

Элементы комбинаторного анализа

Оглавление

1. История
2. Основные правила комбинаторики.
3. Перечислительная комбинаторика или теория перечислений.
4. Комбинации элементов с повторениями.
5. Бином Ньютона.
6. Практическое занятие по теме «Комбинаторные формулы. Бином Ньютона»
7. Контрольные вопросы.

История

- * Термин "комбинаторика" был введён в математический обиход знаменитым Лейбницем. Готфрид Вильгельм Лейбниц - всемирно известный немецкий учёный, занимался философией, математикой, физикой, организовал Берлинскую академию наук и стал её первым президентом.



1.07.1646 - 14.11.1716

История

- * В 1666 году Лейбниц опубликовал "Рассуждения о комбинаторном искусстве". В своём сочинении Лейбниц, вводя специальные символы, термины для подмножеств и операций над ними находит все k -сочетания из n элементов, выводит свойства сочетаний:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \quad \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

[Содержание](#)

Основные правила комбинаторики

Все разнообразие комбинаторных формул может быть выведено из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств – правило суммы и правило произведения.

Правило суммы.

Если конечные множества не пересекаются, то число элементов $X \cup Y$ {или} равно сумме числа элементов множества X и числа элементов множества Y .

Задача: если на первой полке стоит X книг, а на второй Y , то выбрать книгу из первой или второй полки, можно: $X+Y$ способами.

Правило произведения.

Если элемент X можно выбрать k способами, а элемент Y - m способами то пару (X, Y) можно выбрать $k*m$ способами.

Задача: если на первой полке стоит 5 книг, а на второй 10, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно: $5*10=50$ способами.

Задача: сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

*Решение: В таких числах последняя цифра будет такая же, как и первая, а предпоследняя - как и вторая. Третья цифра будет любой. Это можно представить в виде XYZYX, где Y и Z -любые цифры, а X - не ноль. Значит по правилу произведения количество цифр одинаково читающихся как слева направо, так и справа налево равно:
вариантов.*

$$9 \times 10 \times 10 = 900$$

[Содержание](#)

Перечислительная комбинаторика или теория перечисления.

- * Раздел комбинаторного анализа, в котором изучаются и разрабатываются методы решения перечислительных задач. Эти задачи, как правило, сводятся к подсчету числа элементов конечного множества, обладающих определенными свойствами, или их классов эквивалентности. К таким методам относятся, напр., включения и исключения принцип и различные его обобщения. Теория перечисления Пойа часто позволяет преодолевать трудности при подсчете разных объектов, когда их приходится рассматривать как неразличимые. Основным инструментом при решении перечислительных задач являются производящие функции; они также играют существенную роль при получении асимптоты.

[Содержание](#)

Комбинации элементов с повторениями.

- * Все приведенные формулы справедливы в том случае, когда n элементов множества A различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае рассматриваются комбинации с повторением, Число которых вычисляется по другим формулам.

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются кортежи длины k , составленные из n — элементного множества A . Число этих кортежей обозначают $\overline{A_n^k}$. Черта указывает на возможность повторения элементов $\overline{A_n^k} = n^k$. Например, сколько пятизначных номеров можно составить из элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? Такими номерами являются кортежи длины 5, составленные из девятиэлементного множества, где схема выбора состоит в выборе 5 элементов из девятиэлементного множества с возвращением, т. е. для каждого из пяти элементов есть девять способов выбора, т. е. $\overline{A_9^5} = 9^5 = 59\,049$.

Перестановкой с повторениями состава (n_1, \dots, n_k) из букв (a_1, \dots, a_k) называют любой кортеж длины $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, в который a_1 входит n_1 раз, a_2 входит n_2 раз, ..., a_k — n_k раз. Число таких перестановок обозначают

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Еще один пример. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? Слово «математика» является кортежем длины 10, имеющем состав $(2, 3, 2, 1, 1, 1)$ (буква «м» входит два раза, буква «а» входит 3 раза, буква «т» входит два раза, буквы «е», «и», «к» входят по одному разу). Значит, при перестановках букв получится $P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151\,200$ слов.

Сочетания с повторениями. Пусть имеются предметы n видов и из них составляется набор, содержащий k элементов, т. е. различными исходами будут всевозможные наборы длины k , отличающиеся составом, и при этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Такие наборы называются сочетаниями с повторениями, а их общее число определяется формулой: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Например, нужно выяснить, сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта?

$$\text{Искомое число равно } C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

[Содержание](#)

Бином Ньютона.

С числами C_n^k связано функциональное тождество, называемое формулой бинома Ньютона. Из элементарной математики хорошо известны формулы сокращённого умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Эти формулы можно записать так:

$$(a + b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 ab + C_2^2 a^0 b^2;$$
$$(a + b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 ab^2 + C_3^3 a^0 b^3.$$

Имеет место и общая закономерность: справедливо равенство:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n.$$

Это равенство называется биномом Ньютона, а коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ называются биномиальными коэффициентами.

Если положить $a=b=1$, то из формулы бинома Ньютона вытекает следующее важное соотношение: $(1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ формула суммы биномиальных коэффициентов.

* Пример: При $n = 4$ получим формулу

$$(a + b)^4 = C_4^0 b^4 + C_4^1 a b^3 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^3 b + C_4^4 a^4 = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4,$$

$$C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 1; \quad C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4; \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6; \dots$$

[Содержание](#)

Пятое практическое занятие по теме «Комбинаторные формулы. Бином Ньютона»

Задача 1. Составьте все перестановки:

- 1) из трех букв: a, b, c ;
- 2) из четырех цифр: 5, 4, 3, 2.

Решение.

- 1) $abc, acb, bac, bca, cab, cba$;
- 2) 5432, 5423, 5342, 5324, 5243, 5234, 4532, 4523, 4325, 4352, 4235, 4253, 3542, 3524, 3452, 3425, 3245, 3254, 2345, 2354, 2435, 2453, 2534, 2543.

Задача 2. Составьте все размещения:

- 1) из четырех букв a, b, c, d по 3 буквы в каждом (без повторений);
- 2) из четырех цифр: 1, 3, 5, 7 по 2 цифры в каждом.

Решение.

- 1) $abc, abd, bcd, acd, acb, adb, bdc, adc, bac, bad, cbd, cad, bca, bda, cdb, cda, cab, dab, dbc, dac, cba, dba, dcb, dca$;
- 2) 1 3; 1 5; 1 7; 3 1; 3 5; 3 7; 5 1; 5 3; 5 7; 7 1; 7 3; 7 5.

Задача 3. Вычислите:

1) A_6^3 ; 2) A_7^4 ; 3) A_8^5 ; 4) $\frac{A_6^3}{A_5^2}$; 5) $\frac{A_8^3 + A_7^4}{A_6^3}$; 6) $\frac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$.

Задача 4. Вычислите:

1) P_4 ; 2) P_6 ; 3) P_9 ; 4) $\frac{P_8}{P_6}$; 5) $\frac{P_5 + P_4}{P_3}$; 6) $\frac{P_6 - P_4}{P_3}$.

Задача 5. Вычислите:

1) $\frac{P_8}{A_8^7}$; 2) $\frac{A_7^4 - P_5}{A_5^2}$; 3) $\frac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$; 4) $\frac{P_8P_7}{7P_7}$.

[Содержание](#)

Контрольные вопросы

1. Что такое комбинаторика и для чего она нужна?
2. Что называется:
 - перестановкой n -элементного множества;
 - размещением из n элементов по m элементов;
 - сочетанием из n элементов по m элементов?
3. В чем отличие размещений от перестановок?
4. В чем отличие сочетаний от размещений?
5. Сколькими способами можно разместить три книги на книжной полке?
6. Запишите формулу для вычисления числа сочетаний элементов, используемую в формуле бинома Ньютона.
7. Как найти число перестановок с повторениями?
8. Сколько существует пятизначных чисел, у которых каждая следующая цифра:
 - меньше предыдущей,
 - больше предыдущей.
9. Сколько прямых можно провести через n точек, если никакие три из них не лежат на одной прямой?
10. Сколько разных слов можно составить перестановкой букв в слове «чача»?
11. Вычислите: $(a + b + c)^2$; $(a + b + c)^3$.
12. Покажите, что сумма $C_p^1 + C_p^2 + \dots + C_p^{p-1}$ делится на p , где p — простое число.
13. Докажите свойства биномиальных коэффициентов.