Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные величины

Содержание

Случайные величины

- *Понятие случайной величины и закона ее распределения*
- *Функция распределения случайной величины*
- *Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности*
- *Мода и медиана. Квантили. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс*

Основные законы распределения

- *Биномиальный закон распределения*
- *Закон распределения Пуассона*
- *Геометрическое распределение*
- *Равномерный закон распределения*
- *Показательный(экспоненциальный) закон распределения*
- *Нормальны закон распределения*

Понятие случайной величины и закона ее распределения

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины.

Под *случайной величиной* понимается переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений.

Случайная величина называется *дискретной (прерывной*), если множество значений конечное, или бесконечное, но счетное.

Под *непрерывной* случайной величиной будем понимать величину, бесконечное несчетное множество значений которой есть некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой оси.

Понятие случайной величины и закона ее распределения

Определение: ***Случайной величиной X*** *называется функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий),*

$$X = f(\omega)$$

где ω - элементарный исход(или элементарное событие, принадлежащие пространству Ω, т.е. ω € Ω).

Наиболее полным, исчерпывающим описанием случайной величины является ее закон распределения.

Понятие случайной величины и закона ее распределения

Определение: ***Законом распределения*** *случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающие связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.*

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является таблица, в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины и соответствующие их вероятности.

X_1	X_2	…	X_i	…	X_n
P_1	P_2	…	P_i	…	p_n

Такая таблица называется *рядом распределения* дискретной случайной величины.

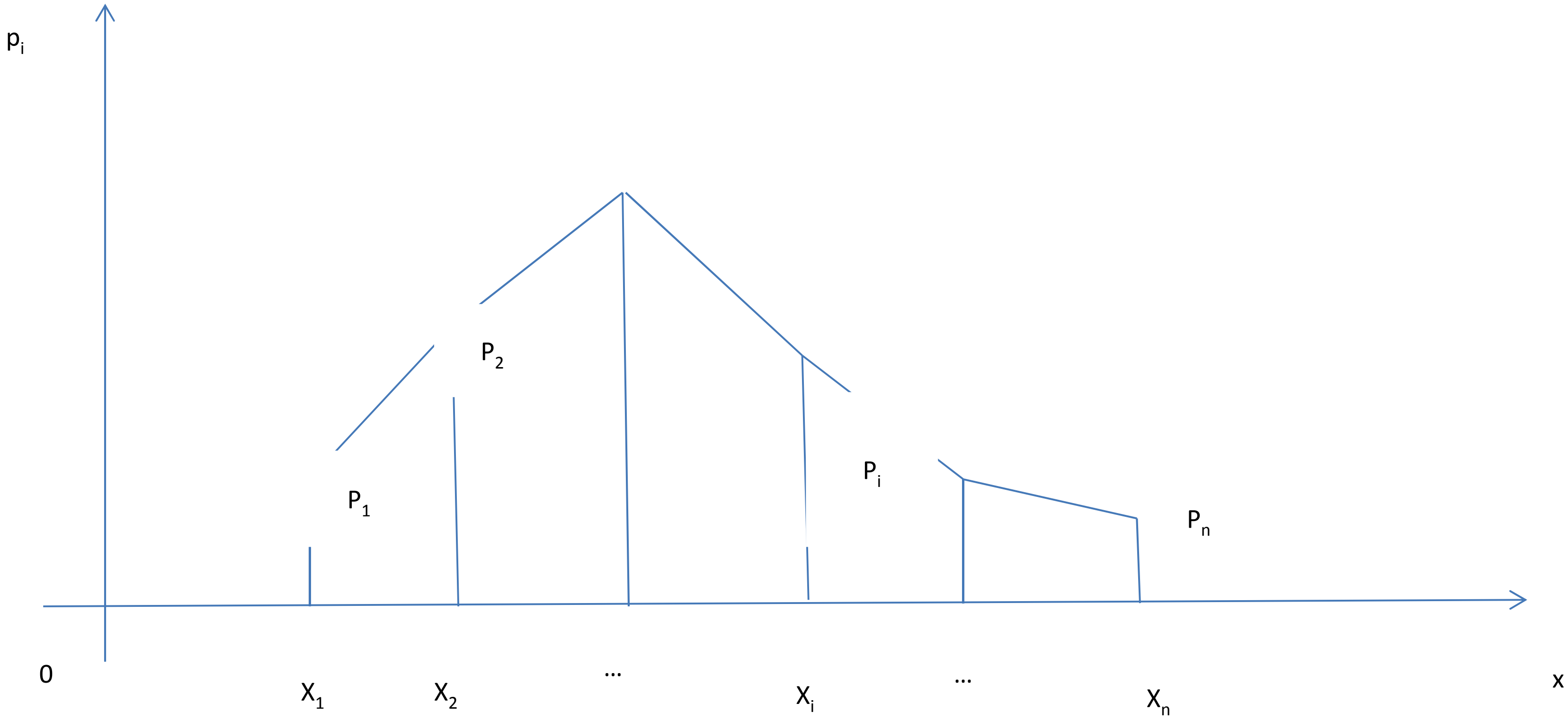
Понятие случайной величины и закона ее распределения

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины , а по оси ординат – соответствующие их вероятности . Соединение полученных точек образует ломанную, называемую *многоугольником* или *полигоном распределения вероятности*

Рисунок

Пример

Многоугольник или полигон распределения вероятности



Пример

В лотерее разыгрываются: автомобиль стоимостью 5000 ден.ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден.ед., 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден.ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден.ед. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотерии, купившим один билет.

Решение:

Возможные значения случайной величины X – чистого выигрыша на один билет – равны 0-7=-7 ден.ед.(если билет не выиграл), 200-7=193, 250-7=243, 5000-7=4993 ден.ед.(если на билет выпал выигрыш соответственно видеомагнитофона, телевизора или автомобиля). Учитывая, что из 1000 билетов число невыигрывшех состовляет 990, а указанных выигрышей соответственно 5,4 и 1, и используя классическое определение вероятности, получим:

P(X=-7)=990/1000=0,990;

P(X=243)=4/1000=0,004

P(X=4993)=1/1000=0,001

т.е. ряд распределения X:

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

Функция распределения случайной величины

Определение. **Функцией распределения** *случайной величины X называется функция F(x), выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:*

$$F(x)=P(X < x)$$

Функцию F(x) иногда называют *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*.

Функция распределения случайной величины

Общие свойства функции распределения:

1.*Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей*

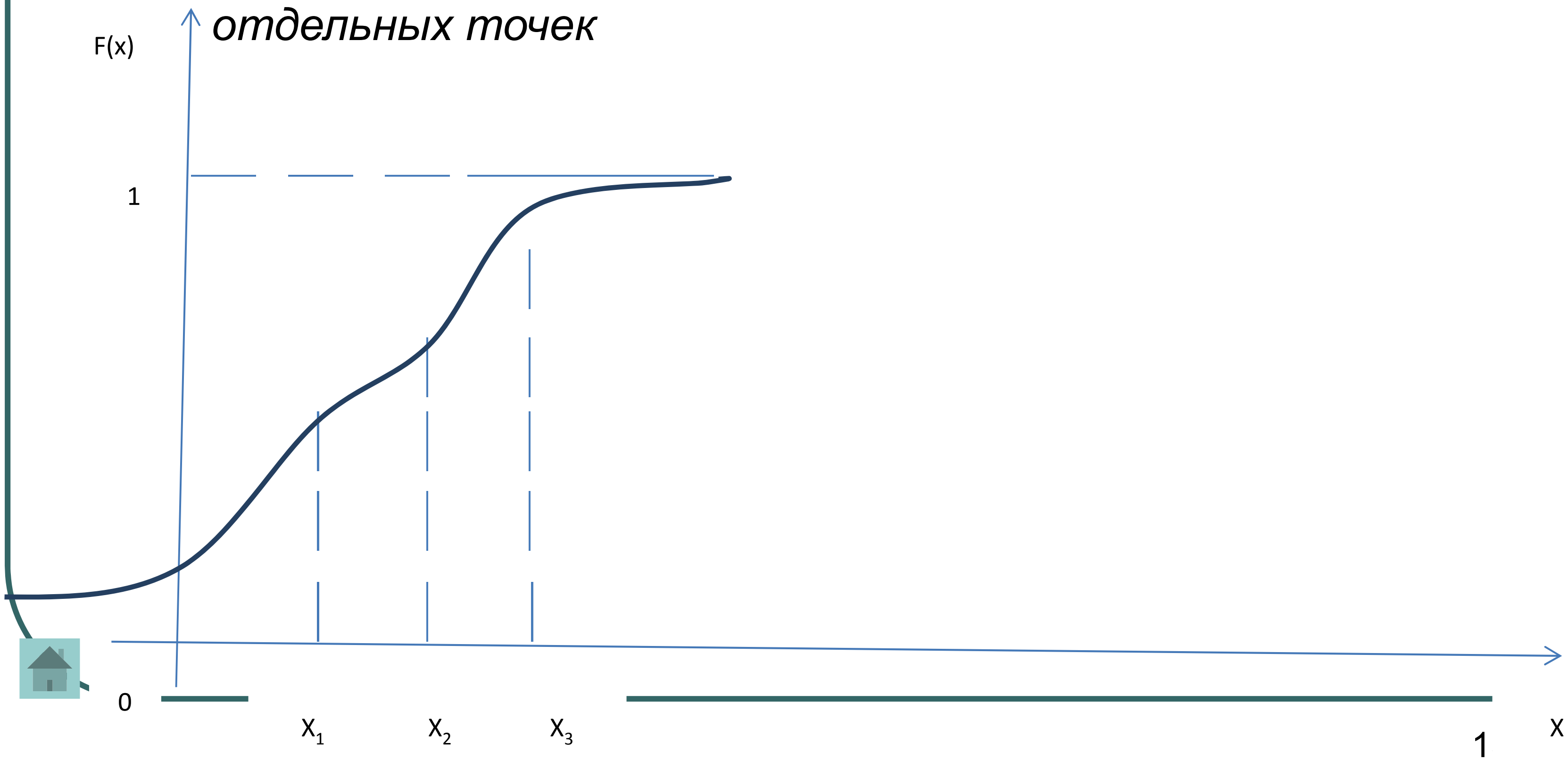
2. *Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси*

3. *На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице*

4. *Вероятность попадания случайной величины в интервал [x1,x2) (включая x1) равна приращению ее функции распределения на этом интервале*

Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

Определение: *Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируемая всюду, кроме, быть может отдельных точек*



Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

Определение: *Плотность вероятности (плотностью распределения или просто плотностью)* p(*x*) *непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения*

$$p(x)=F'(x)$$

Плотность вероятности иногда называют *дифференциальной функцией* или *дифференциальным законом распределения*.

График плотности вероятности p(x) называется *кривой распределения*

Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

Свойства плотности вероятности непрерывной случайной величины:

1.Плотность вероятности - неотрицательная функция

$$\varphi(x) \geq 0$$

2.Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал [a,b] равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от a до b.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

3.Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по формуле.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx$$

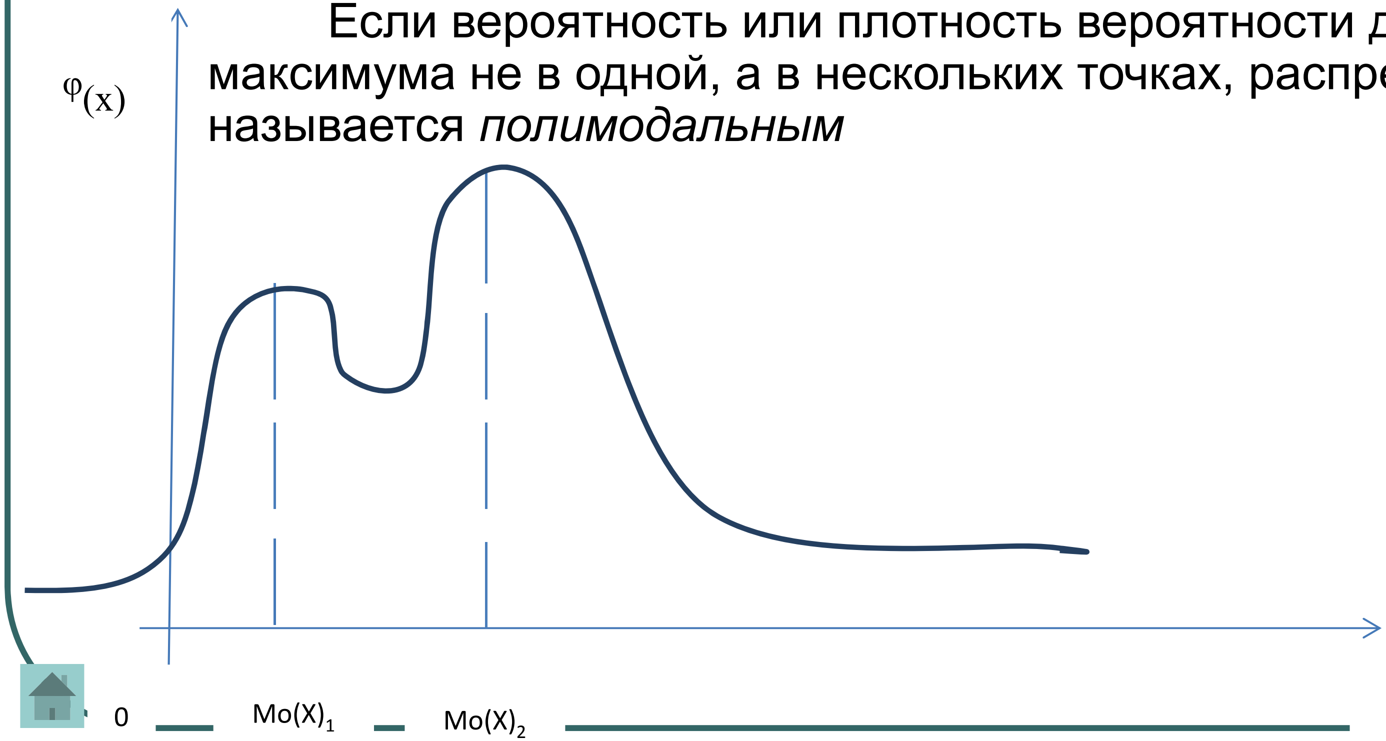
4.Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен единице

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$$

Мода и медиана. Квантили. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс.

Определение. **Модой Mo(X)** *случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение* (для которого вероятность pi или плотность вероятность φ(x) достигает максимума).

Если вероятность или плотность вероятности достигает максимума не в одной, а в нескольких точках, распределение называется *полимодальным*



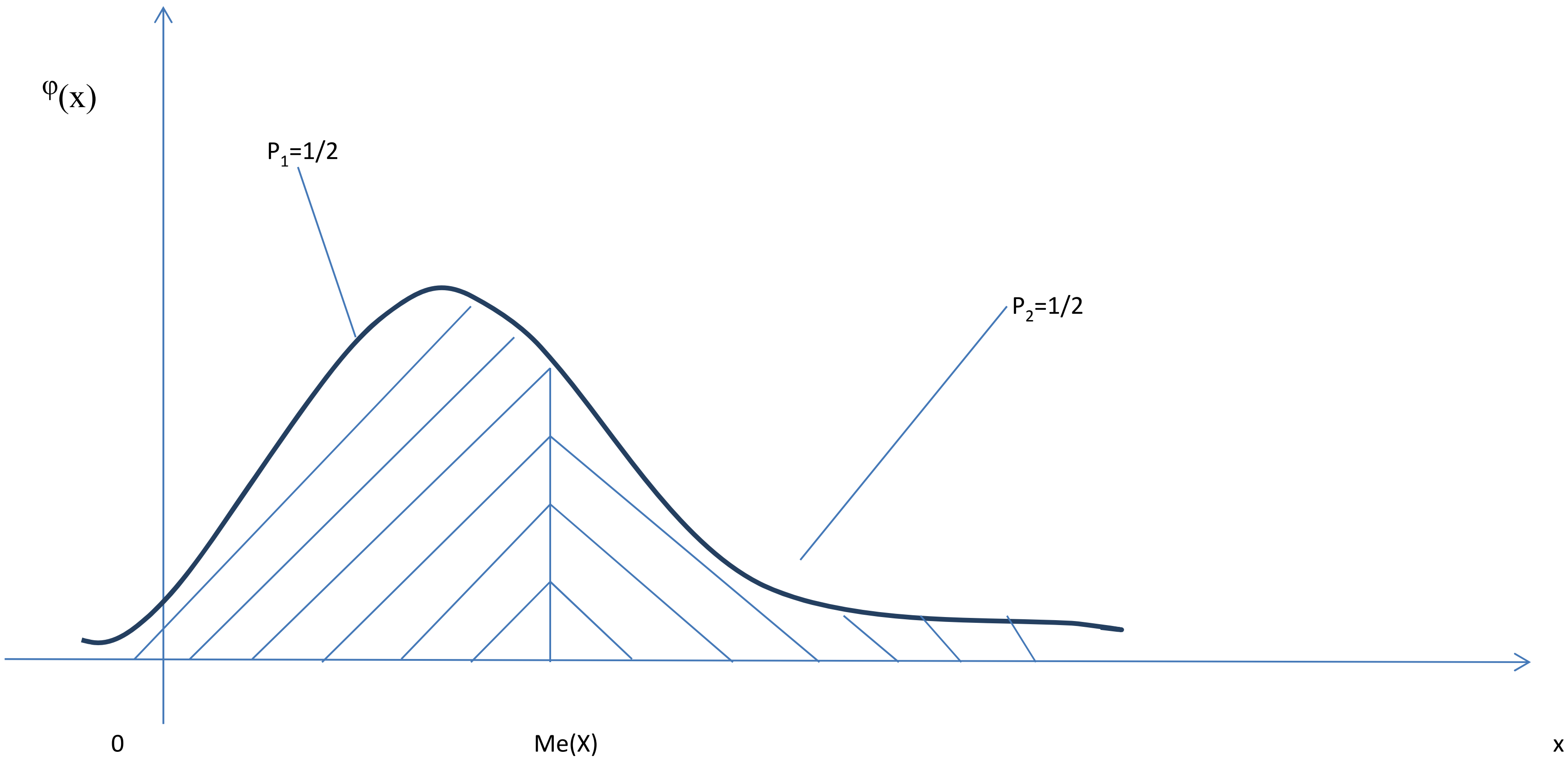
Мода и медиана. Квантили. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс.

Определение. **Медианной Me(X)** *непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого*

$$P(X < Me)) = P(X > Me(X)) = \frac{1}{2}$$

то есть вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньше медианы *Me(X)* или больше ее, одна и та же и равна ½.Геометрическая вертикальная прямая *x=Me(X),* делит площадь фигуры под кривой распределения на две равные части.

Мода и медиана. Квантили. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс.



Мода и медиана. Квантили. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс.

Наряду с отмеченными выше числовыми характеристиками для описания случайной величины используется понятие квантилей и процентных точек.

Определение. **Квантилем уровня** *q* (или **q-квантилем**) *называется такое значение xq случайной величины, при котором функция ее распределения принимает значение, равное q*

$$F(x_q) = P(X < x_q) = q$$

Некоторые квантили получили особо название. Медианна случайной величины есть квантиль уровня 0,5, т.е. Me(X)=x0,5. Квантили x0,25 и x0,75 получили название *верхнего и нижнего квантилей.*

Среди числовых характеристик случайной величины особое значение имеют моменты – начальные и центральные**.**

Мода и медиана. Квантили. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс.

Определение. **Начальным моментом** *К-го порядка случайной величины Х называется математическое ожидание К-й степени этой величины*

$$\upsilon_k = M(X^k)$$

Определение. **Центральным моментом** *К-го порядка случайной величины Х называется математическое ожидание К-й степени отклонения случайной величины Х от ее математического ожидания*

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k \qquad \mu_k = M(X - a)^k$$

Биномиальный закон распределения

Определение. *Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами n и p, если она принимает значения 0,1,2,…,m,…,n с вероятностями*

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Биномиальный закон распределения представляет собой закон распределения числа X=m наступлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p.

Биномиальный закон распределения

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

x_i	0	1	2	…	m	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Биномиальный закон распределения

Теорема. *Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биномиальному закону,*

$$M(X) = np$$

А ее диспресия

$$D(X) = npq$$

Закон распределения Пуассона

Определение. *Дискретная случайная величина X имеет* ***закон распределения Пуассона*** *с параметром $\lambda>0$, если она принимает значения 0,1,2,…, m,…(бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями*

$$P(X=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=P_m(\lambda)$$

Закон распределения Пуассона

Ряд распределения Пуассона имеет вид

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

Закон распределения Пуассона

Теорема. *Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону* ***Пуассона****, совпадают и равны параметру λ этого закона*

$$M(X) = \lambda$$

$$D(X) = \lambda$$

Закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона. Так как при этом вероятность p события A в каждом испытании мала, то закон распределения Пуассона называют часто законом редких явлений

Геометрическое распределение

Определение. Дискретная случайная величина X=м имеет ***геометрическое распределение*** *с параметром р, если она принимает значения 1,2,…,м…(бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями*

$$P(X = m) = pq^{m-1}$$

Где 0<p<1, q=1-p

Геометрическое распределение

Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид

x_i	1	2	3	…	m	…
p_i	P	pq	pq^2	…	pq^{m-1}	…

Геометрическое распределение

Теорема. *Математическое ожидание случайной величины X, имеющей геометрическое распределение с параметром p,*

$$M(X) = \frac{1}{p}$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}$$

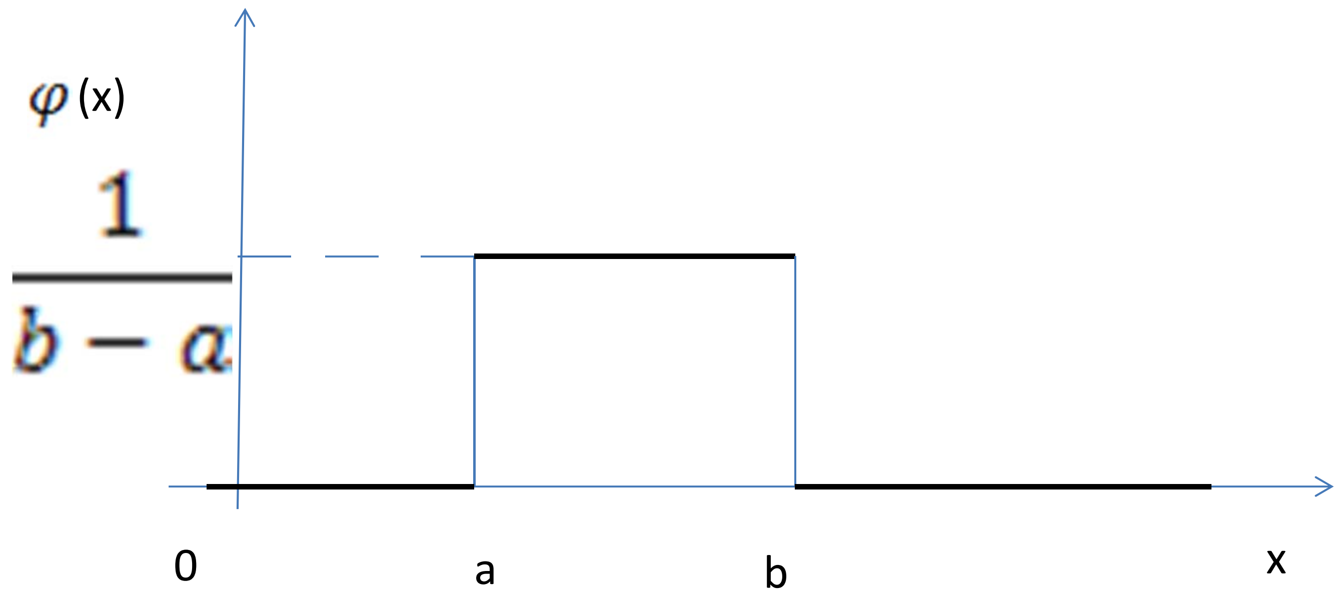
Равномерный закон распределения

Определение. *Непрерывная случайная величина X имеет равномерный закон распределения на отрезке [a,b], если ее плотность вероятности $\varphi(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его.*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b \\ 0 & \text{при } x < a, x > b \end{cases}$$

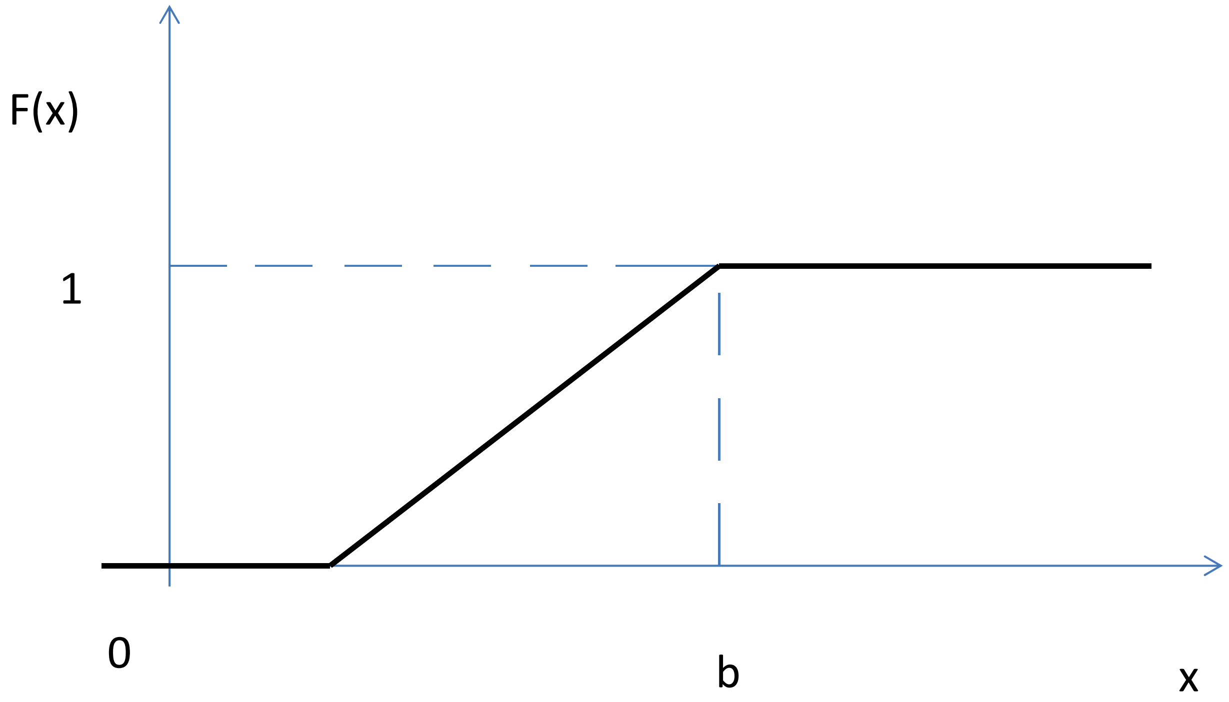
Равномерный закон распределения

Кривая распределения $\varphi(x)$ и график функции распределения $F(X)$ случайной величины X приведены на рисунке.



Равномерный закон распределения

Кривая распределения φ(x) и график функции распределения F(X) случайной величины X приведены на рисунке.



Равномерный закон распределения

Теорема. Функция распределения случайной величины X, распределенной по равномерному закону, есть

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a \\ (x-a)(b-a) \text{при } a < x \le b \\ 1 \text{ при } x > b \end{cases}$$

Ее математическое ожидание

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

А дисперсия

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Показательный(экспоненциальный) закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X ***имеет показательный (экспоненциальный)*** *закон распределения с параметром , если ее плотность вероятности имеет вид*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

Показательный(экспоненциальный) закон распределения

Теорема. Функция распределения случайной величины X, распределенной по показательному закону (экспоненциальному) закону, есть

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

ее математическое ожидание

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$

а ее дисперсия

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Показательный закон распределения играет большую роль в теории массового обслуживания и теории надежности.

Нормальный закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет ***нормальный закон распределения*** *(закон Гаусса) с параметрами а и , если ее плотность вероятности имеет вид.*

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Кривую нормального закона распределения называют нормальной или гауссовой кривой.

Нормальный закон распределения

Теорема. ***Математическое ожидание*** *случайной величины X, расспределенной по нормальному закону, равно параметру а этого закона*

$$M(X) = a$$

а ее дисперсия параметру σ^2

$$D(X) = \sigma^2$$

Нормальный закон распределения

*Теорема. Функция распределения случайной величины X, распределенной по **нормальному закону**, выражается через функцию **Лапласа** Ф(x) по формуле:*

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Нормальный закон распределения

Рассмотрим свойства случайной величины X, распределенной по нормальному закону.

1.Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $[x_1, x_2]$, *равна*

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{2}[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)]$$

где

$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma} \qquad t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}$$

Нормальный закон распределения

2. *Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a не превысит величину* $\Delta > 0$ *(по абсолютной величине), равна*

$$P(|X - a| \leq \Delta) = \Phi(t)$$

где

$$t = \frac{\Delta}{\sigma}$$

Спасибо за внимание