_\text{Pb}}{m_\text{U}\mu_\text{Pb} - m_\text{Pb}\mu_\text{U}}\right) = 3 \cdot 10^9$ лет.

9.19. В природном уране массой m_U = 1 г содержится радий массой $m_\text{Ra} = 3{,}42 \cdot 10^{-7}$ г. Считая, что $T_{1/2}(^{238}\text{U}) \gg T_{1/2}(^{226}\text{Ra})$, определите период полураспада урана ^{238}U.

Ответ: $T_{1/2}(\text{U}) = \dfrac{m_\text{U}}{m_\text{Ra}} \cdot \dfrac{\mu_\text{Ra}}{\mu_\text{U}} T_{1/2}(\text{Ra}) = 4{,}5 \cdot 10^9$ лет.

9.20. В кровь человека ввели $V_0 = 1\ \text{см}^3$ раствора, содержащего радиоизотоп $^{24}_{11}$Na с активностью $a_0 = 2 \cdot 10^3$ Бк. Активность a 1 см^3 крови, взятой через t = 5 ч, оказалась равной 0,267 Бк. Определите по этим данным объем V крови человека.

Ответ: $V = V_0 \dfrac{a_0}{a} \exp\left(-t \cdot \ln 2 / T_{1/2}\right) = 5{,}95$ л.

9.21. Какую массу Δm β-активного изотопа стронция ^{89}Sr необходимо добавить к массе m = 100 мкг неактивного стронция, чтобы удельная активность $a_\text{уд}$ препарата стала равной 1280 Ки/г?

Ответ: $\Delta m = m \Big/ \left[N_\text{A} \ln 2 \Big/ \left(a_\text{уд} \mu_\text{Sr} T_{1/2} \right) - 1 \right] = 5$ мкг.

9.22. Удельная активность $a_\text{уд}$ препарата, состоящего из активного кобальта ^{58}Co и неактивного ^{59}Co, равна $2{,}2 \cdot 10^{12}$ Бк/г. Найдите отношение массы m_1 активного кобальта в этом препарате к массе ($m_1 + m_2$) всего препарата.

Ответ: $\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = \dfrac{a_\text{уд} \mu_{^{58}\text{Co}} T_{1/2}}{N_A \ln 2} = 0{,}019$.

9.23. К радиоактивному изотопу ^{45}Ca массой m_1 = 10 мг примешали нерадиоактивный изотоп ^{40}Ca массой m_2 = 30 мг. На сколько уменьшилась удельная активность $a_{уд}$ препарата?

Ответ: на $\Delta a = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \dfrac{N_A \ln 2}{\mu_{^{45}Co} T_{1/2}} = 1{,}33 \cdot 10^7 \ \dfrac{Ки}{кг}$.

9.24. Определите массу m_1 стронция ^{90}Sr, имеющего такую же активность, как и кобальт ^{60}Co массой m_2 = 1 мг.

Ответ: $m_1 = \dfrac{\mu_{Sr} T_{1/2}(Sr)}{\mu_{Co} T_{1/2}(Co)} m_2 = 7{,}92$ мг.

9.25. Определите, какое количество теплоты выделяется в течение времени t = 1 ч при радиоактивном распаде радона ^{222}Rn, активность которого a = 1 Ки. Кинетическая энергия вылетающей из ядра радона α-частицы E_α = 5,5 МэВ.

Ответ: $Q = aE_\alpha t$ = 117,2 Дж.

10. ДЕФЕКТ МАССЫ И ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ ЯДРА. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

Основные формулы и обозначения

Дефект массы Δm атомного ядра – это разность между суммой масс свободных протонов и нейтронов и массой образовавшегося из них ядра,

$$\Delta m = Z_{m_\text{p}} + (A - Z) \cdot m_\text{n} - m_\text{я},$$

где Z – зарядовое число (число протонов в ядре); A – массовое число (число всех нуклонов в ядре); m_p, m_n – массы протона и нейтрона, соответственно; $m_\text{я}$ – масса ядра.

Если учесть, что $m_\text{я} = m_\text{a} - Zm_\text{e}$ и $m_\text{p} + m_\text{e} = m_\text{H}$, где m_a – масса нейтрального атома; m_H – масса нейтрального атома водорода (протия), то формулу дефекта массы ядра можно представить в виде

$$\Delta m = Zm_\text{H} + \left(A - Z\right) m_\text{n} - m_\text{a}.$$

Эта формула является более предпочтительной для вычисления дефекта массы ядра, так как в таблицах приводятся, как правило, не массы ядер, а массы нейтральных атомов.

Энергия связи любого ядра определяется соотношением

$$E_\text{св} = \Delta mc^2.$$

Если дефект массы Δm выражать в атомных единицах массы (а.е.м.), а энергию связи $E_\text{св}$ в миллионах электронвольт (МэВ), то коэффициент пропорциональности c^2 = 931,4 МэВ/а.е.м.

Удельная энергия связи – это энергия связи, приходящаяся на один нуклон,

$$E_\text{уд} = E_\text{св} / A.$$

Ядерными реакциями называются процессы превращения атомных ядер, вызванные их взаимодействиями с различными элементарными частицами или друг с другом.

Символическая запись ядерной реакции:

$$\text{X} + \text{a} \rightarrow \text{Y} + \text{b} \text{ или сокращенно } \text{X(a, b) Y},$$

где X – исходное ядро-мишень, a – частица, бомбардирующая ядро X, b – частица, вылетающая из составного ядра, Y – ядро, образовавшееся в результате ядерной реакции.

Для обозначения частиц a и b приняты следующие символы: p – протон; n – нейтрон; d – дейтрон; α – альфа-частица; γ – гамма-фотон.

Энергия ядерной реакции (тепловой эффект)

$$Q = c^2 \left[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4) \right],$$

где m_1 и m_2 – массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; $(m_3 + m_4)$ – сумма масс покоя ядер продуктов реакции.

Пороговая (минимальная) кинетическая энергия $K_{\text{пор}}$ налетающей частицы, при которой становится возможной эндоэнергетическая ядерная реакция с энергией Q,

$$K_{\text{пор}} = \frac{m+M}{M}|Q|,$$

где m и M – масса налетающей частицы и ядра мишени.

Задачи с решениями

Задача 1. Определите дефект массы и энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра азота ${}^{14}_{7}\text{N}$.

Дано:
m_{N} = 14,00307 а.е.м.
m_{H} = 1,00783 а.е.м.
m_{n} = 1,00867 а.е.м.
1 а.е.м. = $1{,}6606\cdot10^{-27}$ кг

Δm – ? $E_{\text{св}}$ – ?

Решение. Дефект массы ядра определим по формуле

$$\Delta m = Zm_{\text{H}} + (A-Z)m_{\text{n}} - m_{\text{N}}. \qquad (1)$$

Для ядра азота ${}^{14}_{7}\text{N}$ Z = 7, A=14. Вычисление дефекта массы выполним во внесистемных единицах (а.е.м.).

Подставив в (1) числовые значения, получим:

$$\Delta m = 7\cdot1{,}00783 + (14-7)\cdot1{,}00867 - 14{,}00307 = 0{,}11243 \text{ а.е.м.},$$

$$\Delta m = 0{,}11243\cdot1{,}6606\cdot10^{-27} = 1{,}867\cdot10^{-28} \text{ кг}.$$

Энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2. \qquad (2)$$

Энергию связи ядра найдем во внесистемных единицах (МэВ). Для этого дефект массы Δm подставим в формулу (2) в а.е.м., а коэффициент пропорциональности c^2 – в МэВ/а.е.м. (c^2 = 931,4 МэВ/а.е.м).

Тогда $$E_{\text{св}} = 0{,}11243\cdot931{,}4 = 104{,}72 \text{ МэВ}.$$

Ответ: Δm = 0,11243 а.е.м. = $1{,}867\cdot10^{-28}$ кг; $E_{\text{св}}$ = 104,72 МэВ.

Задача 2. Какую минимальную энергию необходимо затратить для отрыва одного протона от ядра бора ${}^{10}_{5}\text{B}$?

Дано:
$m_{^{10}\text{B}}$ = 10,01294 а.е.м.
$m_{^{9}\text{Be}}$ = 9,01219 а.е.м.
m_{p} = 1,00728 а.е.м.
m_{e} = 0,00055 а.е.м.
c^2 = 931,4 МэВ/а.е.м.

$E_{\min}$ – ?

Решение. После отрыва протона от ядра бора ${}^{10}_{5}\text{B}$ и массовое, и зарядовое числа ядра уменьшаются на единицу – получится ядро бериллия ${}^{9}_{4}\text{Be}$. Следовательно, энергия отрыва протона от ядра ${}^{10}_{5}\text{B}$ равна энергии связи протона с ядром ${}^{9}_{4}\text{Be}$.

$$E_{\min} = E_{\text{св}} = \Delta m\cdot c^2 = (m_{\text{яBe}} + m_{\text{p}} - m_{\text{яB}})\cdot c^2.$$

Если прибавить к массе ядра ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ массу электрона, то массы ядер ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ и ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$ можно заменить массами их нейтральных атомов, так как число электронов в нейтральном атоме ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$ и в системе «нейтральный атом ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ плюс электрон» – одинаково.

Тогда энергия отрыва протона от ядра ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$

$$E_{\min} = (m_{\mathrm{Be}} + m_{\mathrm{e}} + m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{B}})\cdot c^2.$$

В этой формуле m_{Be} и m_{B} – это уже массы нейтральных атомов ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ и ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$. Подставим числовые данные и произведем вычисления:

$$E_{\min} = (9{,}01219 + 0{,}00055 + 1{,}00728 - 10{,}01294)\cdot 931{,}4 = 6{,}59 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $E_{\min} = 6{,}59$ МэВ.

Задача 3. Определить энергию E, которая выделяется при образовании из протонов и нейтронов ядер гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ массой $m = 1$ г.

Дано:
$m = 10^{-3}$ кг
$m_{\mathrm{He}} = 4{,}0026$ а.е.м.
$m_{\mathrm{n}} = 1{,}00867$ а.е.м.
$m_{\mathrm{H}} = 1{,}00783$ а.е.м.
$\mu = 4\cdot 10^{-3}$ кг/моль
E – ?

Решение. При образовании из протонов и нейтронов одного ядра ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ выделяется энергия, равная энергии связи $E_{\text{св}}$ этого ядра,

$$E_{\text{св}} = \left[Zm_{\mathrm{H}} + \left(A - Z\right)m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{He}}\right]\cdot c^2 .$$

При образовании из протонов и нейтронов ядер ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ массой m выделяется энергия

$$E = N\cdot E_{\text{св}},$$

где $N = \dfrac{m}{\mu}N_{\mathrm{A}}$ – количество ядер гелия, содержащихся в данной массе вещества; μ – молярная масса гелия; N_{A} – постоянная Авогадро.

Таким образом,

$$E = \frac{m}{\mu}N_{\mathrm{A}}c^2\left[Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{He}}\right]\cdot c^2.$$

Для ядра гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ $Z = 2$, $A = 4$.

При вычислении энергии E величины m, μ и N_{A} будем подставлять в формулу в единицах СИ, а остальные величины – во внесистемных единицах (массы в а.е.м., $c^2 = 931{,}4$ МэВ/а.е.м.).

$$E = \frac{10^{-3}}{4\cdot 10^{-3}}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot\left[2\cdot 1{,}00783 + \left(4 - 2\right)\cdot 1{,}00867 - 4{,}0026\right]\cdot 931{,}4 = 4{,}26\cdot 10^{24} \text{ МэВ}.$$

Ответ: $E = 4{,}26\cdot 10^{24}$ МэВ.

Задача 4. Найти энергию реакции взаимодействия ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow$ $\rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li}$, если кинетическая энергия K_{H} протона, налетающего на покоившееся ядро бериллия, равна 5,45 МэВ, а ядро гелия с энергией K_{He} = 4,01 МэВ вылетает под углом α = 90° к направлению движения протона.

Дано:
K_{H} = 5,45 МэВ
K_{He} = 4,01 МэВ
α = 90°
m_{H} = 1,00783 а.е.м.
m_{He} = 4,00260 а.е.м.
m_{Li} = 6,01513 а.е.м

Q – ?

Решение. Энергию реакции находим по закону сохранения энергии

$$Q = K_{\mathrm{Li}} + K_{\mathrm{He}} - K_{\mathrm{H}}. \qquad (1)$$

Для решения задачи нужно вычислить кинетическую энергию ядра лития. Ее величину можно найти, применив закон сохранения импульса.

Так как ядро бериллия неподвижно, а направления движения протона и ядра гелия взаимно перпендикулярны (см. рис. 10.1), то

$$p_{\mathrm{Li}}^2 = p_{\mathrm{He}}^2 + p_{\mathrm{H}}^2. \qquad (2)$$

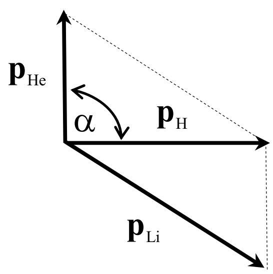

Рис. 10.1

Применим классическое соотношение между импульсом и энергией $K = p^2/(2m)$, так как кинетические энергии частиц много меньше энергий покоя этих ядер.

$$m_{\mathrm{Li}}K_{\mathrm{Li}} = m_{\mathrm{He}}K_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{H}}K_{\mathrm{H}}. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что

$$K_{\mathrm{Li}} = \frac{m_{\mathrm{He}}K_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{H}}K_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{Li}}}. \qquad (4)$$

Простейшие вычисления дают: K_{Li} = 3,58 МэВ.

По формуле (1) находим энергию реакции Q

$$Q = K_{\mathrm{He}} + K_{\mathrm{Li}} - K_{\mathrm{H}} = 2{,}13 \text{ МэВ}.$$

Ответ: Q = 2,13 МэВ.

Задача 5. Покоившееся ядро полония ${}^{200}_{84}\mathrm{Po}$ испускает α-частицу с кинетической энергией K_{α} = 5,8 МэВ. Определить, какую долю η кинетической энергии α-частицы составляет энергия отдачи дочернего ядра и скорость ядра отдачи.

Дано:
$K_{\alpha} = 9{,}28 \cdot 10^{-13}$ Дж
A_{Pb} = 196
A_{He} = 4
$m_{\mathrm{n}} = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

η – ? $v_{я}$ – ?

Решение. Запишем реакцию распада ядра полония: ${}^{200}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{196}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Задачу можно решить в классическом приближении, так как вновь, как и в предыдущей задаче, энергия частиц много меньше энергии покоя.

Из закона сохранения импульса следует, что

$$m_{\alpha}v_{\alpha} = m_{я}v_{я}.$$

Кинетическая энергия α-частиц и ядра отдачи равны:

$$K_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}; \qquad K_я = \frac{m_я v_я^2}{2}.$$

Легко увидеть, что $\quad K_я = \dfrac{(m_\alpha v_\alpha)^2}{2m_я} = \dfrac{m_\alpha}{m_я} K_\alpha.$

Таким образом, $\quad \eta = \dfrac{K_я}{K_\alpha} = \dfrac{m_\alpha}{m_я} = \dfrac{4}{200} = 0{,}02\,.$

$$v_я = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_я} = \frac{\sqrt{2m_\alpha K_\alpha}}{m_я} = \frac{\sqrt{2A_{He} m_n K_\alpha}}{A_{Pb} m_n},$$

$$v_я = \frac{\sqrt{2\cdot 4\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 9{,}28\cdot 10^{-13}}}{196\cdot 1{,}675\cdot 10^{-27}} \cong 3{,}4\cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Ответ: $\eta = 0{,}02$; $v_я = 3{,}4\cdot 10^5$ м/с.

Задача 6. На покоящееся ядро лития налетает протон. В результате ядерной реакции образовались две α-частицы с одинаковыми энергиями. Найдите угол между направлениями их разлета, если кинетическая энергия протона $K_p = 1$ МэВ.

Дано:
$K_p = 1$ МэВ
$m_\alpha = 4{,}00149$ а.е.м.
$m_{Li} = 7{,}01601$ а.е.м.
$m_p = 1{,}00728$ а.е.м.
$c^2 = 931{,}4$ МэВ/а.е.м.
β – ?

Решение. Для нахождения искомой величины запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\alpha, \tag{1}$$

$$K_p + Q = 2K_\alpha, \tag{2}$$

где Q – энергия реакции.

Векторная схема импульсов имеет вид (рис. 10.2, где $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{p}_p = m_p \mathbf{v}_p$).

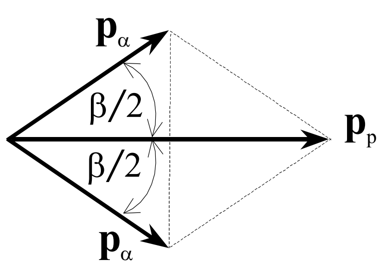

Рис. 10.2

Из схемы легко получаем

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{p_p}{2p_\alpha} = \frac{m_p v_p}{2m_\alpha v_\alpha}. \tag{3}$$

Для нахождения скоростей частиц применим соотношение

$$p_p = \sqrt{2m_p K_p}\,, \text{ или } \; m_p v_p = \sqrt{2m_p K_p}\,. \tag{4}$$

Из уравнения (2) следует, что

$$K_\alpha = \frac{K_p + Q}{2} = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}.$$

Из этого соотношения имеем

$$m_\alpha v_\alpha = \sqrt{m_\alpha \left(K_p + Q\right)}, \tag{5}$$

где

$$Q = c^2(m_{Li} + m_p - 2m_\alpha). \tag{6}$$

Подставив (4), (5) и (6) в (3) и выполнив необходимые математические преобразования, получим

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{m_p}{2m_\alpha}\cdot\frac{K_p}{K_p+(m_{Li}+m_p-2m_\alpha)\cdot c^2}}$$

или
$$\beta=2\cdot\arccos\sqrt{\frac{m_p}{2m_\alpha}\cdot\frac{K_p}{K_p+(m_{Li}+m_p-2m_\alpha)\cdot c^2}}.$$

$$\beta=2\arccos\sqrt{\frac{1{,}00728}{2\cdot 4{,}00149}\cdot\frac{1}{1+\left(7{,}01601+1{,}00728-2\cdot 4{,}00149\right)\cdot 931{,}4}}=170{,}9°.$$

Ответ: $\beta = 170{,}9°$.

Задача 7. Покоящееся ядро m_1 превращается в ядро m_2, испустив α-частицу. Ядро m_2, в свою очередь, испускает α-частицу в направлении своего движения и останавливается. Определить скорость 2-й α-частицы.

Решение. Запишем закон сохранения энергии для 1-й реакции:

$$Q=c^2(m_1-m_2-m_\alpha)=\frac{m_\alpha v_{\alpha 1}^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Закон сохранения импульса для этой же реакции

$$m_\alpha v_{\alpha 1}=m_2 v_2. \qquad (2)$$

Закон сохранения импульса для второй реакции

$$m_\alpha v_{\alpha 2}=m_2 v_2. \qquad (3)$$

Таким образом, из (2) и (3) следует

$$v_{\alpha 1}=v_{\alpha 2}=m_2 v_2/m_\alpha. \qquad (4)$$

Используя уравнения (1) и (4), найдем

$$v_2=\sqrt{\frac{2c^2(m_1-m_2-m_\alpha)m_\alpha}{m_2(m_2+m_\alpha)}}.$$

Очевидно, что $m_1 \neq m_2 + m_\alpha$, так как по условию задачи $v_2 \neq 0$.

Задача 8. Какую долю η кинетической энергии теряет нейтрон при упругом столкновении с покоящимся ядром ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, если после столкновения частицы движутся по одной прямой?

Дано:
$m_n = 1$ а.е.м.
$m_C = 12$ а.е.м.
$\eta - ?$

Решение. Переобозначим: $m_n = m_1$; $m_C = m_2$. Тогда закон сохранения энергии и импульса примет вид

$$\frac{m_1 v_1^2}{2}=\frac{m_1 v_1'^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2};$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2,$$

где v_1 и v_1' – скорость нейтрона до и после столкновения с покоящимся ядром углерода; v_2 – скорость ядра углерода после столкновения.

$$m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2 v_2^2, \qquad (1)$$

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2 v_2. \qquad (2)$$

Решение сводится к известной классической задаче. Из (1) и (2) простым преобразованием типа $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ получаем

$$v_1 + v_1' = v_2,$$

и после подстановки в (2), находим

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1.$$

Потеря кинетической энергии η равна:

$$\eta = \frac{K - K'}{K} = 1 - \frac{K'}{K} = 1 - \left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 0{,}284.$$

Ответ: $\eta = 0{,}284$.

Задача 9. При «слиянии» двух неподвижных ядер по реакции ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$ возникают быстрые нейтроны. Определить их энергию.

Дано:	**Решение.** Энергия реакции равна:
$m_{Be} = 9{,}01219$ а.е.м.	$Q = K_n + K_C, \qquad (1)$
$m_{He} = 4{,}00260$ а.е.м.	где K_n – кинетическая энергия нейтрона;
$m_C = 12{,}0000$ а.е.м.	K_C – кинетическая энергия ядра углерода.
$m_n = 1{,}00867$ а.е.м.	С другой стороны энергия Q реакции равна:
$c^2 = 931{,}4$ МэВ/а.е.м.	$Q = c^2(m_{Be} + m_{He} - m_n - m_C). \qquad (2)$
K_n – ?	Из закона сохранения импульса имеем

$$m_n v_n = m_C v_C. \qquad (3)$$

Из (1) и (3) можно получить

$$Q = \left(1 + \frac{m_n}{m_C}\right) K_n.$$

Отсюда, с учетом (2), получим

$$K_n = \frac{c^2\left(m_{Be} + m_{He} - m_n - m_C\right) m_C}{m_C + m_n}.$$

$$K_n = \frac{931{,}4 \cdot \left(9{,}01219 + 4{,}0026 - 1{,}00867 - 12\right) \cdot 12}{12 + 1{,}00867} = 5{,}28 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $K_n = 5{,}28$ МэВ.

Задача 10. При бомбардировке протонами ядер бериллия образуются α-частицы и изотоп ${}^6_3\mathrm{Li}$. Определить энергию реакции при произвольном разлете частиц. Ядро бериллия считать неподвижным.

Дано:	**Решение.** Условие определения энергии Q реакции при произвольном разлете частиц означает, что необходимо рассмотреть реакцию
$m_\mathrm{H} = 1{,}00783$ а.е.м. $m_\mathrm{Be} = 9{,}01219$ а.е.м. $m_\mathrm{He} = 4{,}0026$ а.е.м. $m_\mathrm{Li} = 6{,}01513$ а.е.м $c^2 = 931{,}4$ МэВ/а.е.м.	$${}^9_4\mathrm{Be} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^6_3\mathrm{Li}$$ для любых кинетических энергий K налетающей и разлетающихся частиц, в том числе и при $K >> mc^2$ (релятивистский случай).
Q – ?	

Применим закон сохранения релятивистской полной энергии

$$E_\mathrm{Be} + E_\mathrm{H} = E_\mathrm{He} + E_\mathrm{Li}. \qquad (1)$$

Релятивистская полная энергия E частицы равна сумме ее энергии покоя mc^2 и кинетической энергии K:

$$E = mc^2 + K. \qquad (2)$$

Так как ядро бериллия ${}^9\mathrm{Be}$ неподвижно, то уравнение (1) с учетом (2) примет вид

$$m_\mathrm{Be}c^2 + m_\mathrm{H}c^2 + K_\mathrm{H} = m_\mathrm{He}c^2 + K_\mathrm{He} + m_\mathrm{Li}c^2 + K_\mathrm{Li}, \qquad (3)$$

где K_H, K_He, и K_Li – кинетическая энергия протона, α-частицы и лития.

Тогда, с учетом (3), имеем

$$Q = K_\mathrm{Li} + K_\mathrm{He} - K_\mathrm{H} = c^2\,[(m_\mathrm{Be} + m_\mathrm{H}) - (m_\mathrm{He} + m_\mathrm{Li})].$$

Подставляя численные значения, получим

$$Q = 931{,}4\cdot[(9{,}01219 + 1{,}00783) - (4{,}0026 + 6{,}01513)] = 2{,}13 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $Q = 2{,}13$ МэВ.

Задача 11. При β^+-распаде радиоактивное ядро ${}^{23}_{12}\mathrm{Mg}$ выбрасывает позитрон e^+ и нейтрино ν_e. Определить энергию Q распада ядра магния, если перед распадом оно покоилось.

Дано:	**Решение.** Запишем закон сохранения полной релятивистской энергии для ядерной реакции:
$m_\mathrm{Mg} = 22{,}99414$ а.е.м. $m_\mathrm{Na} = 22{,}98977$ а.е.м. $m_\mathrm{e} = 0{,}00055$ а.е.м. $m_\nu \approx 0$ а.е.м. $c^2 = 931{,}4$ МэВ/а.е.м.	$${}^{23}_{12}\mathrm{Mg} \rightarrow {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^0_1\mathrm{e} + {}^0_0\nu_e\ .$$ Обозначим массу ядра магния m_1, массу электрона m_e, массу образовавшегося ядра натрия m_2.
Q – ?	

Учтем, что масса покоя нейтрино приблизительно равна 0. Тогда

$$m_1c^2 = m_2c^2 + K_\mathrm{Na} + m_\mathrm{e}c^2 + K_\mathrm{e} + K_\nu,$$

где K_e, K_Na, и K_ν – кинетическая энергия позитрона, ядра натрия и нейтрино.

Энергия распада Q равна:

$$Q = K_{Na} + K_e + K_\nu = c^2 (m_1 - m_2 - m_e).$$

В результате, заменяя массы ядер массами нейтральных атомов, получим

$$Q = c^2[(m_{Mg} - 12m_e) - (m_{Na} - 11m_e) - m_e] = c^2(m_{Mg} - m_{Na} - 2m_e),$$

где m_{Mg} и m_{Na} – массы нейтральных атомов Mg и Na.

$$Q = 931{,}4(22{,}99414 - 22{,}98977 - 2\cdot 0{,}00055) = 3{,}05 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $Q = 3{,}05$ МэВ.

Задача 12. При бомбардировке α-частицами неподвижных ядер азота ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ образуются протоны с кинетической энергией 8,5 МэВ. Найти: 1) энергию ядерной реакции; 2) кинетическую энергию образующегося ядра кислорода; 3) под каким углом к направлению движения α-частицы вылетает протон, если минимальная кинетическая энергия α-частицы, необходимая для осуществления реакции, равна 10,5 МэВ.

Дано:

$K_1 = 10{,}5$ МэВ

$K_2 = 8{,}5$ МэВ

$m_{He} = 4{,}0026$ а.е.м.

$m_H = 1{,}00783$ а.е.м.

$m_O = 16{,}99913$ а.е.м

$m_N = 14{,}00307$ а.е.м

$c^2 = 931{,}4$ МэВ/а.е.м.

Q – ? K_3 – ? γ – ?

Решение. Обозначим: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы ядер α-частицы, протона, кислорода и азота, так как

$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{Ne} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{17}_{8}\mathrm{O}.$$

Соответствующие индексы сохраним для кинетической энергии и импульсов. Векторная схема импульсов представлена на рис. 10.3.

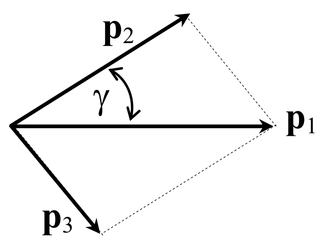

Рис. 10.3

Запишем закон сохранения энергии в следующем виде:

$$Q = K_2 + K_3 - K_1, \qquad (1)$$

где Q – энергия ядерной реакции; K_3 – кинетическая энергия ядра кислорода.

Очевидно, что

$$Q = c^2[(m_4 + m_1) - (m_2 + m_3)].$$

Произведя замену масс ядер массами нейтральных атомов, получим

$$Q = c^2(m_N + m_{He} - m_H - m_O).$$

$$Q = 931{,}4\cdot(14{,}00307 + 4{,}0026 - 1{,}00783 - 16{,}99913) = -1{,}2 \text{ МэВ},$$

т. е. данная ядерная реакция является эндоэнергетической и на ее осуществление затрачивается часть кинетической энергии α-частицы.

Следовательно, кинетическая энергия ядра кислорода

$$K_3 = K_1 - K_2 + Q = 10{,}5 - 8{,}5 - 1{,}2 = 0{,}8 \text{ МэВ}.$$

Запишем закон сохранения импульса в векторной и скалярной форме для определения угла γ, рис. 10.3:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3;$$

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\gamma. \qquad (2)$$

Заметим, что $p^2 = 2mK$. После подстановки в (2), получим

$$m_3K_3 = m_1K_1 + m_2K_2 - 2\sqrt{m_1m_2K_1K_2}\cdot\cos\gamma.$$

Тогда

$$\cos\gamma = \frac{m_1K_1 + m_2K_2 - m_3K_3}{2\sqrt{m_1m_2K_1K_2}}.$$

При расчете угла γ массы протонов и нейтронов можно считать одинаковыми и равными m_n, т. е. $m_{He} = 4m_n$; $m_H = m_n$; $m_O = 17m_n$. Поэтому

$$\cos\gamma = \frac{4m_nK_1 + m_nK_2 - 17m_nK_3}{2\sqrt{4m_n^2K_1K_2}} = \frac{4K_1 + K_2 - 17K_3}{4\sqrt{K_1K_2}}.$$

Подставляя численные значения энергии в МэВ, получим:

$$\cos\gamma = \frac{4\cdot 10{,}5 + 8{,}5 - 17\cdot 0{,}8}{4\sqrt{10{,}5\cdot 8{,}5}} = 0{,}976;\ \gamma = 12{,}6°.$$

Ответ: $Q = -1{,}2$ МэВ; $K_3 = 0{,}8$ МэВ; $\gamma = 12{,}6°$.

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Определите дефект массы Δm и энергию связи $E_{св}$ ядра атома фтора ${}^{19}_{9}F$.

Ответ: $\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_F = 0{,}15877$ а.е.м.;
$E_{св} = c^2\Delta m = 147{,}88$ МэВ.

10.2. Найдите удельную энергию связи $E_{уд}$ ядра кремния ${}^{28}_{14}Si$.

Ответ: $E_{св} = c^2[Zm_H + (A - Z)m_n - m_{Si}]/A = 4{,}84$ МэВ/нуклон.

10.3. Определите массу m_a нейтрального атома, если известно, что ядро этого атома состоит из трех протонов и четырех нейтронов и энергия связи $E_{св}$ ядра равна 39,27 МэВ.

Ответ: $m_a = Zm_H + (A - Z)m_n - E_{св}/c^2 = 7{,}016$ а.е.м.

10.4. Определите минимальную энергию E_{min}, необходимую для разделения ядра углерода ${}^{12}_{6}C$ на три одинаковые части.

Ответ: $E_{min} = c^2[3m_{He} - m_C] = 7{,}26$ МэВ.

10.5. Определите минимальную энергию E_{min}, которую необходимо затратить для отрыва одного нейтрона от ядра азота ${}^{14}_{7}N$.

Ответ: $E_{min} = c^2[m_{{}^{13}N} + m_n - m_{{}^{14}N}] = 10{,}56$ МэВ.

10.6. Протон с кинетической энергией K = 1,7 МэВ захватывается покоившимся ядром дейтерия. Найти энергию возбуждения образовавшегося ядра трития (^{3}H).

Ответ: $E_в = K + c^2[m_{^2H} + m_p - m_{^3H}]$ = 6,66 МэВ.

10.7. Для возбуждения реакции ${}^{11}_{5}B + {}^{1}_{0}n \to {}^{4}_{2}He + {}^{8}_{3}Li$ пороговая кинетическая энергия $K_{пор}$ нейтронов равна 4 МэВ. Найти энергию Q этой реакции.

Ответ: $Q = -K_{пор}m_{^{11}B}/(m_{^{11}B} + m_n) = -(11/12)K_{пор}$ = –3,7 МэВ.

10.8. Нейтрон расщепляет покоившееся ядро дейтерия. Найти кинетическую энергию K_n нейтрона, если энергия связи дейтерия $E_{св}$ = 2,2 МэВ.

Ответ: $K_n \ge E_{св}(m_{^2H} + m_n)/m_{^2H}$ = 3,3 МэВ.

10.9. Найдите энергию реакции ${}^{6}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \to {}^{4}_{2}He + {}^{3}_{2}He$.

Ответ: $Q = c^2[(m_{^6Li} + m_H) - (m_{^4He} + m_{^3H})]$ = 4,01 МэВ.

10.10. Определите, реакция ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \to {}^{7}_{4}Be + {}^{1}_{0}n$ является экзоэнергетической или эндоэнергетической?

Ответ: $Q = c^2[(m_{^7Li} + m_H) - (m_{^7Be} + m_n)]$ = –1,64 МэВ; реакция эндоэнергетическая.

10.11. Определите энергию, выделяющуюся при синтезе ядра гелия ^{4}He из 4-х нуклонов.

Ответ: $Q = c^2(2m_H + 2m_n - m_{^4He})$ = 28,67 МэВ.

10.12. Определите энергию, получающуюся при синтезе 1 кг гелия по реакции $^2H + {}^3H \to {}^4He + n$.

$$\text{Ответ: } Q = \frac{m}{\mu_{^4He}} N_A \left(m_{^2H} + m_{^3H} - m_{^4He} - m_n\right) \cdot c^2 = 4,3 \cdot 10^{14}\ \text{Дж}.$$

10.13. Какую минимальную энергию E_{min} необходимо затратить для отрыва одного протона от ядра азота ${}^{14}_{7}N$?

Ответ: $E_{min} = c^2(m_{^{13}C} + m_e + m_p - m_{^{14}N})$ = 7,55 МэВ.

10.14. Какое количество теплоты выделяется при образовании гелия ${}^{4}_{2}He$ массой m = 1 г из дейтерия ${}^{2}_{1}H$?

$$\text{Ответ: } Q = \frac{m}{\mu_{^4He}} N_A \left(2m_{^2H} - m_{^4He}\right) \cdot c^2 = 5,74 \cdot 10^8\ \text{кДж}$$

10.15. Альфа-частица с кинетической энергией K_α = 5,7 МэВ возбуждает ядерную реакцию ${}^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n$, энергия которой Q = +5,8 МэВ. Найти кинетическую энергию K_n нейтрона, вылетевшего под прямым углом к направлению α-частицы.

$$\text{Ответ: } K_n = \frac{Q + \left(1 - m_\alpha/m_C\right)K_\alpha}{1 + m_n/m_C} = 8,9\ \text{МэВ}.$$

10.16. Какую минимальную энергию $h\nu$ должен иметь γ-квант, чтобы вырвать нейтрон из ядра ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$?

Ответ: $h\nu = c^2(m_{^{11}\mathrm{C}} + m_\mathrm{n} - m_{^{12}\mathrm{C}}) = 18{,}7$ МэВ.

10.17. При центральном столкновении нейтрона с неподвижным ядром замедлителя кинетическая энергия K_n нейтрона уменьшилась в $\eta_K = 1{,}4$ раза. Найти массу ядра (в а.е.м.), если удар был упругим.

Ответ: $m_\mathrm{C} = m_\mathrm{n} \cdot \dfrac{\sqrt{\eta_K} + 1}{\sqrt{\eta_K} - 1} = 12$ а.е.м.

10.18. Определить энергию реакции ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \to 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}$, если известно, что энергия связи на один нуклон в ядрах лития и гелия равна, соответственно, $(E_{\text{уд}})_\mathrm{Li} = 5{,}6$ МэВ и $(E_{\text{уд}})_\mathrm{He} = 7{,}06$ МэВ.

Ответ: $Q = 8(E_{\text{уд}})_\mathrm{He} - 7(E_{\text{уд}})_\mathrm{Li} = 17{,}3$ МэВ.

10.19. В реакции ${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{17}_{8}\mathrm{O}$ кинетическая энергия α-частиц равна $K_\alpha = 7{,}7$ МэВ. Найти, под каким углом θ к направлению движения α-частицы вылетает протон, если его кинетическая энергия $K_\mathrm{p} = 5{,}7$ МэВ. Энергия данной эндоэнергетической ядерной реакции $Q = -1{,}2$ МэВ. При расчете угла массы протонов m_p и нейтронов m_n считать одинаковыми и равными m_n, т. е. $m_\alpha = 4m_\mathrm{n}$, $m_\mathrm{O} = 17m_\mathrm{n}$.

Ответ: $\cos\theta = \dfrac{\left(m_\mathrm{p} + m_{^{17}\mathrm{O}}\right)K_\mathrm{p} + \left(m_\alpha - m_{^{17}\mathrm{O}}\right)K_\alpha - m_{^{17}\mathrm{O}}Q}{2\sqrt{m_\alpha m_\mathrm{p} K_\alpha K_\mathrm{p}}} \approx 0{,}864$. $\theta \approx 30°$.

10.20. Энергия γ-фотона $h\nu$, излученного ядром, равна 10 кэВ. Найти энергию E, которую теряет ядро, если энергия $E_{\text{отд}}$ отдачи ядра равна 5 % энергии фотона.

Ответ: $E = h\nu + E_{\text{отд}} = 1{,}05h\nu = 10{,}5$ кэВ.

10.21. Найти полную энергию E, выделяющуюся при вылете α-частицы из ядра полония $^{209}\mathrm{Po}$, если кинетическая энергия α-частицы $K_\alpha = 7{,}68$ МэВ.

Ответ: $E = \dfrac{m_\mathrm{Po}}{m_\mathrm{Po} - m_\alpha} \cdot K_\alpha = 7{,}83$ МэВ.

10.22. Нейтрон с кинетической энергией $K_\mathrm{n} = 10$ МэВ взаимодействует с ядром углерода $^{12}\mathrm{C}$ по реакции ${}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$, энергия которой $Q = 6{,}17$ МэВ. Найти кинетическую энергию α-частиц, вылетающих под прямым углом к направлению налетающего нейтрона.

Ответ: $K_\mathrm{He} = \dfrac{Q + \left(1 - m_\mathrm{n}/m_\mathrm{Be}\right)K_\mathrm{n}}{1 + m_\mathrm{He}/m_\mathrm{Be}} = 10{,}43$ МэВ.

10.23. Найти наименьшую энергию γ-кванта, достаточную для осуществления реакции разложения дейтрона γ-лучами ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + \gamma \to {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$.

Ответ: $h\nu = c^2(m_\mathrm{H} + m_\mathrm{n} - m_{^{2}\mathrm{H}}) = 2{,}2$ МэВ.

10.24. Оценить температуру T водородной плазмы, при которой становится возможным преодоление электростатического барьера отталкивания между протонами. Для оценки принять, что минимальное взаимное расстояние r, при котором начинается синтез ядер, равно $1 \cdot 10^{-14}$ м.

Ответ: $T \approx \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{2e^2}{3rk} \approx 1 \cdot 10^9$ K.

10.25. При «слиянии» двух «неподвижных» ядер по реакции ${}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n}$ возникают быстрые нейтроны. Определить их кинетическую энергию K_n.

Примечание. В данной реакции кинетическая энергия ядер ${}^2\mathrm{H}$ и ${}^3\mathrm{H}$ много меньше K_n, поэтому ядра ${}^2\mathrm{H}$ и ${}^3\mathrm{H}$ можно считать неподвижными.

Ответ: $K_\mathrm{n} = \dfrac{c^2\left(m_{{}^2\mathrm{H}} + m_{{}^3\mathrm{H}} - m_\mathrm{n} - m_\mathrm{He}\right)m_\mathrm{He}}{m_\mathrm{He} + m_\mathrm{n}} = 14$ МэВ.

11. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Основные формулы и обозначения

Обозначения квантовых зарядов (чисел): q – электрический заряд (в единицах элементарного заряда e), L – лептонный заряд (L_e – электронный; L_μ – мюонный; L_τ – таонный), B – барионный заряд, S – странность, T − изоспин, T_z – проекция изоспина, C – шарм (очарование), t − истина, b − красота.

Таблица 11.1

Квантовые числа кварков

Кварк	q	B	T	T_z	S	C	t	b	Спин, $\hbar$
u	2/3	1/3	1/2	1/2	0	0	0	0	½
d	–1/3	1/3	1/2	–1/2	0	0	0	0	½
s	–1/3	1/3	0	0	–1	0	0	0	½
c	2/3	1/3	0	0	0	1	0	0	½
t	2/3	1/3	0	0	0	0	1	0	½
b	–1/3	1/3	0	0	0	0	0	1	½

Законы сохранения квантовых зарядов (чисел)

Законы сохранения квантовых зарядов (чисел) подразделяются на две группы.

Первая группа: точные законы сохранения квантовых зарядов. Закон сохранения квантового заряда: суммарный квантовый заряд изолированной системы не изменяется (сохраняется) при всех превращениях, происходящих внутри нее.

1. Закон сохранения барионного заряда: B = const.
2. Закон сохранения лептонного электронного заряда: L_e = const.
3. Закон сохранения лептонного мюонного заряда: L_μ =const.
4. Закон сохранения лептонного таонного заряда: L_τ = const.
5. Закон сохранения проекции изоспина: T_z = const.
6. Закон сохранения цвета: X = const.

Вторая группа: законы сохранения квантовых зарядов, выполняющиеся не для всех, а лишь для некоторых видов фундаментальных взаимодействий. Эти законы можно считать не точными, а приближенными.

Суммарный заряд таких зарядов изолированной системы, как странность S, очарование C, правда t и красота b, сохраняется при сильных и электромагнитных взаимодействиях. При слабых взаимодействиях возможно изменение этих зарядов на $\pm$ 1.

Пороговая кинетическая энергия $T_{\text{пор}}$ частицы с массой покоя m[1)], налетающей на первоначально покоящуюся частицу массой покоя M, для возбуждения реакции $m + M \to \sum m_i$:

$$T_{\text{пор}} = \frac{(\sum m_i)^2 - (m+M)^2}{2M} c^2.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Из характеристик переносчиков взаимодействий: π^+, π^0, π^--мезонов (сильного), бозонов $W^{\pm}$ и Z^0 (слабого), $\hbar\omega$-фотонов (электромагнитного) и $\hbar\omega$-гравитонов (гравитационного) оценить радиусы этих взаимодействий.

Решение. а) Сильное взаимодействие осуществляется обменом нуклонов виртуальными π^+, π^0, π^--мезонами. Согласно соотношению неопределенностей $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ испущенный нуклоном виртуальный π-мезон с энергией $m_\pi c^2$ ($m_\pi c^2 = \Delta E$), если поблизости нет других частиц, может существовать только конечное время, не превышающее

$$\Delta t = \frac{\hbar}{mc^2}.$$

В течение этого временнóго интервала нарушение закона сохранения энергии на величину $\Delta E = m_\pi c^2$ не наблюдаемо. По истечении этого интервала времени виртуальный π-мезон может поглотиться другим нуклоном, находящимся на расстоянии,

$$r_\pi = c\Delta t = \frac{\hbar c}{m_\pi c^2}. \qquad (1)$$

Из (1) предельный радиус r_π действия ядерных сил при обмене виртуальными π-мезонами равен $\dfrac{\hbar}{m_\pi c}$ – комптоновской длине волны π-мезона.

Масса π^0-мезона равна 135 МэВ/c^2; масса $\pi^{\pm}$-мезона – 139,6 МэВ/c^2.

Отсюда

$$r_\pi = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}35 \cdot 10^8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-15} \text{ м} = 1 \text{ Фм}.$$

[1)] Масса покоя частиц в разделе приведена без индекса «0».

б) Слабое взаимодействие осуществляется обменом частиц, принимающих участие в слабых взаимодействиях, виртуальными промежуточными векторными бозонами Z^0, $W^{\pm}$. Массы бозонов W и Z: $m_W \approx 80$ ГэВ/c^2, $m_Z \approx 90$ ГэВ/c^2.

Подставив в (1) массы промежуточных бозонов, получим для радиуса слабого взаимодействия величину, равную комптоновской длине волны промежуточных векторных бозонов,

$$r_W \approx 2\cdot10^{-18}\ \text{м} = 2\cdot10^{-3}\ \text{Фм},$$
$$r_Z \approx 1{,}8\cdot10^{-18}\ \text{м} \approx 1{,}8\cdot10^{-3}\ \text{Фм}.$$

в) Электромагнитное взаимодействие осуществляется обменом заряженных частиц виртуальными фотонами $\hbar\omega$. За время

$$\Delta t = \frac{\hbar}{mc^2}$$

виртуальный фотон может передать взаимодействие на расстояние

$$r_\nu = c\Delta t = \frac{\hbar c}{\hbar\omega} = \frac{c}{\omega}.$$

Поскольку энергия фотона, в принципе, может быть сколь угодно малой и сколь угодно великой, так как $0 < \omega < \infty$, радиус электромагнитного взаимодействия не ограничен: $r_\nu \to \infty$.

г) Гравитационное взаимодействие может осуществляться обменом гипотетическими гравитонами (экспериментально не обнаружены), частота которых также меняется в пределах $0 < \omega < \infty$. Поэтому радиус гравитационного взаимодействия, как и электромагнитного, не ограничен, т. е. $r_g \to \infty$.

Ответ: а) $r_\pi = 1$ Фм; б) $r_W \approx 2\cdot10^{-3}$ Фм, $r_Z \approx 1{,}8\cdot10^{-3}$ Фм; в) $r_\nu \to \infty$; г) $r_g \to \infty$.

Задача 2. Используя квантовые заряды кварков, сконструировать следующие адроны: лямбда-нуль-гиперон Λ^0, омега-минус-гиперон Ω^- и пи-плюс-мезон π^+.

Решение. Для наглядности сведем необходимые для построения структуры адронов кварковые числа в таблицы.

Таблица 11.2

Квантовые заряды (числа)	Частицы				Структура Λ^0
	Λ^0	u	d	s	
Электрический заряд q	0	+2/3	–1/3	–1/3	uds
Барионный заряд B	1	1/3	1/3	1/3	
Странность S	–1	0	0	–1	

Таблица 11.3

Квантовые заряды (числа)	Частицы				Структура Ω^-
	Ω^-	s	s	s	
Электрический заряд q	–1	–1/3	–1/3	–1/3	sss
Барионный заряд B	1	1/3	1/3	1/3	
Странность S	–3	–1	–1	–1	

У гиперонов барионный заряд $B = 1$. Поскольку каждый кварк имеет барионный заряд $B = 1/3$, то, следовательно, гипероны состоят из трех кварков. Помимо этого у Λ^0-гиперона электрический заряд $q = 0$, что возможно, как видно из табл. 11.2, если структура гиперона Λ^0: uds, то есть Λ^0-гиперон состоит из верхнего u, нижнего d и странного s кварков.

У Ω^--гиперона $q = –1$, $S = –3$. Это возможно, как видно из табл. 11.3, если структура Ω^--гиперона – sss, то есть он состоит из трех странных кварков.

Таблица 11.4

Квантовые заряды (числа)	Частицы			Структура π^+
	π^+	u	$\tilde{d}$	
Электрический заряд q	1	2/3	+1/3	$u\tilde{d}$
Барионный заряд B	0	1/3	–1/3	
Странность S	0	0	0	

Мезоны, так как их барионный заряд B равен нулю, должны состоять из кварка и антикварка. В случае пи-плюс-мезона π^+ электрический заряд $q = 1$, странность $S = 0$, что возможно, как видно из табл. 11.4, если его структура $u\tilde{d}$, то есть он состоит из верхнего u-кварка и нижнего $\tilde{d}$-антикварка.

Задача 3. Какие из приведенных ниже процессов запрещены законом сохранения лептонного заряда?

1) $\pi^- \to \mu^- + e^- + e^+$; 2) $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_-$; 3) $n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e$.

Решение. Для решения задачи подставим последовательно значения соответствующих лептонных зарядов в уравнения всех процессов и проверим выполнение законов сохранения лептонных зарядов, принимая во внимание, что квантовые заряды аддитивны, то есть квантовый заряд системы равен сумме квантовых зарядов входящих в нее элементарных частиц. При проверке законов сохранения как в настоящей задаче, так и последующих, под Δ понимается разность между суммой квантовых чисел частиц правой части уравнения процесса и суммой кварковых чисел частиц левой части уравнения.

1) $\pi^- \to \ \mu^- + e^- + e^+$;

L_e $0 \to 0 + 1 + -1$; $\Delta L_e = 0$.

L_μ $0 \to 1 + 0 + 0$; $\Delta L_\mu = 1$.

2) $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_e$;

L_e $0 \to \ 0 + 1$; $\Delta L_e = 1$;

L_μ $0 \to -1 + 0$; $\Delta L_\mu = -1$.

3) $n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e$.

L_e $0 \to 0 + 1 + -1$; $\Delta L_e = 0$;

L_μ $0 \to 0 + 0 + 0$; $\Delta L_\mu = 0$.

Из приведенных расчетов видно, что в случае первого процесса не выполняется закон сохранения лептонного мюонного L_μ заряда. В случае второго процесса не выполняются законы сохранения электронного лептонного L_e и лептонного мюонного L_μ зарядов. Поэтому первый и второй процессы запрещены законами сохранения лептонных зарядов. Третий процесс разрешен, так как законы сохранения лептонных зарядов выполняются.

Задача 4. Какие из приведенных ниже процессов разрешены законом сохранения странности?

$$1)\,\pi^+ + n \to \Sigma^+ + K^0;\ \ 2)\ \pi^+ + p \to \Sigma^+ + K^+;\ \ 3)\,\pi^- + p \to K^+ + K^- + n\,.$$

Решение. Для решения задачи подставим последовательно значения странности в уравнения процессов и проверим выполнение закона сохранения странности, учитывая, как и при решении предыдущей задачи, что квантовые заряды аддитивны, то есть квантовый заряд системы равен сумме квантовых зарядов входящих в нее элементарных частиц.

1) $\pi^+ + n \to \Sigma^+ + K^0$;

S: $0 + 0 \ \to -1 + 1$; $\Delta S = 0$.

2) $\pi^+ + p \to \Sigma^+ + K^+$;

S: $0 + 0 \to -1 + 1$; $\Delta S = 0$.

3) $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^+ + n$;

S: $0 + 0 \to -1 + -1 + 0$; $\Delta S = -2$.

Видно, что в третьем процессе изменение странности $\Delta S = -2$. Поэтому этот процесс запрещен законом сохранения странности. В первом и втором процессах суммарное значение странности не изменяется. Поэтому эти процессы разрешены законом сохранения странности.

Задача 5. Установить, возможен ли распад μ^+-мюона в результате процесса $\mu^+ \to e^+ + \nu_\mu + \tilde{\nu}_\mu$.

Решение. Для решения задачи подставим значения электрического заряда q, барионного заряда B, странности S, лептонного электронного заряда L_e, мюонного лептонного электронного заряда L_μ и спина в уравнение процесса и проверим выполнение законов сохранения

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_\mu + \tilde{\nu}_\mu .$$

q	1	$\to$	1 + 0 + 0;	$\Delta q = 0$.
B	0	$\to$	0 + 0 + 0;	$\Delta B = 0$.
S	0	$\to$	0 + 0 + 0;	$\Delta S = 0$.
L_e	0	$\to$	−1 + 0 + 0;	$\Delta L_e = -1$.
L_μ	−1	$\to$	0 + 1 + −1;	$\Delta L_\mu = 1$.
спин, s	1/2	$\to$	1/2 + 1/2 + 1/2;	$\Delta s = 0$.

Как видно, процесс запрещен законами сохранения электронного L_e и мюонного L_μ лептонных зарядов.

Примечание. Закон сохранения спина выполняется, если суммарный спин частиц, вступающих в реакцию, и частиц после реакции является целым или полуцелым числом, так как спин может быть записан как ± 1/2.

Задача 6. Показать, что u-кварк устойчив, то есть не может превратиться в другие кварки.

Решение. Предположим, что превращение u-кварка в d-кварк может произойти по приведенной ниже схеме, и проверим выполнение законов сохранения.

$$u_{2/3} \to d_{-1/3} + e^+ + \nu_e .$$

E_0, МэВ	5	$\to$	7;	$\Delta E = 2$.
q	+2/3	$\to$	−1/3 + 1 + 0;	$\Delta q = 0$.
B	1/3	$\to$	1/3 + 0 + 0;	$\Delta B = 0$.
S	0	$\to$	0 +0 + 0;	$\Delta S = 0$.
L_e	0	$\to$	0 + −1 + 1;	$\Delta L_e = 0$.
спин, s	½	$\to$	1/2 + 1/2 + 1/2;	$\Delta s = 0$.

Видно, что выполняются все законы сохранения, кроме закона сохранения энергии, который и запрещает распад u-кварка. Поэтому u-кварк устойчив, так как обладает наименьшей массой (энергией) среди других кварков.

Задача 7. Могут ли реакции: 1) $\pi^+ + p \to \Sigma^+ + K^+$; 2) $K^+ + n \to \Sigma^+ + \pi^0$ – происходить в результате сильного взаимодействия?

Решение. Последовательно подставим значения величин квантовых зарядов в уравнения процессов и проверим выполнение законов сохранения, определив изменение электрического заряда q, барионного заряда B, странности S и проекции изоспина T_z в этих реакциях:

1) $\pi^+ + p \to \Sigma^+ + K^+$.

q	1 + 1	→	1 + 1;	$\Delta q = 0$.
B	0 + 1	→	1 + 0;	$\Delta B = 0$.
S	0 + 0	→	–1 + 1;	$\Delta S = 0$.
T_z	1 + 1/2	→	1 + 1/2 ;	$\Delta T_z = 0$.

Реакция возможна, так как все законы сохранения квантовых зарядов выполнены.

2) $K^+ + n \to \Sigma^+ + \pi^0$.

q	1 + 0	→	1 + 0;	$\Delta q = 0$.
B	0 + 1	→	1 + 0;	$\Delta B = 0$.
S	1 + 0	→	–1 + 0;	$\Delta S = -2$.
T_z	1/2 + –1/2	→	1 + 0 ;	$\Delta\ T_z = 1$.

Реакция невозможна, так как не сохраняются странность и проекция изотопического спина.

Задача 8. Определить частицы X, образующиеся в реакциях сильного взаимодействия: 1) $\pi^- + p \to K^- + p + X$; 2) $p + \tilde{p} \to \Xi^- + \pi^+ + X$.

Решение. Исходя из законов сохранения электрического заряда q, барионного заряда B, странности S и проекции изоспина T_z в этих реакциях, определим характеристики частицы X:

1) $\pi^- + p \to K^- + p + X$.

q	–1 + 1	→	–1 + 1 + q_X ;	$q_X = 0$.
B	0 + 1	→	0 + 1 + B_X;	$B_X = 0$.
S	0 + 0	→	–1 + 0 + S_X;	$S_X = 1$.
T_z	–1 + 1/2	→	–1/2 + ½+ $(T_z)_X$;	$(T_z)_X = -1/2$.

Поскольку барионный заряд $B = 0$, частица X относится к мезонам. Странностью $S = 1$ и проекцией изоспина, равной –1/2, обладает K^0-мезон, то есть полученный набор квантовых зарядов соответствует K^0-мезону.

2) $p + \tilde{p} \to \Xi^- + \pi^+ + X$.

q	1 – 1	→	–1 + 1 + Q_X ;	$q_X = 0$.
B	1 – 1	→	1 + 0 + B_X;	$B_X = -1$.
S	0 + 0	→	–2 + 0 + S_X;	$S_X = 2$.
T_z	1/2 –1/2	→	–1/2 + 1 + $(T_z)_X$;	$(T_z)_X = +1/2$.

Поскольку барионный заряд B частицы X = –1, частица относится к антибарионам. Нулевым электрическим зарядом q = 0, странностью S = 2 и проекцией изоспина $(T_z)_X = -1/2$ среди антибарионов обладает $\tilde{\Xi}^0$-гиперон, то есть полученный набор квантовых чисел соответствует $\tilde{\Xi}^0$-гиперону.

Задача 9. Нарисовать диаграммы Фейнмана для следующих процессов: 1) рассеяние электрона на электроне; 2) эффект Комптона.

Решение. На фейнмановских диаграммах реальные частицы изображаются «лучами» – линиями, приходящими из бесконечности или уходящими в бесконечность. Обычно на линиях ставятся стрелки, обозначающие «направление распространения» частицы. Распространению виртуальных частиц отвечают «отрезки» – линии, соединяющие вершины диаграммы. Фермионы принято обозначать прямыми линиями, а бозоны – волнистыми. Принято, что на графике ось времени направлена слева направо или снизу вверх, так что слева (внизу) на диаграмме изображены начальные состояния, а справа (вверху) – конечные.

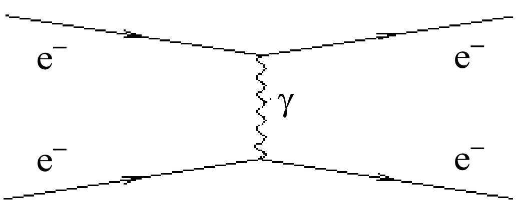

Рис. 11.1

1) Рассеяние электрона на электроне. На диаграмме (рис. 11.1) изображено рассеяние электрона на электроне путем обмена виртуальным фотоном.

2) Эффект Комптона. В начальном состоянии присутствуют один электрон и один фотон (рис. 11.2). В точке 1 они встречаются, и происходит поглощение фотона электроном. В точке 2 появляется испущенный электроном новый конечный фотон.

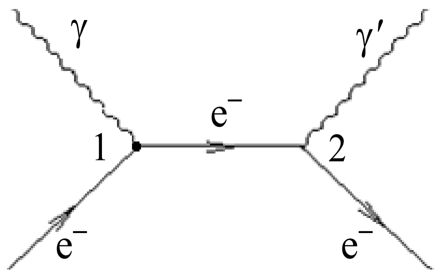

Рис. 11.2

Задача 10. Показать, что без введения квантового числа «цвет», принимающего три значения, кварковая структура Ω^- противоречит принципу Паули.

Решение. Указанная частица имеет кварковый состав: Ω^- – (sss). Спин Ω^--гиперона равен 3/2. Кварки являются фермионами и имеют спиновое число s = 1/2. Для них возможны только две проекции: s = 1/2 и s = –1/2. Таким образом, для того чтобы образовать состояние со спином 3/2, все три кварка, обладающие одним ароматом, должны иметь одинаковые проекции спинов. Согласно принципу Паули, в системе одинаковых частиц с полуцелым спином два фермиона не могут находиться в одном квантовом состоянии (иметь одинаковые квантовые числа). Чтобы удовлетворить принципу Паули, для кварков было введено новое квантовое число – «цвет». «Цвет» имеет три разные значения для трех s-кварков в Ω^{-}-гипероне, у которых остальные квантовые числа совпадают, то есть каждый тип (аромат) кварка характеризуется тремя цветами. Квантовое число «цвет» имеет следующие значения: красный, синий, зеленый.

Задача 11. Показать, что кварк, испустив глюон, не может перейти в антикварк.

Решение. Пусть кварк имеет синий цвет. Предположим, что, испустив глюон *g*, кварк превратился в антикрасный (1), антизеленый (2) или антисиний (3) кварки. Поскольку имеет место закон сохранения цвета, то цветовая структура глюона *g* может быть получена из следующих уравнений процессов:

$$q_{с} = q_{\tilde{к}} + g, \tag{1}$$

$$q_{с} = q_{\tilde{ж}} + g, \tag{2}$$

$$q_{с} = q_{\tilde{с}} + g. \tag{3}$$

По закону сохранения цвета в процессе (1) должен испускаться глюон $g_{ск}$, в процессе (2) – $g_{жс}$, в процессе (3) – $g_{сс}$, то есть глюоны не содержат «антицвет», что, очевидно, невозможно для глюона, поскольку последний должен иметь структуру «цвет – антицвет».

Задача 12. В теории великого объединения (слабое, электромагнитное и сильное взаимодействия описываются единым зарядом) допускается распад свободного протона: $p \rightarrow \pi^{0} + e^{+} + \nu_{e}$; а) установить, закон сохранения какого квантового заряда нарушался бы в этом случае; б) опыты по определению времени жизни протона называют «экспериментом века». Теория великого объединения определяет время жизни протона равным $\tau = 10^{31}$ лет. Оценить, какую массу m_{Fe} вещества железа необходимо использовать, чтобы за время эксперимента $t = 1$ год зарегистрировать $\Delta N = 10$ распадов.

Дано:
$\tau = 10^{31}$ лет
$t = 1$ год
$\Delta N = 10$

m_{Fe} – ?

Решение. а) Для решения задачи подставим последовательно значения соответствующих квантовых зарядов в уравнение процесса и проверим выполнение законов сохранения.

$$p \rightarrow \pi^{0} + e^{+} + \nu_{e}.$$

q	1	$\rightarrow$	$0 + 1 + 0$;	$\Delta q = 0$.
B	1	$\rightarrow$	$0 + 0 + 0$;	$\Delta B = -1$.
S	0	$\rightarrow$	$0 + 0 + 0$;	$\Delta S = 0$.
L_{e}	0	$\rightarrow$	$0 + (-1) + 1$;	$\Delta L_{e} = 0$.
L_{μ}	0	$\rightarrow$	$0 + 0 + 0$;	$\Delta L_{\mu} = 0$.

Из приведенного расчета видно, что распад свободного протона привел бы к нарушению закона сохранения барионного заряда.

б) Число ΔN частиц, распавшихся за время t, может быть найдено из соотношения

$$\Delta N = N_0(1 - e^{-t/\tau}), \tag{1}$$

где N_0 – первоначальное число ядер (атомов) железа.

По условию задачи $t << \tau$. Поскольку при малых α $e^{-\alpha} \approx 1 - \alpha$, выражение (1) можно представить в виде

$$\Delta N = N_0 \frac{t}{\tau}. \tag{2}$$

Масса распавшихся частиц, учитывая (2),

$$m_{\Delta N} = \frac{\mu_{\mathrm{Fe}} \Delta N}{N_{\mathrm{A}}} = \frac{\mu_{\mathrm{Fe}} N_0}{N_{\mathrm{A}} \tau} t, \tag{3}$$

где μ_{Fe} – молярная масса железа; N_{A} – число Авогадро.

Масса первоначального числа ядер:

$$m_{N_0} = \frac{\mu_{\mathrm{Fe}} N_0}{N_{\mathrm{A}}}. \tag{4}$$

Очевидно, из уравнений (3) и (4)

$$\frac{m_{N_0}}{m_{\Delta N}} = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{\tau}{t}. \tag{5}$$

Отсюда $m_{\mathrm{Fe}} = m_{N_0}$ − масса железа, которую необходимо использовать, чтобы за время эксперимента $t = 1$ год зарегистрировать $\Delta N = 10$ распадов, равна:

$$m_{N_0} = \frac{\mu_{\mathrm{Fe}} \Delta N \tau}{N_{\mathrm{A}} t} = \frac{56 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{31}}{6 \cdot 10^{23} \cdot 1} \approx 10^4 \text{ т}.$$

Ответ: $m_{N_0} \approx 10^4$ т.

Примечание. Распад свободного протона в настоящее время экспериментально не обнаружен. Существующая нижняя граница, полученная экспериментально, близка к $\sim 10^{32}$ лет и расходится с выводом теории Великого объединения, согласно которой время жизни протона не превышает 10^{31} лет.

Задача 13. Показать, что свободный фотон не может превратиться в пару электрон-позитрон.

Решение. Предположим, что такой процесс возможен и фотон с энергией $h\nu$ и импульсом $h\nu/c$ превращается в пару частиц с одинаковыми импульсами. Тогда должны выполняться законы сохранения энергии и импульса.

По закону сохранения энергии:

$$h\nu = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \tag{1}$$

где m – масса покоя электрона (позитрона); υ – скорость электрона (позитрона).

Легко из закона сохранения импульса, проектируя импульсы частиц на ось $0y$, показать, что при одинаковых энергиях позитрона и электрона их углы наклона к первоначальному направлению движения фотонов равны. Поэтому по закону сохранения импульса (рис. 11.3)

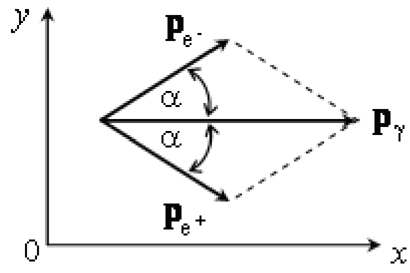

Рис. 11.3

$$\frac{h\nu}{c} = p_{e^+}\cos\alpha + p_e\cos\alpha = \frac{2m\upsilon\cos\alpha}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \tag{2}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2) относительно υ, получим

$$\upsilon = c/\cos\alpha. \tag{3}$$

Поскольку скорость света в вакууме – предельная скорость передачи информации (сигнала), а согласно (3) скорость электрона и позитрона больше или равна (при $\cos\alpha = 1$) скорости света в вакууме ($\cos\alpha \le 1$), распад свободного фотона на электрон-позитронную пару невозможен. Превращение фотона в пару электрон-позитрон возможно в поле ядра или другой заряженной частицы, так как в этом случае часть импульса и энергии фотона воспринимает ядро, в уравнения (1) и (2) добавляются импульс и энергия отдачи ядра, и процесс рождения пары становится возможным (скорости электрона и позитрона оказываются меньше скорости света в вакууме).

Задача 14. Найти пороговую энергию γ-кванта, необходимую для образования пары электрон-позитрон в поле покоящегося электрона.

Решение. Процесс образования пары электрон-позитрон может быть представлен в следующем виде:

$$\hbar\omega + \mathrm{e}^- \;\rightarrow\; \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^-.$$

Видно, что реакция экзоэнергетическая (выход реакции $Q < 0$) и идет только при пороговой энергии $T_{\text{пор}}$ γ-кванта, величина которой находится по формуле

$$T_{\text{пор}} = \frac{(\sum m_i)^2 - (m+M)^2}{2M}c^2. \tag{1}$$

Используя уравнение (1), получим

$$T_{\text{пор}} = \frac{(3m_e)^2 - (m_e)^2}{2m_e} c^2 = 4m_e c^2 = 3{,}27 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 2{,}04 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $T_{\text{пор}} = 2{,}04$ МэВ.

Задача 15. π^0-мезон, кинетическая энергия которого равна двум энергиям покоя, распадается на два γ-кванта, энергии которых равны. Каков угол между направлениями движения γ-квантов?

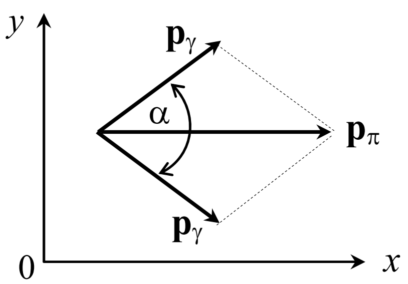

Рис. 11.4

Решение. Энергии γ-квантов в лабораторной системе отсчета равны, если равны углы вылета γ-квантов относительно направления первоначального движения пиона (см. задачу 13). По условию задачи $T = 2m_\pi c^2$, где T – кинетическая энергия, m_π – масса покоя π^0-мезона. Тогда для полной энергии E_π и импульса p_π пиона можно записать:

$$E_\pi = T + m_\pi c^2 = 3T/2, \tag{1}$$

$$p_\pi = \frac{\sqrt{T^2 + 2Tm_\pi c^2}}{c} = \frac{T\sqrt{2}}{c}. \tag{2}$$

По закону сохранения энергии

$$2E_\gamma = 3T/2. \tag{3}$$

По закону сохранения импульса, рис. 11.4,

$$p_\pi = 2p_\gamma \cos\frac{\alpha}{2}, \tag{4}$$

где p_γ – импульс одного γ-кванта.

Так как $E_\gamma = p_\gamma c$, из уравнений (2)–(4) получим

$$\frac{T\sqrt{2}}{c} = 2p_\gamma \cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{E_\gamma}{c}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{3T}{2c}\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{5}$$

Решая уравнение (5) относительно α, найдем:

$$\alpha = 2\arccos\frac{\sqrt{2}}{3} = 124^\circ.$$

Ответ: $\alpha = 124°$.

Задача 16. π^0-мезон распадается на лету по схеме $\pi^0 \to \hbar\omega + \hbar\omega$. Найти угол ϑ (рис. 11.5) между направлениями движения фотонов, если их энергии E_1 и E_2.

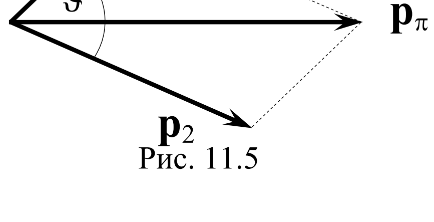

Рис. 11.5

Решение. Исходя из инвариантности величины

$$E^2 - p^2c^2 = (m_\pi c^2)^2,$$

запишем ее до распада в системе центра масс (*Ц*-системе), а после распада – в лабораторной системе (*S*-системе):

$$\left(E_1 + E_2\right)^2 - \left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\right)^2 c^2 = \left(m_\pi c^2\right)^2, \quad (1)$$

где E_1 и E_2 – энергии фотонов, $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ – импульсы фотонов.

Приведем уравнение (1) к виду

$$\left(E_1 + E_2\right)^2 - \left(p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\vartheta\right)c^2 = \left(m_\pi c^2\right)^2. \quad (2)$$

Учтем, что импульс фотона связан с энергией фотона соотношением

$$E = pc, \text{ то есть } E_1 = p_1c;\ E_2 = p_2c. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), представим уравнение (2) в виде

$$\left(E_1 + E_2\right)^2 - \left(E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\vartheta\right) = \left(m_\pi c^2\right)^2. \quad (4)$$

После несложных упрощений получим

$$2E_1E_2\left(1 - \cos\vartheta\right) = \left(m_\pi c^2\right)^2.$$

Отсюда

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{m_\pi c^2}{2\sqrt{E_1E_2}}. \qquad \vartheta = 2\arcsin\frac{m_\pi c^2}{2\sqrt{E_1E_2}}.$$

Задача 17. Найти средний путь, проходимый π-мезонами с кинетической энергией, которая в $\eta = 1{,}5$ раза превышает их энергию покоя, в лабораторной системе отсчета. Среднее собственное время жизни очень медленных π-мезонов $\tau_0 = 25$ нс.

Дано:
$\eta = 1{,}5$
$\tau_0 = 2{,}5\cdot10^{-8}$ с
$\langle s\rangle$ – ?

Решение. Средний путь, проходимый π-мезонами в лабораторной системе отсчета,

$$\langle s\rangle = \upsilon\tau, \quad (1)$$

где τ – время жизни π-мезонов в лабораторной системе отсчета.

По условию задачи

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - 1\right) = \eta mc^2. \quad (2)$$

Из уравнения (2) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = 1 + \eta. \quad (3)$$

Из уравнения (3) после несложных преобразований получим

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2\eta + \eta^2}{(1+\eta)^2}. \qquad (4)$$

Время жизни τ π-мезона в лабораторной системе отсчета связано с собственным временем τ_0 соотношением

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad 5)$$

Решая систему уравнений (1), (4), (5) относительно $\langle s \rangle$, получим

$$\langle s \rangle = c\tau_0\sqrt{(2+\eta)\eta} \;;$$

$$\langle s \rangle = 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-8}\sqrt{(2+1{,}5)\cdot 1{,}5} = 17{,}2 \text{ м}.$$

Ответ: $\langle s \rangle = 17{,}2$ м.

Задачи для самостоятельного решения

11.1. Используя таблицу кварковых чисел, сконструировать кварковую структуру протона, нейтрона, Σ^+-гиперона.

Ответ: uud, udd, uus.

11.2. Используя таблицу кварковых чисел, сконструировать кварковую структуру положительно заряженного пиона, нейтрального и положительно заряженного каона.

Ответ: $\mathrm{u\tilde{d}}$, $\mathrm{d\tilde{s}}$, $\mathrm{u\tilde{s}}$.

11.3. Какие из приведенных ниже процессов запрещены законом сохранения барионного заряда?

$$1)\ \mu^+ \to e^+ + \tilde{\nu}_\mu; \quad 2)\ n \to p + e^- + \nu_e; \quad 3)\ \pi^- + n \to K^- + K^+.$$

Ответ: запрещен третий процесс ($0 + 1 \to 0 + 0$; $\Delta B = -1$).

11.4. Какие из приведенных ниже процессов запрещены законом сохранения лептонных зарядов?

$$1)\ \tilde{\nu}_\mu + p \to n + \mu^+; \quad 2)\ K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu + \pi^0; \quad 3)\ \mu^+ \to e^+ + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu.$$

Ответ: третий процесс запрещен законами сохранения электронного L_e ($0 \to -1 - 1 + 0$; $\Delta L_e = -2$) и мюонного L_μ ($-1 \to 0 + 0 + 1$; $\Delta L_\mu = +2$) лептонных зарядов.

11.5. Предполагается, что в ускорителях на встречных пучках с высокими энергиями в десятки и сотни гигаэлектронвольт происходит рождение адронов, например, $e^- + e^+ \to n + \tilde{n}$. Не противоречит ли эта реакция законам сохранения энергии, электрического, лептонного, барионного зарядов и спина?

Ответ: нет, т. к. все законы сохранения выполняются.

11.6. Возможны ли барионы с целым или нулевым спином?

Ответ: нет, так как барионы состоят из трех кварков, а из трех спинов кварков, равных 1/2, нельзя получить целое число.

11.7. Указать законы сохранения квантовых зарядов, запрещающие нижеприведенные процессы:

1) $\pi^0 + p \to \Lambda^0 + \pi^-$; 2) $n + p \to \Sigma^- + \Lambda^0$; 3) $\pi^- \to \mu^- + e^- + e^+$.

Ответ: 1) запрещен законом сохранения электрического заряда ($0 + 1 \to 0 - 1 = \Delta q = -2$) и странности ($0 + 0 \to -1 + 0$; $\Delta S = -1$); 2) законом сохранения странности ($0 + 0 \to -1 + -1$; $\Delta S = -2$); 3) законом сохранения электрического заряда ($0 + 1 \to 0 - 1 = \Delta q = -2$) и мюонного лептонного заряда ($0 \to 1 + 0 + 0$; $\Delta L_\mu = 1$).

11.8. Показать, используя законы сохранения энергии и импульса, что свободный электрон не может поглотить фотон.

11.9. При столкновении частицы и античастицы, например электрона и позитрона, они аннигилируют, превращаясь в фотоны. Произойдет ли аннигиляция при столкновении электрона с плюс-мюоном?

Ответ: нет, т. к. нарушаются законы сохранения электронного и мюонного лептонных зарядов.

11.10. Используя соотношение неопределенностей $\Delta E \Delta t \ge \hbar$, найти время жизни $\tau_{W^\pm}$ виртуальных заряженных векторных бозонов $W^{\pm}$, время жизни τ_{Z^0} виртуального нейтрального векторного бозона Z^0. Массы бозонов $W^\pm$ и Z^0: $m_W \approx 80$ ГэВ/c^2, $m_Z \approx 90$ ГэВ/c^2.

Ответ: $\tau_{W^\pm} = \dfrac{\hbar}{m_{W^\pm} c^2} = 8{,}23 \cdot 10^{-27}$ с; $\tau_{Z^0} = \dfrac{\hbar}{m_{Z^0} c^2} = 7{,}32 \cdot 10^{-27}$ с.

11.11. Покоящийся протон испускает виртуальный фотон с энергией $E = 1$ МэВ. Найти время жизни τ этого фотона. Какое расстояние s он за это время пройдет? Долетит ли он до соседнего протона в ядре?

Ответ: $\tau = \hbar/E = 6{,}6 \cdot 10^{-22}$ с; $s = c\hbar/E = 2 \cdot 10^{-13}$ м; долетит.

11.12. Вычислить пороговую кинетическую энергию бомбардирующей частицы в реакции $\pi^- + p \to \Sigma^- + K^+$.

Ответ: $T_{пор} = \left[(m_{\Sigma^-} + m_{K^+})^2 - (m_{\pi^-} + m_p)^2\right] c^2 \big/ \left(2m_p\right) = 0{,}91$ ГэВ.

11.13. Протоны с кинетической энергией T налетают на неподвижную водородную мишень. Найти пороговое значение $T_{пор}$ для реакции $p + p \to p + p + p + \tilde{p}$.

Ответ: $T_{пор} = 6 m_p c^2 = 5{,}63$ ГэВ.

11.14. Найти пороговую кинетическую энергию антинейтрино в реакции $\tilde{\nu}_e + p \to n + e^+$.

Ответ: $T_{пор} = \left[(m_n + m_{e^-})^2 - m_p^2\right] c^2 \big/ \left(2m_p\right) = 1{,}8$ МэВ.

11.15. Найти энергию T, выделяющуюся при β-распаде покоящегося нейтрона.

Ответ: $T = \left[m_{\text{n}} - (m_{\text{p}} + m_{\text{e}^-}) \right] c^2 = 0,78$ МэВ.

11.16. Остановившийся π^+-мезон распался на мюон и нейтрино. Найти кинетическую энергию мюона и энергию нейтрино.

Ответ: $T_\mu = (m_\pi - m_\mu)^2 c^2 \big/ (2m_\pi) = 4,1$ МэВ; $E_\nu = \sqrt{T_\mu (T_\mu + 2m_\mu c^2)} = 29,8$ МэВ.

11.17. Найти кинетическую энергию и импульс μ-мюона при распаде покоящегося K^+-мезона по схеме: $\mathrm{K}^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Массой нейтрино пренебречь.

Ответ: $T_\mu = (m_{\text{K}} - m_\mu)^2 c^2 \big/ (2m_{\text{K}}) = 152,5$ МэВ; $p_\mu = 235,5$ МэВ/c.

11.18. Покоящийся таон распадается на мюон и два нейтрино по реакции $\tau_- \to \mu_- + \nu_\tau + \tilde{\nu}_\mu$, причем мюон летит в одну сторону, а оба нейтрино – в противоположную сторону. Определить кинетическую энергию мюона. Массой нейтрино пренебречь.

Ответ: $T_\mu = (m_\tau - m_\mu)^2 c^2 \big/ (2m_\tau) = 789$ МэВ.

11.19. Релятивистский Σ^+-гиперон с кинетической энергией $T_\Sigma = 320$ МэВ распался на нейтральную частицу и π^+-мезон, который вылетел с энергией $T_\pi = 42$ МэВ под прямым углом к направлению движения гиперона. Найти энергию E_0 покоя нейтральной частицы.

Ответ: $E_0 = \sqrt{(m_\Sigma^2 + m_\pi^2)c^4 - 2(m_\Sigma c^2 + T_\Sigma)(m_\pi c^2 + T_\pi)} = 0,94$ ГэВ.

11.20. Распад π^0-мезона на лету происходит по схеме: $\pi^0 \to \hbar\omega + \hbar\omega$. Найти угол ϑ между направлениями разлета фотонов, если их энергии $T_1 = 0,5$ ГэВ и $T_2 = 0,8$ ГэВ.

Ответ: $\vartheta = 2\arcsin \dfrac{m_\pi c^2}{2\sqrt{T_1 T_2}} = 12^\circ 17'$.

11.21. Позитрон с кинетической энергией T, равной его энергии покоя, аннигилирует на покоящемся свободном электроне. В результате возникают два γ-кванта, энергия одного из которых в $\eta = 2$ раза больше энергии другого. Вычислить угол ϑ между направлениями разлета γ-квантов.

Ответ: $\cos\vartheta = \dfrac{1}{2\eta}\left(\dfrac{T(1+\eta)^2}{T + 2m_{\text{e}}c^2} - 1 - \eta^2 \right) = -0,5$; $\vartheta = 120°$.

11.22. Ускоритель в Серпухове разгоняет протоны до энергии $E = 76$ ГэВ. При столкновении с неподвижными протонами мишени может произойти рассеяние и всевозможные реакции, совместимые с законами сохранения электрического заряда, энергии и импульса. В частности, может появиться несколько протонов и антипротонов. На какое наибольшее количество протонов и антипротонов можно рассчитывать в результате одного столкновения? Энергии покоя E_0 протона и антипротона принять равными 0,94 ГэВ.

Ответ: $n = \sqrt{2\left(1 + E/E_0\right)} \approx 12{,}8$. После округления до ближайшего (снизу) целого значения: $n = 12$.

11.23. Определить собственное среднее время жизни τ_0 мюонов, если при значении кинетической энергии $T = 10m_\mu c^2$ их среднее время жизни в лабораторной системе отсчета $\tau = 17{,}6$ мкс.

Ответ: $\tau_0 = \tau m_\mu c^2 \big/ (m_\mu c^2 + T) = 1{,}6$ мкс.

11.24. Найти вероятность w того, что π^+-мезон с кинетической энергией $T = 100$ МэВ распадется на лету, не достигнув мишени, расположенной на расстоянии $l = 6$ м от места рождения мезонов. Собственное время жизни π^+-мезона $\tau_0 = 2{,}55 \cdot 10^{-8}$ с.

Ответ: $w = 1 - \exp\left(-t/\tau\right) = 1 - \exp\left(-\dfrac{m_\mu c^2 l}{c\tau_0\sqrt{2Tm_\mu c^2 + T^2}}\right) = 0{,}43$.

11.25. На каком расстоянии l интенсивность пучка мюонов с кинетической энергией $T = 1$ ГэВ, движущихся в вакууме, уменьшается до половины первоначального значения?

Ответ: $l = \tau c \ln 2 \sqrt{T^2 + 2Tm_\mu c^2} \Big/ \left(m_\mu c^2\right) = 4{,}96 \cdot 10^4$ м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иродов И.Е. Квантовая физика. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. − 256 с.
2. Иродов И.Е. Атомная и ядерная физика: сборник задач. – М: СПб.: Лань, 2002. − 288 с.
3. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. − 431 с.
4. Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю. Физика. Оптика. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. – 240 с.
5. Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю. Физика. Квантовая физика. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. – 318 с.
6. Вайсбурд Д.И., Сивов Ю.А., Тюрин Ю.И., Лельчук Л.Ю., Чебодаев М.И. Физика. Сборник вопросов и задач для студентов элитного технического отделения. Ч. I. − Томск: Изд-во ТПУ, 2008. − 240 с.
7. Окунь Л.Б. $\alpha\beta\gamma\ldots z$. Элементарное введение в физику элементарных частиц. – М.: Наука, 1985. − 112 с.
8. Вихман Э. Берклеевский курс физики. Т. IV. Квантовая физика. − М.: Наука, 1974.− 416 с.
9. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Изд-во физматлит, 2006. – 848 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Основные физические константы

Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}8$ м/с^2
Постоянная Авогадро	$N = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Элементарный заряд	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^{9}$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная закона смещения Вина	$b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Ридберга для бесконечной массы	$R_\infty = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ $R'_\infty = 1{,}097 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	$a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м
Энергия ионизации атома водорода	$E_i = 13{,}6$ эВ
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_К = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_Б = 9,\ 27\ 10^{-24}$ Дж/Тл
Магнитный момент электрона	$\mu_e = 1{,}001145\mu_0$
Классический радиус электрона	$r_e = 2{,}82 \cdot 10^{-15}$ м
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя α-частицы	$m_\alpha = 6{,}6444 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомная единица массы (а.е.м.)	$m_a = 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг
1 кюри соответствует	$3{,}7 \cdot 10^{10}$ распад /с

1 рентген соответствует тому количеству рентгеновского или гамма-излучения, которое создает в 1 м^3 сухого воздуха, находящегося при нормальных условиях, $2{,}08 \cdot 10^{15}$ пар ионов.

Таблица 2

Работы выхода электрона с поверхности некоторых металлов

Металл	A, эВ	Металл	A, эВ	Металл	A, эВ
Алюминий	3,74	Литий	2,30	Рубидий	2,13
Барий	2,29	Медь	4,50	Серебро	4,72
Вольфрам	4,50	Магний	3,64	Стронций	2,25
Золото	4,76	Натрий	2,27	Цезий	1,90
Кадмий	4,08	Платина	5,30	Цинк	4,00
Калий	2,26	Ртуть	4,53		

Таблица 3

Массы некоторых нейтральных атомов и элементарных частиц

Элемент	Порядковый номер Z	Изотоп	Масса, а.е.м.
Электрон	–	e	0,00055
Протон	–	p	1,00728
Нейтрон	–	n	1,00867
Водород	1	^{1}H	1,00783
		^{2}H	2,01410
		^{3}H	3,01605
Гелий	2	^{3}He	3,01603
		^{4}He	4,00260
Литий	3	^{6}Li	6,01513
		^{7}Li	7,01601
Бериллий	4	^{7}Be	7,01693
		^{9}Be	9,01219
Бор	5	^{10}B	10,01294
		^{11}B	11,00931
Углерод	6	^{11}C	11,01143
		^{12}C	12,00000
		^{13}C	13,00335
Азот	7	^{13}N	13,00574
		^{14}N	14,00307
Кислород	8	^{16}O	15,99491
		^{17}O	16,99913
Фтор	9	^{19}F	18,99840
Натрий	11	^{23}Na	22,98977
Магний	12	^{23}Mg	22,99414
Кремний	14	^{28}Si	28,0855
Примечание. 1 а.е.м. = $1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг; c^2 = 931,4 МэВ/а.е.м.			

Таблица 4

Таблица некоторых элементарных частиц

	Частица	Символ	Масса, МэВ	q	L_e	L_μ	L_τ	B	T	T_z	S	Спин $\hbar$
	Фотон			0	0	0	0	0	–	–	–	1
Лептоны	Нейтрино	ν_e, $\tilde{\nu}_e$	0	0	+1	0	0	0	–	–	–	1/2
		ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$	0	0	0	+1	0	0	–	–	–	1/2
		ν_τ, $\tilde{\nu}_\tau$	0	0	0	0	+1	0	–	–	–	1/2
	Электрон	e^-, e^+	0,511	–1	+1	0	0	0	–	–	–	1/2
	Мюон	μ^-, μ^+	105,66	–1	0	+1	0	0	–	–	–	1/2
	Тау-лептон	τ^-, τ^+	1782	–1	0	0	+1	0	–	–	–	1/2
Мезоны	Пи-мезоны	π^0	135,0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0
		π^+, π^-	139,6	+1	0	0	0	0	1	+1	0	0
	K-мезоны	K^+, K^-	493,8	+1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	+1	0
		K^0, $\tilde{K}^0$	497,8	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+1	0
	Эта-мезоны	η^0	549	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Барионы	Протон	p, $\tilde{p}$	938,26	+1	0	0	0	+1	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	Нейтрон	n, $\tilde{n}$	939,55	0	0	0	0	+1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	Лямбда-гипероны	Λ^0, $\tilde{\Lambda}^0$	1115,6	0	0	0	0	+1	0	0	–1	$\frac{1}{2}$
	Сигма-гипероны	Σ^+, $\tilde{\Sigma}^-$	1189,4	+1	0	0	0	+1	1	+1	–1	$\frac{1}{2}$
		Σ^0, $\tilde{\Sigma}^0$	1198,5	0	0	0	0	+1	1	0	–1	$\frac{1}{2}$
	Кси-гипероны	Ξ^0, $\tilde{\Xi}^0$	1314,9	0	0	0	0	+1	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	–2	$\frac{1}{2}$
		Ξ^-, $\tilde{\Xi}^+$	1321,9	–1	0	0	0	+1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	–2	$\frac{1}{2}$
	Омега-гипероны	Ω^-, $\tilde{\Omega}^-$	1672	–1	0	0	0	+1	0	0	–3	$\frac{3}{2}$

Примечание. Масса частиц выражена в единицах энергии (МэВ). Справа в таблице в колонке «Символ» указаны символы соответствующих античастиц. Античастицы имеют тождественные с частицей значения массы, времени жизни, спина и изоспина и противоположные по знаку значения электрического Q, лептонного L и барионного B зарядов, проекции изоспина T_z и странности S.

Таблица 5

Период полураспада некоторых радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ изотопа	Период полураспада	Изотоп	Символ изотопа	Период полураспада
Висмут	^{210}Bi	5 сут	Полоний	^{210}Po	138 сут
Кальций	^{45}Ca	164 сут	Плутоний	^{239}Pu	$2{,}4 \cdot 10^4$ лет
Кобальт	^{58}Co	71,3 сут	Радий	^{226}Ra	$1{,}62 \cdot 10^3$ лет
Кобальт	^{60}Co	5,3 года	Радон	^{228}Rn	3,8 сут
Натрий	^{24}Na	15 ч	Уран	^{235}U	$7{,}07 \cdot 10^8$ лет
Стронций	^{89}Sr	54 сут	Уран	^{238}U	$4{,}5 \cdot 10^9$ лет
Стронций	^{90}Sr	28 лет			

Таблица 6

Показатели преломления n

Вещество	n	Вещество	n
Алмаз	2,42	Кварц плавленый	1,46
Вода	1,33	Монокристалл NaCl	1,55
Воздух	1,00029	Сапфир Al_2O_3	1,57
Глицерин	1,47	Стекло (обычное)	1,5

Таблица 7

Соотношение между различными единицами

Температура	0 К = –273 °С	Электронвольт	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Атмосфера	1 атм = 10^5 Па	1 год	$3{,}1557 \cdot 10^7$ с

Таблица 8

Некоторые десятичные приставки

Наименование	тера	гига	мега	микро	нано	пико	фемто	атто
Приставка	Т	Г	М	мк	н	п	ф	а
Множитель	10^{12}	10^9	10^6	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

Периодическая система элементов Д.И. Менделеева

Группы элементов

Периоды	Ряды	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
I	1	**H** 1 1,00797 Водород						**H**			**He** 2 4,002602 Гелий
II	2	**Li** 3 6,941 Литий	**Be** 4 9,01218 Бериллий	**B** 5 10,81 Бор	**C** 6 12,011 Углерод	**N** 7 14,0067 Азот	**O** 8 15,999 Кислород	**F** 9 18,9984 Фтор			**Ne** 10 20,17 Неон
III	3	**Na** 11 22,98977 Натрий	**Mg** 12 24,305 Магний	**Al** 13 26,98154 Алюминий	**Si** 14 28,086 Кремний	**P** 15 30,9738 Фосфор	**S** 16 32,064 Сера	**Cl** 17 35,454 Хлор			**Ar** 18 39,94 Аргон
IV	4	**K** 19 39,098 Калий	**Ca** 20 40,08 Кальций	**Sc** 21 44,9559 Скандий	**Ti** 22 47,90 Титан	**V** 23 50,9415 Ванадий	**Cr** 24 51,996 Хром	**Mn** 25 54,9380 Марганец	**Fe** 26 55,84 Железо	**Co** 27 58,9332 Кобальт	**Ni** 28 58,70 Никель
	5	**Cu** 29 63,54 Медь	**Zn** 30 65,38 Цинк	**Ga** 31 69,723 Галлий	**Ge** 32 72,50 Германий	**As** 33 74,9216 Мышьяк	**Se** 34 78,96 Селен	**Br** 35 79,904 Бром			**Kr** 36 83,804 Криптон
V	6	**Rb** 37 85,467 Рубидий	**Sr** 38 87,62 Стронций	**Y** 39 88,9059 Иттрий	**Zr** 40 91,22 Цирконий	**Nb** 41 92,9064 Ниобий	**Mo** 42 95,94 Молибден	**Tc** 43 98,9062 Технеций	**Ru** 44 101,0 Рутений	**Rh** 45 102,9055 Родий	**Pd** 46 106,4 Палладий
	7	**Ar** 47 107,8682 Серебро	**Cd** 48 112,41 Кадмий	**In** 49 114,82 Индий	**Sn** 50 118,60 Олово	**Sb** 51 121,70 Сурьма	**Te** 52 127,6 Теллур	**I** 53 126,9045 Иод			**Xe** 54 131,29 Ксенон
VI	8	**Cs** 55 132,90547 Цезий	**Ba** 56 137,33 Барий	**La*** 57 138,905 Лантан	**Hf** 72 178,4 Гафний	**Ta** 73 180,647 Тантал	**W** 74 183,8 Вольфрам	**Re** 75 186,207 Рений	**Os** 76 190,2 Осмий	**Ir** 77 192,2 Иридий	**Pt** 78 195,08 Платина
	9	**Au** 79 196,9665 Золото	**Hg** 80 200,5 Ртуть	**Tl** 81 204,383 Таллий	**Pb** 82 207,2 Свинец	**Bi** 83 208,9804 Висмут	**Po** 84 208,9824 Полоний	**At** 85 209,9871 Астат			**Rn** 86 222,0176 Радон
VII	10	**Fr** 87 223,0197 Франций	**Ra** 88 226,0254 Радий	**Ac**** 89 227,028 Актиний	**Rf** 104 [261] Резерфордий	**Db** 105 [262] Дубний	**Sg** 106 [263] Сиборгий	**Bh** 107 [262] Борий	**Hs** 108 [265] Хассий	**Mt** 109 [266] Мейтнерий	**Ds** 110 [271] Дармштадтий

* ЛАНТАНИДЫ

Ce 58 140,12 Церий	**Pr** 59 140,9077 Празеодим	**Nd** 60 144,24 Неодим	**Pm** 61 [145] Прометий	**Sm** 62 150,36 Самарий	**Eu** 63 151,96 Европий	**Gd** 64 157,25 Гадолиний	**Tb** 65 158,925 Тербий	**Dy** 66 162,50 Диспрозий	**Ho** 67 164,93 Гольмий	**Er** 68 167,26 Эрбий	**Tm** 69 168,9342 Тулий	**Yb** 70 173,04 Иттербий	**Lu** 71 174,967 Лютеций

** АКТИНИДЫ

Th 90 232,0381 Торий	**Pa** 91 231,0359 Протактиний	**U** 92 238,02 Уран	**Np** 93 237,0482 Нептуний	**Pu** 94 244,0642 Плутоний	**Am** 95 243,0614 Америций	**Cm** 96 247,0703 Кюрий	**Bk** 97 247,07 Берклий	**Cf** 98 251,0796 Калифорний	**Es** 99 252,0828 Эйнштейний	**Fm** 100 257,0951 Фермий	**Md** 101 258,097 Менделевий	**No** 102 259,1009 Нобелий	**Lr** 103 260,1054 Лоуренсий

Примечание. В таблицу не включены элементы, синтезированные в последнее время, например, Rg^{111} – Рентгений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ТЮРИН Юрий Иванович
ЛАРИОНОВ Виталий Васильевич
ЧЕРНОВ Иван Петрович
ЕФРЕМОВА Наталья Александровна
КУЗНЕЦОВ Сергей Иванович
КУПРЕКОВА Елена Ивановна
ЛЕЛЬЧУК Лариса Юрьевна
РУДКОВСКАЯ Вера Федоровна
СЕМКИНА Людмила Иосифовна
СИВОВ Юрий Александрович
ТОЛМАЧЕВА Нелла Дмитриевна
ХОРУЖИЙ Владимир Дмитриевич

ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
(с решениями)

ЧАСТЬ 3
Оптика. Атомная и ядерная физика

Учебное пособие

Научный редактор *доктор физико-математических наук, профессор Ю.И. Тюрин*
Ответственный редактор *Н.Д. Толмачева*

Выпускающий редактор *Т.С. Савенкова*
Редактор *О.Н. Свинцова*
Компьютерная верстка *В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 04.10.2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 13,84. Уч.-изд. л. 12,52.
Заказ 1564-10. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел/факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru