ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Элементы линейной алгебры

Линейная алгебра – часть алгебры, изучающая линейные пространства и подпространства, линейные операторы, линейные, билинейные и квадратичные функции на линейных пространствах. Но исторически первым разделом линейной алгебры была теория линейных уравнений. Именно с этим разделом линейной алгебры мы и познакомимся в этой главе.

Построение общей теории систем линейных уравнений потребовало введения новых понятий – понятий матрицы и определителя.

§1. Матрицы и действия над ними

1. Определение и некоторые виды матриц

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Матрицей размера* $m \times n$ [1)] *называется таблица, образованная из элементов некоторого множества (например, чисел или функций) и имеющая* m *строк и* n *столбцов.*

Если $m \neq n$, то матрицу называют *прямоугольной*, а если $m = n$ – *квадратной, порядка* n.

Элементы, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*. Их обычно обозначают маленькой латинской буквой с нижним индексом из двух цифр. Он указывает положение элемента в матрице: первая цифра индекса – номер строки, в которой стоит элемент, а вторая – номер столбца.

Например, a_{24} – элемент второй строки и четвертого столбца, a_{13} – элемент первой строки и третьего столбца.

Матрицы обозначают обычно большими латинскими буквами и при записи заключают в круглые или квадратные скобки:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Используются также следующие сокращенные записи:

$\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ – для прямоугольной матрицы размера $m \times n$

и $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i, j = \overline{1,n})$ – для квадратной матрицы порядка n.

---

1) Читают: «размера эм на эн».

Две матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ считаются равными, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на одинаковых местах, равны между собой, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

В этой главе будем рассматривать матрицы, элементами которых являются числа (их называют *числовыми матрицами*). В дальнейшем нам встретятся матрицы, элементами которых являются функции (*функциональные матрицы*).

Укажем некоторые частные случаи матриц, которые в дальнейшем будут часто встречаться.

1) Матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (a_{i1})$, размера $m \times 1$, называют *матрицей-столбцом длины* m.

2) Матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = (a_{1i})$, размера $1 \times n$, называют *матрицей-строкой длины* n.

3) *Нулевой* матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю. Ее обозначают обычно буквой $\mathbf{O}$, т.е.

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$. Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{kk} (где $k = \min\{m,n\}$ [1)]) будем называть *элементами главной диагонали матрицы*. Квадратная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется *единич-*

[1)] $\min\{m,n\}$ обозначает меньшее из двух чисел m и n.

ной. Единичную матрицу принято обозначать буквой $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{E}_n$, если требуется указать порядок матрицы).

5) Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n. Элементы a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, …, a_{n1} будем называть *элементами побочной диагонали матрицы*.

Квадратные матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & 0 \\ b_{31} & \dots & b_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & d_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ 0 & \dots & d_{3,n-2} & d_{3,n-1} & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{n,n-2} & d_{n,n-1} & d_{nn} \end{pmatrix}$$

у которых все элементы выше (ниже) главной или побочной диагонали равны нулю, называются *треугольными* ($\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются *верхними треугольными*, а $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ – *нижними треугольными*).

6) Прямоугольную матрицу размера $m\times n$ будем называть *трапециевидной*, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю, т.е. если она имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Линейные операции над матрицами

Линейными операциями над матрицами называются умножение матрицы на число и сложение матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением матрицы* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *на число* α *называется такая матрица* $\mathbf{B}=(b_{ij})$, *элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы* $\mathbf{A}$ *на число* α, *т.е.* $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$.

Произведение матрицы $\mathbf{A}$ на число α обозначают $\alpha\mathbf{A}$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, то

$$2\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & -2 & 8\end{pmatrix},\quad (-3)\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & -6 & -9\\ 0 & 3 & -12\end{pmatrix}.$$

Частным случаем произведения матрицы $\mathbf{A}$ на число является произведение $(-1)\mathbf{A}$. Так как все элементы этой матрицы противоположны соответствующим элементам матрицы $\mathbf{A}$, то матрицу $(-1)\mathbf{A}$ называют *противоположной матрице* $\mathbf{A}$ и обозначают $-\mathbf{A}$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, то $-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Суммой двух матриц* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *и* $\mathbf{B}=(b_{ij})$ *одинакового размера, называется такая матрица* $\mathbf{C}=(c_{ij})$, *элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$, *т.е.* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Сумму матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обозначают $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}$, то

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 3\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}.$$

Частным случаем суммы двух матриц является сумма $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$. Так как все элементы этой матрицы равны разностям соответствующих элементов матрицы $\mathbf{A}$ и матрицы $\mathbf{B}$, то матрицу $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ называют *разностью матриц* $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и обозначают $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}$, то

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 7\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что введенные таким образом линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (коммутативность сложения матриц);
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (ассоциативность сложения матриц);
3) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$;
4) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$;
5) $\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$ (ассоциативность относительно умножения чисел);

6) $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел);
7) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц);
8) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

Заканчивая этот пункт, введем еще одно понятие, которое будет часто встречаться во многих разделах математики – понятие линейной комбинации. Пусть M – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа (например, множество матриц одинакового размера, множество векторов, множество функций с одинаковой областью определения и т.д.). Пусть $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k$ – элементы множества M, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ – числа. Элемент

$$\alpha_1\cdot m_1+\alpha_2\cdot m_2+\ldots+\alpha_k\cdot m_k$$ [1)]

называют *линейной комбинацией* элементов $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k$ с коэффициентами $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$.

Например, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&4\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&3&0\\2&-4&-3\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&-1&-2\end{pmatrix},$$

то их линейная комбинация с коэффициентами $2,\ -1,\ -3$ есть матрица

$$\mathbf{D}=2\mathbf{A}-\mathbf{B}-3\mathbf{C}=$$
$$=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&-2&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&3&0\\2&-4&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&0&3\\9&-3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&3\\-11&5&17\end{pmatrix}.$$

3. Нелинейные операции над матрицами

Нелинейными операциями над матрицами называются умножение матриц и транспонирование матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $\mathbf{A}=(a_{1i})$ *и* $\mathbf{B}=(b_{i1})$ *– матрица-строка и матрица-столбец одинаковой длины* n. *Произведением матрицы-строки* $\mathbf{A}$ *на матрицу-столбец* $\mathbf{B}$ *называется число* c (*его можно рассматривать как матрицу размера* 1×1), *равное сумме произведений их соответствующих элементов, т.е.*

$$c=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{n1}.$$

[1)] Выражение $\alpha_1\cdot m_1+\alpha_2\cdot m_2+\ldots+\alpha_k\cdot m_k$ кратко обозначают $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i m_i$.

Например, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, то произведением $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$ будет число $c = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 = -11$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *– матрица размера* $m \times n$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *– матрица размера* $n \times k$ *(т.е. количество столбцов в матрице* $\mathbf{A}$ *совпадает с количеством строк матрицы* $\mathbf{B}$*). Произведением матрицы* $\mathbf{A}$ *на матрицу* $\mathbf{B}$ *называется матрица* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *размера* $m \times k$ *такая, что каждый ее элемент* c_{ij} *является произведением* i*-й строки матрицы* $\mathbf{A}$ *на* j*-й столбец матрицы* $\mathbf{B}$*, т.е.*

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Произведение матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{B}$ обозначают $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ или $\mathbf{AB}$.

ПРИМЕРЫ.

1) Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. Так как число столбцов матрицы $\mathbf{A}$ равно числу строк матрицы $\mathbf{B}$, то $\mathbf{A}$ можно умножить на $\mathbf{B}$. В результате получим матрицу

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4) & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}$ можно умножить на $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}$ можно умножить на $\mathbf{A}$. В результате получим матрицы

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6+0 & 7-8+0 \\ 3-3-5 & 21-4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+21 & -2-7 & 0+35 \\ 3+12 & -6-4 & 0+20 \\ -1+0 & 2+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последний пример показывает, что если произведения $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ существуют, то в общем случае $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (умножение матриц *некоммутативно*). Но для некоторых матриц равенство $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ возможно. Например, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, то $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, для которых $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, называют *перестановочными*.

Операция умножения матриц обладает следующими свойствами (при условии, что все записанные произведения имеют смысл):

1) $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$;
2) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность умножения матриц);
3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (дистрибутивность умножения матриц справа относительно сложения матриц);
4) $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$ (дистрибутивность умножения матриц слева относительно сложения матриц).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– матрица размера* $m \times n$. *Матрица размера* $n \times m$, *полученная из* $\mathbf{A}$ *заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной к* $\mathbf{A}$ *и обозначается* $\mathbf{A}^T$. *Операция нахождения матрицы* $\mathbf{A}^T$ *называется транспонированием матрицы* $\mathbf{A}$.

Например, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, то $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$;
2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
3) $(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$;
4) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

§2. Определители

1. Вспомогательные определения

Дадим два определения, без которых мы не сможем ввести понятие определителя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* n *– натуральное число. Факториалом числа* n *(обозначают:* $n!$[1]*) называют произведение натуральных чисел от* 1 *до* n *включительно, т.е.*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Факториал числа 0 *полагают равным* 1.

---

[1] Читают: «эн факториал».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расположение n чисел $1,2,3,\ldots,n$ в любом порядке называется перестановкой этих чисел.*

Пусть дана некоторая перестановка чисел $1,2,3,\ldots,n$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n.$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют *инверсию* в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, т.е. если $\alpha_i > \alpha_k$. Количество пар, образующих инверсию в перестановке, называется *числом инверсий в перестановке*.

Например, в перестановке $1, 4, 5, 3, 2$ инверсию образуют следующие пары чисел: 4 и 3, 4 и 2, 5 и 3, 5 и 2, 3 и 2. Следовательно, в этой перестановке 5 инверсий.

Замечание. Легко заметить, что число инверсий в перестановке n чисел равно $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, где k_i – количество чисел меньших i и расположенных в перестановке правее i.

2. Определение определителя

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Определителем матрицы* $\mathbf{A}$ *(определителем порядка n) называется число, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *каждое слагаемое есть произведение n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца;*
2) *слагаемое берется со знаком «плюс», если число инверсий в перестановке первых индексов сомножителей и число инверсий в перестановке вторых индексов сомножителей в сумме дают четное число. В противном случае слагаемое берется со знаком «минус».*

Определитель матрицы $\mathbf{A}$ обозначают:

$$|\mathbf{A}|, \quad \det \mathbf{A}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы, строки, столбцы матрицы называются соответственно *элементами, строками, столбцами определителя* матрицы.

Итак, согласно определению получаем, например, что

1) *определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \qquad (1)$$

2) определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (2)$$

Для запоминания формулы (2) можно использовать следующее правило, которое называют *правило треугольников.*

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести произведений. Со знаком «плюс» берутся произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком «минус» берутся произведение элементов побочной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали. Т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

ПРИМЕРЫ:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11;$

2) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \cdot 1 -$

$$- 5 \cdot (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot (-3) =$$

$$= -6 + 36 + 5 - (-20) - (-6) - (-9) = 70.$$

Определители порядка $n = 4, 5, \ldots$ записать по определению затруднительно, так как они будут являться суммами достаточно большого числа слагаемых ($4! = 24$, $5! = 120$ и т.д.). Такие определители находят, выражая их через определители более низких порядков (см. далее теорему Лапласа и ее следствие).

3. Свойства определителей

Определитель матрицы обладает следующими свойствами.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Это означает, что строки и столбцы в определителе равноправны. Следовательно, любое утверждение, верное для строк определителя, будет верно и для его столбцов.

2. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

3. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

4. Если все элементы k-й строки определителя $|\mathbf{A}|$ являются суммами двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей $|\mathbf{A}_1|$ и $|\mathbf{A}_2|$, у которых все строки кроме k-й совпадают со строками определителя $|\mathbf{A}|$, а k-я строка в определителе $|\mathbf{A}_1|$ состоит из первых слагаемых, а в определителе $|\mathbf{A}_2|$ – из вторых слагаемых.

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1 & 2-3 & 1+4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

5. Определитель не изменится, если к каждому элементу i-й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k-й строки (столбца), умноженный на число $\alpha \neq 0$.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times(-2) \\ + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1\cdot(-2) & 3+2\cdot(-2) & 4+3\cdot(-2) \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

6. Определитель равен нулю если:

а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;

б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (столбца);

в) он имеет хотя бы две пропорциональные (т.е. отличающиеся множителем) строки (столбца);

г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, так как третий столбец определителя является линейной комбинацией второго и первого с коэффициентами 2 и -1. Действительно,

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 10-4 \\ 16-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

7. *Если* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *– квадратные матрицы порядка* n*, то существуют* $\mathbf{AB}$ *и* $\mathbf{BA}$*, причем* $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

4. Теорема Лапласа и ее следствие

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$. Выберем в ней произвольно k строк и k столбцов (где $1 \le k \le \min\{m, n\}$). Пусть, например, это будут строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, составим определитель M_k:

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называют *минором* k *-го порядка матрицы* $\mathbf{A}$.

В частности, любой элемент матрицы – минор первого порядка, определитель $|\mathbf{A}|$ квадратной матрицы $\mathbf{A}$ порядка n – ее минор порядка n.

Замечание. Миноры квадратной матрицы называются также минорами ее определителя.

Для квадратной матрицы, кроме понятия минора, вводится понятие дополнительного минора и алгебраического дополнения.

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n. Выберем в $\mathbf{A}$ минор k -го порядка M_k (выберем строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$). Вычеркнем из матрицы $\mathbf{A}$ строки и столбцы, из элементов которых состоит минор M_k. Определитель M_k^*, составленный из оставшихся элементов, называется *дополнительным минором к минору* M_k. Число $A_k = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k} \cdot M_k^*$ называется *алгебраическим дополнением минора* M_k.

В частности, дополнительный минор элемента a_{ij} (будем в дальнейшем обозначать его M_{ij}) – это определитель порядка $n-1$, полученный из определителя $|\mathbf{A}|$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (будем в дальнейшем обозначать его A_{ij}) – это произведение $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Для определителей справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. (Лапласа). *Пусть в определителе порядка n выбрано k строк (столбцов) (где $1 \le k \le n-1$). Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.*

ПРИМЕР. Вычислить с помощью теоремы Лапласа определитель

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}.$$

Выберем, например, первую и вторую строки. В них располагается шесть миноров второго порядка:

$$M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix},\ M_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix},\ M_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix},$$

$$M_2^{(4)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix},\ M_2^{(5)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix},\ M_2^{(6)} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Их алгебраическими дополнениями будут соответственно

$$A_2^{(1)} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix}, \qquad A_2^{(2)} = (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{vmatrix},$$

$$A_2^{(3)} = (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{vmatrix}, \qquad A_2^{(4)} = (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{vmatrix},$$

$$A_2^{(5)} = (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix}, \quad A_2^{(6)} = (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \cdot \left(-\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix}2&3\\6&7\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}9&12\\13&16\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&4\\6&8\end{vmatrix}\cdot\left(-\begin{vmatrix}9&11\\13&15\end{vmatrix}\right)+\begin{vmatrix}3&4\\7&8\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}9&10\\13&14\end{vmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2 (теоремы Лапласа). *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in}, \tag{3}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj}\cdot A_{nj}. \tag{4}$$

Выражения (3) и (4) называются *разложением определителя по i-й строке и j-му столбцу* соответственно. Они позволяют свести вычисление определителя порядка n к вычислению n определителей порядка $n-1$.

ПРИМЕР. Разложив по первому столбцу, вычислить определитель

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix}1&2&3&4\\-1&2&1&-2\\-1&1&3&-4\\2&3&1&1\end{vmatrix}.$$

По формуле (4) получаем:

$$|\mathbf{A}| = 1\cdot A_{11} + (-1)\cdot A_{21} + (-1)\cdot A_{31} + 2\cdot A_{41} =$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&1&-2\\1&3&-4\\3&1&1\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2&3&4\\1&3&-4\\3&1&1\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2&3&4\\2&1&-2\\3&1&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}2&3&4\\2&1&-2\\1&3&-4\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot1\cdot17+(-1)\cdot(-1)\cdot(-57)+(-1)\cdot1\cdot(-22)+2\cdot1\cdot(-42)=-102$$

Замечание. На практике, прежде чем разлагать определитель по строке (столбцу), его преобразуют так, чтобы появилась строка (столбец), содержащая $n-1$ ноль. Разложив определитель по этой строке (столбцу), мы значительно уменьшим количество вычислений.

СЛЕДСТВИЕ 2.3 (теоремы Лапласа). *Сумма произведений элементов i-й строки (столбца) определителя на алгебраический дополнения соответствующих элементов k-й строки (столбца) этого определителя равна нулю*, т.е.

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \ldots + a_{ni}A_{nk} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим выражение

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}.$$

Это можно рассматривать как разложение определителя по элементам k-й строки, состоящей из элементов $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Но так как те же элементы стоят и в i-й строке определителя, то он равен нулю. Следовательно, $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0$.

Аналогично доказывается второе равенство следствия 2.3. ■

§3. Ранг матрицы

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$. Выпишем все миноры этой матрицы порядка $1,2,3,\ldots,t$ (где $t = \min\{m,n\}$):

$$M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, M_1^{(3)}, \ldots$$
$$M_2^{(1)}, M_2^{(2)}, M_2^{(3)}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M_t^{(1)}, M_t^{(2)}, M_t^{(3)}, \ldots$$

Среди этих миноров всегда найдется такой минор $M_k^{(i)}$, что $M_k^{(i)} \neq 0$, а все миноры порядка $k+1$, $k+2$, $\ldots$, t равны нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Минор $M_k^{(i)}$ матрицы $\mathbf{A}$ *называется ее базисным минором, если он отличен от нуля, а все миноры матрицы* $\mathbf{A}$ *более высокого порядка равны нулю.*

Замечание. Очевидно, что матрица $\mathbf{A}$ может иметь несколько базисных миноров, но все они имеют один порядок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рангом матрицы $\mathbf{A}$ *называется порядок ее базисного минора.*

Иначе говоря, ранг матрицы – это максимальный порядок ее миноров, отличных от нуля; базисный минор – это минор, отличный от нуля максимального порядка.

Ранг матрицы $\mathbf{A}$ обозначают обычно $r(\mathbf{A})$ или $rang(\mathbf{A})$.

Приведем два метода нахождения ранга матрицы.

1. Метод окаймляющих миноров

Если M_s – минор порядка s, то его *окаймляющим минором* называется любой минор порядка $s+1$, содержащий минор M_s.

Например, в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$ окаймляющими для минора $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ будут миноры

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \\ 11 & 12 & 14 \end{vmatrix}, \quad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \\ 12 & 13 & 14 \end{vmatrix}, \quad M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 10 \\ 12 & 14 & 15 \end{vmatrix}.$$

А миноры третьего порядка $M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 10 \\ 12 & 13 & 15 \end{vmatrix}$, $M_3^{(5)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{vmatrix}$ для минора M_2 окаймляющими не будут.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если в матрице* $\mathbf{A}$ *есть минор* k*-го порядка отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *равен* k.

Эта теорема является основанием для применения при нахождении ранга матрицы следующей схемы. Находим в матрице минор M_k порядка k, отличный от нуля (где $k \geq 1$). Если все его окаймляющие миноры равны нулю, то ранг матрицы равен k. Если найдется окаймляющий минор $M_{k+1} \neq 0$, то рассматриваем окаймляющие миноры для M_{k+1}. Если среди них нет ненулевых, то ранг матрицы равен $k+1$. Если найдется окаймляющий минор $M_{k+2} \neq 0$, то рассматриваем окаймляющие миноры для M_{k+2} и т.д. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не будет найден ранг матрицы, или не дойдем до окаймляющего минора $M_t \neq 0$, где t – максимальный порядок миноров в матрице. Последнее будет означать, что ранг матрицы равен t. Такая схема нахождения ранга матрицы получила название ***метода окаймляющих миноров***.

ПРИМЕР. Методом окаймляющих миноров найдем ранги матриц

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Заметим, что матрица $\mathbf{A}$ имеет миноры не выше третьего порядка. Следовательно, ее ранг $r(\mathbf{A}) \leq 3$.

Среди миноров второго порядка легко находим отличный от нуля. Например, $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Вычислим его окаймляющие миноры:

$$M_3^{(1)}=\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&-2&5\\2&-1&1\end{vmatrix}=0,\ M_3^{(2)}=\begin{vmatrix}-1&3&-2\\2&5&1\\-1&1&8\end{vmatrix}=0,\ M_3^{(3)}=\begin{vmatrix}-1&3&4\\-2&5&7\\-1&1&2\end{vmatrix}=0.$$

Так как все окаймляющие миноры для M_2 равны нулю, то $r(\mathbf{A})=2$, а M_2 – базисный минор матрицы $\mathbf{A}$.

2) Заметим, что матрица $\mathbf{B}$ имеет миноры не выше третьего порядка. Следовательно, ее ранг $r(\mathbf{B})\le 3$.

Среди миноров второго порядка имеется отличный от нуля. Например, $M_2=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Вычислим его окаймляющие миноры:

$$M_3^{(1)}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&1\\2&-2&0\end{vmatrix}=0,\ M_3^{(2)}=\begin{vmatrix}1&2&-6\\0&1&-3\\2&-2&6\end{vmatrix}=0,\ M_3^{(3)}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&-2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Так как среди окаймляющих миноров нашелся минор отличный от нуля, и это минор максимально возможного порядка, то $r(\mathbf{B})=3$ и $M_3^{(3)}$ – базисный минор.

2. Метод элементарных преобразований

Элементарными преобразованиями матрицы называются преобразования следующего вида:

1) умножение строки (столбца) на число $\alpha\neq 0$;
2) прибавление к i-й строке (столбцу) j-й строки (столбца), умноженной на число $\alpha\neq 0$;
3) перестановка i-й и j-й строки (столбца);
4) вычеркивание одной из двух пропорциональных или равных строк (столбцов);
5) вычеркивание нулевых строк (столбцов).

Матрица $\mathbf{B}$ называется *эквивалентной* матрице $\mathbf{A}$, если она может быть получена из $\mathbf{A}$ элементарными преобразованиями.

Если матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ эквивалентны, то пишут: $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$.

Справедливы следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 3.2. *Эквивалентные матрицы имеют равные ранги.*

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что элементарные преобразования матрицы сохраняют ее ненулевые миноры (они могут лишь изменить их знаки).

ТЕОРЕМА 3.3. *Любая матрица* $\mathbf{A}$ *эквивалентна некоторой треугольной или трапециевидной матрице, которая может быть получена из* $\mathbf{A}$ *элементарными преобразованиями только строк.*

Так как ранг треугольной и трапециевидной матрицы легко найти (в них легко находятся базисные миноры), то приходим к следующей схеме нахождения ранга матрицы:

1) с помощью элементарных преобразований строк получаем для матрицы $\mathbf{A}$ эквивалентную треугольную или трапециевидную матрицу $\mathbf{B}$;
2) находим в матрице $\mathbf{B}$ базисный минор и определяем ранг матрицы $\mathbf{B}$ и матрицы $\mathbf{A}$.

Такая схема нахождения ранга матрицы получила название ***метода элементарных преобразований***.

ПРИМЕР. Методом элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку матрицы на $\alpha = -3$ и прибавим ко второй; затем умножим первую строку на $\beta = -1$ и прибавим к третьей. Получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Матрица $\mathbf{B}$ – трапециевидная, $r(\mathbf{B}) = 2$ (базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$).

Следовательно, ранг матрицы $\mathbf{A}$ тоже равен двум.

§4. Системы линейных уравнений

1. Основные понятия

Уравнение называется *линейным*, если оно содержит неизвестные только в первой степени и не содержит произведений неизвестных, т.е. если оно имеет вид

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

где a_i $(i = 1,2,\ldots n)$, b – числа. Числа a_i называются *коэффициентами уравнения*, b называется *свободным членом*. Если $b = 0$, то уравнение называется *однородным*. В противном случае уравнение называется *неоднородным*.

В этом параграфе мы будем рассматривать систему m линейных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матрицу $\mathbf{A}$ называют *основной матрицей* системы (5), а матрицу $\mathbf{A}^*$ – *расширенной матрицей* системы (5).

Пусть $\mathbf{X}$ – матрица-столбец неизвестных, $\mathbf{B}$ – матрица-столбец свободных членов, т.е.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (5) можно записать в виде матричного уравнения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Его называют *матричной формой* системы (5).

Упорядоченный набор чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ называется *решением системы* (5), если он обращает в верное равенство каждое уравнение системы. Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют *совместной*. Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Если система совместна, то она имеет либо одно решение, либо множество решений. Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*. Система, имеющая множество решений, называется *неопределенной*.

Критерии совместности и определенности системы дают следующие две теоремы

ТЕОРЕМА 4.1 (Кронекера – Капелли). *Система линейных уравнений* (5) *совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, т.е.*

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*).$$

ТЕОРЕМА 4.2 (критерий единственности решения). *Система линейных уравнений* (5) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы и равен числу переменных, т.е.*

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n.$$

2. Методы решения систем линейных уравнений

Матричный метод

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обратной к матрице* $\mathbf{A}$ *называется матрица, обозначаемая* $\mathbf{A}^{-1}$, *такая, что* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

Из определения получаем, что если матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную, то справедливы следующие утверждения.

1. $\mathbf{A}$ – *квадратная*.

   Действительно, чтобы существовали произведения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ необходимо, чтобы матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ имели соответственно размеры $n\times m$ и $m\times n$. Тогда матрица $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ будет иметь размер $n\times n$, а матрица $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ – размер $m\times m$. Но для равенства $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ необходимо, чтобы размеры матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ совпадали, т.е. $n=m$.

2. *Если обратная матрица существует, то она единственная*.

   Действительно, если предположить, что существует две матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ обладающие свойством
   $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E},$$
   то будет существовать и произведение $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, причем
   $$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{C}$$
   и
   $$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{B}.$$
   Следовательно,
   $$\mathbf{B}=\mathbf{C}.$$

3. *Определитель матрицы* $\mathbf{A}$ *должен быть отличен от нуля*.

   Действительно, так как $|\mathbf{E}|=1$ и для любых квадратных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$
   $$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|,$$
   то
   $$\left|\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\right|=|\mathbf{A}|\cdot\left|\mathbf{A}^{-1}\right|=1$$
   и, следовательно,
   $$|\mathbf{A}|\neq 0 \text{ и } \left|\mathbf{A}^{-1}\right|\neq 0.$$

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной*.

Условие невырожденности матрицы оказалось не только необходимым для существования ее обратной матрицы, но и достаточным. Т.е. справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– квадратная матрица порядка* n. *Матрица* $\mathbf{A}$ *имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель* $|\mathbf{A}|$ *отличен от нуля. Причем обратная матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *может быть найдена по формуле:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T,$$

где $\mathbf{S}$ *– матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы* $\mathbf{A}$, *т.е.*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{S}^T$ называется *союзной* для матрицы $\mathbf{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Необходимость утверждения доказана ранее (см. свойство 3 матриц, имеющих обратную). Требуется доказать только достаточность.

Пусть матрица $\mathbf{A}$ – невырожденная. Тогда существует матрица $\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$. Докажем, что она является обратной к $\mathbf{A}$. Имеем:

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T \right) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T \right) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot A_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Здесь использовали, что $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = |\mathbf{A}|$ (следствие 2.2 теоремы Лапласа), $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{mj} = 0$ (следствие 2.3 теоремы Лапласа).

Аналогично доказывается, что

$$\left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T\right) \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \left(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{A}\right) = \mathbf{E}.$$

Следовательно, $\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{A}^{-1}$. ■

ПРИМЕР. Найти матрицу, обратную к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель матрицы $|\mathbf{A}| = 10 \neq 0$, то матрица имеет обратную. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы $\mathbf{A}$. Получим:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 15,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 25, \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14.$$

Следовательно, $$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -5 & 15 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & -8 & -14 \end{pmatrix}$$

и $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 15 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & -8 & -14 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 1{,}5 & 0{,}3 & -0{,}8 \\ 2{,}5 & 0{,}9 & -1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь систему линейных уравнений, в которой число уравнений m и число неизвестных n совпадает и $|\mathbf{A}| \neq 0$. Тогда:

1) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n$ и, следовательно, такая система имеет единственное решение;

2) матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

Покажем, как можно найти решение этой системы с помощью обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. Запишем систему в матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}. \tag{6}$$

Умножим обе части равенства (6) на $\mathbf{A}^{-1}$ слева. Получим:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \tag{7}$$

Таким образом, если в системе линейных уравнений $m = n$ и $|\mathbf{A}| \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формуле (7). Нахождение решения по формуле (7) называют ***матричным методом решения*** системы.

ПРИМЕР. Решить матричным методом систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Основная матрица системы имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица невырожденная ($|\mathbf{A}| = 10 \neq 0$), и, следовательно, решение может быть найдено матричным методом. Имеем:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 15 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & -8 & -14 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 1{,}5 & 0{,}3 & -0{,}8 \\ 2{,}5 & 0{,}9 & -1{,}4 \end{pmatrix}$$

(см. предыдущий пример) и

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 1{,}5 & 0{,}3 & -0{,}8 \\ 2{,}5 & 0{,}9 & -1{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $x_3 = -7$.

Метод Крамера

Также как и матричный метод, этот метод применятся для решения систем линейных уравнений, в которых число уравнений m и число неизвестных n совпадают и матрица $\mathbf{A}$ системы – невырожденная. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.4 (Крамера). *Если в системе линейных уравнений число уравнений m и число неизвестных n совпадает и $|\mathbf{A}|\neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам*

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{8}$$

где $D = |\mathbf{A}|$, а D_i – определитель, получаемый из определителя D заменой его i-го столбца на столбец свободных членов.

Формулы (8) называются *формулами Крамера*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как $|\mathbf{A}|\neq 0$, то матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную и систему можно решить матричным методом, т.е.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot(A_{1i}\cdot b_1 + A_{2i}\cdot b_2 + \ldots + A_{ni}\cdot b_n).$$

Но выражение $A_{1i}\cdot b_1 + A_{2i}\cdot b_2 + \ldots + A_{ni}\cdot b_n$ представляет собой разложение по i-му столбцу определителя D_i. Следовательно,

$$x_i = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot D_i = \frac{D_i}{D}. \qquad \blacksquare$$

ПРИМЕР. Решить методом Крамера систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

Так как число уравнений и число неизвестных в системе совпадают, и определитель основной матрицы системы

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0,$$

то решение может быть найдено по формулам Крамера. Имеем:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-1}{-1} = 1$, $x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

В отличие от двух предыдущих методов, метод Гаусса является универсальным, т.е. он позволяет найти решение любой совместной системы.

Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются преобразования следующего вида:

1) умножение обеих частей уравнения на число $\alpha \neq 0$;
2) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число $\alpha \neq 0$;
3) перестановка двух уравнений;
4) вычеркивание одного из двух пропорциональных или одинаковых уравнений.

Две системы называются *эквивалентными* (*равносильными*) если их решения совпадают. Очевидно, что элементарные преобразования системы приводят к эквивалентной системе.

Метод Гаусса – метод решения системы с помощью элементарных преобразований, которые осуществляются по следующей схеме: из всех уравнений системы кроме первого исключается неизвестное x_1; из всех уравнений системы кроме первого и второго исключается неизвестное x_2; из всех уравнений системы кроме первого, второго и третьего исключается неизвестное x_3 и т.д. В результате система будет приведена к одному из следующих двух видов:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad\quad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n-1}x_{n-1} + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n-1,n}x_n = \beta_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{nn}x_n = \beta_n, \end{cases} \tag{9}$$

или

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}x_r + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad\quad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}x_r + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{rr}x_r + \ldots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r. \end{cases} \tag{10}$$

В первом случае имеем:

$$r(\widetilde{\mathbf{A}})=r(\widetilde{\mathbf{A}}^*)=n,$$

где $\widetilde{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ – основная и расширенная матрицы системы (9). Следовательно, система (9) (а значит и исходная система) совместна и имеет единственное решение. Причем, это решение теперь легко найти. Действительно, из последнего уравнения системы (9) находим:

$$x_n=\frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}.$$

Подставляем найденное значение x_n в предпоследнее уравнение системы (9) и получаем:

$$x_{n-1}=\frac{1}{\alpha_{n-1,n-1}}\left(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1,n}x_n\right)=\frac{1}{\alpha_{n-1,n-1}}\left(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1,n}\frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}\right).$$

Продолжим этот процесс и получим последовательно $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$.

Во втором случае имеем:

$$r(\widetilde{\mathbf{A}})=r(\widetilde{\mathbf{A}}^*)=r<n.$$

где $\widetilde{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ – основная и расширенная матрицы системы (10). Следовательно, система (10) (а значит и исходная система) совместна и имеет множество решений. Чтобы найти их, поступим следующим образом. Выберем в матрице $\widetilde{\mathbf{A}}$ базисный минор. Переменные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, назовем *зависимыми*. Остальные переменные назовем *независимыми* (или *свободными*). Пусть, например, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – зависимые, $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – свободные. Перепишем систему (10) в следующем виде:

$$\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1r}x_r=\beta_1-\alpha_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-\alpha_{1n}x_n,\\ \qquad\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2r}x_r=\beta_2-\alpha_{2,r+1}x_{r+1}-\ldots-\alpha_{2n}x_n,\\ \qquad\qquad\ldots\ldots\quad\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\quad\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\quad\ldots\\ \qquad\qquad\qquad\alpha_{rr}x_r=\beta_r-\alpha_{r,r+1}x_{r+1}-\ldots-\alpha_{rn}x_n.\end{cases}\tag{11}$$

Если придать свободным переменным конкретные значения, то система (11) будет иметь единственное решение. Следовательно, зависимые переменные единственным образом выражаются через свободные:

$$\begin{cases}x_1=f_1(x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_r=f_r(x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n).\end{cases}\tag{12}$$

Система (12), в которой зависимые переменные выражены через свободные, называется *общим решением системы* (10) (а значит и исходной системы). Записав общее решение системы, мы можем найти бесконечно много ее решений. Для этого нужно будет только придавать свободным переменным конкретные значения.

Замечание. Элементарные преобразования системы линейных уравнений в точности соответствуют элементарным преобразованиям строк матрицы. А получающаяся в результате преобразований система имеет треугольную или трапециевидную матрицу, т.е. такую, которую требуется получить при нахождении ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Поэтому, при решении системы методом Гаусса имеет смысл вместо преобразований системы производить соответствующие преобразования над строками расширенной матрицы системы. Так мы будем одновременно исследовать совместность системы и преобразовывать систему в соответствии с методом Гаусса.

ПРИМЕР. Доказать, что система совместна и найти ее общее решение:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Найдем ранг основной и расширенной матрицы с помощью элементарных преобразований строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \times(-1) \times(-3) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \times 3 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = 2.$$

Следовательно, система совместна и имеет множество решений.

Теперь найдем общее решение системы. Элементарными преобразованиями мы привели систему к виду

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ \quad\quad + 11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10. \end{cases}$$

Выберем в матрице этой системы базисный минор. Пусть, например, это будет минор $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Следовательно, переменные x_1 и x_4 будут зависимыми, а x_2 и x_3 – свободными. Выразим зависимые переменные через свободные. Имеем:

$$\begin{cases} -x_1 - x_4 = 2 - 2x_2 - x_3, \\ \quad\quad - x_4 = 10 - 11x_2 - 5x_3. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3$$

и $\quad x_1 = -2 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 + 2x_2 + x_3 + 10 - 11x_2 - 5x_3,$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3, \\ x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{cases} \text{ – общее решение.}$$

§5. Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Заметим, что эта система всегда совместна, так как

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

всегда является ее решением. Это решение называют *нулевым* или *тривиальным*. Но при некоторых условиях система (13) может иметь и другие решения (*нетривиальные*). Так будет, например, если $m = n$ и $|\mathbf{A}| = 0$ или если $m < n$ (в обоих случаях $r(\mathbf{A}) < n$ и, следовательно, система имеет множество решений). Отметим важное свойство, которым обладают нетривиальные решения системы линейных однородных уравнения.

Пусть $\qquad c_1, c_2, \ldots, c_n$ и $d_1, d_2, \ldots, d_n$ –

два решения системы линейных уравнений, α, β – числа. *Линейной комбинацией* этих решений с коэффициентами α и β будем называть упорядоченную последовательность n чисел вида

$$\alpha c_1 + \beta d_1,\ \alpha c_2 + \beta d_2,\ \ldots,\ \alpha c_n + \beta d_n.$$

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 5.1. *Линейная комбинация конечного числа решений системы линейных однородных уравнений тоже является решением этой системы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Запишем систему (13) в матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

По условию $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – решения системы. Следовательно, матрицы-столбцы

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

являются решениями матричного уравнения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$, т.е.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{O} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{O}.$$

Рассмотрим линейную комбинацию матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ с коэффициентами α и β. Так как

$$\mathbf{A}\cdot(\alpha\cdot\mathbf{C}+\beta\cdot\mathbf{D})=\alpha\cdot\mathbf{AC}+\beta\cdot\mathbf{AD}=\alpha\cdot\mathbf{O}+\beta\cdot\mathbf{O}=\mathbf{O},$$

то матрица $\alpha\cdot\mathbf{C}+\beta\cdot\mathbf{D}$ тоже является решением матричного уравнения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Значит, элементы матрицы $\alpha\cdot\mathbf{C}+\beta\cdot\mathbf{D}$ будут решением системы уравнений (13). Но эти элементы и есть линейная комбинация решений $c_1, c_2, \dots, c_n$ и $d_1, d_2, \dots, d_n$.

Итак, мы показали, что линейная комбинация двух решений системы линейных однородных уравнений снова является ее решением. Очевидно, что приведенные рассуждения останутся верными и для линейной комбинации любого конечного числа решений такой системы. ■

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть r – ранг матрицы системы (13). Если система имеет нетривиальные решения, то найдутся $n-r$ решений таких, что любое другое ее решение будет их линейной комбинацией.*

Решения, о которых идет речь в теореме 5.2, называются *фундаментальной системой решений*. Ее можно найти с помощью следующего алгоритма:

1) находим общее решение системы;
2) записываем любой отличный от нуля определитель Δ, порядка $n-r$;
3) записываем $n-r$ решений системы, беря в качестве значений для свободных неизвестных элементы строк определителя Δ (т.е. записывая первое решение используем первую строку определителя, записывая второе решение – используем вторую строку определителя и т.д.). Полученные таким образом $n-r$ решений будут являться фундаментальной системой решений системы.

ПРИМЕР. Найти фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 \phantom{{}- 5x_4} - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \; \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r(\mathbf{A}) = 2$ и система приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ \qquad x_2 \qquad - \quad x_4 \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Выберем базисный минор. Пусть, например, это будет минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. В силу такого выбора базисного минора, переменные x_1 и x_2 будут зависимыми, а x_3, x_4, x_5 – свободными. Выразим зависимые переменные через свободные. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4 + 2x_5, \\ \qquad x_2 = \qquad x_4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_2 = x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_4,$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = \qquad x_4 \end{cases} \quad \text{– общее решение.}$$

Теперь возьмем любой отличный от нуля определитель Δ порядка $n - r = 5 - 2 = 3$. Пусть, например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Записываем решения системы, для которых в качестве значений свободных переменных выступают элементы строк определителя Δ:

1) $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $x_1 = 1$, $\quad x_2 = 0$;

2) $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $x_1 = -1$, $\quad x_2 = 1$;

3) $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $x_1 = 2$, $\quad x_2 = 0$;

Полученные таким образом три решения $(1, 0, 1, 0, 0)$, $(-1, 1, 0, 1, 0)$, $(2, 0, 0, 0, 1)$ и будут являться фундаментальной системой решений.

В заключение этого параграфа сформулируем еще одну теорему, которая связывает решения неоднородной и однородной систем линейных уравнений.

Пусть дана некоторая система линейных неоднородных уравнений, имеющая множество решений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots\ldots\ldots & & \ldots & & \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{14}$$

Систему линейных однородных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots\ldots\ldots & & \ldots & & \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{cases} \tag{15}$$

называют *соответствующей* системе (14).

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– какое-нибудь решение системы* (14). *Любое другое решение системы* (14) *может быть записано как сумма решения* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *и некоторого решения системы* (15). *Иначе говоря, справедливо равенство*:

$$\mathbf{X} = \alpha_1\mathbf{C_1} + \alpha_2\mathbf{C_2} + \ldots + \alpha_{n-r}\mathbf{C_{n-r}} + \mathbf{C}, \tag{16}$$

где $\mathbf{X}$ *– матрица-столбец неизвестных,* $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, ..., \mathbf{C_{n-r}}$ *– матрицы-столбцы, элементами которых служат решения из фундаментальной системы,* $\mathbf{C}$ *– матрица-столбец, элементами которой является решение* $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Запишем системы (14) и (15) в матричном виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \text{ и } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

Так как

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha_1\mathbf{C_1} + \alpha_2\mathbf{C_2} + \ldots + \alpha_{n-r}\mathbf{C_{n-r}} + \mathbf{C}) =$$
$$= \alpha_1\mathbf{A} \cdot \mathbf{C_1} + \alpha_2\mathbf{A} \cdot \mathbf{C_2} + \ldots + \alpha_{n-r}\mathbf{A} \cdot \mathbf{C_{n-r}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} =$$
$$= \mathbf{O} + \mathbf{O} + \ldots + \mathbf{O} + \mathbf{B} = \mathbf{B},$$

то любая последовательность чисел, полученная по формуле (16) будет являться решением системы (14).

Теперь покажем, что любое решение $d_1, d_2, \ldots, d_n$ системы (14) можно получить по формуле (16). Пусть $\mathbf{D}$ – матрица столбец, элементами которой является решение $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Рассмотрим матрицу-столбец $\mathbf{D} - \mathbf{C}$. Имеем

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{O}.$$

Получили, что разность двух решений системы (14) будет являться решением системы (15). Следовательно, существуют такие числа $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_{n-r}$, что

$$\mathbf{D} - \mathbf{C} = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{C_1} + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{C_2} + \ldots + \tilde{\alpha}_{n-r} \mathbf{C_{n-r}},$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{D} = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{C_1} + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{C_2} + \ldots + \tilde{\alpha}_{n-r} \mathbf{C_{n-r}} + \mathbf{C}. \quad \blacksquare$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Как изменится произведение AB матриц A и B, если:
   а) переставить i-ю и j-ю строки матрицы A;
   б) переставить i-й и j-й столбцы матрицы B;
   в) к i-й строке матрицы A прибавить ее j-ю строку, умноженную на число c;
   г) к i-му столбцу матрицы B прибавить ее j-й столбец, умноженный на число c?
2. Доказать, что если матрица B перестановочна с матрицей A, то она перестановочна и с матрицей $A - \lambda E$ (где λ – любое отличное от нуля число).
3. Найти все матрицы второго порядка, квадрат которых равен нулевой матрице.
4. Найти все матрицы второго порядка, квадрат которых равен единичной матрице.
5. Следом квадратной матрицы A (обозначают trA) называют сумму ее элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.
   $$trA = a_{11} + a_{22} \ldots + a_{nn}.$$
   Доказать, что $trAB = trBA$.
6. Определить число инверсий в перестановках:
   а) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n$;
   б) $3, 6, 9, \ldots, 3n, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2$;
   в) $2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2$;
   г) $1, 5, \ldots, 4n-3, 2, 6, \ldots, 4n-2, 3, 7, \ldots, 4n-1, 4, 8, \ldots, 4n$.
7. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k-м месте перестановки?
8. В какой перестановке чисел $1, 2, \ldots, n$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?
9. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

10. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.
11. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов главной диагонали?
12. Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

13. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов побочной диагонали?
14. Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{2,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

15. Доказать, что для равенства нулю определителя второго порядка необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были пропорциональны (если некоторые элементы определителя равны нулю, то пропорциональность можно понимать в том смысле, что элементы одной строки получаются из соответствующих элементов другой строки умножением на одно и то же число, быть может, равное нулю).
16. При каком условии справедливо равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

17. Элементы матрицы равны ± 1. Доказать, что ее определитель – число четное.
18. Элементы матрицы третьего порядка равны ± 1. Может ли ее определитель быть равен 6?
19. Элементы матрицы третьего порядка равны 1, -1, и 0. Может ли ее определитель быть равен 5?
20. Элементы матрицы 4-го порядка равны 1, -1, и 0. Может ли ее определитель быть равен 24?
21. Элементы матрицы третьего порядка равны ± 1. Найти наибольшее значение, которое может принимать ее определитель.

22. Элементы матрицы третьего порядка равны 1 или 0. Найти наибольшее значение, которое может принимать ее определитель.
23. Как изменится определитель третьего порядка, если у всех его элементов изменить знак? Как изменится определитель порядка n, если у всех его элементов изменить знак?
24. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент умножить на число α?
25. Как изменится определитель, если каждый его элемент a_{ij} умножить на λ^{i-j}, где $\lambda \neq 0$.
26. Как изменится определитель четвертого порядка, если у элементов 1-го и 2-го столбца изменить знак на противоположный, а элементы 3-й и 4-й строки умножить на 2.
27. Числа 3587, 5117, 7293, 9027 делятся на 17. Не вычисляя определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 7 \\ 7 & 2 & 9 & 3 \\ 9 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

доказать, что он тоже делится на 17.
28. Квадратная матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется *кососимметрической*, если ее элементы удовлетворяют условию $a_{ij} = -a_{ji}$. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.
29. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ равен D. Чему равен определитель $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$?
30. Как изменится определитель порядка n если его строки переписать в обратном порядке?
31. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

32. Как изменятся дополнительные миноры элементов матрицы третьего порядка, если у всех элементов матрицы изменить знак.
33. Как изменятся дополнительные миноры элементов матрицы четвертого порядка, если у всех элементов матрицы изменить знак.
34. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители, предварительно преобразовав их:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

35. Известно, что $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A$, $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = B$. Найти

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

36. Найти связь между определителем матрицы A порядка n и определителем матрицы порядка $2n$, составленной следующим образом:

а) $\begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & 5A \end{pmatrix}$.

37. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$;   е) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

38. Доказать, что если в определителе порядка n все миноры порядка k $(k < n)$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка выше k.

39. Найти определитель порядка n, элементы которого заданы условиями:
а) $a_{ij} = \min(i, j)$;   б) $a_{ij} = \max(i, j)$;   в) $a_{ij} = |i - j|$.

40. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$;   б) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$.

41. Найти значения λ, при которых матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при этих значениях λ и чему он равен при других значениях λ?

42. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при различных значениях λ?

43. Что можно сказать о матрице размера $m \times n$ $(m < n)$ и ранга m, если в ней имеется лишь один базисный минор?

44. Доказать, что приписывание к матрице одной строки (или одного столбца) либо не изменяет ее ранга, либо увеличивает его на единицу.

45. Как может изменится ранг матрицы, если изменить значение одного ее элемента?

46. Указать возможные значения ранга матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

47. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A переставить i-ю и j-ю строки?

48. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A i-ю строку умножить на число $\lambda \neq 0$?
49. Выразите через определитель матрицы A определитель ее союзной матрицы.
50. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

51. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и два решения этой системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Найти систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при неизвестных, как в данной системе и имеющую решением

а) сумму решений: $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n$;

б) произведение первого из данных решений на число λ:

$$\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n.$$

52. При каком условии линейная комбинация решений системы линейных неоднородных уравнений снова будет решением этой системы?
53. Исследовать систему и найти решение в зависимости от значения параметра λ:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$

54. Что можно сказать о системе m линейных неоднородных уравнений с n неизвестными, если все столбцы ее расширенной матрицы кроме первого пропорциональны? (Совместна или нет? Если совместна, то определена или неопределенна? Можно ли указать значение каких-либо неизвестных?)
55. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы либо сумма двух решений, либо произведение одного решения на число $\lambda \neq 1$ было снова решением той же системы линейных уравнений.
56. Доказать, что если ранг системы линейных однородных уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения этой системы пропорциональны, т.е. отличаются лишь числовым множителем.
57. Исследовать уравнение $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$, где $\mathbf{A}$ – данная, $\mathbf{X}$ – искомая матрицы второго порядка.
58. Составить однородное уравнение с тремя неизвестными, решениями которого являются линейные комбинации решений $(1;1;2)$ и $(1;2;3)$.
59. Найти систему линейных однородных уравнений, состоящую из а) двух уравнений, б) из трех уравнений, для которой решения $(1;4;-2;2;-1)$, $(3;13;-1;2;1)$, $(2;7;-8;4;-5)$ являются фундаментальной системой решений.
60. Указать все значения параметра λ, при которых система уравнений не определена:

а) $\begin{cases} (8-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + (9-\lambda)x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + (10-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 = 0, \\ (-1+\lambda)x_1 + (2-2\lambda)x_2 - 2\lambda x_3 - 2\lambda x_4 = 0, \\ (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 + (2+\lambda)x_3 + (1+2\lambda)x_4 = 0, \\ (-1+\lambda)x_1 - \lambda x_2 - 2\lambda x_3 + (2-3\lambda)x_4 = 0. \end{cases}$

Глава II. Векторная алгебра. Элементы теории линейных пространств и линейных операторов

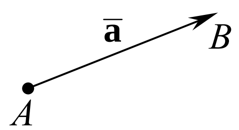
Один из разделов математики, имеющий большое применение в физике и механике – векторное исчисление. Это раздел, в котором изучаются свойства операций над векторами. Векторное исчисление подразделяют на векторную алгебру и векторный анализ. В векторной алгебре изучаются линейные операции над свободными векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное и двойное векторное). В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями одного или нескольких скалярных аргументов.

В этой главе мы будем изучать векторную алгебру. При этом нам понадобится познакомиться с основными понятиями теории линейных пространств (так как множество свободных векторов является линейным пространством). И в заключение главы мы познакомимся с очень важным понятием математики – понятием линейного оператора.

§6. Векторы. Линейные операции на множестве векторов

1. Определение вектора. Основные отношения на множестве векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вектором называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).*



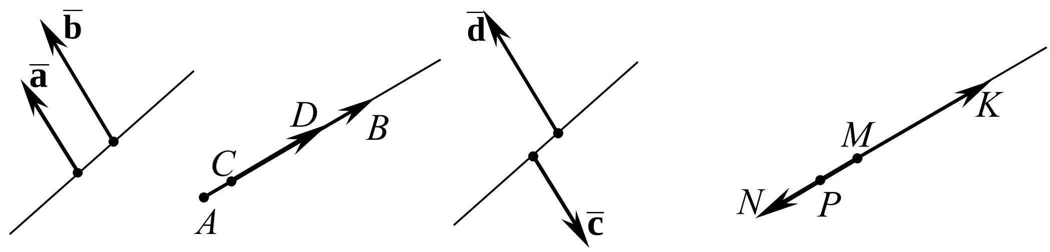
Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается $\overline{\mathbf{AB}}$. Кроме того, векторы обозначают малыми латинскими буквами с чертой: $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и т. д. Изображают вектор отрезком со стрелкой на конце.

Расстояние от начала вектора до его конца называется *длиной* (или *модулем*) вектора и обозначается $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$ или $\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\overline{\mathbf{0}}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются *коллинеарными* (*параллельными*). Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \parallel \overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарные, и $\overline{\mathbf{a}} \nparallel \overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ неколлинеарные.

Если векторы $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{\mathbf{CD}}$ – коллинеарные и их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала (для векторов лежащих на параллельных прямых) или один из лучей $[AB)$ или $[CD)$ целиком содержит в себе другой (для векторов, лежащих на одной прямой), то векторы называются *сонаправленными*. В противном случае коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*. Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \upuparrows \overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ сонаправленные, и $\overline{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ противоположно направленные.



$\overline{\mathbf{a}} \upuparrows \overline{\mathbf{b}}$ $\quad$ $\overline{\mathbf{AB}} \upuparrows \overline{\mathbf{CD}}$ $\quad$ $\overline{\mathbf{c}} \uparrow\downarrow \overline{\mathbf{d}}$ $\quad$ $\overline{\mathbf{MN}} \uparrow\downarrow \overline{\mathbf{PK}}$

Два вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Записывают: $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{b}}$. Все нулевые векторы считаются равными.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, перемещая его начало в любую точку пространства. Такие векторы принято называть *свободными* (в физике рассматривают еще *скользящие векторы* – векторы, начало которых можно произвольно выбрать на фиксированной прямой, и *связанные векторы* – векторы, начала которых строго фиксированы).

Векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, лежащие на перпендикулярных прямых, называются *перпендикулярными* (*ортогональными*). Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \perp \overline{\mathbf{b}}$.

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

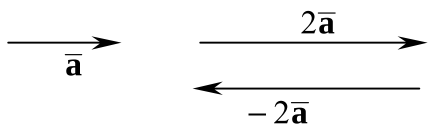
2. Линейные операции на множестве векторов

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением вектора* $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ *на число* $\alpha \neq 0$ *называется вектор, длина которого равна* $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$, *а направление совпадает с направлением вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *при* $\alpha > 0$ *и противоположно ему при* $\alpha < 0$. *Если* $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\alpha = 0$, *то их произведение полагают равным* $\bar{\mathbf{0}}$.

Произведение вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число α обозначают $\alpha\,\bar{\mathbf{a}}$.

ПРИМЕР.

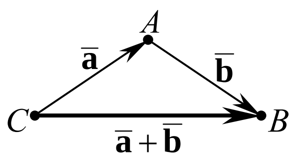


Очевидно, что справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 6.1 (критерий коллинеарности векторов). *Два вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$, *для некоторого числа* $\alpha \neq 0$.

Частным случаем произведения вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число является произведение $(-1)\bar{\mathbf{a}}$. Так как этот вектор имеет ту же длину что и вектор $\bar{\mathbf{a}}$, а его направление – противоположно направлению вектора $\bar{\mathbf{a}}$, то вектор $(-1)\bar{\mathbf{a}}$ называют *противоположным вектору* $\bar{\mathbf{a}}$ и обозначают $-\bar{\mathbf{a}}$.

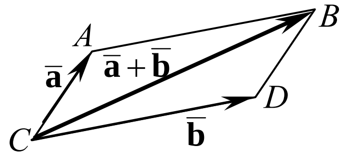
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть даны два вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку C и построим последовательно векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{b}}$. *Вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *и обозначается* $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$.



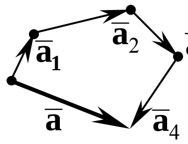
Данное в определении правило нахождения суммы векторов называется *правилом треугольника*. Имеется и другое правило для нахождения суммы векторов – *правило параллелограмма*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило параллелограмма). *Пусть даны два вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку C и построим векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \bar{\mathbf{b}}$. *Суммой векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *будет вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *имею-*

щий начало в точке C и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{b}}$.



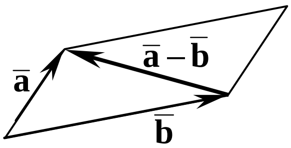
Преимущество правила треугольника в том, что оно легко обобщается на сумму любого конечного числа векторов. Например, чтобы найти сумму четырех векторов надо построить эти векторы последовательно (беря в качестве начала следующего вектора конец предыдущего). Тогда их сумма – это вектор, соединяющий начало первого вектора и конец четвертого.



$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2 + \overline{\mathbf{a}}_3 + \overline{\mathbf{a}}_4$

Частным случаем суммы двух векторов является сумма $\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{b}})$. Ее называют *разностью векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ и обозначают $\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}$.

Если на векторах $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ построить параллелограмм, то разность $\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}$ – это вектор, с началом в конце вектора $\overline{\mathbf{b}}$, совпадающий с диагональю параллелограмма.



Легко проверить, что введенные таким образом линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}}$ (коммутативность сложения векторов);
2) $(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) + \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}})$ (ассоциативность сложения векторов);
3) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{a}}$;
4) $\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{0}}$;
5) $\alpha(\beta\overline{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\overline{\mathbf{a}}$ (ассоциативность относительно умножения чисел);
6) $(\alpha + \beta)\overline{\mathbf{a}} = \alpha\overline{\mathbf{a}} + \beta\overline{\mathbf{a}}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);
7) $\alpha(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) = \alpha\overline{\mathbf{a}} + \alpha\overline{\mathbf{b}}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);
8) $1\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}$.

§7. Понятие линейного пространства

1. Определение и примеры

Пусть L – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа (например, множество матриц одинакового размера, множество векторов, множество функций с одинаковой областью определения и т.д.).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. *Множество L называется линейным пространством над $\mathbb{R}$ если для любых элементов $a,b,c \in L$ и для любых чисел $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*

1) $a+b=b+a$ (*коммутативность сложения элементов из* L);
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность сложения элементов из* L);
3) *Во множестве L существует такой элемент o, что $a+o=a$. Этот элемент o называют нулевым элементом множества L*;
4) *Для любого элемента $a \in L$ существует элемент $-a \in L$ такой, что $a+(-a)=o$. Элемент $-a$ называют противоположным к a*;
5) $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ (*ассоциативность относительно умножения чисел*);
6) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ (*дистрибутивность умножения на элемент из L относительно сложения чисел*);
7) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ (*дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов из* L);
8) $1a=a$.

ПРИМЕРЫ линейных пространств.

1) Пусть $M(m\times n,\mathbb{R})$ – множество матриц размера $m\times n$ с элементами из $\mathbb{R}$. Для этого множества все условия определения 7.1 выполняются (см. свойства линейных операций над матрицами в §1). Следовательно, множество $M(m\times n,\mathbb{R})$ является линейным пространством над $\mathbb{R}$.

2) Пусть $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) – множество свободных векторов пространства (плоскости). Для этого множества тоже выполняются все условия определения 7.1 (см. свойства линейных операций над векторами в §6). Следовательно, множество $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) является линейным пространством над $\mathbb{R}$.

3) Пусть $\mathbb{R}^n$ – множество последовательностей n действительных чисел. Введем операцию сложения элементов из $\mathbb{R}^n$ и умножения эле-

ментов из $\mathbb{R}^n$ на число. Пусть $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}=(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)$, $\mathbf{b}=(\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_n)$. Полагаем

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(\alpha_1+\beta_1;\alpha_2+\beta_2;\ldots;\alpha_n+\beta_n),$$

и

$$\alpha\cdot\mathbf{a}=(\alpha\cdot\alpha_1;\alpha\cdot\alpha_2;\ldots;\alpha\cdot\alpha_n).$$

Легко проверить, что все условия определения 7.1 в этом случае будут выполняться (нулевым элементом будет $\mathbf{o}=(0;0;\ldots;0)$, противоположным к $\mathbf{a}=(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)$ – элемент $-\mathbf{a}=(-\alpha_1;-\alpha_2;\ldots;-\alpha_n)$). Следовательно, множество $\mathbb{R}^n$ является линейным пространством над $\mathbb{R}$. Его называют *арифметическим линейным пространством*, а элементы множества $\mathbb{R}^n$ называют *n-мерными векторами*.

4) Пусть $\mathbb{R}[x]$ – множество многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Так как все условия определения 7.1 для множества $\mathbb{R}[x]$ выполняются, то это множество является линейным пространством над $\mathbb{R}$.

5) Пусть $\mathbf{C}[a,b]$ – множество функций, непрерывных на $[a,b]$. Все условия определения 7.1 для множества $\mathbf{C}[a,b]$ выполняются. Следовательно, оно является линейным пространством над $\mathbb{R}$.

Из определения линейного пространства легко вывести следующее утверждение.

ЛЕММА 7.2. *Пусть L – линейное пространство над $\mathbb{R}$. Тогда для любых элементов $a,b\in L$ и любых действительных чисел α,β справедливы следующие утверждения:*

1) $0\cdot a=o,\quad \alpha\cdot o=o;$

2) $(-\alpha)\cdot a=\alpha\cdot(-a)=-\alpha a,\quad (-\alpha)\cdot(-a)=\alpha a;$

3) $\alpha\cdot(a-b)=\alpha\cdot a-\alpha\cdot b,\quad (\alpha-\beta)\cdot a=\alpha\cdot a-\beta\cdot a.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Рассмотрим элемент $\beta\cdot a$. Так как $\beta=\beta+0$, то по определению линейного пространства имеем:

$$\beta\cdot a=(\beta+0)\cdot a=\beta\cdot a+0\cdot a.$$

Прибавим к левой и правой части этого равенства элемент $-(\beta\cdot a)$. Получим:

$$-(\beta\cdot a)+\beta\cdot a=o$$

и

$$-(\beta\cdot a)+\left(\beta\cdot a+0\cdot a\right)=\left(-(\beta\cdot a)+(\beta\cdot a)\right)+0\cdot a=o+0\cdot a=0\cdot a.$$

Следовательно, $$0\cdot a=o.$$

Теперь рассмотрим элемент $\alpha \cdot a$. Так как $a = a + o$, то по определению линейного пространства имеем:

$$\alpha \cdot a = \alpha \cdot (a + o) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot o.$$

Прибавим к левой и правой части этого равенства элемент $-(\alpha \cdot a)$. Получим: $$-(\alpha \cdot a) + \alpha \cdot a = o$$

и $$-(\alpha \cdot a) + \left(\alpha \cdot a + \alpha \cdot o\right) = \left(-(\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot a)\right) + \alpha \cdot o = o + \alpha \cdot o = \alpha \cdot o.$$

Следовательно, $$\alpha \cdot o = o.$$

2) Покажем, что $(-\alpha) \cdot a = -\alpha a$. Рассмотрим $\alpha \cdot a + (-\alpha) \cdot a$. Используя доказанные выше утверждения и свойства линейного пространства, получаем:

$$\alpha \cdot a + (-\alpha) \cdot a = \left(\alpha + (-\alpha)\right) \cdot a = 0 \cdot a = o.$$

Следовательно, элемент $(-\alpha) \cdot a$ является противоположным к $\alpha \cdot a$, т.е. $(-\alpha) \cdot a = -\alpha a$.

Аналогично показывается, что $(-\alpha) \cdot a = \alpha \cdot (-a) = -\alpha a$.

3) Покажем, что $\alpha \cdot (a - b) = \alpha \cdot a - \alpha \cdot b$. Используя доказанные в 2) утверждения и свойства линейного пространства, получаем:

$$\alpha \cdot (a - b) = \alpha \cdot \left(a + (-b)\right) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot (-b) = \alpha \cdot a + (-\alpha \cdot b) = \alpha \cdot a - \alpha \cdot b.$$

Аналогично доказывается, что $(\alpha - \beta) \cdot a = \alpha \cdot a - \beta \cdot a$. ■

В заключение этого пункта заметим, что наряду с термином «*линейное пространство*» используется также термин «*векторное пространство*», а элементы линейного пространства принято называть *векторами*.

2. Подпространства линейных пространств

Пусть L – линейное пространство над $\mathbb{R}$, L_1 – непустое подмножество в L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что L_1 является подпространством линейного пространства L (или линейным подпространством), если оно само образует линейное пространство относительно операций, определенных на L.*

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.3 (критерий подпространства). *Пусть L – линейное пространство над $\mathbb{R}$, L_1 – непустое подмножество в L. L_1 является* *подпространством линейного пространства* L *тогда и только тогда, когда для любых элементов* $a,b\in L_1$ *и любого* $\alpha\in\mathbb{R}$ *выполняются условия:* 1) $a-b\in L_1$;

2) $\alpha\cdot a\in L_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Необходимость сформулированных в теореме условий очевидна. Покажем их достаточность. Фактически, необходимо только доказать, что из условий $a-b\in L_1$ и $\alpha\cdot a\in L_1$ следует, что $o\in L_1$ и для любого $a\in L_1$ элемент $-a\in L_1$ (остальные условия определения 7.1 будут выполняться в любом подмножестве линейного пространства). Покажем справедливость этого утверждения.

Пусть a – любой элемент из L_1. Тогда по условию $a-a=o\in L_1$ и $(-1)a=-a\in L_1$. ■

ПРИМЕРЫ линейных подпространств.

1) Множество $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости очевидно является подпространством линейного пространства $V^{(3)}$ свободных векторов пространства.

2) Пусть $\mathbb{R}^n[x]$ – множество многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ и имеющих степень меньше n. Очевидно, что $\mathbb{R}^n[x]$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

3) Пусть задана некоторая система линейных однородных уравнений $\mathbf{AX}=\mathbf{O}$, имеющая нетривиальные решения. Решение системы – последовательность n действительных чисел. Следовательно, его можно рассматривать как n-мерный вектор арифметического линейного пространства $\mathbb{R}^n$ и множество $\mathcal{H}$ решений системы $\mathbf{AX}=\mathbf{O}$ – подмножество в $\mathbb{R}^n$. Изучая системы линейных однородных уравнений, мы выяснили, что линейная комбинация их решений снова является решением системы (см. терема 5.1). Следовательно, $\mathcal{H}$ будет подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

4) Подпространством любого линейного пространства L является его подмножество $O=\{o\}$. Его называют *тривиальным подпространством*.

5) Пусть L – линейное пространство над $\mathbb{R}$, a_1, a_2, …, a_k – некоторые элементы из L. Пусть $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ – множество всевозможных линейных комбинаций элементов a_1, a_2, …, a_k, т.е.

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Множество $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ называют *линейной оболочной векторов* a_1, a_2, …, a_k.

Легко проверить, что для линейной оболочки $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ выполняются условия теоремы 3, и, следовательно, она будет подпространством линейного пространства L.

3. Понятие линейной зависимости и независимости. Базис

Напомним, что если M – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа, то выражение

$$\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k$$

(где m_1, m_2, …, $m_k \in M$, α_1, α_2, …, α_k – числа) называют *линейной комбинацией* элементов $m_1, m_2, \ldots, m_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Если $m \in M$ и m является линейной комбинацией элементов $m_1, m_2, \ldots, m_k$, т.е.

$$m = \alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k,$$

то говорят, что m *линейно выражается* через элементы m_1, m_2, …, m_k.

Пусть L – линейное пространство, a_1, a_2, … , $a_k \in L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Векторы a_1, a_2, … , a_k называются линейно зависимыми, если существуют числа α_1, α_2, …, α_k, не все равные нулю и такие, что линейная комбинация $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k$ равна нулевому элементу o линейного пространства L.*

Если же равенство $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = o$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то векторы a_1, a_2, … , a_k называют линейно независимыми.

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 7.4 (необходимое и достаточное условие линейной зависимости). *Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Необходимость. Пусть векторы a_1, a_2, … , a_k – линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа α_1, α_2, …, α_k, не все равные нулю и такие, что $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = o$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1 \cdot a_1 = -\alpha_2 \cdot a_2 - \ldots - \alpha_k \cdot a_k,$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot a_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot a_k.$$

2) Достаточность. Пусть один из векторов a_1, a_2, … , a_k линейно выражается через оставшиеся. Например, пусть

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots + \alpha_k a_k.$$

$$\Rightarrow \quad -a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots + \alpha_k a_k = o.$$

Следовательно, векторы a_1, a_2, … , a_k – линейно зависимы. ■

Замечание. Часто в качестве определения линейно зависимых векторов берут формулировку леммы 7.4.

ПРИМЕРЫ линейно зависимых и линейно независимых векторов.

1) Матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} -$$

линейно зависимы. Действительно,

$$\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2 + 3\mathbf{E}_3 + 4\mathbf{E}_4 - \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

Матрицы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ – линейно независимы, так как

$$\alpha_1\mathbf{E}_1 + \alpha_2\mathbf{E}_2 + \alpha_3\mathbf{E}_3 + \alpha_4\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, если $\alpha_1\mathbf{E}_1 + \alpha_2\mathbf{E}_2 + \alpha_3\mathbf{E}_3 + \alpha_4\mathbf{E}_4 = \mathbf{O}$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 0, \ \alpha_4 = 0.$$

2) Пусть $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$, $g_3(x) = x^2$, $g_4(x) = (1+x)^2$. Так как

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$

то $g_4(x)$ является линейной комбинацией $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$:

$$g_4(x) = g_1(x) + 2g_2(x) + g_3(x).$$

Следовательно, многочлены $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$ линейно зависимы.

Теперь рассмотрим многочлены

$$f_1(x) = -2x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3 + x + 1,\ f_4(x) = x^4 - 1.$$

Они линейно независимы. Действительно,

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \alpha_4 f_4(x) =$$
$$= \alpha_1(-2x + 1) + \alpha_2 x^2 + \alpha_3(x^3 + x + 1) + \alpha_4(x^4 - 1) =$$
$$= \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + (-2\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4).$$

Следовательно, если

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \alpha_4 f_4(x) = 0,$$

то $\qquad \alpha_4 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ -2\alpha_1 + \alpha_3 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0;$

$$\Rightarrow \quad \alpha_4 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 = 0.$$

3) Пусть $\mathbf{a}_1 = (2; -3; 1)$, $\mathbf{a}_2 = (3; -1; 5)$, $\mathbf{a}_3 = (1; -4; 3)$. Выясним, является ли эта система векторов пространства $\mathbb{R}^3$ линейно зависимой. Пусть $\qquad \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$.

Тогда имеем: $\qquad \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 =$

$$= (2\alpha_1;\ -3\alpha_1;\ \alpha_1) + (3\alpha_2;\ -\alpha_2;\ 5\alpha_2) + (\alpha_3;\ -4\alpha_3;\ 3\alpha_3) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3;\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3;\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0; 0; 0).$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ будут линейно независимыми, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ – единственное решение системы. Согласно критерию единственности решения системы (см. теорему 4.2) это будет иметь место, если $r(\mathbf{A}) = n$, где $\mathbf{A}$ – матрица системы, n – число неизвестных.

В нашем случае имеем:

$$|\mathbf{A}| = 35 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad r(\mathbf{A}) = 3.$$

Следовательно, система имеет только тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, и, значит, векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ – линейно независимые.

Теперь рассмотрим n $(n > 3)$ произвольных векторов из $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{b}_1 = (\beta_{11}; \beta_{21}; \beta_{31}),\ \mathbf{b}_2 = (\beta_{12}; \beta_{22}; \beta_{32}),\ \ldots,\ \mathbf{b}_n = (\beta_{1n}; \beta_{2n}; \beta_{3n}).$$

Эти векторы всегда будут линейно зависимы. Действительно, рассмотрение линейной комбинации $\alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{b}_n = \mathbf{o}$ приведет нас к системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_{11} + \alpha_2\beta_{12} + \ldots + \alpha_n\beta_{1n} = 0, \\ \alpha_1\beta_{21} + \alpha_2\beta_{22} + \ldots + \alpha_n\beta_{2n} = 0, \\ \alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32} + \ldots + \alpha_n\beta_{3n} = 0. \end{cases}$$

Так как матрица системы $\mathbf{B}$ – матрица размера $3 \times n$ и $n > 3$, то ее ранг $r(\mathbf{B}) \le 3 \ne n$. Следовательно, система будет иметь нетривиальные решения, и, значит равенство $\alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{b}_n = \mathbf{o}$ возможно не только при нулевых коэффициентах.

Таким образом, мы можем утверждать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ линейно независимых векторов может быть не более трех.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется базисом этого линейного пространства.*

Иначе говоря, векторы e_1, e_2, …, $e_n \in L$ образуют базис в линейном пространстве L если выполняются два условия:

1) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимы;
2) $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ – линейно зависимы для любого вектора a из L.

Очевидно, что в линейном пространстве существует не единственный базис (например, легко доказать, что если e_1, e_2, …, e_n образуют базис в линейном пространстве L и α_1, α_2, …, α_n – отличные от нуля действительные числа, то векторы $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, …, $\alpha_n e_n$ тоже будут базисом). Но справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.5. *Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то пространство называют *конечномерным*, а n называют *размерностью линейного пространства* (пишут: $\dim L = n$).

Если в линейном пространстве L для любого натурального n можно найти линейно независимую систему векторов, то пространство называют *бесконечномерным* (пишут: $\dim L = \infty$).

ПРИМЕРЫ базисов.

1) Линейное пространство $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ матриц второго порядка с элементами из $\mathbb{R}$ имеет размерность $\dim M(2 \times 2, \mathbb{R}) = 4$. Его базисом будут, например, матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, 1) $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ – линейно независимы (показали ранее); 2) $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$, $\mathbf{A}$ – линейно зависимы для любой матрицы $\mathbf{A} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$, так как

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\mathbf{E}_1 + \alpha_{12}\mathbf{E}_2 + \alpha_{21}\mathbf{E}_3 + \alpha_{22}\mathbf{E}_4 .$$

Базис $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ в дальнейшем будем называть *стандартным базисом пространства* $M(2\times 2, \mathbb{R})$.

2) Множество свободных векторов плоскости $V^{(2)}$ является конечномерным линейным пространством. Его размерность $\dim V^{(2)} = 2$. Базисом будут являться любые два неколлинеарных вектора.

Действительно, пусть $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$ – неколлинеарные векторы на плоскости. Покажем, что они линейно независимы. Пусть

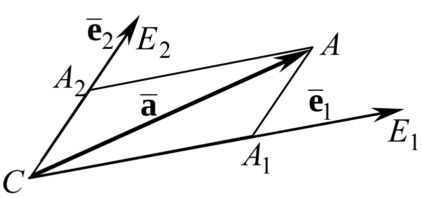
$$\alpha_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{e}}_2 = \overline{\mathbf{0}} .$$

Предположим, что хотя бы один из коэффициентов этой линейной комбинации отличен от нуля. Например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\overline{\mathbf{e}}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overline{\mathbf{e}}_2 ,$$

и, значит, векторы $\overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{e}}_2$ – коллинеарные. Следовательно, предположение неверно и линейная комбинация векторов $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$ равна нулевому вектору только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, что и означает линейную независимость векторов $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$.

Теперь покажем, что любой вектор $\overline{\mathbf{a}} \in V^{(2)}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{e}}_2$. Для этого построим векторы $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{CE_1}} = \overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{CE_2}} = \overline{\mathbf{e}}_2$. Через точку A проведем прямые параллельные векторам $\overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{e}}_2$. Точки пересечения этих прямых и прямых, на которых лежат векторы $\overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{e}}_2$, обозначим соответственно A_1 и A_2. По правилу параллелограмма имеем:



$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{CA_1}} + \overline{\mathbf{CA_2}} .$$

Но векторы $\overline{\mathbf{CA_1}}$ и $\overline{\mathbf{CE_1}}$ коллинеарны, и, следовательно,

$$\overline{\mathbf{CA_1}} = \alpha\overline{\mathbf{CE_1}} = \alpha\overline{\mathbf{e}}_1$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Аналогично

$$\overline{\mathbf{CA_2}} = \beta\overline{\mathbf{CE_2}} = \alpha\bar{\mathbf{e}}_2 .$$

Таким образом, получили

$$\bar{\mathbf{a}} = \alpha\bar{\mathbf{e}}_1 + \beta\bar{\mathbf{e}}_2 .$$

3) Линейное пространство $V^{(3)}$ свободных векторов пространства имеет размерность $\dim V^{(3)} = 3$. Легко доказать, что базисом в пространстве $V^{(3)}$ являются любые три некомпланарных вектора.

Замечание. Хотя в качестве базиса в пространстве $V^{(2)}$ (в пространстве $V^{(3)}$) можно взять любые два неколлинеарных (любые три некомпланарных) вектора, на практике предпочитают работать с *декартовым прямоугольным базисом* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$). Это единичные векторы, которые сонаправлены координатным осям Ox и Oy соответственно (сонаправлены координатным осям Ox, Oy и Oz соответственно).

4) Арифметическое линейное пространство $\mathbb{R}^n$ тоже является конечномерным. Его размерность $\dim \mathbb{R}^n = n$. Базисом будут являться, например, векторы

$$\mathbf{e}_1 = (1; 0; \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0; 1; \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0; 0; \ldots, 1)$$

(будем называть его *стандартным базисом пространства* $\mathbb{R}^n$).

5) Линейное пространство $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ является бесконечномерным. Легко проверить, что для любого натурального n многочлены

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ \ldots,\ f_n(x) = x^n$$

будут линейно независимы.

Роль базиса в линейном пространстве характеризует следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.6 (о базисе). *Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть e_1, e_2, …, e_n – базис линейного пространства L и a – произвольный вектор из L. Тогда, по определению базиса, e_1, e_2, …, e_n – линейно независимы и e_1, e_2, …, e_n, a – линейно зависимы. Следовательно, существуют числа α_1, α_2, …, α_n, β не все равные нулю и такие, что линейная комбинация

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n + \beta a = o.$$

Причем, коэффициент β не может быть равен нулю.

Действительно, если $\beta = 0$, то $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n = o$ и среди коэффициенты α_1, α_2, …, α_n есть ненулевые. Но существование такой линейной комбинации для элементов e_1, e_2, …, e_n означает, что они линейно зависимы. Это противоречит условию (по условию эти элементы образуют базис и, следовательно, линейно независимы).

Так как $\beta \neq 0$, то a линейно выражается через e_1, e_2, …, e_n:

$$-\beta a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n,$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{\alpha_1}{\beta} \cdot e_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot e_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\beta} \cdot e_n.$$

Теперь докажем, что a линейно выражается через базис единственным образом. Предположим противное. Пусть

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n$$

и
$$a = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \ldots + \beta_n \cdot e_n,$$

причем $\alpha_i \neq \beta_i$ хотя бы для одного $i \in \overline{1,n}$. Пусть для определенности $\alpha_1 \neq \beta_1$. Тогда

$$a - a = (\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n) - (\beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \ldots + \beta_n \cdot e_n),$$

$$\Rightarrow \quad o = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot e_n.$$

Так как $\alpha_1 \neq \beta_1$, то $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$. Таким образом, получили, что существует нулевая линейная комбинация векторов e_1, e_2, …, e_n, среди коэффициентов которой есть ненулевые. Значит e_1, e_2, …, e_n – линейно зависимые. Но они по условию линейно независимы, так как образуют базис.

Следовательно, предположение неверное и вектор a разлагается по базису e_1, e_2, …, e_n единственным образом. ■

Замечание. Из теоремы 7.6 в частности следует, что если $e_1, e_2, \ldots,$ e_n – базис линейного пространства L, то

$$L = \mathcal{L}(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

4. Координаты вектора

Единственность разложения вектора по базису оказалась очень важным результатом. Это факт позволил ввести новое понятие, благодаря которому мы сможем легко выполнять любые действия со свободными векторами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Коэффициенты в разложении вектора по базису называются координатами этого вектора в данном базисе.*

ПРИМЕРЫ координат вектора.

1) Матрица $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ имеет в стандартном базисе $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ координаты $\{1; -2; -3; 4\}$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_2 - 3\mathbf{E}_3 + 4\mathbf{E}_4 .$$

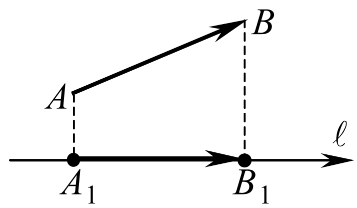
2) n-мерный вектор $(1; -2; 0)$ имеет в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ координаты $\{1; -2; 0\}$.

3) Многочлен $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$ имеет в базисе $(x+1)^3$, $(x+1)^2$, $(x+1)$, 1 пространства $\mathbb{R}^4[x]$ координаты $\{1; -1; -2; 6\}$.

В линейном пространстве свободных векторов координаты вектора в декартовом прямоугольном базисе имеют простой геометрический смысл. Чтобы указать его, необходимо дать несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямую, на которой выбрано направление, называют осью.*

Пусть имеется некоторая ось ℓ и вектор $\overline{\mathbf{AB}}$. Обозначим через A_1 и B_1 ортогональные проекции на ось ℓ точек A и B соответственно. Вектор $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ назовем *векторной проекцией вектора* $\overline{\mathbf{AB}}$ *на ось* ℓ.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Проекцией (ортогональной проекцией) вектора* $\overline{\mathbf{AB}}$ *на ось* ℓ *называется длина его векторной проекции* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *на эту ось, взятая со знаком плюс, если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ℓ *сонаправлены, и со знаком минус – если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ℓ *противоположно направлены.*

Проекцию вектора $\overline{\mathbf{AB}}$ на ось ℓ обозначают: $\text{Пр}_{\ell}^{\perp}\overline{\mathbf{AB}}$, $\text{Пр}_{\ell}\overline{\mathbf{AB}}$.

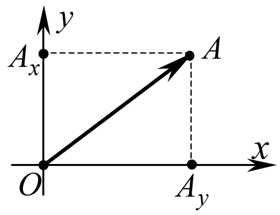
Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7.7. *Координаты вектора* $\overline{\mathbf{a}} \in V^{(2)}$ $(V^{(3)})$ *в декартовом прямоугольном базисе* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ $(\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k})$ *есть проекции этого вектора на соответствующие координатные оси.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Проведем доказательство для вектора $\overline{\mathbf{a}} \in V^{(2)}$. Для вектора пространства оно будет аналогичным.

Построим вектор $\overline{\mathbf{OA}} = \overline{\mathbf{a}}$ (вектор, с началом в точке O и концом в точке A, называется *радиус-вектором точки* A). Обозначим через A_x и A_y ортогональные проекции точки A на ось Ox и Oy соответственно. Тогда



$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{OA}} = \overline{\mathbf{OA_x}} + \overline{\mathbf{OA_y}} = \alpha\,\mathbf{i} + \beta\,\mathbf{j}.$$

Так как $\mathbf{i}$ – вектор единичной длины, то $\left|\overline{\mathbf{OA_x}}\right| = |\alpha| \cdot |\mathbf{i}| = |\alpha|$. Знак α зависит от направления вектора $\overline{\mathbf{OA_x}}$: если $\overline{\mathbf{OA_x}} \upuparrows \mathbf{i}$, то $\alpha > 0$; если $\overline{\mathbf{OA_x}} \updownarrows \mathbf{i}$, то $\alpha < 0$ (см. определение произведения вектора на число). Но согласно определению проекции вектора на ось, это означает, что α – проекция вектора $\overline{\mathbf{OA}}$ на ось, сонаправленную с вектором $\mathbf{i}$, т.е. на ось Ox. Аналогично показывается, что $\beta = \text{Пр}_{Oy}\overline{\mathbf{OA}}$. ■

Координаты вектора – очень важная характеристика вектора любого линейного пространства. Знание координат векторов позволяет легко выполнять с ними линейные операции, так как справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.8.

1) *Если вектор* a *имеет в базисе* e_1, e_2, $\ldots$, e_n *координаты* $\{\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n\}$, *вектор* b *имеет в том же базисе координаты* $\{\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_n\}$, *то вектор* $a+b$ *будет иметь в базисе* e_1, e_2, $\ldots$, e_n *координаты* $\{\alpha_1+\beta_1;\alpha_2+\beta_2;\ldots;\alpha_n+\beta_n\}$.

2) *Если вектор* a *имеет в базисе* e_1, e_2, $\ldots$, e_n *координаты* $\{\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n\}$, *то для любого числа* $\lambda \in \mathbb{R}$ *вектор* λa *будет иметь в том же базисе координаты* $\{\lambda\alpha_1;\lambda\alpha_2;\ldots;\lambda\alpha_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По условию $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$. Тогда $a + b = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n) =$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)e_n$$

и $\lambda a = \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = \lambda\alpha_1 e_1 + \lambda\alpha_2 e_2 + \ldots + \lambda\alpha_n e_n$. ■

Из теоремы 7.8 вытекает справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 7.9 (критерий коллинеарности свободных векторов в координатной форме). *Векторы* $\overline{\mathbf{a}} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$ *и* $\overline{\mathbf{b}} = \{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т.е.*

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = k\,.$$

Причем, если коэффициент пропорциональности $k > 0$, *то векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *– сонаправлены*; *если* $k < 0$, *то* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *– противоположно направлены.*

Координаты вектора определены в данном базисе единственным образом. Но в другом базисе вектор будет иметь другие координаты. Связь между координатами вектора в разных базисах дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.10. *Пусть* $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ *и* $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ *– два базиса линейного пространства* L. *Причем имеют место равенства:*

$$\begin{array}{ccccccccc} f_1 & = & \tau_{11}e_1 & + & \tau_{21}e_2 & + & \ldots & + & \tau_{n1}e_n, \\ f_2 & = & \tau_{12}e_1 & + & \tau_{22}e_2 & + & \ldots & + & \tau_{n2}e_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n & = & \tau_{1n}e_1 & + & \tau_{2n}e_2 & + & \ldots & + & \tau_{nn}e_n. \end{array}$$

Если вектор a *имеет в базисе* $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ *координаты* $\{\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n\}$, *в базисе* $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ *– координаты* $\{\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_n\}$, *то справедливо равенство*

$$\mathbf{A} = \mathbf{TB},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\mathbf{T}$ называют *матрицей перехода от базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *к базису* $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По условию $a = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_n f_n$.

Расписывая векторы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$, получим:

$$a = \beta_1(\tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \ldots + \tau_{n1}e_n) + \beta_2(\tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \ldots + \tau_{n2}e_n) + \ldots +$$
$$+ \beta_n(\tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \ldots + \tau_{nn}e_n).$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} a = {} & (\beta_1\tau_{11} + \beta_2\tau_{12} + \ldots + \beta_n\tau_{1n})e_1 + \\ & + (\beta_1\tau_{21} + \beta_2\tau_{22} + \ldots + \beta_n\tau_{2n})e_2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + (\beta_1\tau_{n1} + \beta_2\tau_{n2} + \ldots + \beta_n\tau_{nn})e_n . \end{aligned} \tag{17}$$

Так как по условию $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, то из (17) получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1\tau_{11} + \beta_2\tau_{12} + \ldots + \beta_n\tau_{1n}, \\ \alpha_2 &= \beta_1\tau_{21} + \beta_2\tau_{22} + \ldots + \beta_n\tau_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n &= \beta_1\tau_{n1} + \beta_2\tau_{n2} + \ldots + \beta_n\tau_{nn}, \end{aligned}$$

или в матричном виде $\mathbf{A} = \mathbf{TB}$. ■

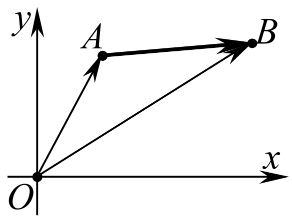
§8. Простейшие задачи векторной алгебры

Пусть на плоскости (в пространстве) задана декартова прямоугольная система координат. Выберем в пространстве $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) декартов прямоугольный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j}$). Рассмотрим следующие задачи.

ЗАДАЧА 8.1. Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{AB}}$, если известны декартовы координаты начала и конца вектора.

Пусть точки A и B лежат в плоскости xOy и имеют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Рассмотрим векторы $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{OA}}$ и $\overline{\mathbf{OB}}$. Имеем:

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{OB}} - \overline{\mathbf{OA}}.$$



Но $\overline{\mathbf{OB}} = \{\text{Пр}_{Ox}\overline{\mathbf{OB}};\ \text{Пр}_{Oy}\overline{\mathbf{OB}}\} = \{x_2;\ y_2\}$,

$\overline{\mathbf{OA}} = \{\text{Пр}_{Ox}\overline{\mathbf{OA}};\ \text{Пр}_{Oy}\overline{\mathbf{OA}}\} = \{x_1;\ y_1\}$.

Следовательно, по теореме 7.8,

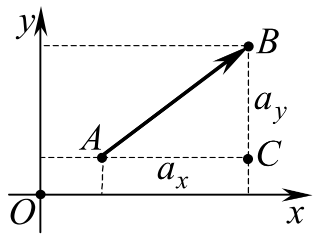
$$\overline{\mathbf{AB}} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}.$$

Аналогично получаем, что если $\overline{\mathbf{AB}} \in V^{(3)}$ и $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $\overline{\mathbf{AB}} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$.

ЗАДАЧА 8.2. Найти длину вектора, если известны его координаты в декартовом прямоугольном базисе.

Пусть $\overline{\mathbf{a}} \in V^{(2)}$ и $\overline{\mathbf{a}} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = \{a_x;\ a_y\}$. По теореме 7.7

$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\overline{\mathbf{a}}, \quad a_y = \text{Пр}_{Oy}\overline{\mathbf{a}}.$$



Рассмотрим треугольник ABC. Имеем:

$$|AB| = |\overline{\mathbf{a}}|, \quad |AC| = |\text{Пр}_{Ox}\overline{\mathbf{a}}| = |a_x|,$$

$$|CB| = |\text{Пр}_{Oy}\overline{\mathbf{a}}| = |a_y|.$$

Следовательно, по теореме Пифагора,

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2} = \sqrt{|\text{Пр}_{Ox}\overline{\mathbf{a}}|^2 + |\text{Пр}_{Oy}\overline{\mathbf{a}}|^2},$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}.$$

Аналогично получаем, что если $\overline{\mathbf{a}} \in V^{(3)}$ и

$$\overline{\mathbf{a}} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\},$$

то

$$|\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}.$$

ЗАДАЧА 8.3. Известны координаты вектора. Найти координаты его орта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ортом вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *называется вектор* $\overline{\mathbf{a}}_\mathbf{0}$, *сонаправленный с вектором* $\overline{\mathbf{a}}$ *и имеющий единичную длину.*

Пусть $\overline{\mathbf{a}} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$. Так как векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{a}}_\mathbf{0}$ сонаправлены, то существует $\lambda > 0$ такое, что $\overline{\mathbf{a}}_\mathbf{0} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}$. Следовательно,

$$\overline{\mathbf{a}}_\mathbf{0} = \{\lambda \cdot a_x;\ \lambda \cdot a_y;\ \lambda \cdot a_z\}.$$

Найдем λ. Имеем:

$$|\overline{\mathbf{a}}_\mathbf{0}| = |\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}| = |\lambda| \cdot |\overline{\mathbf{a}}| = \lambda \cdot |\overline{\mathbf{a}}| = 1,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{|\overline{\mathbf{a}}|}.$$

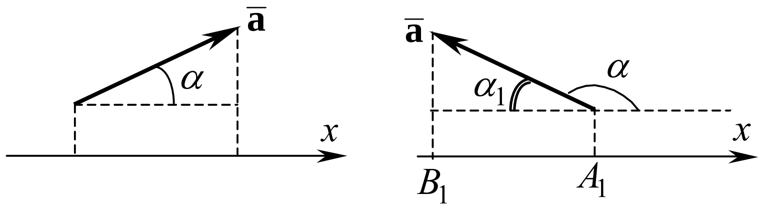
Таким образом, получаем:

$$\overline{\mathbf{a}}_\mathbf{0} = \left\{ \frac{a_x}{|\overline{\mathbf{a}}|};\ \frac{a_y}{|\overline{\mathbf{a}}|};\ \frac{a_z}{|\overline{\mathbf{a}}|} \right\}.$$

Координаты орта вектора имеют очень простой геометрический смысл. Обозначим через α, β и γ углы, которые вектор $\overline{\mathbf{a}}$ образует с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

называются *направляющими косинусами вектора* $\bar{\mathbf{a}}$. Выразим направляющие косинусы вектора через его координаты. Имеем:

$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\bar{\mathbf{a}} = \begin{cases} |\bar{\mathbf{a}}|\cdot\cos\alpha, & \text{если } \alpha < 90°; \\ -|A_1B_1| = -|\bar{\mathbf{a}}|\cdot\cos\alpha_1 = |\bar{\mathbf{a}}|\cdot\cos\alpha, & \text{если } \alpha > 90°. \end{cases}$$



Аналогично находим:

$$a_y = \text{Пр}_{Oy}\bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}|\cdot\cos\beta,\quad a_z = \text{Пр}_{Oz}\bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}|\cdot\cos\gamma.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{\mathbf{a}}|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{\mathbf{a}}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{\mathbf{a}}|}.$$

Таким образом, получили, что *координаты орта вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *являются его направляющими косинусами*.

Замечание. Так как $|\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{0}| = 1$ и $\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{0} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Это равенство называют *основным тождеством для направляющих косинусов вектора*.

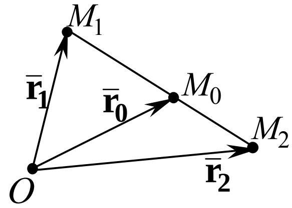
ЗАДАЧА 8.4. Известны координаты концов отрезка. Найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что точка M_0 делит отрезок M_1M_2 в отношении λ $(\lambda \neq -1)$, если* $\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \lambda\cdot\overline{\mathbf{M_0M}_2}$.

Если $\lambda > 0$, то точка M_0 лежит между точками M_1 и M_2. В этом случае говорят, что *точка M_0 делит отрезок M_1M_2 во внутреннем отношении*.

Если $\lambda < 0$, то точка M_0 лежит на продолжении отрезка M_1M_2 и говорят, что *точка M_0 делит отрезок M_1M_2 во внешнем отношении*.

Пусть $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Обозначим через $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{1}$, $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{2}$, $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ – радиус-векторы точек M_1, M_2 и M_0 соответственно.



Тогда $\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} - \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{1}$, $\overline{\mathbf{M_0M_2}} = \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{2} - \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$.

Так как $\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{M_0M_2}}$,

то $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} - \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = \lambda \cdot (\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{2} - \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0})$,

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} + \lambda \cdot \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{1} + \lambda \cdot \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{2},$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0}(1+\lambda) = \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{1} + \lambda \cdot \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{2},$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = \frac{\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{1} + \lambda \cdot \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{2}}{1+\lambda} \tag{18}$$

или в координатной форме:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1+\lambda}. \tag{19}$$

В частности, если M_0 – середина отрезка M_1M_2, то

$$\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \overline{\mathbf{M_0}\mathrm{M}_2}.$$

Следовательно, в этом случае $\lambda = 1$ и формулы (18) и (19) примут вид:

$$\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = \frac{\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{2}}{2}$$

и

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Замечание. Если точка M_0 лежит между точками M_1 и M_2, то обычно говорят, что M_0 делит отрезок M_1M_2 в отношении $m:n$. В этом случае $\lambda = \frac{m}{n}$, а формулы (18) и (19) можно переписать в виде:

$$\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = \frac{n \cdot \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{1} + m \cdot \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{2}}{n+m}$$

и

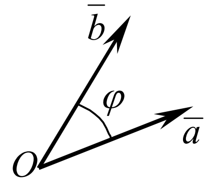
$$x_0 = \frac{n \cdot x_1 + m \cdot x_2}{n+m}, \quad y_0 = \frac{n \cdot y_1 + m \cdot y_2}{n+m}, \quad z_0 = \frac{n \cdot z_1 + m \cdot z_2}{n+m}.$$

§9. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Скалярным произведением двух ненулевых векторов* $\mathbf{\bar a}$ *и* $\mathbf{\bar b}$ *называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число*

$$|\mathbf{\bar a}|\cdot|\mathbf{\bar b}|\cdot\cos\varphi .$$



Если $\mathbf{\bar a}=\mathbf{\bar 0}$ *или* $\mathbf{\bar b}=\mathbf{\bar 0}$*, то скалярное произведение векторов* $\mathbf{\bar a}$ *и* $\mathbf{\bar b}$ *полагают равным нулю.*

Скалярное произведение векторов $\mathbf{\bar a}$ и $\mathbf{\bar b}$ обозначают $(\mathbf{\bar a},\mathbf{\bar b})$ или $\mathbf{\bar a}\mathbf{\bar b}$.

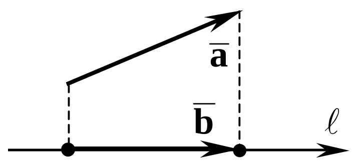
СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1. *Скалярное произведение векторов коммутативно*, т.е.

$$(\mathbf{\bar a},\mathbf{\bar b})=(\mathbf{\bar b},\mathbf{\bar a}).$$

Это свойство очевидно из определения.

2. *Скалярное произведение ненулевых векторов* $\mathbf{\bar a}$ *и* $\mathbf{\bar b}$ *равно произведению длины вектора* $\mathbf{\bar a}$ *на проекцию вектора* $\mathbf{\bar b}$ *на вектор* $\mathbf{\bar a}$ *(длины вектора* $\mathbf{\bar b}$ *на проекцию* $\mathbf{\bar a}$ *на* $\mathbf{\bar b}$*).*



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Проекцией вектора* $\mathbf{\bar a}$ *на вектор* $\mathbf{\bar b}$ *называется проекция вектора* $\mathbf{\bar a}$ *на ось, определяемую вектором* $\mathbf{\bar b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Имеем: $$(\mathbf{\bar a},\mathbf{\bar b})=|\mathbf{\bar a}|\cdot|\mathbf{\bar b}|\cdot\cos\varphi .$$

Но $$|\mathbf{\bar b}|\cdot\cos\varphi=\text{Пр}_{\mathbf{\bar a}}\mathbf{\bar b},\quad |\mathbf{\bar a}|\cdot\cos\varphi=\text{Пр}_{\mathbf{\bar b}}\mathbf{\bar a}.$$

Следовательно, $$(\mathbf{\bar a},\mathbf{\bar b})=|\mathbf{\bar a}|\cdot\text{Пр}_{\mathbf{\bar a}}\mathbf{\bar b},$$

и $$(\mathbf{\bar a},\mathbf{\bar b})=|\mathbf{\bar b}|\cdot\text{Пр}_{\mathbf{\bar b}}\mathbf{\bar a}.\quad\blacksquare$$

3. *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения*, т.е.

$$(\lambda\mathbf{\bar a},\mathbf{\bar b})=(\mathbf{\bar a},\lambda\mathbf{\bar b})=\lambda(\mathbf{\bar a},\mathbf{\bar b}).$$

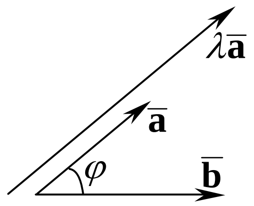
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как направление вектора $\lambda\bar{\mathbf{a}}$ зависит от знака λ, то необходимо рассмотреть отдельно два случая: $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$. Если $\lambda > 0$, то

$$(\widehat{\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}}) = (\widehat{\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}}) = \varphi,$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = |\lambda\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi =$$

$$= \lambda\cdot|\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi = \lambda(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}).$$



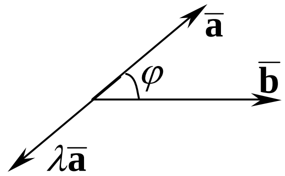
Если $\lambda < 0$, то

$$(\widehat{\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}}) = \varphi, \quad (\widehat{\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}}) = \pi - \varphi,$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = |\lambda\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos(\pi-\varphi) =$$

$$= |\lambda|\cdot|\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot(-\cos\varphi) =$$

$$= -|\lambda|\cdot|\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi = \lambda\cdot|\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi = \lambda(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}). \quad \blacksquare$$



4. *Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы.* А именно:

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{b}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2) = (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1) + (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

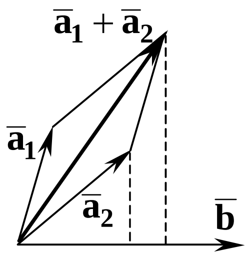
Действительно,

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{b}}|\cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2) =$$

$$= |\bar{\mathbf{b}}|\cdot\left(\text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}_1 + \text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}_2\right) =$$

$$= |\bar{\mathbf{b}}|\cdot\text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}_1 + |\bar{\mathbf{b}}|\cdot\text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}_2 =$$

$$= (\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{b}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}}). \quad \blacksquare$$



5. *Скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора) равно квадрату его длины*, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{a}}) = |\bar{\mathbf{a}}|^2.$$

Это свойство очевидно из определения.

6. *Ненулевые векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю* (критерий перпендикулярности векторов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ перпендикулярны. Тогда

$$(\widehat{\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}}) = 90° \quad \text{и} \quad (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos 90 = 0.$$

Обратно, пусть $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})=0$ и $\bar{\mathbf{a}}\neq\bar{\mathbf{0}}$, $\bar{\mathbf{b}}\neq\bar{\mathbf{0}}$. Тогда

$$|\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi=0 \quad \text{и} \quad |\bar{\mathbf{a}}|\neq 0,\ |\bar{\mathbf{b}}|\neq 0,$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi=0 \quad \text{и} \quad \varphi=90^\circ. \qquad \blacksquare$$

7. *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\bar{\mathbf{a}}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}}=\{b_x;b_y;b_z\}$,

то
$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (20)$$

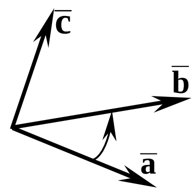
Формулу (20) *называют выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов*. Она легко выводится из свойств 4, 5, и 6.

8. *Если под действием постоянной силы* $\bar{\mathbf{F}}$ *точка перемещается по прямой из точки* M_1 *в* M_2, *то работа силы* $\bar{\mathbf{F}}$ *будет равна*

$$A=\left(\bar{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{M_1M_2}}\right)$$

(физический смысл скалярного произведения).

2. Векторное произведение векторов



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *называется правой, если поворот от вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *к вектору* $\bar{\mathbf{b}}$ *на меньший угол виден из конца вектора* $\bar{\mathbf{c}}$ *против часовой стрелки.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Векторным произведением двух ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{c}}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $|\bar{\mathbf{c}}|=|\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\sin\varphi$, *где* φ *– угол между векторами* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$;

2) *вектор* $\bar{\mathbf{c}}$ *перпендикулярен векторам* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$;

3) *тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *– правая.*

Если хотя бы один из векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}}$ *нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.*

Векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ обозначают $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$ или $\bar{\mathbf{a}}\times\bar{\mathbf{b}}$.

СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1. *При перестановке векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *их векторное произведение меняет знак*, т.е. $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=-[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}]$.

2. *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения*, т.е.
$$[\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=[\bar{\mathbf{a}},\lambda\bar{\mathbf{b}}]=\lambda[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}].$$

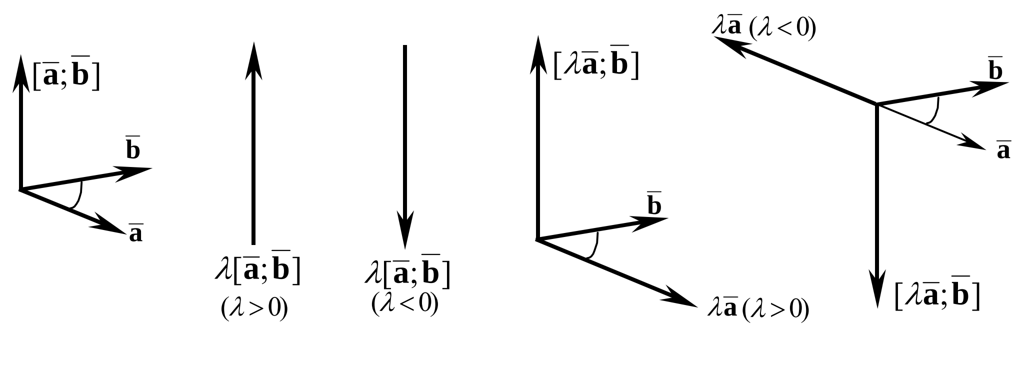
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как направление вектора $\lambda\bar{\mathbf{a}}$ зависит от знака λ, то необходимо рассмотреть отдельно два случая: $\lambda>0$ и $\lambda<0$. Если $\lambda>0$, то
$$\lambda\bar{\mathbf{a}}\upuparrows\bar{\mathbf{a}} \quad \text{и} \quad (\widehat{\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}})=(\widehat{\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}})=\varphi.$$

Следовательно, $[\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\upuparrows[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$ и $[\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\upuparrows\lambda[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$;
$$\left|[\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\right|=|\lambda\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\sin\varphi=\lambda\cdot|\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\sin\varphi=\lambda\cdot\left|[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\right|=\left|\lambda\cdot[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\right|.$$
$$\Rightarrow\quad[\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=\lambda[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}] \text{ при } \lambda>0.$$

Если $\lambda<0$, то
$$\lambda\bar{\mathbf{a}}\uparrow\downarrow\bar{\mathbf{a}} \quad \text{и} \quad (\widehat{\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}})=\varphi, \quad (\widehat{\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}})=\pi-\varphi.$$

Следовательно, $[\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\uparrow\downarrow[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$ и $[\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\upuparrows\lambda[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$;
$$\left|[\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\right|=|\lambda\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\sin(\pi-\varphi)=|\lambda|\cdot|\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\sin\varphi=$$
$$=|\lambda|\cdot\left|[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\right|=\left|\lambda\cdot[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\right|.$$
$$\Rightarrow\quad[\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=\lambda[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}] \text{ при } \lambda<0. \quad \blacksquare$$



3. *Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы*. А именно:
$$[\bar{\mathbf{a}}_1+\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}}]=[\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{b}}]+[\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}}],$$
$$[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1+\bar{\mathbf{b}}_2]=[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1]+[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_2].$$

4. *Ненулевые векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *коллинеарные тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору* (критерий коллинеарности векторов).

5. *Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах* (геометрический смысл векторного произведения).

6. *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *имеют координаты*: $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x;b_y;b_z\}$,

то $$[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]=\left\{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right\}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Заметим, что $[\mathbf{i},\mathbf{j}]=\mathbf{k}$, $[\mathbf{j},\mathbf{k}]=\mathbf{i}$, $[\mathbf{k},\mathbf{i}]=\mathbf{j}$. Теперь, чтобы получить требуемую формулу, достаточно применить к векторному произведению $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]=[(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}),(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})]$ сначала свойство 3, затем свойство 2, и, наконец, свойства 1 и 4.

7. *Если вектор* $\overline{\mathbf{F}}$ *это сила, приложенная к точке* M *, то векторное произведение* $\left[\overline{\mathbf{OM}},\overline{\mathbf{F}}\right]$ *представляет собой момент силы* $\overline{\mathbf{F}}$ *относительно точки* O (механический смысл векторного произведения).

3. Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанным произведением трех векторов* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ *и* $\overline{\mathbf{c}}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *на векторное произведение векторов* $\overline{\mathbf{b}}$ *и* $\overline{\mathbf{c}}$, *т.е.* $(\overline{\mathbf{a}},[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}])$.

Замечание. Из определения скалярного и векторного произведений следует, что если хотя бы один из векторов $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ или $\overline{\mathbf{c}}$ нулевой, то их смешанное произведение равно нулю.

Смешанное произведение векторов $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ обозначают $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})$ или $\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}\overline{\mathbf{c}}$.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1. *При циклической перестановке векторов* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *их смешанное произведение не меняется*, т.е.
$$(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})=(\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}})=(\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}).$$

Замечание. По определению

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}},[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]),\ \ (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})=(\bar{\mathbf{c}},[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]).$$

Но $$(\bar{\mathbf{c}},[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}])=([\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}],\bar{\mathbf{c}}).$$

Следовательно, $$(\bar{\mathbf{a}},[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}])=([\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}],\bar{\mathbf{c}}).$$

Таким образом, смешанное произведение трех ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ можно определить как скалярное произведение вектора $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$ и вектора $\bar{\mathbf{c}}$. Поэтому в обозначении смешанного произведения и опускают квадратные скобки.

2. *При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак*.

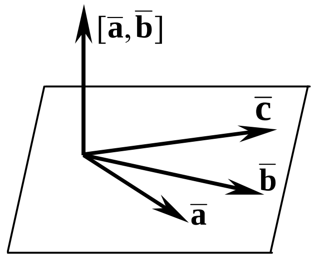
3. *Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения*, т.е.

$$(\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}},\lambda\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\lambda\bar{\mathbf{c}})=\lambda(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}).$$

4. *Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы*. А именно:

$$(\bar{\mathbf{a}}_1+\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})+(\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}),$$
$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1+\bar{\mathbf{b}}_2,\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1,\bar{\mathbf{c}})+(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_2,\bar{\mathbf{c}}),$$
$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}_1+\bar{\mathbf{c}}_2)=(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}_1)+(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}_2).$$

5. *Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю* (критерий компланарности векторов).



Действительно, если векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ компланарны, то вектор $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат эти векторы. Следовательно, $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$ перпендикулярен вектору $\bar{\mathbf{c}}$ и

$$([\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}],\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=0.$$

Обратно, пусть $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=0$. Так как $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=([\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}],\bar{\mathbf{c}})$, то это означает, что или векторы $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$ и $\bar{\mathbf{c}}$ перпендикулярны, или $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=\bar{\mathbf{0}}$.

Пусть $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$ и $\bar{\mathbf{c}}$ перпендикулярны. Так как $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ тоже перпендикулярны вектору $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$, то векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

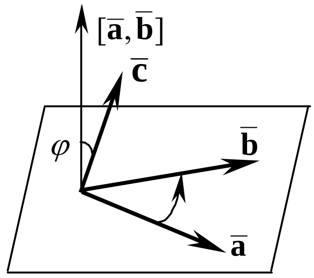
Пусть $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=\bar{\mathbf{0}}$. Тогда векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – коллинеарные и, следовательно, векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ лежат в одной плоскости.

6. *Если* $(\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b},\bar{\mathbf c})>0$*, то векторы* $\bar{\mathbf a}$*,* $\bar{\mathbf b}$*,* $\bar{\mathbf c}$ *образуют правую тройку. Если* $(\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b},\bar{\mathbf c})<0$*, то тройка векторов* $\bar{\mathbf a}$*,* $\bar{\mathbf b}$*,* $\bar{\mathbf c}$ *– левая.*

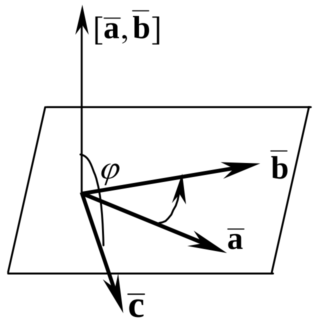
Действительно, пусть $(\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b},\bar{\mathbf c})>0$. Так как

$$(\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b},\bar{\mathbf c})=([\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}],\bar{\mathbf c})=\left|[\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}]\right|\cdot\left|\bar{\mathbf c}\right|\cdot\cos\varphi,$$

то угол φ между вектором $[\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}]$ и $\bar{\mathbf c}$ – острый. Но тогда поворот от вектора $\bar{\mathbf a}$ к $\bar{\mathbf b}$ виден из конца вектора $\bar{\mathbf c}$ также, как из конца вектора $[\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}]$, т.е. против часовой стрелки. Следовательно, тройка векторов $\bar{\mathbf a}$, $\bar{\mathbf b}$, $\bar{\mathbf c}$ – правая .



Если $(\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b},\bar{\mathbf c})=([\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}],\bar{\mathbf c})<0$, то угол φ между вектором $[\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}]$ и $\bar{\mathbf c}$ – тупой. Но тогда поворот от $\bar{\mathbf a}$ к $\bar{\mathbf b}$ из конца вектора $\bar{\mathbf c}$ и из конца вектора $[\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}]$ виден в разных направлениях. Значит тройки векторов $\bar{\mathbf a}$, $\bar{\mathbf b}$, $[\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}]$ и $\bar{\mathbf a}$, $\bar{\mathbf b}$, $\bar{\mathbf c}$ имеют противоположную ориентацию. Следовательно, тройка векторов $\bar{\mathbf a}$, $\bar{\mathbf b}$, $\bar{\mathbf c}$ – левая.



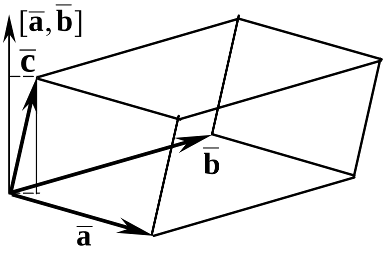
7. *Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов* $\bar{\mathbf a}$*,* $\bar{\mathbf b}$*,* $\bar{\mathbf c}$ *равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах* (геометрический смысл смешанного произведения).

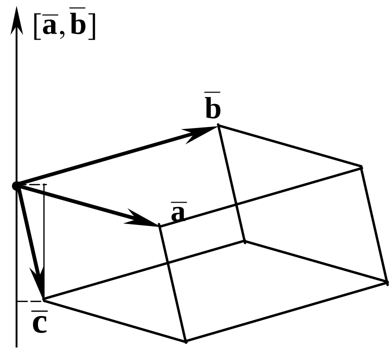
Действительно, объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{\mathbf a}$, $\bar{\mathbf b}$, $\bar{\mathbf c}$ равен

$$V=S_{осн}\cdot H\,.$$

Основание параллелепипеда – параллелограмм, построенный на векторах $\bar{\mathbf a}$ и $\bar{\mathbf b}$. Следовательно, его площадь $S_{осн}=|[\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}]|$.

Высота параллелепипеда H равна $\text{Пр}_{[\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}]}\bar{\mathbf c}$, если тройка векторов $\bar{\mathbf a}$, $\bar{\mathbf b}$, $\bar{\mathbf c}$ – правая и $-\text{Пр}_{[\bar{\mathbf a},\bar{\mathbf b}]}\bar{\mathbf c}$, если тройка векторов $\bar{\mathbf a}$, $\bar{\mathbf b}$, $\bar{\mathbf c}$ – левая.





Таким образом, получаем:

$$V = S_{осн} \cdot H = |[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]| \cdot \left| \text{Пр}_{[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]} \overline{\mathbf{c}} \right| = \left| |[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]| \cdot \text{Пр}_{[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]} \overline{\mathbf{c}} \right| = |(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})|.$$

8. *Объем пирамиды, построенной на векторах* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *равен* $\frac{1}{6}$ *модуля их смешанного произведения* (следствие свойства 7).

9. *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *имеют координаты:* $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\overline{\mathbf{c}} = \{c_x; c_y; c_z\}$,

то
$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Действительно, так как $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}])$ и

$$[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}] = \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right\},$$

то
$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = a_x \cdot \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \cdot \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \cdot \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

§10. Линейные операторы

1. Определение линейного оператора

Пусть L и V – линейные пространства над $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция, заданная на* L *и имеющая областью значений* $V^{/} \subset V$ *называется оператором (преобразованием), действующим из* L *в* V.

Оператор, действующий из L *в* L, *называют оператором пространства* L.

Если оператор φ действует из L в V и вектору $x \in L$ ставит в соответствие вектор $y \in V$, то вектор y называется *образом вектора* x и обозначается $\varphi(x)$ или φx, а x называется *прообразом вектора* y.

Оператор φ называется *линейным*, если для любых $x, x_1, x_2 \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1) $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$;

2) $\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x)$.

Первое условие называется *свойством аддитивности*, второе – *свойством однородности* оператора. Вместе оба эти свойства называются *свойствами линейности* оператора и могут быть записаны в виде

$$\varphi(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = \alpha \cdot \varphi(x_1) + \beta \cdot \varphi(x_2),$$

где $x_1, x_2 \in L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

В этом параграфе будем рассматривать только линейные операторы, поэтому слово «линейный» будем обычно опускать.

ПРИМЕРЫ линейных операторов.

1) Пусть φ – оператор пространства L и $\varphi(x) = o$, $\forall x \in L$. Очевидно, что такой оператор будет линейным. Его называют *нулевым* и обозначают обычно Θ.

2) Пусть φ – оператор пространства L, действующий по правилу $\varphi(x) = x$, $\forall x \in L$. Этот оператор будет линейным. Его называют *тождественным оператором* пространства L и обозначают обычно I.

3) Пусть λ – фиксированное число, φ – оператор пространства L, действующий по правилу $\varphi(x) = \lambda \cdot x$, для любого $x \in L$. Этот оператор будет линейным. Его называют *оператором подобия*.

4) Пусть оператор φ ставит в соответствие вектору $\bar{\mathbf{x}} \in V^{(3)}$ проекцию этого вектора на некоторую фиксированную плоскость. Так как проекция суммы векторов равна сумме проекций векторов-слагаемых, а проекция произведения вектора на число равна произведению проекции вектора на это число, то это будет линейный оператор, действующий из $V^{(3)}$ в $V^{(2)}$.

5) Рассмотрим оператор φ пространства $\mathbb{R}^n$, который любой вектор

$$\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_m; \xi_{m+1}; \ldots; \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

переводит в вектор $\varphi(\mathbf{x}) = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_m; 0; \ldots; 0)$.

Покажем, что это оператор является линейным.

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – два произвольных вектора пространства $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_m; \xi_{m+1}; \ldots; \xi_n), \quad \mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_m; \eta_{m+1}; \ldots; \eta_n)$$

Тогда для любых вещественных чисел α, β

$$\alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{y} = (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1;\ldots;\alpha\xi_m + \beta\eta_m;\alpha\xi_{m+1} + \beta\eta_{m+1};\ldots;\alpha\xi_n + \beta\eta_n)$$

Имеем:

$$\varphi\,\mathbf{x} = (\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_m;0;\ldots;0)\,, \quad \varphi\,\mathbf{y} = (\eta_1;\eta_2;\ldots;\eta_m;0;\ldots;0)\,;$$

$$\varphi(\alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{y}) = (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1;\alpha\xi_2 + \beta\eta_2;\ldots;\alpha\xi_m + \beta\eta_m;0;\ldots;0) =$$

$$= \alpha(\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_m;0;\ldots;0) + \beta(\eta_1;\eta_2;\ldots;\eta_m;0;\ldots;0) = \alpha\cdot\varphi(\mathbf{x}) + \beta\cdot\varphi(\mathbf{y})$$

Следовательно, оператор φ – линейный.

6) Рассмотрим линейное пространство $C[a,b]$ функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a,b]$. Обозначим $C^{(1)}[a,b]$ – множество дифференцируемых функций из $C[a,b]$. Легко проверить, что $C^{(1)}[a,b]$ – подпространство пространства $C[a,b]$.

Пусть оператор φ ставит в соответствие функции $\mathrm{f}(t) \in C^{(1)}[a,b]$ ее производную $\mathrm{f}'(t) \in C[a,b]$, т.е.

$$\varphi(\mathrm{f}(t)) = \mathrm{f}'(t)\,.$$

Так как производная от суммы функций равна сумме производных от этих функций, и производная от произведения функции на число равна произведению производной функции на это число, то это будет линейный оператор, действующий из $C^{(1)}[a,b]$ в $C[a,b]$.

2. Линейные операторы конечномерных пространств

Пусть φ – оператор пространства L_n, размерности n (n-мерного пространства). Выберем в L_n базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда для любого вектора $x \in L_n$ имеем

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

и $\varphi(x) = \varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n) = \xi_1\varphi(e_1) + \xi_2\varphi(e_2) + \ldots + \xi_n\varphi(e_n)$.

Следовательно, для задания оператора φ в конечномерном пространстве достаточно задать образы базисных векторов, так как если $\varphi(e_i)$ известны, то известен и образ любого вектора $x \in L_n$. Причем, координаты вектора x и $\varphi(x)$ можно связать удобной формулой. Получим ее.

Так как φ – оператор пространства L_n, т.е. векторы $\varphi(e_i) \in L_n$, то их можно разложить по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\varphi(e_1)=\alpha_{11}e_1+\alpha_{21}e_2+\ldots+\alpha_{n1}e_n\,,$$
$$\varphi(e_2)=\alpha_{12}e_1+\alpha_{22}e_2+\ldots+\alpha_{n2}e_n\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$
$$\varphi(e_n)=\alpha_{1n}e_1+\alpha_{2n}e_2+\ldots+\alpha_{nn}e_n\,.$$

Составим матрицу **A** из коэффициентов разложения векторов $\varphi(e_i)$ по базису $e_1,e_2,\ldots,e_n$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & ... & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & ... & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & ... & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & ... & \alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют *матрицей линейного оператора* φ *в базисе* $e_1,e_2,\ldots,e_n$ (относительно базиса $e_1,e_2,\ldots,e_n$).

Если известна матрица **A** линейного оператора в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$, то вектор x и его образ $y=\varphi(x)$ будут связаны соотношением:
$$\mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X},$$
где $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \ldots\\ \eta_n\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \ldots\\ \xi_n\end{pmatrix}$ – матрицы-столбцы из координат векторов y и x в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$.

Действительно,
$$\varphi(x)=\varphi(\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n)=\xi_1\varphi(e_1)+\xi_2\varphi(e_2)+\ldots+\xi_n\varphi(e_n)=$$
$$=\xi_1(\alpha_{11}e_1+\ldots+\alpha_{n1}e_n)+\xi_2(\alpha_{12}e_1+\ldots+\alpha_{n2}e_n)+\ldots+\xi_n(\alpha_{1n}e_1+\ldots+\alpha_{nn}e_n)=$$
$$=e_1(\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n)+$$
$$+e_2(\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_n)+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$+e_n(\alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\ldots+\alpha_{nn}\xi_n).$$

С другой стороны, $y=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\ldots+\eta_ne_n$.

Отсюда, в силу единственности разложения вектора по базису, следует:
$$\eta_1=\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n,$$
$$\eta_2=\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta_n=\alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\ldots+\alpha_{nn}\xi_n,$$
т.е.
$$\mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}.$$

ПРИМЕРЫ матриц линейных операторов.

1) Матрица нулевого оператора Θ_n n-мерного пространства в любом базисе нулевая.

2) Матрица тождественного оператора n-мерного пространства в любом базисе единичная.

3) Матрица оператора подобия n-мерного пространства в любом базисе имеет вид

$$\mathbf{A}=\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

4) Пусть оператор φ ставит в соответствие вектору $\overline{\mathbf{x}}\in V^{(3)}$ его проекцию на плоскость xOy. Матрица этого оператора зависит от выбранного в пространстве $V^{(3)}$ базиса. Найдем его матрицу в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Имеем: $\varphi(\mathbf{i})=\mathbf{i}$, $\varphi(\mathbf{j})=\mathbf{j}$, $\varphi(\mathbf{k})=\mathbf{0}$.

Следовательно, матрица оператора φ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будет иметь вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Рассмотрим оператор φ пространства $\mathbb{R}^n$, который любой вектор

$$\mathbf{x}=(\xi_1;\xi_2;\dots;\xi_m;\xi_{m+1};\dots;\xi_n)\in\mathbb{R}^n$$

переводит в вектор $\varphi\mathbf{x}=(\xi_1;\xi_2;\dots;\xi_m;0;\dots;0)$.

В базисе $\mathbf{e_1}=(1;0;0;\dots;0)$, $\mathbf{e_2}=(0;1;0;\dots;0)$, $\dots$, $\mathbf{e_n}=(0;0;0;\dots;1)$ его матрица будет иметь вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{0 & 0 & \dots & 0}_{m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Так как матрица линейного оператора, очевидно, зависит от выбранного базиса, то возникает вопрос: как изменится матрица оператора при переходе к другому базису? Выясним это.

Пусть φ – оператор n-мерного пространства L_n. Выберем в L_n два базиса $e_1, e_2, \dots e_n$ и $f_1, f_2, \dots f_n$.

Оператор φ в базисе $e_1, e_2, \dots e_n$ имеет матрицу $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$, в базисе $f_1, f_2, \dots f_n$ – матрицу $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$, т.е.

$$\varphi(e_k) = \alpha_{1k}e_1 + \alpha_{2k}e_2 + \dots + \alpha_{nk}e_n, \qquad \varphi(f_k) = \beta_{1k}f_1 + \beta_{2k}f_2 + \dots + \beta_{nk}f_n$$

Установим связь между матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Пусть
$$\begin{aligned} f_1 &= \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \dots + \tau_{n1}e_n, \\ f_2 &= \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \dots + \tau_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n &= \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \dots + \tau_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathbf{T} = (\tau_{ij})$ – матрицу перехода от базиса $e_1, e_2, \dots e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots f_n$, т.е.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу линейности оператора φ будем иметь

$$\varphi(f_k) = \varphi(\tau_{1k}e_1 + \tau_{2k}e_2 + \dots + \tau_{nk}e_n) = \tau_{1k}\varphi(e_1) + \tau_{2k}\varphi(e_2) + \dots + \tau_{nk}\varphi(e_n) =$$

$$= \tau_{1k}(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + \tau_{2k}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n) \dots + \tau_{nk}(\alpha_{1n}e_1 + \dots + \alpha_{nn}e_n) =$$

$$= (\alpha_{11}\tau_{1k} + \alpha_{12}\tau_{2k} + \dots + \alpha_{1n}\tau_{nk})e_1 + (\alpha_{21}\tau_{1k} + \alpha_{22}\tau_{2k} + \dots + \alpha_{2n}\tau_{nk})e_2 + \dots + (\alpha_{n1}\tau_{1k} + \dots + \alpha_{nn}\tau_{nk})e_n.$$

С другой стороны,

$$\varphi(f_k) = \beta_{1k}f_1 + \beta_{2k}f_2 + \dots + \beta_{nk}f_n =$$

$$= \beta_{1k}(\tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \dots + \tau_{n1}e_n) + \beta_{2k}(\tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \dots + \tau_{n2}e_n) \dots + \beta_{nk}(\tau_{1n}e_1 + \dots + \tau_{nn}e_n) =$$

$$= (\tau_{11}\beta_{1k} + \tau_{12}\beta_{2k} + \dots + \tau_{1n}\beta_{nk})e_1 + (\tau_{21}\beta_{1k} + \tau_{22}\beta_{2k} + \dots + \tau_{2n}\beta_{nk})e_2 + \dots + (\tau_{n1}\beta_{1k} + \dots + \tau_{nn}\beta_{nk})e_n.$$

Отсюда, в силу единственности разложения вектора $\varphi(f_k)$ по базису $e_1, e_2, \dots e_n$, получаем:

$$\alpha_{11}\tau_{1k}+\alpha_{12}\tau_{2k}+\ldots+\alpha_{1n}\tau_{nk}=\tau_{11}\beta_{1k}+\tau_{12}\beta_{2k}+\ldots+\tau_{1n}\beta_{nk},$$
$$\alpha_{21}\tau_{1k}+\alpha_{22}\tau_{2k}+\ldots+\alpha_{2n}\tau_{nk}=\tau_{21}\beta_{1k}+\tau_{22}\beta_{2k}+\ldots+\tau_{2n}\beta_{nk},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{n1}\tau_{1k}+\alpha_{n2}\tau_{2k}+\ldots+\alpha_{nn}\tau_{nk}=\tau_{n1}\beta_{1k}+\tau_{n2}\beta_{2k}+\ldots+\tau_{nn}\beta_{nk},$$

или в матричной форме $\mathbf{AT_k}=\mathbf{TB_k}$,

где $\mathbf{T_k}$, $\mathbf{B_k}$ – k-й столбец матриц $\mathbf{T}$ и $\mathbf{B}$ соответственно. Тогда матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{T}$ будут связаны соотношением

$$\mathbf{AT}=\mathbf{TB}.$$

Так как $\mathbf{T}$ – матрица преобразования базиса, то она невырожденная. Поэтому существует обратная матрица $\mathbf{T^{-1}}$. Умножая матричное равенство $\mathbf{AT}=\mathbf{TB}$ слева на матрицу $\mathbf{T^{-1}}$, получаем:

$$\mathbf{B}=\mathbf{T^{-1}AT}.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10.1. *Пусть φ – оператор n-мерного пространства L_n, $e_1,e_2,\ldots e_n$ и $f_1,f_2,\ldots f_n$ – два базиса пространства L_n, причем*

$$f_1=\tau_{11}e_1+\tau_{21}e_2+\ldots+\tau_{n1}e_n,$$
$$f_2=\tau_{12}e_1+\tau_{22}e_2+\ldots+\tau_{n2}e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n=\tau_{1n}e_1+\tau_{2n}e_2+\ldots+\tau_{nn}e_n.$$

Если $\mathbf{A}=(\alpha_{ij})$ *– матрица оператора φ в базисе $e_1,e_2,\ldots e_n$,*

$\mathbf{B}=(\beta_{ij})$ *– матрица оператора φ в базисе $f_1,f_2,\ldots f_n$,*

то $$\mathbf{B}=\mathbf{T^{-1}AT},$$

где $\mathbf{T}=(\tau_{ij})$ *– матрица перехода от базиса $e_1,e_2,\ldots e_n$ к базису $f_1,f_2,\ldots f_n$, т.е.*

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn}\end{pmatrix}.$$

Замечание. Квадратные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, для которых найдется невырожденная матрица $\mathbf{T}$ такая, что имеет место равенство $\mathbf{B}=\mathbf{T^{-1}AT}$, называются *подобными*.

4. Диагонализируемость линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы

Так как матрица линейного оператора конечномерного пространства зависит от выбора базиса, то возникает вопрос: существует ли базис, в котором она имеет «простой» вид? Например, является диагональной?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Оператор φ n-мерного пространства L_n называется диагонализируемым, если в L_n существует базис, в котором матрица линейного оператора диагональная.*

Чтобы дать ответ на вопрос, когда оператор диагонализируем, нам понадобится несколько новых понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть φ – оператор пространства L. Если для некоторого ненулевого вектора $x \in L$ и числа λ имеем $\varphi(x) = \lambda x$, то число λ называется собственным значением оператора φ, а вектор x называется собственным вектором оператора φ, относящимся к собственному значению λ.*

Укажем свойства, которыми обладают собственные векторы.

1. *Каждый собственный вектор x оператора φ относится к единственному собственному значению.*

Действительно, если предположить, что собственный вектор x относится к двум собственным значениям λ_1 и λ_2, то из равенств $\varphi(x) = \lambda_1 x$ и $\varphi(x) = \lambda_2 x$ получаем:

$$\varphi(x) - \varphi(x) = \lambda_1 x - \lambda_2 x = (\lambda_1 - \lambda_2)x .$$

Но $\varphi(x) - \varphi(x) = o$. Следовательно,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x = o .$$

Откуда $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. *Если x_1 и x_2 – собственные векторы оператора φ, относящиеся к одному и тому же собственному значению λ, то их линейная комбинация $\alpha x_1 + \beta x_2$ – собственный вектор оператора φ, относящийся к тому же собственному значению.*

Действительно, если $\varphi(x_1) = \lambda x_1$, $\varphi(x_2) = \lambda x_2$, то

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(x_2) = \alpha(\lambda x_1) + \beta(\lambda x_2) = \lambda(\alpha x_1 + \beta x_2) .$$

Из этого свойства следует:

а) *каждому собственному значению λ соответствует бесчисленное множество собственных векторов*;

б) *если к множеству всех собственных векторов x оператора φ, относящихся к одному и тому же собственному значению λ, присоединить нулевой вектор* (нулевой вектор по определению не является собственным), *то получим подпространство пространства L. Это подпространство называется собственным подпространством оператора φ и обозначается L_λ.*

3. *Собственные векторы $x_1, x_2, \ldots x_k$ оператора φ, относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, линейно независимы.*

Из свойства 3 следует, что *линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве L_n, не может иметь более n собственных значений.* Кроме того, *в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы.* Более того, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10.2. *Матрица* **A** *оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все базисные векторы e_i являются собственными векторами этого оператора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Пусть матрица **A** оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеет диагональный вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда по определению матрицы линейного оператора

$$\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \;\; \varphi(e_2) = \lambda_2 e_2, \;\; \ldots, \;\; \varphi(e_n) = \lambda_n e_n.$$

Следовательно, базисные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – собственные векторы оператора φ.

2) Пусть базисные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в L_n являются собственными векторами линейного оператора φ, действующего в L_n. Тогда

$$\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \;\; \varphi(e_2) = \lambda_2 e_2, \;\; \ldots, \;\; \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$$

и матрица **A** имеет диагональный вид. ■

Из теоремы 10.3 получаем следующий КРИТЕРИЙ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТИ ОПЕРАТОРА: *оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда в пространстве L_n существует базис из собственных векторов оператора φ.*

5. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора

Пусть φ – оператор пространства L_n, x – собственный вектор оператора φ, относящийся к собственному значению λ, т.е. $\varphi(x) = \lambda x$.

Выберем в L_n какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Если $\mathbf{A}$ – матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, $\mathbf{X}$ – матрица-столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в том же базисе, то векторное равенство $\varphi(x) = \lambda x$ равносильно матричному равенству $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$,

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \lambda \mathbf{X} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

Но матричное уравнение $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными.

Таким образом, поучили: *x – собственный вектор оператора φ, относящийся к собственному значению λ, тогда и только тогда, когда его координаты $\{\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n\}$ являются решением (нетривиальным) системы линейных однородных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$.

Полученное однозначное соответствие между нетривиальными решениями системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ и собственными векторами оператора φ позволяет полностью описать собственное подпространство L_λ. Действительно, любое решение системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ является линейной комбинацией его фундаментальной системы решений (т.е. пространство решений $\mathcal{H}$ – конечномерное, а фундаментальная система решений – его базис). Следовательно, L_λ *тоже является конечномерным, а его базис образуют собственные векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$, координатами которых являются решения из фундаментальной системы решений системы линейных однородных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$.

Итак, мы знаем, как найти L_λ, если известно собственное значение λ. Но полученное соответствие между решениями системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ и собственными векторами оператора φ, относящимися к собственному значению λ, позволяет найти и само λ.

Действительно, собственные векторы по определению ненулевые. Следовательно, система $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ должна иметь нетривиальные решения. А это будет иметь место, если $rang(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \neq n$ или, что то же, $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.

Матрица $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ называется *характеристической матрицей оператора* φ. Определитель характеристической матрицы $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ – многочлен степени n относительно переменной λ. Этот многочлен называют *характеристическим многочленом* оператора φ (*матрицы* $\mathbf{A}$), а его корни – *характеристическими корнями оператора* φ (*матрицы* $\mathbf{A}$).

Таким образом, *число* λ *является собственным значением оператора* φ *тогда и только тогда, когда оно является его характеристическим корнем*.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать тождество:

   а) $(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})\cdot(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})=\begin{vmatrix}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{c}})\end{vmatrix}$; б) $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})^2=\begin{vmatrix}(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{c}})\end{vmatrix}$.

2. Доказать, что
$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\le\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\cdot(c_1^2+c_2^2+c_3^2)}.$$

3. Даны ненулевой вектор $\overline{\mathbf{a}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{a}})=p$. **Подсказка**: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно.
4. Даны два вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$. Представить вектор $\overline{\mathbf{b}}$ в виде суммы двух векторов $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ так, чтобы вектор $\overline{\mathbf{x}}$ был коллинеарен вектору $\overline{\mathbf{a}}$, а вектор $\overline{\mathbf{y}}$ был ортогонален вектору $\overline{\mathbf{a}}$.
5. Даны два неколлинеарных вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$, компланарный векторам $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, и удовлетворяющий условиям $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{x}})=1$, $(\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{x}})=0$.
6. Даны три некомпланарных вектора $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$. Найти вектор $\overline{\mathbf{x}}$, удовлетворяющий системе уравнений $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{x}})=\alpha$, $(\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{x}})=\beta$, $(\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{x}})=\gamma$.
7. Даны неколлинеарные векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})=p$. **Подсказка**: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно.

8. Доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$, удовлетворяющие условию $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]+[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]+[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]=\bar{\mathbf{0}}$, компланарны.
9. Векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ удовлетворяют условию $\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{c}}=\bar{\mathbf{0}}$. Доказать, что $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]=[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]$.
10. Доказать, что если три вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ попарно неколлинеарные и $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]=[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]$, то они удовлетворяют соотношению $\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{c}}=\bar{\mathbf{0}}$.
Подсказка: покажите сначала, что векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ компланарны.
11. Даны произвольные векторы $\bar{\mathbf{p}}$, $\bar{\mathbf{q}}$, $\bar{\mathbf{r}}$, $\bar{\mathbf{n}}$. Доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}=[\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{n}}]$, $\bar{\mathbf{b}}=[\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{n}}]$ и $\bar{\mathbf{c}}=[\bar{\mathbf{r}},\bar{\mathbf{n}}]$ компланарны.
12. Доказать, что если векторы $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$, $[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]$, $[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]$ компланарны, то они коллинеарны.
13. Три вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ связаны соотношением $\bar{\mathbf{a}}=[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]$, $\bar{\mathbf{b}}=[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]$, $\bar{\mathbf{c}}=[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$. Найти длины векторов и углы между ними.
14. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по модулю площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих граням, равна нулю.
15. Могут ли отличные от нуля числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2. z_3 удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0, \\ x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=0, \\ x_3x_2+y_3y_2+z_3z_2=0, \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0. \end{cases}$$

16. Даны три некомпланарных вектора $\overline{\mathbf{OA}}=\bar{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{OB}}=\bar{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{OC}}=\bar{\mathbf{c}}$, отложенных от одной точки O. Выразить через $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ вектор $\overline{\mathbf{OH}}$, где H – ортогональная проекция точки O на плоскость ABC .
17. Решить уравнение $[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]x+[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]y+[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]z+\bar{\mathbf{d}}=\bar{\mathbf{0}}$.
18. Доказать тождество $([\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}],[\bar{\mathbf{c}},\mathbf{d}])=\begin{vmatrix} (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{c}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{d}}) \\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{d}}) \end{vmatrix}$.
19. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ равна $S=\sqrt{\begin{vmatrix} (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) \\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{b}}) \end{vmatrix}}$.
20. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ равен $V=\sqrt{\begin{vmatrix} (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{c}}) \end{vmatrix}}$.

21. Какие из следующих множеств образуют подпространства линейного пространства $\mathbb{R}^n$:
   а) $M_1 = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0\}$;
   б) $M_2 = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1\}$;
   в) $M_3 = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_n = 0\}$;
   г) $M_4 = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_1 = 1\}$;
   д) $M_5 = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_1 = \alpha_n\}$;
   е) $M_6 = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_1 = \alpha_n = 0\}$;
   ж) $M_7 = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_1 \cdot \alpha_n = 0\}$;
   з) $M_8 = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = 0\}$;
   и) $M_9 = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots = 0\}$;
   к) $M_{10} = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n\}$;
   л) $M_{11} = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots\}$;
   м) $M_{12} = \{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{Z},\ \forall i\}$.
22. Какие из следующих множеств образуют подпространство линейного пространства $V^{(3)}$:
   а) множество свободных векторов пространства, координаты которых в декартовом базисе – целые числа;
   б) множество свободных векторов пространства, параллельных оси Ox;
   в) множество радиус-векторов, концы которых лежат на фиксированной прямой;
   г) множество радиус-векторов, концы которых лежат в первой и третьей четверти;
   д) множество векторов, образующих с данным ненулевым вектором угол α.
23. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n[x]$ рассматриваются множества многочленов, удовлетворяющих условиям:
   а) $f(0) = 0$; б) $f(1) = 0$; в) $f(0) = f(1) = 0$.
   Докажите, что каждое из этих подмножеств является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n[x]$ и найдите его размерность.
24. Докажите, что пересечение двух подпространств линейного пространства снова является подпространством этого пространства.
25. Пусть L_1 и L_2 – подпространства линейного пространства L. *Суммой подпространств* L_1 и L_2 (обозначают $L_1 + L_2$) называется подмножество L, элементы которого могут быть записаны в виде $x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Доказать, что $L_1 + L_2$ тоже является подпространством линейного пространства L.

26. Пусть x, y – векторы линейного пространства, α, β – числа. Доказать, что $\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$ или $x = y$.
27. Доказать, что если некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима.
28. Доказать, что если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.
29. Может ли система векторов быть линейно зависимой, если любая ее подсистема линейно независима?
30. Пусть x, y, z – линейно независимая система векторов. Будет ли линейно независимой система векторов $x-y$, $y-z$, $z-x$?
31. Пусть x, y, z – линейно независимая система векторов. Доказать, что векторы x, $x+y$, $x+y+z$ также линейно независимы.
32. Доказать, что если векторы x, y и z линейного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы, то векторы $x+y$, $x+z$, $y+z$ тоже линейно независимы.
33. Какому условию должно удовлетворять число α, чтобы векторы $\mathbf{a_1} = (\alpha;1;0)$, $\mathbf{a_2} = (1;\alpha;1)$, $\mathbf{a_3} = (0;1;\alpha)$ пространства $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимыми?
34. Какому условию должны удовлетворять числа α, β, γ, чтобы векторы $\mathbf{a_1} = (1;\alpha;\alpha^2)$, $\mathbf{a_2} = (1;\beta;\beta^2)$, $\mathbf{a_3} = (1;\gamma;\gamma^2)$ пространства $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимыми?
35. Векторы a_1, a_2, a_3 – линейно зависимы и вектор a_3 не является линейной комбинацией векторов a_1, a_2. Доказать, что векторы a_1 и a_2 различаются лишь числовым множителем.
36. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

    а) e^x, e^{2x}, e^{3x} $(x \in (-\infty;+\infty))$; б) e^x, shx . chx $(x \in (-\infty;+\infty))$;

    в) $\dfrac{1}{x}$, x, 1 $(x \in (0;1))$; г) 1, tgx, $ctgx$ $\left(x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.
37. Доказать, что линейный оператор пространства L всегда переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.
38. Докажите, что если x и y – собственные векторы линейного оператора φ, относящиеся к различным собственным значениям, то $\alpha x + \beta y$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$ не является собственным вектором оператора φ.
39. Пусть φ – оператор, действующий из L в V. *Ядром оператора* φ называется множество $Ker\varphi = \{x \in L \mid \varphi x = o\}$. Доказать, что ядро оператора является подпространством линейного пространства L. Найти ядро оператора дифференцирования в пространстве многочленов.
40. Доказать, что если φ – линейный оператор, то $\varphi o = o$.

Глава III. Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие линии и поверхности (прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры.

Линия и поверхность – геометрические понятия, точное и достаточно общее определение которых дать затруднительно. В разных разделах математики их определяют по-разному. В аналитической геометрии на плоскости (в пространстве) вводят декартову прямоугольную систему координат Oxy ($Oxyz$) и называют *линией на плоскости* геометрическое место точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y)=0, \tag{21}$$

где $F(x,y)$ – многочлен степени n. *Поверхностью* называют геометрическое место точек $M(x;y;z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y,z)=0, \tag{22}$$

где $F(x,y,z)$ – многочлен степени n. *Линией в пространстве* называют пересечение двух поверхностей.

Уравнения (21) и (22) называют *общими уравнениями* линии на плоскости и поверхности соответственно. Степень многочлена $F(x,y)$ ($F(x,y,z)$) называют *порядком линии* (*поверхности*).

Определив таким образом линии и поверхности, в аналитической геометрии их геометрические свойства выясняют в результате изучения свойств уравнений этих линий и поверхностей.

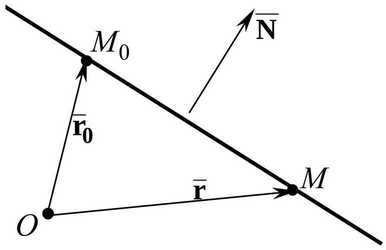
§11. Прямая на плоскости

1. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование

Получим общее уравнение прямой на плоскости, решив следующую задачу.

ЗАДАЧА 11.1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{N}}=\{A;B\}$.

Пусть точка $M(x;y)$ – произвольная точка прямой (такую точку мы будем в дальнейшем называть *текущей точкой* прямой). Обозначим через $\overline{\mathbf{r}}_0$ и $\overline{\mathbf{r}}$ – радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Рассмот-



рим векторы $\overline{\mathbf{M_0M}} = \overline{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{r}}_0$ и $\overline{\mathbf{N}}$. По условию задачи они перпендикулярны. Следовательно,

$$\left(\overline{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{r}}_0, \overline{\mathbf{N}}\right) = 0, \tag{23}$$

или, в координатной форме,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{24}$$

Уравнению (24) удовлетворяют координаты любой точки прямой и не удовлетворяют координаты других точек плоскости. Следовательно, это и есть искомое уравнение. Уравнения (23) и (24) называют *уравнениями прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{N}} = \{A;B\}$* (в векторной и координатной форме соответственно).

Раскроем скобки в уравнении (24) и приведем подобные слагаемые:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Обозначим число $(-Ax_0 - By_0)$ через C и получим *общее уравнение прямой на плоскости*:

$$Ax + By + C = 0. \tag{25}$$

Таким образом, *прямая на плоскости является линией первого порядка. В общем случае она задается уравнением* (25), *где A, B, C – числа*. Причем A и B не обращаются в ноль одновременно, так как *с геометрической точки зрения это коэффициенты вектора, перпендикулярного прямой*.

Вектор, перпендикулярный прямой, называют *нормальным вектором* этой прямой.

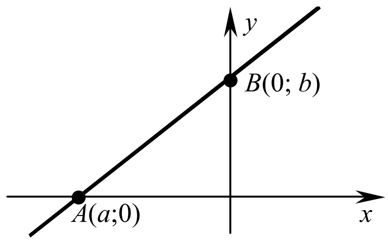
Проведем исследование общего уравнения прямой. Т.е. выясним, что можно сказать о прямой по виду ее общего уравнения.

Если в уравнении (25) все коэффициенты A, B и C отличны от нуля, то уравнение называют *полным*; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – уравнение называют *неполным*.

1) Пусть уравнение (25) – полное. Преобразуем его следующим образом:

$$Ax + By = -C,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$



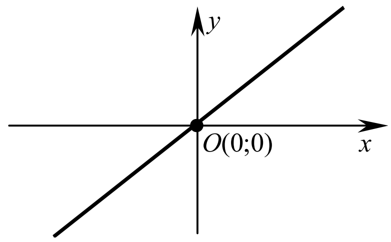
Обозначим $-\dfrac{C}{A} = a$ и $-\dfrac{C}{B} = b$. Тогда уравнение прямой примет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (26)$$

Уравнение (26) называют *уравнением прямой в отрезках*. Легко проверить, что прямая, имеющая уравнение (26), проходит через точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$. Следовательно, с геометрической точки зрения a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно. Поэтому уравнение прямой в отрезках удобно использовать при построении прямой.

2) Пусть в уравнении (25) коэффициенты A и B – ненулевые, а $C=0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

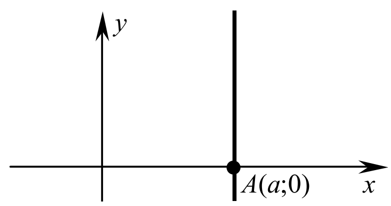
$$Ax+By=0.$$



Легко проверить, что такая *прямая проходит через начало координат* $O(0;0)$.

3) Пусть в уравнении (25) один из коэффициентов A или B – нулевой, а $C\neq 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax+C=0 \quad \text{или} \quad By+C=0.$$

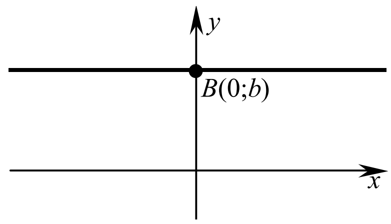


Эти уравнения можно записать в виде

$$x=-\frac{C}{A} \quad \text{и} \quad y=-\frac{C}{B},$$

или
$$x=a \quad \text{и} \quad y=b,$$

где $a=-\dfrac{C}{A}$ и $b=-\dfrac{C}{B}$. Легко проверить, что первая из этих прямых проходит параллельно оси Oy через точку $A(a;0)$, а вторая – параллельно оси Ox через точку $B(0;b)$. Таким образом, *прямая в уравнении которой отсутствует одна из координат параллельна оси отсутствующей координаты.*



4) Пусть в уравнении (25) $C=0$ и один из коэффициентов A или B тоже нулевой, т.е. уравнение прямой имеет вид

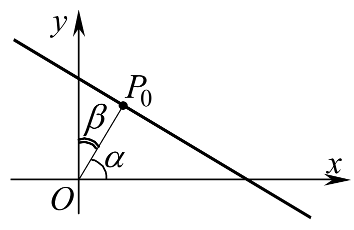
$$Ax=0 \quad \text{или} \quad By=0.$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$x=0 \quad \text{и} \quad y=0.$$

Но это уравнения координатной оси Oy в первом случае и координатной оси Ox – во втором.

Замечание. Пусть прямая ℓ не проходит через начало координат, $P_0(x_0;y_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного на ℓ из начала координат, $\overline{\mathbf{n}}=\{\cos\alpha;\cos\beta\}$ – орт вектора $\overline{\mathbf{OP_0}}$. Так как $\overline{\mathbf{n}}$ является нормальным вектором прямой ℓ, то ее общее уравнение можно записать в виде



$$\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y-p=0,$$

где $p=\left|\overline{\mathbf{OP_0}}\right|$ – расстояние от начала координат до прямой ℓ (доказать самим). Этот *частный случай общего уравнения прямой* называется *нормальным уравнением* прямой.

Для прямой, проходящей через начало координат, тоже можно записать нормальное уравнение. В этом случае оно будет иметь вид

$$\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y=0,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы нормального вектора прямой.

2. Другие формы записи уравнения прямой на плоскости

В аналитической геометрии прямую на плоскости обычно задают общим уравнением. Но условия задачи могут потребовать записать ее уравнение в другом виде. Два таких вида нам уже встретились (уравнения (24) и (26)). Рассмотрим, в каком еще виде можно записать уравнение прямой.

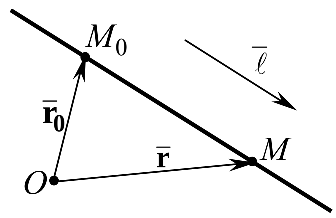
1) Параметрические уравнения прямой

Получим параметрические уравнение прямой на плоскости, решив следующую задачу.

ЗАДАЧА 11.2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$, параллельно вектору $\overline{\ell}=\{m;n\}$.

Вектор, параллельный прямой, называют *направляющим вектором* этой прямой.

Пусть точка $M(x;y)$ – текущая точка прямой. Обозначим через $\overline{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ и $\overline{\mathbf{r}}$ – радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Рассмотрим векторы $\overline{\mathbf{M_0M}}=\overline{\mathbf{r}}-\overline{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ и $\overline{\ell}$. По условию задачи они параллельны. Следовательно, существует такое число t, что $\overline{\mathbf{r}}-\overline{\mathbf{r}}_\mathbf{0}=t\overline{\ell}$,



$$\Rightarrow\quad \overline{\mathbf{r}}=\overline{\mathbf{r}}_\mathbf{0}+t\overline{\ell}, \tag{27}$$

или, в координатной форме,

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n. \end{cases} \tag{28}$$

Очевидно, что системе (28) будут удовлетворять координаты любой точки прямой при некотором значении t (t называют *параметром*) и не будут удовлетворять координаты других точек плоскости.

Уравнение (27) и систему уравнений (28) называют *параметрическими уравнениями прямой* (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Каноническое уравнение прямой на плоскости

Если в задаче 11.2 вектор $\overline{\ell}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. если $m \neq 0$ и $n \neq 0$), то из уравнений системы (28) можно выразить параметр t:

$$t = \frac{x - x_0}{m} \quad \text{и} \quad t = \frac{y - y_0}{n},$$

и заменить систему (28) одним уравнением вида:

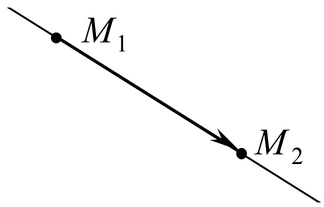
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \tag{29}$$

где x_0, y_0 – координаты некоторой точки на прямой, m, n – координаты направляющего вектора прямой.

Уравнение (29) называют *каноническим уравнением прямой на плоскости.*

3) Уравнение прямой, проходящей через две точки

Это уравнение является частным случаем канонического уравнения прямой.



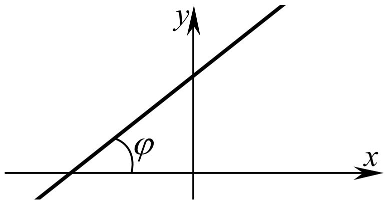
Действительно, пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Тогда вектор $\overline{\mathbf{M_1 M_2}} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ является ее направляющим вектором и каноническое уравнение этой прямой будет иметь вид

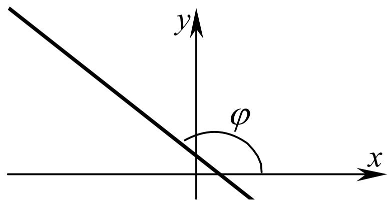
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{30}$$

Уравнение (30) называют *уравнением прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

4) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

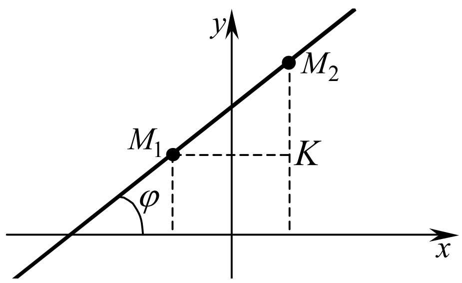
Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox. Тогда она пересекается с Ox, образуя при этом две пары вертикальных углов. Угол φ, отсчитываемый от оси Ox к прямой ℓ против часовой стрелки, называют *углом наклона прямой* ℓ *к оси* Ox. При этом число $k = \operatorname{tg}\varphi$ (если оно существует, т.е. если прямая ℓ не параллельна оси Oy) называют *угловым коэффициентом прямой* ℓ.

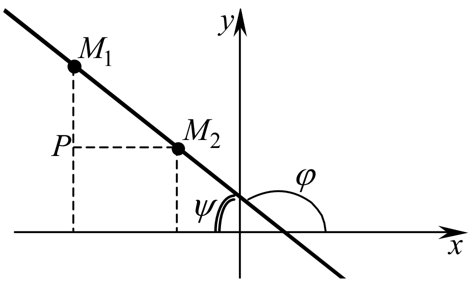




Для прямой, параллельной оси Ox, угол наклона прямой к оси Ox считают равным нулю. Следовательно, угловой коэффициент такой прямой $k = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox и Oy и проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (где $x_1 < x_2$). Найдем угловой коэффициент этой прямой.





Если угол φ острый, то

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{|M_2K|}{|M_1K|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если угол φ тупой, то

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi - \psi) = -\operatorname{tg}\psi = -\frac{|M_1P|}{|M_2P|} = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Итак, в обоих случаях $k = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Но тогда из уравнения (30) получаем:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - y_1 = k \cdot (x - x_1). \qquad (31)$$

Уравнение (31) – это уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1)$ и имеющей угловой коэффициент k. Перепишем уравнение (31) в виде

$$y = kx + b, \qquad (32)$$

где $b = y_1 - kx_1$. Легко убедиться, что с геометрической точки зрения b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy. Уравнение (32) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Замечание. Уравнение (32) было получено нами в предположении, что прямая не параллельна оси Ox и Oy. Но для прямой, параллельной Ox тоже можно записать уравнение с угловым коэффициентом. Действительно, уравнение такой прямой можно записать в виде

$$y = b$$

или

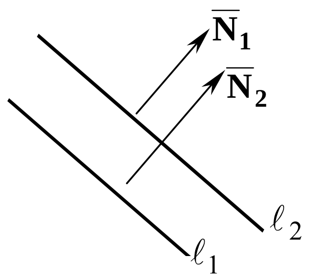
$$y = 0 \cdot x + b,$$

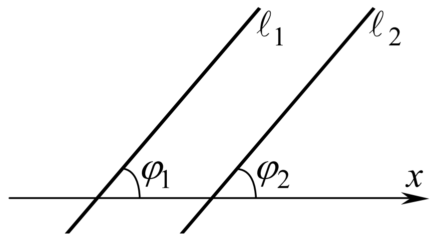
где $k = 0$ – угловой коэффициент прямой.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

Если на плоскости даны две прямые, то они либо параллельны, либо пересекаются. Выясним, как по уравнениям прямых определить их взаимное расположение.

Если прямые параллельны, то, очевидно, что их нормальные векторы $\overline{\mathbf{N_1}}$ и $\overline{\mathbf{N_2}}$ коллинеарные, а углы наклона к оси Ox (φ_1 и φ_2) – равные.





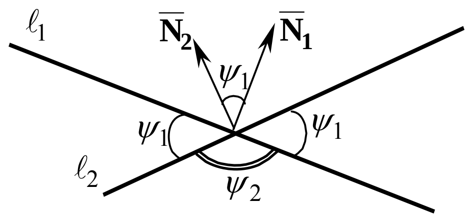
Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Тогда $\overline{\mathbf{N_1}} = \{A_1;B_1\}$ и $\overline{\mathbf{N_2}} = \{A_2;B_2\}$. Так как коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, то *прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ соответственно. Так как $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, то *прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты пропорциональны, т.е.*

$$k_1 = k_2 .$$

Теперь рассмотрим пересекающиеся прямые. При пересечение прямых на плоскости образуется две пары вертикальных углов. Выясним, как найти их величину ψ_1 и ψ_2.



Один из углов (ψ_1), образуемых прямыми ℓ_1 и ℓ_2, равен углу между их нормальными векторами $\overline{\mathbf{N}}_1$ и $\overline{\mathbf{N}}_2$. Следовательно, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ соответственно, то $\overline{\mathbf{N}}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\overline{\mathbf{N}}_2 = \{A_2; B_2\}$ и

$$\cos\psi_1 = \frac{(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2)}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}$$

Второй угол $\psi_2 = \pi - \psi_1$ и, следовательно,

$$\cos\psi_2 = -\cos\psi_1 = -\frac{(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2)}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} = -\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}} .$$

Объединяя полученные две формулы, получаем:

$$\cos\psi_{1,2} = \pm\frac{(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2)}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} = \pm\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}},$$

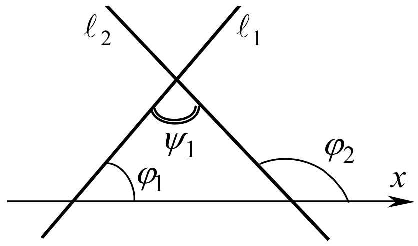
или
$$\cos\psi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} = \pm\frac{\left|A_1 A_2 + B_1 B_2\right|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}, \tag{33}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Из формулы (33) получаем в частности критерий перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями. Действительно, если ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны, то $\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ$ и $\cos\psi_{1,2} = 0$. Но тогда по формуле (33) получаем

$(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ – *критерий перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями.*

Теперь рассмотрим случай, когда прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно. Острый угол между прямыми будет равен



$$\psi_1 = \left|\varphi_2 - \varphi_1\right|.$$

Но тогда
$$\operatorname{tg}\psi_1 = \left|\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)\right| = \left|\frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1}\right|,$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\psi_1 = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\right|.$$

Так как тупой угол между прямыми $\psi_2 = \pi - \psi_1$, то

$$\operatorname{tg}\psi_2 = \operatorname{tg}(\pi - \psi_1) = -\operatorname{tg}\psi_1 = -\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\right|.$$

Следовательно, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом, то углы между ними можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\psi_{1,2} = \pm\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\right|, \tag{34}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Из формулы (34) получаем в частности критерий перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом. Действительно, если ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны, то $\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ$ и $\operatorname{tg}\psi_{1,2}$ не существует. Но это означает, что знаменатель дроби в (34) обращается в ноль, т.е.
$$1 + k_2 \cdot k_1 = 0,$$

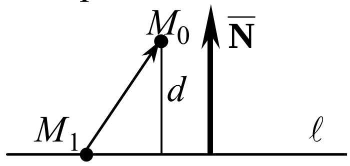
$$\Rightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}$$
– *критерий перпендикулярности прямых, имеющий угловые коэффициенты k_1 и k_2.*

4. Расстояние от точки до прямой

Заканчивая рассматривать прямую на плоскости, решим следующую задачу.

ЗАДАЧА 11.3. Пусть прямая ℓ задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, $M_0(x_0; y_0)$ – точка, не принадлежащая этой прямой. Найти расстояние от точки M_0 до прямой ℓ.

Эта задача может быть решена несколькими способами. Рассмотрим решение, использующее формулы векторной алгебры.



Пусть $\overline{\mathbf{N}} = \{A; B\}$ – нормальный вектор прямой ℓ, $M_1(x_1; y_1)$ – любая точка на прямой ℓ, d – расстояние от точки M_0 до ℓ. Тогда

$$d = \left| \text{Пр}_{\overline{\mathbf{N}}} \overline{\mathbf{M_1M_0}} \right| = \left| \frac{(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1M_0}})}{|\overline{\mathbf{N}}|} \right| = \frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1M_0}})\right|}{|\overline{\mathbf{N}}|}.$$

Имеем: $\overline{\mathbf{N}} = \{A; B\}$, $\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$.

$$\Rightarrow \quad |\overline{\mathbf{N}}| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

и $\quad (\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1M_0}}) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)$.

Так как $M_1(x_1; y_1)$ – точка на прямой ℓ, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е.

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

$$\Rightarrow \quad Ax_1 + By_1 = -C,$$

$$\Rightarrow \quad (\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1M_0}}) = Ax_0 + By_0 + C.$$

Следовательно,

$$d = \frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1M_0}})\right|}{|\overline{\mathbf{N}}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (35)$$

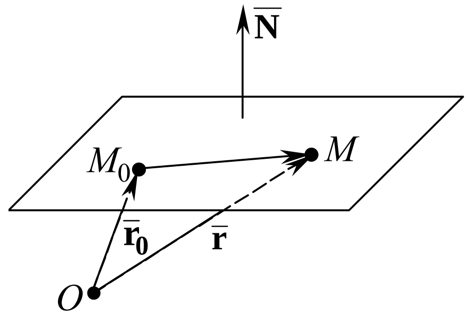
Таким образом, если известно общее уравнение прямой, то расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до этой прямой может быть найдено по формуле (35).

§12. Плоскость

1. Общее уравнение плоскости и его исследование

Получим общее уравнение плоскости, решив следующую задачу.

ЗАДАЧА 12.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{N}}=\{A;B;C\}$.



Пусть точка $M(x;y;z)$ – текущая точка плоскости. Обозначим через $\overline{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ и $\overline{\mathbf{r}}$ – радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Рассмотрим векторы $\overline{\mathbf{M_0M}}=\overline{\mathbf{r}}-\overline{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ и $\overline{\mathbf{N}}$. По условию задачи они перпендикулярны. Следовательно,

$$\left(\overline{\mathbf{r}}-\overline{\mathbf{r}}_\mathbf{0}\,,\overline{\mathbf{N}}\right)=0\,, \tag{36}$$

или, в координатной форме,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,. \tag{37}$$

Уравнению (37) удовлетворяют координаты любой точки рассматриваемой плоскости и не удовлетворяют координаты других точек пространства. Следовательно, это и есть искомое уравнение. Уравнения (36) и (37) называют *уравнениями плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overline{\mathbf{N}}=\{A;B;C\}$ (в векторной и координатной форме соответственно).

Раскроем скобки в уравнении (37) и приведем подобные слагаемые:

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0\,.$$

Обозначим число $-Ax_0-By_0-Cz_0$ через D и получим *общее уравнение плоскости*:

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{38}$$

Таким образом, *плоскость является поверхностью первого порядка. В общем случае она задается уравнением* (38), *где* A,B,C,D *– числа. Причем* A, B *и* C *не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это коэффициенты вектора, перпендикулярного плоскости*.

Вектор, перпендикулярный плоскости, называют *нормальным вектором* этой плоскости.

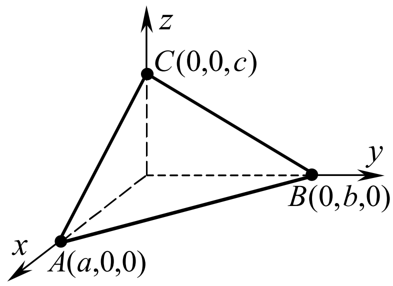
Проведем исследование общего уравнения плоскости. Т.е. выясним, что можно сказать о плоскости по виду ее общего уравнения.

Если в уравнении (38) все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, то уравнение называют *полным*; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – уравнение называют *неполным*.

1) Пусть уравнение (38) – полное. Тогда его можно записать в виде

$$Ax + By + Cz = -D,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$



Обозначим $-\dfrac{D}{A} = a$, $-\dfrac{D}{B} = b$ и $-\dfrac{D}{C} = c$. Тогда уравнение плоскости примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (39)$$

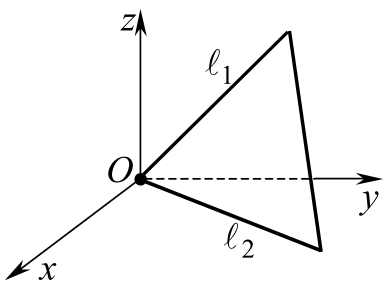
Уравнение (39) называют *уравнением плоскости в отрезках*. Легко проверить, что плоскость, имеющая уравнение (39), проходит через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$. Следовательно, *с геометрической точки зрения a, b и c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно*.

2) Пусть в уравнении (38) коэффициенты A, B и C – ненулевые, а $D = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Легко проверить, что *такая плоскость проходит через начало координат $O(0;0;0)$*.

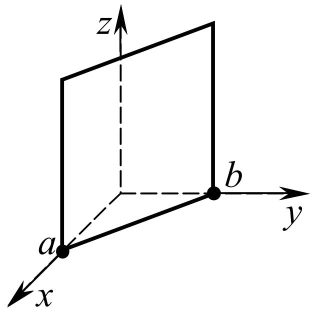
Замечание. Чтобы построить плоскость $Ax + By + Cz = 0$, обычно находят прямые, по которым она пересекается с двумя координатными плоскостями. Например, ℓ_1 – пересечение с плоскостью Oyz (ее уравнение $By + Cz = 0$) и ℓ_2 – пересечение с плоскостью Oxy (ее уравнение $Ax + By = 0$).



3) Пусть в уравнении (38) один из коэффициентов A, B или C – нулевой, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + D = 0 \quad \text{или} \quad Ax + Cz + D = 0 \quad \text{или} \quad By + Cz + D = 0.$$

Если плоскость имеет уравнение $Ax + By + D = 0$, то его можно записать в виде



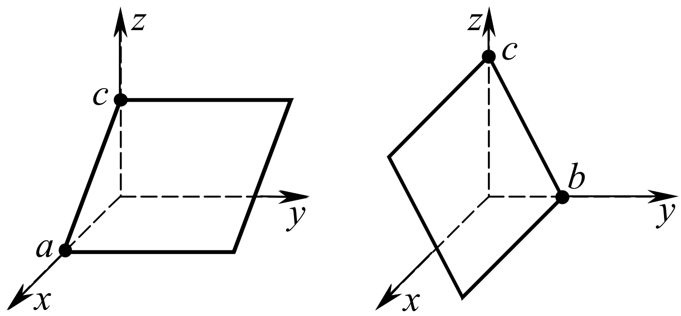
$$Ax + By = -D,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $-D/A = a$, $-D/B = b$. Но последнему уравнению удовлетворяют координаты точек $M_1(a; 0; z)$ и $M_2(0; b; z)$ (при любом z). Следовательно, плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz и отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно.

Аналогичным образом получаем, что плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy и отсекает на осях Ox и Oz отрезки $a = -D/A$ и $c = -D/C$ соответственно, а плоскость $By + Cz + D = 0$ – параллельна оси Ox и отсекает на осях Oy и Oz отрезки $b = -D/B$ и $c = -D/C$.



Таким образом, *плоскость, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты*.

4) Пусть в уравнении (38) два из трех коэффициентов A, B или C – нулевые, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + D = 0 \quad \text{или} \quad By + D = 0 \quad \text{или} \quad Cz + D = 0.$$

Если плоскость имеет уравнение $Ax + D = 0$, то его можно записать в виде

$$Ax = -D,$$

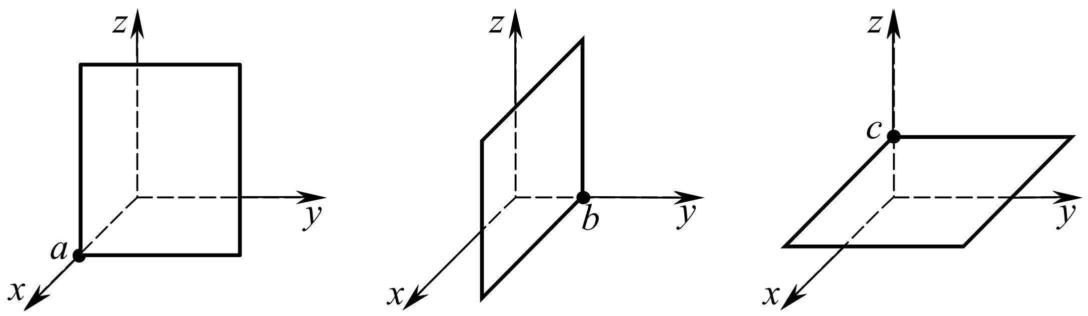
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-D/A} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} = 1,$$

где $-D/A = a$. Но последнему уравнению удовлетворяют координаты точек $M(a; y; z)$ (при любых y и z). Следовательно, плоскость

$Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oyz и отсекает на оси Ox отрезок $a = -D/A$.

Аналогичным образом получаем, что плоскость $By + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxz и отсекает на оси Oy отрезок $b = -D/B$, а плоскость $Cz + D = 0$ – параллельна плоскости Oxy и отсекает на оси Oz отрезок $c = -D/C$.



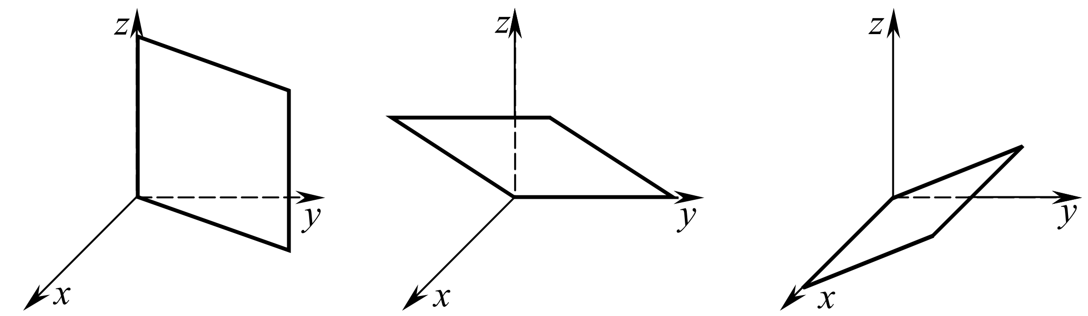
Таким образом, *плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих координат*.

5) Пусть в уравнении (38) $D = 0$ и один из коэффициентов A, B или C тоже нулевой, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By = 0 \quad \text{или} \quad Ax + Cz = 0 \quad \text{или} \quad By + Cz = 0 .$$

Уравнению $Ax + By = 0$ удовлетворяют координаты точек $M(0;0;z)$ (при любом z). Следовательно, эта плоскость проходит через ось Oz.

Аналогично получаем, что плоскость $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy, а плоскость $By + Cz = 0$ – проходит через ось Ox.



5) Пусть в уравнении (38) три коэффициента равны нулю, т.е. уравнение плоскости имеет вид

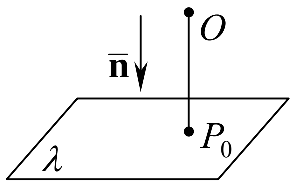
$$Ax = 0 \quad \text{или} \quad By = 0 \quad \text{или} \quad Cz = 0 .$$

Эти уравнения можно записать соответственно в виде

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 .$$

Но это уравнения координатных плоскостей Oyz, Oxz, Oxy.

Замечание. Пусть плоскость λ не проходит через начало координат, $P_0(x_0;y_0;z_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного на λ из начала координат, $\mathbf{\bar{n}} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – орт вектора $\overline{\mathbf{OP_0}}$. Так как $\mathbf{\bar{n}}$ является нормальным вектором плоскости λ, то ее общее уравнение можно записать в виде



$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0,$$

где $p = \left|\overline{\mathbf{OP_0}}\right|$ – расстояние от начала координат до плоскости λ (доказать самим). Этот *частный случай общего уравнения плоскости* называется *нормальным уравнением* плоскости.

Для плоскости, проходящей через начало координат, тоже можно записать нормальное уравнение. В этом случае оно будет иметь вид

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z = 0,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к плоскости.

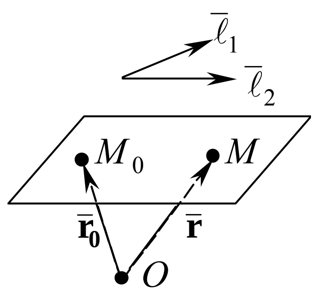
2. Другие формы записи уравнения плоскости

В аналитической геометрии плоскость обычно задают общим уравнением. Но условия задачи могут потребовать записать ее уравнение в другом виде. Два таких вида нам уже встретились (уравнения (37) и (39)). Рассмотрим в каком еще виде можно записать уравнение плоскости.

1) Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

Решим следующую задачу.

ЗАДАЧА 12.2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно неколлинеарным векторам $\bar{\ell}_1 = \{m_1;n_1;p_1\}$ и $\bar{\ell}_2 = \{m_2;n_2;p_2\}$.



Пусть точка $M(x;y;z)$ – текущая точка плоскости. Обозначим через $\mathbf{\bar{r}_0}$ и $\mathbf{\bar{r}}$ – радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Рассмотрим векторы $\overline{\mathbf{M_0M}} = \mathbf{\bar{r}} - \mathbf{\bar{r}_0}$, $\bar{\ell}_1$ и $\bar{\ell}_2$. По условию задачи они компланарны. Следовательно,

$$\left(\mathbf{\bar{r}} - \mathbf{\bar{r}_0}, \bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2\right) = 0, \qquad (40)$$

или, в координатной форме,

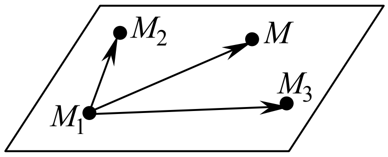
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (41)$$

Уравнения (40) и (41) называют *уравнениями плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам* (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

Это уравнение является частным случаем уравнения (41).

Действительно, пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой. Тогда векторы



$\overline{\mathbf{M_1M_2}}=\bar{\mathbf{r}}_2-\bar{\mathbf{r}}_1=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$

и $\overline{\mathbf{M_1M_3}}=\bar{\mathbf{r}}_3-\bar{\mathbf{r}}_1=\{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}$

неколлинеарные и параллельны плоскости. Следовательно, уравнение этой плоскости будет иметь вид

$$\left(\bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{r}}_1,\, \bar{\mathbf{r}}_2-\bar{\mathbf{r}}_1,\, \bar{\mathbf{r}}_3-\bar{\mathbf{r}}_1\right)=0, \qquad (42)$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (43)$$

Уравнения (42) и (43) называют *уравнениями плоскости, проходящей через три точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ (в векторной и координатной форме соответственно).

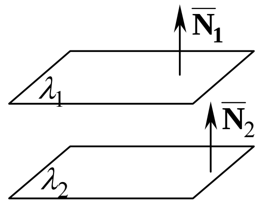
3. Взаимное расположение плоскостей

Если в пространстве даны две плоскости, то они либо параллельны, либо пересекаются. Выясним, как по уравнениям плоскостей определить их взаимное расположение.

Пусть плоскости λ_1 и λ_2 имеют уравнения $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ соответственно. Тогда $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1}=\{A_1;B_1;C_1\}$ и $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ – нормальные векторы этих плоскостей.

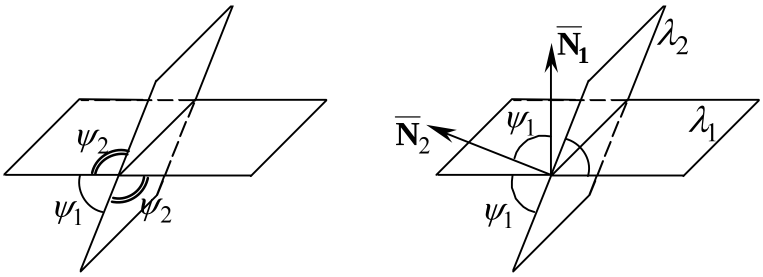
Если плоскости λ_1 и λ_2 параллельны, то, очевидно, что их нормальные векторы $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1}$ и $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2}$ коллинеарные.

Так как коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, то *плоскости* λ_1 *и* λ_2 *параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*



$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Теперь рассмотрим пересекающиеся плоскости. При пересечение плоскостей в пространстве образуется две пары двугранных углов. Выясним, как найти их величину ψ_1 и ψ_2.



Один из углов (ψ_1), образуемых плоскостями λ_1 и λ_2, равен углу между их нормальными векторами $\overline{\mathbf{N}}_1$ и $\overline{\mathbf{N}}_2$. Второй угол $\psi_2=\pi-\psi_1$. Следовательно,

$$\cos\psi_1=\frac{(\overline{\mathbf{N}}_1,\overline{\mathbf{N}}_2)}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right|\cdot\left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} \quad \text{и} \quad \cos\psi_2=\cos(\pi-\psi_1)=-\cos\psi_1=-\frac{(\overline{\mathbf{N}}_1,\overline{\mathbf{N}}_2)}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right|\cdot\left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|}.$$

Объединяя эти две формулы, получаем

$$\cos\psi_{1,2}=\pm\frac{(\overline{\mathbf{N}}_1,\overline{\mathbf{N}}_2)}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right|\cdot\left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|},$$

или

$$\cos\psi_{1,2}=\pm\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_1,\overline{\mathbf{N}}_2)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right|\cdot\left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|}=$$
$$=\pm\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{(A_1)^2+(B_1)^2+(C_1)^2}\cdot\sqrt{(A_2)^2+(B_2)^2+(C_2)^2}}, \tag{44}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай пересекающихся плоскостей – перпендикулярные плоскости. В этом случае $\overline{\mathbf{N}}_1\perp\overline{\mathbf{N}}_2$ и, следовательно,

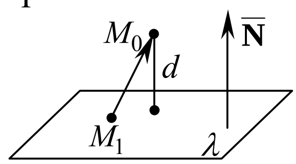
$(\overline{\mathbf{N}}_1,\overline{\mathbf{N}}_2)=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ – *критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями*.

4. Расстояние от точки до плоскости

Заканчивая рассматривать прямую на плоскости, решим следующую задачу.

ЗАДАЧА 12.3. Пусть плоскость λ задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, не принадлежащая этой плоскости. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости λ.

Задача 12.3 может быть решена несколькими способами. Рассмотрим решение, использующее формулы векторной алгебры.



Пусть $\overline{\mathbf{N}}=\{A;B;C\}$ – нормальный вектор плоскости λ, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ – любая точка на плоскости λ, d – расстояние от точки M_0 до λ. Тогда

$$d=\left|\text{Пр}_{\overline{\mathbf{N}}}\overline{\mathbf{M_1M_0}}\right|=\left|\frac{(\overline{\mathbf{N}},\overline{\mathbf{M_1M_0}})}{|\overline{\mathbf{N}}|}\right|=\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}},\overline{\mathbf{M_1M_0}})\right|}{|\overline{\mathbf{N}}|}.$$

Имеем: $\overline{\mathbf{N}}=\{A;B;C\}$, $\overline{\mathbf{M_1M_0}}=\{x_0-x_1;\ y_0-y_1;\ z_0-z_1\}$.

$$\Rightarrow \quad |\overline{\mathbf{N}}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

и

$$(\overline{\mathbf{N}},\overline{\mathbf{M_1M_0}})=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=$$
$$=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1).$$

Так как $M_1(x_1;y_1;z_1)$ – точка на плоскости λ, то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, т.е.

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$
$$\Rightarrow \quad Ax_1+By_1+Cz_1=-D,$$
$$\Rightarrow \quad (\overline{\mathbf{N}},\overline{\mathbf{M_1M_0}})=Ax_0+By_0+Cz_0+D.$$

Следовательно,

$$d=\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}},\overline{\mathbf{M_1M_0}})\right|}{|\overline{\mathbf{N}}|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{45}$$

Таким образом, если известно общее уравнение плоскости, то расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до этой плоскости может быть найдено по формуле (45).

§13. Прямая в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве

В аналитической геометрии любая пространственная линия рассматривается как пересечение двух поверхностей. Прямую в пространстве можно задавать как пересечение двух плоскостей. Действительно, пусть $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – уравнения непараллельных плоскостей. Тогда эти плоскости пересекаются по некоторой прямой ℓ. Координаты любой точки прямой ℓ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Систему (46) называют *общими уравнениями прямой в пространстве*. Так как через любую прямую в пространстве проходит множество плоскостей, то любую прямую можно задать ее общими уравнениями и не единственным образом.

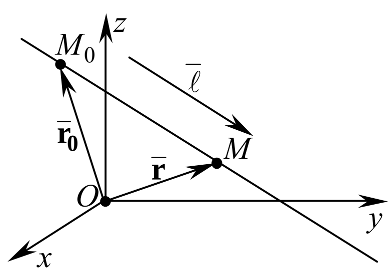
Недостатком задания прямой общими уравнениями является то, что по их виду ничего нельзя сказать о расположении прямой в пространстве. При решении задач удобнее использовать другие, более наглядные формы записи уравнений прямой – параметрические или канонические уравнения.

Получим параметрические и канонические уравнение прямой в пространстве, решив следующую задачу.

ЗАДАЧА 13.1. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно вектору $\overline{\ell} = \{m; n; p\}$.

Также, как и для прямой на плоскости, вектор, параллельный прямой в пространстве, называют *направляющим вектором* этой прямой.

Пусть точка $M(x; y; z)$ – текущая точка прямой. Обозначим через $\bar{\mathbf{r}}_0$ и $\bar{\mathbf{r}}$ – радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Рассмотрим векторы $\overline{\mathbf{M}_0\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0$ и $\overline{\ell}$. По условию задачи они параллельны. Следовательно, существует такое число t (t называют *параметром*), что



$$\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0 = t\overline{\ell},$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} + t\overline{\ell}, \tag{47}$$

или, в координатной форме,

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases} \tag{48}$$

Уравнение (47) и систему уравнений (48) называют *параметрическими уравнениями прямой в пространстве* (в векторной и координатной форме соответственно).

Если в задаче 13.1 вектор $\overline{\ell}$ не параллелен ни одной из координатных плоскостей (т.е. если $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$), то из уравнений системы (48) можно выразить параметр t:

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}, \quad t = \frac{z - z_0}{p}$$

и заменить систему (48) одним уравнением вида:

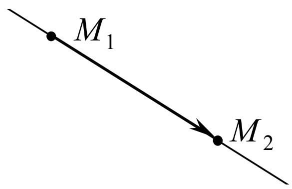
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{49}$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты некоторой точки на прямой, m, n, p – координаты направляющего вектора прямой.

Уравнения (49) называют *каноническими уравнениями прямой в пространстве.*

Частным случаем канонических уравнений являются уравнения прямой, проходящей через две точки.

Действительно, пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тогда вектор



$$\overline{\mathbf{M_1 M_2}} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_1 - z_2\}$$

является ее направляющим вектором и канонические уравнения этой прямой будут иметь вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{50}$$

Уравнения (50) называют *уравнениями прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

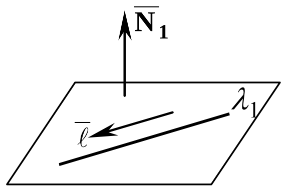
2. Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (51)$$

Чтобы записать канонические уравнения этой прямой, необходимо найти ее направляющий вектор $\overline{\ell}$ и координаты какой-нибудь точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой. Координаты точки M_0 найти легко – это одно из решений системы уравнений (51). Выясним, как можно найти направляющий вектор $\overline{\ell}$.

Пусть λ_1 и λ_2 – плоскости, уравнения которых входят в общие уравнения прямой, $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ – нормальные векторы к плоскостям λ_1 и λ_2 соответственно.



Так как прямая ℓ лежит в плоскости λ_1, то векторы $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1}$ и $\overline{\ell}$ перпендикулярны. Так как прямая ℓ лежит в плоскости λ_2, то векторы $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2}$ и $\overline{\ell}$ тоже перпендикулярны.

Следовательно, в качестве вектора $\overline{\ell}$ можем взять векторное произведение векторов $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1}$ и $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2}$.

ПРИМЕР. Записать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7 = 0, \\ x + 3y - 4z - 1 = 0. \end{cases} \qquad (52)$$

1) Найдем одно из решений системы (52). Так как $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, то этот минор можно выбрать в качестве базисного минора матрицы системы (52). Следовательно, переменные x и y можем выбрать в качестве зависимых, а переменную z – свободной. Так как нам не нужно все множество решений системы (52), то придадим переменной z конкретное значение. Например, полагаем $z = 0$. Тогда переменные x и y будут удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0, \\ x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему по формулам Крамера и получаем:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -18, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 9;$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{D_1}{D}=\frac{-18}{9}=-2, \qquad y=\frac{D_2}{D}=\frac{9}{9}=1.$$

Таким образом, $(-2;1;0)$ – одно из решений системы (52) и $M_0(-2;\,1;\,0)$ – точка на рассматриваемой прямой.

2) Найдем направляющий вектор $\overline{\ell}$ прямой. Имеем:

$$\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}}=\{2;-3;5\}, \quad \overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}}=\{1;3;-4\};$$

$$\Rightarrow \quad [\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}},\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -3 & 5\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}=-3\mathbf{i}+13\mathbf{j}+9\mathbf{k}.$$

Следовательно, в качестве направляющего вектора прямой можем взять вектор $\overline{\ell}=\{-3;13;9\}$ и канонические уравнения рассматриваемой прямой будут иметь вид:

$$\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{13}=\frac{z}{9}.$$

3. Взаимное расположение прямых в пространстве

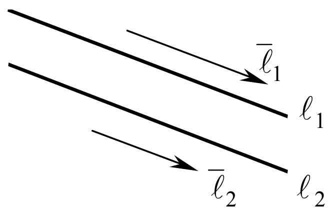
Если в пространстве даны две прямые, то они могут 1) быть параллельны, 2) пересекаться, 3) скрещиваться. Выясним, как по уравнениям прямых определить их взаимное расположение.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы каноническими уравнениями:

$$\ell_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad \ell_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Если прямые параллельны, то их направляющие векторы

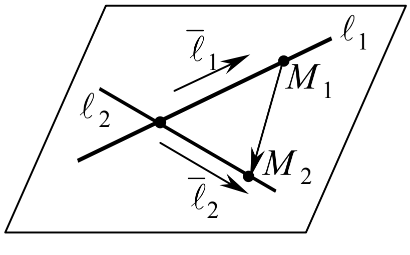
$$\overline{\ell}_1=\{m_1;n_1;p_1\} \quad \text{и} \quad \overline{\ell}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$$



коллинеарные. Так как коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, то *условие параллельности прямых будет иметь вид*:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \tag{53}$$

Теперь рассмотрим две пересекающиеся прямые. Такие прямые можно поместить в одну плоскость. Но это значит, что векторы



$$\overline{\ell}_1=\{m_1;n_1;p_1\}, \quad \overline{\ell}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$$

и $\qquad \overline{\mathbf{M_1M_2}}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$

будут компланарны. Следовательно,

$$\left(\overline{\mathbf{M_1M_2}},\ \overline{\ell}_1,\ \overline{\ell}_2\right)=0, \tag{54}$$

или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \tag{55}$$

Так как для скрещивающихся прямых условие (54) не выполняется, то условие пересечения двух прямых в пространстве можно сформулировать так: *если прямые ℓ_1 и ℓ_2 не параллельны и для них выполняется условие* (54) *(или, в координатной форме, условие* (55)*), то они пересекаются.*

Итак, мы нашли условие параллельности прямых в пространстве и условие пересечения прямых в пространстве. Прямые, для которых эти условия не выполняются, будут скрещиваться.

ПРИМЕР. Прямые

$$\ell_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{3} \quad \text{и} \quad \ell_2:\ \frac{x}{6}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-2}{9}$$

будут параллельны, так как их направляющие векторы $\overline{\ell}_1=\{2;4;3\}$ и $\overline{\ell}_2=\{6;12;9\}$ удовлетворяют условию (53):

$$\frac{2}{6}=\frac{4}{12}=\frac{3}{9}.$$

Прямые

$$\ell_3:\ \frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3} \quad \text{и} \quad \ell_4:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{-1}$$

не являются параллельными (их направляющие векторы не коллинеарны) и для них выполняется условие (55):

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 5-3 & 2-(-1) \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Следовательно, прямые ℓ_3 и ℓ_4 – пересекаются.

И, наконец, рассмотрим прямые

$$\ell_5:\ \frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \ell_6:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{-1}.$$

Они не являются параллельными (их направляющие векторы не коллинеарны) и для них не выполняется условие (55):

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 5-3 & 2-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Следовательно, прямые ℓ_5 и ℓ_6 – скрещиваются.

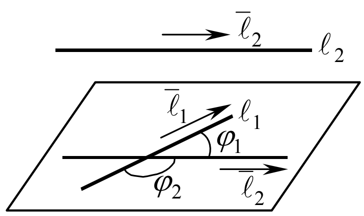
4. Задачи, связанные с взаимным расположением прямых

Рассмотрим следующие три задачи.

ЗАДАЧА 13.2. Найти угол между прямыми в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называется угол между прямой ℓ_1 и проекцией прямой ℓ_2 на любую плоскость, проходящую через прямую ℓ_1.*

Иначе говоря, угол между скрещивающимися прямыми – *это угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным*.



Пусть даны две пересекающиеся или скрещивающиеся прямые:

$$\ell_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Тогда $\overline{\ell}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$, $\overline{\ell}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ – направляющие векторы первой и второй прямой соответственно. Так как один из углов φ_1 между прямыми равен углу между их направляющими векторами, а второй угол $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, то углы φ_1 и φ_2 могут быть найдены по формуле

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm \frac{(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)}{|\overline{\ell}_1| \cdot |\overline{\ell}_2|} = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

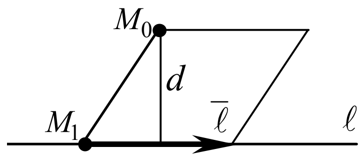
или $$\cos\varphi_{1,2} = \pm \frac{|(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2)|}{|\overline{\ell}_1| \cdot |\overline{\ell}_2|} = \pm \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

ЗАДАЧА 13.3. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Пусть дана прямая $\ell : \dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = \dfrac{z-z_1}{p}$ и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, не принадлежащая этой прямой.

Пусть $\overline{\ell} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой ℓ, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – точка на прямой ℓ, d – расстояние от точки M_0 до ℓ. Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\overline{\ell} = \{m; n; p\}$ и $\overline{\mathbf{M_1M_0}}$. Тогда d – опущенная из вершины M_0, высота этого параллелограмма. Следовательно,



$$d = \frac{\left|\left[\overline{\ell}, \overline{\mathbf{M_1M_0}}\right]\right|}{\left|\overline{\ell}\right|}.$$

ЗАДАЧА 13.4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*

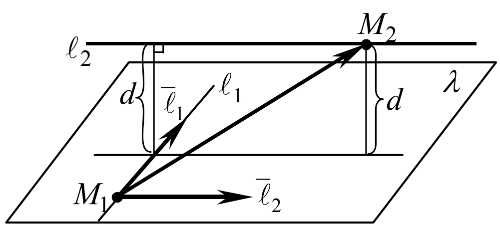
Эта задача может быть решена несколькими способами. Рассмотрим решение, использующее формулы векторной алгебры.

Пусть даны две скрещивающиеся прямые

$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Обозначим $\overline{\ell}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор прямой ℓ_i $(i = 1,2)$, $M_i(x_i, y_i, z_i)$ – точку на прямой ℓ_i $(i = 1,2)$, d – расстояние между ℓ_1 и ℓ_2.

На векторах $\overline{\ell}_1$, $\overline{\ell}_2$ и $\overline{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}$ построим пирамиду.



Тогда d – высота пирамиды, опущенная из точки M_2 и, следовательно,

$$d = \frac{3 \cdot V_{пир}}{S_{осн}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2, \overline{\mathbf{M_1M_2}}\right)\right|}{\frac{1}{2} \cdot \left|\left[\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2\right]\right|} = \frac{\left|\left(\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2, \overline{\mathbf{M_1M_2}}\right)\right|}{\left|\left[\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2\right]\right|}.$$

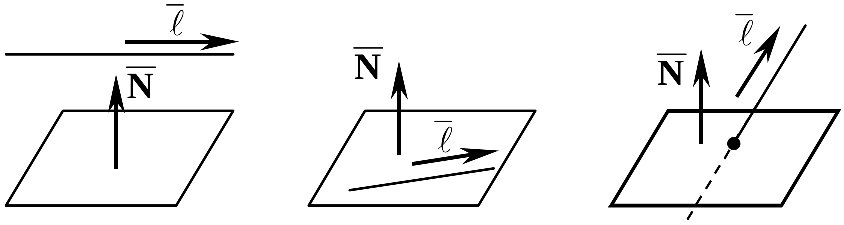
5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость λ и прямая ℓ. Их взаимное расположение может быть следующим:

1) прямая и плоскость могут быть параллельны;
2) прямая может лежать в плоскости;
3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Выясним, как зная уравнения плоскости и прямой, определить их взаимное расположение.

Пусть $\lambda: Ax+By+Cz+D=0$ и $\ell: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. Тогда $\overline{\mathbf{N}}=\{A;B;C\}$ – нормальный вектор плоскости, $\overline{\ell}=\{m;n;p\}$ – направляющий вектор прямой.



Если плоскость и прямая параллельны или прямая ℓ целиком лежит в плоскости λ, то векторы $\overline{\mathbf{N}}$ и $\overline{\ell}$ – перпендикулярны. Следовательно

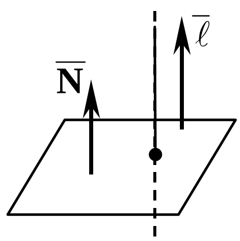
$$\left(\overline{\mathbf{N}},\overline{\ell}\right)=0, \tag{56}$$

или в координатной форме $Am+Bn+Cp=0$. (57)

Не выполнение условия (56) (*условия* (57)) *будет означать, что прямая и плоскость пересекаются в одной точке.*

Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой плоскости. В этом случае $\overline{\mathbf{N}}$ и $\overline{\ell}$ будут параллельны, т.е.

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$



Теперь укажем условие, которое позволит различать случай параллельности прямой и плоскости и случай принадлежности прямой плоскости. Пусть прямая ℓ лежит в плоскости λ. Тогда любая точка прямой лежит в плоскости и, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости. В частности,

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – некоторая фиксированная точка прямой ℓ.

Если же прямая параллельна плоскости, то она не имеет общих точек с плоскостью и, следовательно, для такой прямой

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 .$$

Таким образом, *если прямая лежит в плоскости, то должны выполняться два условия*:

$$\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right) = 0 \quad и \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 ;$$

если же прямая параллельна плоскости, то

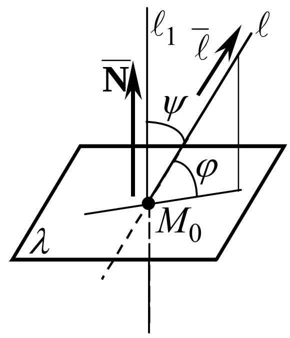
$$\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right) = 0 \quad и \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 ,$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – некоторая фиксированная точка прямой ℓ.

В заключение этого пункта вернемся к случаю, когда прямая и плоскость пересекаются в одной точке, и получим формулу для нахождения угла между прямой и плоскостью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углом между прямой ℓ и плоскостью λ называется угол φ между прямой ℓ и ее проекцией на плоскость λ.*

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью не превышает 90°, т.е. угол острый.



Пусть φ – угол между прямой ℓ и плоскостью λ, M_0 – их точка пересечения.

Через M_0 перпендикулярно плоскости λ проведем прямую ℓ_1. Для ℓ_1 вектор $\overline{\mathbf{N}}$ является направляющим и, следовательно, острый угол ψ между прямыми ℓ и ℓ_1 может быть найден по формуле

$$\cos\psi = \frac{\left|\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right| \cdot \left|\overline{\ell}\right|}.$$

Но

$$\psi = 90^\circ - \varphi ,$$

$$\Rightarrow \quad \sin\varphi = \cos\psi = \frac{\left|\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right| \cdot \left|\overline{\ell}\right|}$$ – формула для определения угла между прямой ℓ и плоскостью λ.

§14. Кривые второго порядка

Кривые второго порядка делятся на два класса: 1) вырожденные и 2) невырожденные.

Вырожденные кривые второго порядка это прямые и точки, которые задаются уравнением второй степени. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет на плоскости точку – начало координат. А уравнение $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ определяет на плоскости прямую.

Невырожденными кривыми второго порядка являются эллипс, окружность, гипербола и парабола. Убедимся в этом, получив их уравнения.

1. Эллипс и окружность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2 есть величина постоянная и равная $2a$* ($2a > |F_1F_2|$).

Точки F_1 и F_2 называют *фокусами* эллипса.

Получим уравнение эллипса. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат. В такой системе координат точки F_1 и F_2 будут иметь координаты:

$$F_1(-c;0) \quad \text{и} \quad F_2(c;0),$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$. Пусть $M(x;y)$ – текущая точка эллипса. По определению эллипса

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a,$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Избавимся от квадратных корней:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Приведя подобные слагаемые, получим:

$$4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc.$$

Снова возведем обе части в квадрат и приведем подобные слагаемые:

$$\left(a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-xc\right)^2,$$
$$\Rightarrow\quad a^2\cdot\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4-2a^2x\cdot c+x^2\cdot c^2,$$
$$\Rightarrow\quad a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2,$$
$$\Rightarrow\quad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2.$$

Так как по определению $2a>2c$, то $a^2-c^2>0$. Следовательно, $a^2-c^2=b^2$, для некоторого числа b, и последнее равенство примет вид:
$$b^2x^2+a^2y^2=b^2a^2.$$

Разделим обе части этого равенства на b^2a^2 и окончательно получим:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (58)$$

Уравнение (58) называется *каноническим уравнением эллипса*. Система координат, в которой эллипс имеет такое уравнение, называется его *канонической системой координат*.

Итак, мы убедились, что эллипс является кривой второго порядка. Теперь выясним геометрический вид эллипса. Для этого проведем исследование его канонического уравнения.

1) Прежде всего заметим, что эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$.

Действительно, так как $\frac{x^2}{a^2}\geq 0$, $\frac{y^2}{b^2}\geq 0$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то
$$\frac{x^2}{a^2}\leq 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leq 1,$$
$$\Rightarrow\quad x^2\leq a^2,\ y^2\leq b^2,$$
$$\Rightarrow\quad |x|\leq a,\ |y|\leq b.$$

2) Эллипс имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

Действительно, если $M(x;y)$ – точка эллипса, то кроме равенства (58) будут справедливы также равенства
$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1,\quad \frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1.$$
Следовательно, на эллипсе лежат точки $M_1(-x;y)$, $M_2(x;-y)$, $M_3(-x;-y)$, которые симметричны точке $M(x;y)$ относительно оси Ox, Oy и начала координат соответственно.

Центр симметрии эллипса называют *центром эллипса*. Ось симметрии эллипса, проходящую через фокусы (ось Ox) называют *большой* (или фокальной) осью симметрии, а вторую ось (ось Oy) – *малой* осью.

3) Из уравнения эллипса получаем:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Следовательно, верхняя половина эллипса – график функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, нижняя – график функции $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. В силу симметрии верхней и нижней половины достаточно провести исследование одной из этих функций.

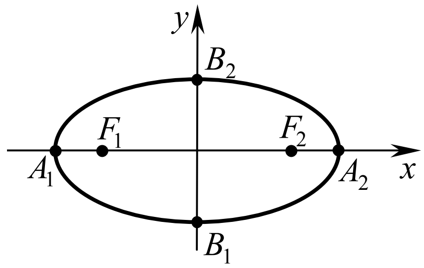
Исследуем поведение функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ методами, разработанными в математическом анализе.

а) $D(y) = [-a; a]$, $y(\pm a) = 0$.

б) $y' = \frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$. Следовательно, функция возрастает при $x \in (-a; 0)$ ($y' > 0$), убывает – при $x \in (0; a)$ ($y' < 0$), имеет экстремум в точке $x = 0$ (максимум, $y(0) = b$).

в) $y'' = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} < 0$. Следовательно, график функции всюду выпуклый.

На основании полученных данных построим эллипс в верхней полуплоскости, а затем симметрично достроим его в нижней полуплоскости.



Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса*. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются *большой* (*фокальной*) *осью*, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – *малой осью*. Величины a и b называются *большой* и *малой полуосью* соответственно. Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется *фокусным расстоянием*. Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1, MF_2 и их длины r_1, r_2 называются *фокальными радиусами точки* M.

Замечание. Прямая A_1A_2, отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ носят одно название. О чем идет речь – всегда ясно из контекста. То же самое касается B_1B_2, MF_1, MF_2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Величина* ε*, равная отношению фокусного расстояния эллипса к его большой оси*, т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

называется эксцентриситетом эллипса.

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, то $0 < \varepsilon < 1$. Величина ε характеризует форму эллипса.

Действительно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Следовательно, *чем больше* ε*, тем меньше отношение* $\frac{b}{a}$*, т.е. тем больше вытянут эллипс вдоль действительной оси.*

Кроме того, зная эксцентриситет эллипса легко найти фокальные радиусы точки $M(x; y)$:

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon x, \quad r_2 = |MF_2| = a - \varepsilon x.$$

Действительно,

$$r_1 = \sqrt{(-c - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{c^2 + 2cx + x^2 + y^2} =$$

$$= \sqrt{(a^2 - b^2) + 2cx + x^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)} = \sqrt{a^2 + 2cx + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + (a^2 - b^2)x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + cx)^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x.$$

Аналогично доказывается вторая формула.

Замечания.

1) Пусть в уравнении эллипса $a = b = r$. Для этой кривой

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = F_2 = O, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.$$

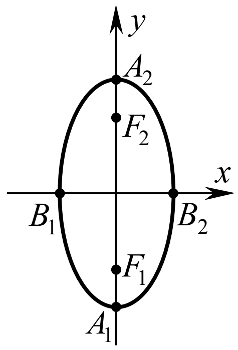
Геометрически, это означает, что точки такой кривой равноудалены (на расстояние r) от ее центра O, т.е. кривая является *окружностью*. Каноническое уравнение окружности принято записывать в виде

$$x^2+y^2=r^2,$$

где r – расстояние от любой точки окружности до ее центра; r называют *радиусом окружности*.

2) Выводя уравнение эллипса, мы выбрали систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат. Если же выбрать систему координат так, чтобы фокусы были на одинаковом расстоянии от начала координат, но лежали на оси Oy, то уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$



Для этого эллипса большая ось – ось Oy, малая ось – ось Ox, фокусы имеют координаты $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$ (где $c=\sqrt{a^2-b^2}$), фокальные радиусы точки $M(x;y)$ находятся по формулам

$$r_1=|MF_1|=a+\varepsilon y,\quad r_2=|MF_2|=a-\varepsilon y.$$

2. Гипербола

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2 есть величина постоянная и равная $2a$* ($2a<|F_1F_2|$).

Точки F_1 и F_2 называют *фокусами* гиперболы.

Получим уравнение гиперболы. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат. В такой системе координат точки F_1 и F_2 будут иметь координаты:

$$F_1(-c;\,0)\quad\text{и}\quad F_2(c;\,0),$$

где $|OF_1|=|OF_2|=c$. Пусть $M(x;y)$ – текущая точка гиперболы. По определению гиперболы

$$\big||F_1M|-|F_2M|\big|=2a,$$

$$\Rightarrow \quad \left| \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \right| = 2a,$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a,$$

Избавимся от квадратных корней:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad (x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2.$$

Приведя подобные слагаемые, получим:

$$\pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4xc - 4a^2.$$

Снова возведем обе части в квадрат и приведем подобные слагаемые:

$$\left(\pm a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = \left(xc - a^2\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad a^2\cdot\left((x-c)^2+y^2\right) = a^4 - 2a^2x\cdot c + x^2\cdot c^2,$$

$$\Rightarrow \quad c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$\Rightarrow \quad (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2-a^2)a^2.$$

Так как по определению $2a < 2c$, то $c^2 - a^2 > 0$. Следовательно, $c^2 - a^2 = b^2$, для некоторого числа b, и последнее равенство примет вид:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2.$$

Разделим обе части этого равенства на b^2a^2 и окончательно получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (59)$$

Уравнение (59) называется *каноническим уравнением гиперболы*. Система координат, в которой гипербола имеет такое уравнение, называется ее *канонической системой координат*.

Итак, мы убедились, что гипербола является кривой второго порядка. Теперь выясним геометрический вид гиперболы. Для этого проведем исследование ее канонического уравнения.

1) Прежде всего заметим, что точек гиперболы нет в полосе, ограниченной прямыми $x = \pm a$.

Действительно, так как $\frac{x^2}{a^2} \ge 0$, $\frac{y^2}{b^2} \ge 0$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $\frac{x^2}{a^2} \ge 1$,

$$\Rightarrow \quad x^2 \ge a^2,$$

$$\Rightarrow \quad |x| \ge a.$$

2) Гипербола имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

Действительно, если $M(x;y)$ – точка гиперболы, то кроме равенства (59) будут справедливы также равенства

$$\frac{(-x)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{(-y)^2}{b^2}=1,\quad \frac{(-x)^2}{a^2}-\frac{(-y)^2}{b^2}=1.$$

Следовательно, на гиперболе лежат точки $M_1(-x;y)$, $M_2(x;-y)$, $M_3(-x;-y)$, которые симметричны точке $M(x;y)$ относительно оси Ox, Oy и начала координат соответственно.

Центр симметрии гиперболы называют *центром гиперболы*. Ось симметрии гиперболы, проходящую через фокусы (ось Ox) называют *действительной* (или фокальной) осью симметрии, а вторую ось (ось Oy) – *мнимой* осью.

3) Из уравнения гиперболы получаем:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Следовательно, верхняя половина гиперболы – график функции $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, нижняя – график функции $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. В силу симметрии верхней и нижней половины достаточно провести исследование одной из этих функций.

Исследуем поведение функции $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ методами, разработанными в математическом анализе.

а) $D(y)=(-\infty;-a]\cup[a;+\infty)$, $y(\pm a)=0$.

б) Линия $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ имеет наклонные асимптоты[1] $y=\pm\frac{b}{a}x$. Действительно,

---

[1] Напомним, что прямая ℓ называется асимптотой кривой, если расстояние от точки M кривой до прямой ℓ стремится к нулю при удалении точки M от начала координат. Различают два вида асимптот – вертикальные и наклонные. Вертикальные асимптоты кривая $y=f(x)$ имеет в тех точках разрыва второго рода функции $y=f(x)$, в которых хотя бы один из односторонних пределов функции равен бесконечности. Наклонные асимптоты кривой $y=f(x)$ имеют уравнение $y=k_{1,2}x+b_{1,2}$, где $k_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-k_{1,2}x\right]$.

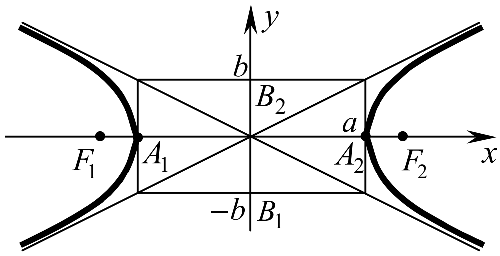
$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{b}{a}|x|}{x}=\pm\frac{b}{a},$$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-k_{1,2}x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{b}{a}\left[\sqrt{x^2-a^2}\mp x\right]=\frac{b}{a}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}\pm x}=0.$$

в) $y'=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$. Следовательно, функция возрастает при $x\in(a;+\infty)$ ($y'>0$), убывает – при $x\in(-\infty;-a)$ ($y'<0$). Экстремумов функция не имеет (критические точки $x=0\notin D(y)$ и $x=\pm a$ – граничные).

в) $y''=\frac{-ab}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}<0 \quad\Rightarrow$ график функции всюду выпуклый.

На основании полученных данных построим гиперболу в верхней полуплоскости, а затем симметрично достроим ее в нижней полуплоскости.



Точки A_1, A_2 называются *вершинами гиперболы*. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются *действительной* (*фокальной*) *осью*, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – *мнимой осью*. Величины a и b называются *действительной* и *мнимой полуосью* соответственно. Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется *фокусным расстоянием*. Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1, MF_2 и их длины r_1, r_2 называются *фокальными радиусами точки* M

Замечание. Прямая A_1A_2, отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ носят одно название. О чем идет речь – всегда ясно из контекста. То же самое касается B_1B_2, MF_1, MF_2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Величина* ε, *равная отношению фокусного расстояния гиперболы к ее действительной оси*, т.е.

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a},$$

называется эксцентриситетом гиперболы.

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, то $\varepsilon > 1$. Величина ε характеризует форму гиперболы. Действительно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Следовательно, *чем больше* ε, *тем больше отношение* b/a, *т.е. тем «шире» гипербола*.

Кроме того, зная эксцентриситет гиперболы, легко найти фокальные радиусы точки $M(x; y)$. Так, если точка M лежит на правой ветке гиперболы (т.е. $x > 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon x, \quad r_2 = |MF_2| = -a + \varepsilon x.$$

Если M лежит на левой ветке гиперболы (т.е. $x < 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = -(a + \varepsilon x), \quad r_2 = |MF_2| = -(-a + \varepsilon x).$$

Действительно, пусть $x > 0$. Тогда

$$r_1 = \sqrt{(-c - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{c^2 + 2cx + x^2 + y^2} =$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2) + 2cx + x^2 + \left(\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2\right)} = \sqrt{a^2 + 2cx + \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + (a^2 + b^2)x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + cx)^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x.$$

Аналогично доказывается и оставшиеся формулы.

Замечания.

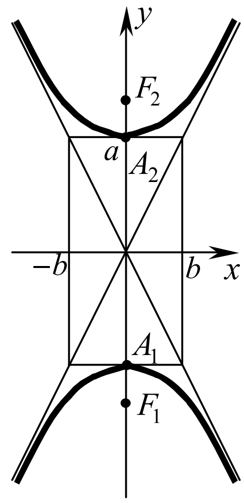
1) Если в уравнении гиперболы $a = b$, то гипербола называется *равнобочной*. Асимптоты равнобочной гиперболы, очевидно, перпендикулярны. Следовательно, можно выбрать систему координат так, чтобы координатные оси совпали с асимптотами. Тогда уравнение гиперболы будет иметь вид

$$xy = 0{,}5a^2. \qquad (60)$$

Уравнение (60) называют *уравнением равнобочной гиперболы, отнесенной к асимптотам*.

2) Выводя уравнение гиперболы, мы выбрали систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии

от начала координат. Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы были на одинаковом расстоянии от $O(0;0)$, но лежали на Oy, то уравнение гиперболы будет иметь вид



$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Для этой гиперболы действительная ось – ось Oy, мнимая ось – ось Ox, фокусы имеют координаты $F_1(0;\,-c)$ и $F_2(0;\,c)$ (где $c=\sqrt{a^2+b^2}$), асимптотами являются прямые $y=\pm\dfrac{a}{b}x$, фокальные радиусы точки $M(x;y)$ находятся по формулам

$$r_1=|MF_1|=a+\varepsilon\,y,\qquad r_2=|MF_2|=-a+\varepsilon\,y \quad (\text{при } y>0)$$

и $$r_1=|MF_1|=-(a+\varepsilon\,y),\qquad r_2=|MF_2|=-(-a+\varepsilon\,y) \quad (\text{при } y<0).$$

3. Парабола

Пусть ℓ – некоторая прямая на плоскости, F – некоторая точка плоскости, не лежащая на прямой ℓ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Параболой называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой ℓ и до фиксированной точки F (не лежащей на прямой ℓ) одинаково.*

Точку F называют *фокусом параболы*, прямую ℓ – *директрисой*.

Получим уравнение параболы. Пусть p – расстояние от F до ℓ. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы директриса параболы ℓ была перпендикулярна оси Ox, фокус F лежал на положительной части Ox и расстояние от начала координат до фокуса и до директрисы было одинаковым. В такой системе координат

$$F(0{,}5p;\,0) \quad \text{и} \quad \ell: x+0{,}5p=0.$$

Пусть $M(x;y)$ – текущая точка параболы. По определению параболы

$$d(M,\ell)=|FM|,$$

т.е.

$$\frac{|x+0{,}5p|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\sqrt{(x-0{,}5)^2+y^2},$$

$$\Rightarrow \quad |x+0{,}5p|=\sqrt{(x-0{,}5)^2+y^2}.$$

Избавимся от квадратного корня:

$$(x+0{,}5p)^2=(x-0{,}5)^2+y^2,$$

$$\Rightarrow \quad y^2=2px \tag{61}$$

Уравнение (61) называется *каноническим уравнением параболы*. Система координат, в которой парабола имеет такое уравнение, называется ее *канонической системой координат*.

Итак, мы убедились, что парабола является кривой второго порядка. Теперь выясним геометрический вид параболы. Для этого проведем исследование ее канонического уравнения.

1) Прежде всего, очевидно, что парабола лежит в полуплоскости $x\geq 0$ (т.к. $y^2\geq 0$ и $p>0$).

2) Парабола имеет ось симметрии (ось Ox).

Действительно, если $M(x;y)$ – точка параболы, то кроме равенства (61) будет справедливо также равенство

$$(-y)^2=2px.$$

Следовательно, на параболе лежит точка $M_1(x;-y)$, которая симметрична точке $M(x;y)$ относительно оси Ox.

Ось симметрии параболы называют *осью параболы*.

3) Из уравнения параболы получаем:

$$y=\pm\sqrt{2px}.$$

Следовательно, верхняя половина параболы – график функции $y=\sqrt{2px}$, нижняя – график функции $y=-\sqrt{2px}$. В силу симметрии верхней и нижней половины достаточно провести исследование одной из этих функций.

Исследуем поведение функции $y=\sqrt{2px}$ методами, разработанными в математическом анализе.

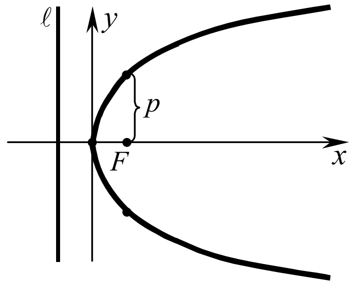
а) $D(y)=[0;+\infty)$, $y(0)=0$.

б) Асимптот нет (проверить самим).

в) $y'=\dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}>0$. Следовательно, функция возрастает на всей области определения.

г) $y''=-\dfrac{\sqrt{2p}}{4\sqrt{x^3}}<0$. Следовательно, график функции всюду выпуклый.

На основании полученных данных построим параболу в верхней полуплоскости, а затем достроим ее в нижней полуплоскости.

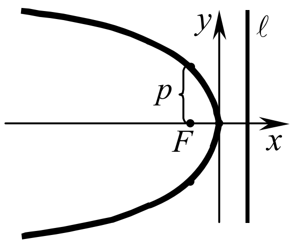


Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется *вершиной параболы*, число p называется *параметром параболы*. Если M – произвольная точка параболы, то отрезок MF и его длина называются *фокальными радиусами точки* M.

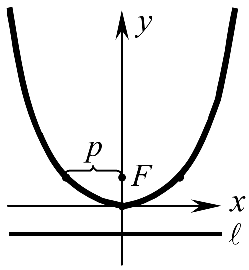
Замечание. Если при выводе уравнения параболы выбрать систему координат так, чтобы фокус F лежал на отрицательной части оси Ox, директриса была перпендикулярна оси Ox, и расстояние от начала координат до фокуса и до директрисы было одинаково, то получим для параболы уравнение
$$y^2 = -2px, \tag{62}$$
а для директрисы и фокуса:
$$F(-0{,}5p;\ 0) \quad \text{и} \quad \ell : x - 0{,}5p = 0.$$

Если выбрать систему координат так, чтобы директриса была перпендикулярна оси Oy, фокус лежал на положительной (отрицательной) части оси Oy и начало координат было на одинаковом расстоянии от фокуса и от директрисы, то уравнение параболы будет иметь вид
$$x^2 = \pm 2py, \tag{63}$$
а для директрисы и фокуса:
$$F(0;\ \pm 0{,}5p) \quad \text{и} \quad \ell : y \pm 0{,}5p = 0.$$

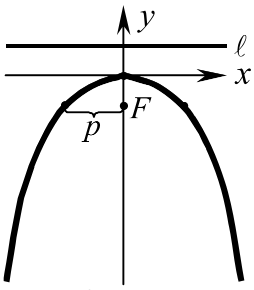
Уравнения (62) и (63) тоже называются *каноническими уравнениями параболы*, а соответствующие им системы координат – *каноническими системами координат*.



$y^2 = -2px$



$x^2 = 2py$



$x^2 = -2py$

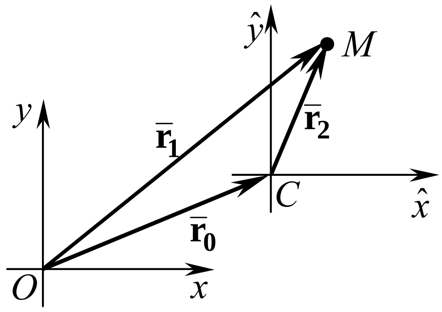
4. Координаты точки в разных системах координат

Пусть на плоскости заданы две декартовы прямоугольные системы координат. Выясним, существует ли связь между координатами точки в этих системах координат.

1) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и $\hat{x}C\hat{y}$ такие, что $Ox \upuparrows C\hat{x}$, $Oy \upuparrows C\hat{y}$ («параллельные системы координат»). Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим $\overline{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{OC}}$, $\overline{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}} = \overline{\mathbf{OM}}$, $\overline{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}} = \overline{\mathbf{CM}}$. Имеем:

$$\overline{\mathbf{r}}_1 = \overline{\mathbf{r}}_2 + \overline{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}},$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathbf{r}}_2 = \overline{\mathbf{r}}_1 - \overline{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}. \tag{64}$$



Пусть $M(x;y)$ (в системе координат xOy) $\Rightarrow$ $\overline{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}} = \{x;\ y\}$,

$M(\hat{x};\hat{y})$ (в системе координат $\hat{x}C\hat{y}$) $\Rightarrow$ $\overline{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}} = \{\hat{x};\ \hat{y}\}$,

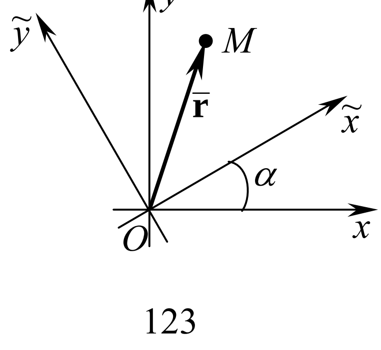
$C(x_0;y_0)$ (в системе координат xOy) $\Rightarrow$ $\overline{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} = \{x_0;\ y_0\}$.

Тогда из (64) получаем:

$$\begin{cases} \hat{x} = x - x_0, \\ \hat{y} = y - y_0. \end{cases} \tag{65}$$

Формулу (65) называют *формулой преобразования координат точки при переносе начала координат в точку* $C(x_0;y_0)$.

2) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и $\tilde{x}O\tilde{y}$, угол между соответствующими осями которых равен α («$\tilde{x}O\tilde{y}$ развернута относительно xOy на угол α»). Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим $\overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{OM}}$.



Пусть $M(x;y)$ (в системе координат xOy) и $M(\tilde{x};\tilde{y})$ (в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$). Тогда

$$\bar{\mathbf{r}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \tilde{x}\bar{\mathbf{c}}_1 + \tilde{y}\bar{\mathbf{c}}_2,$$

где $\bar{\mathbf{c}}_1 \upuparrows O\tilde{x}$, $\bar{\mathbf{c}}_2 \upuparrows O\tilde{y}$ и $|\bar{\mathbf{c}}_1| = |\bar{\mathbf{c}}_2| = 1$. Координаты вектора в разных базисах связаны формулой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \tag{66}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{67}$$

где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса $\mathbf{i},\mathbf{j}$ к базису $\bar{\mathbf{c}}_1, \bar{\mathbf{c}}_2$. Запишем $\mathbf{T}$.

Имеем: $\begin{cases} \bar{\mathbf{c}}_1 = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \sin\alpha \cdot \mathbf{j}, \\ \bar{\mathbf{c}}_2 = -\sin\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\alpha \cdot \mathbf{j}. \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

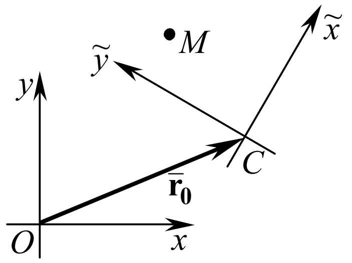
Таким образом, получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{x} = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot x, \\ \tilde{y} = -\sin\alpha \cdot y + \cos\alpha \cdot y. \end{cases} \tag{68}$$

Формулу (68) называют *формулой преобразования координат точки при повороте координатных осей*.

3) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и $\tilde{x}C\tilde{y}$, причем оси системы координат $\tilde{x}C\tilde{y}$ развернуты по отношению к осям xOy на угол α.



Если $M(x;y)$ (в системе координат xOy), $M(\tilde{x};\tilde{y})$ (в системе координат $\tilde{x}C\tilde{y}$) и $C(x_0;y_0)$ (в системе координат xOy), то из формул (67) и (64) получаем:

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\tilde{x} &= \cos\alpha\cdot x &+ \sin\alpha\cdot x &- x_0,\\ \tilde{y} &= -\sin\alpha\cdot y &+ \cos\alpha\cdot y &- y_0.\end{cases} \tag{69}$$

Формулу (69) называют *формулой преобразования координат точки при переходе к новой системе координат.*

5. Общее уравнение кривой второго порядка

1) Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{70}$$

С помощью элементарных преобразование уравнение (70) может быть приведено к следующему виду:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{а) при } AC \neq 0: & \dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha} + \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta} = 1;\\ \text{б) при } AC = 0: & (x-x_0)^2 = \alpha(y-y_0) \text{ или } (y-y_0)^2 = \alpha(x-x_0).\end{array}\right\} \tag{71}$$

Это означает, что уравнение (70) определяет кривую, для которой канонической является система координат $\hat{x}C\hat{y}$, где $C(x_0;y_0)$ (см. формулу (65) преобразования координат при переносе начала координат). Поэтому говорят, что *уравнение* (70) *определяет кривую со смещенным центром (вершиной)*, а уравнение (71) называют *каноническим уравнением кривой со смещенным центром (вершиной)*.

Замечание. Приводить уравнение (70) к виду (71) необходимо, если мы хотим построить кривую. Тип кривой можно определить и без уравнения (71). А именно:

1) если $AC = 0$, то кривая является параболой;
2) если $AC < 0$, то кривая является гиперболой;
3) если $AC > 0$, $A \neq C$ – эллипсом;
4) если $AC > 0$, $A \neq C$ – окружностью.

2) Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0. \tag{72}$$

Это уравнение определяет кривую, каноническая система координат которой развернута по отношению к заданной на некоторый угол α. Покажем один из способов найти этот угол.

Для начала напомним, что поворот координатных осей можно рассматривать как переход к новому базису в пространстве свободных векторов $V^{(2)}$ (см. предыдущий пункт этого параграфа). Следовательно, найти угол α означает найти базис $\mathbf{\overline{c}_1}, \mathbf{\overline{c}_2}$, соответствующий канонической системе координат кривой (72).

Запишем матрицу $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$. Ее можно рассматривать как матрицу некоторого оператора φ пространства $V^{(2)}$. Доказано, что оператор пространства $V^{(2)}$, имеющий в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ симметрическую матрицу, диагонализируем. Значит, существует базис $\mathbf{\overline{c}_1}, \mathbf{\overline{c}_2}$, в котором матрица оператора φ имеет вид $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Более того, доказано, что векторы $\mathbf{\overline{c}_1}, \mathbf{\overline{c}_2}$ можно выбрать перпендикулярными и имеющими единичную длину. Введем систему координат $\tilde{x}O\tilde{y}$ так, что

$$\mathbf{\overline{c}_1} \upuparrows O\tilde{x}, \ \mathbf{\overline{c}_2} \upuparrows O\tilde{y}.$$

Тогда, как показали ранее, «старый» базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и «новый» базис $\mathbf{\overline{c}_1}, \mathbf{\overline{c}_2}$ будут связаны равенствами

$$\begin{cases} \mathbf{\overline{c}_1} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \sin\alpha \cdot \mathbf{j}, \\ \mathbf{\overline{c}_2} = -\sin\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\alpha \cdot \mathbf{j}; \end{cases}$$

а координаты точки в системе координат xOy и $\tilde{x}O\tilde{y}$ удовлетворяют условию

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \cdot \tilde{x} - \sin\alpha \cdot \tilde{y}, \\ y = \sin\alpha \cdot \tilde{x} + \cos\alpha \cdot \tilde{y}, \end{cases}$$

и
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \tilde{x}^2(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha) +$$
$$+ \tilde{x} \cdot \tilde{y}(-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B\cos^2\alpha - 2B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha) +$$
$$+ \tilde{y}^2(A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha).$$

Согласно критерию диагонализируемости оператора, $\mathbf{\overline{c}_1}, \mathbf{\overline{c}_2}$ – собственные векторы оператора, относящиеся к λ_1 и λ_2 соответственно. Следовательно, $\varphi(\mathbf{\overline{c}_1}) = \lambda_1 \mathbf{\overline{c}_1}$ и $\varphi(\mathbf{\overline{c}_2}) = \lambda_2 \mathbf{\overline{c}_2}$,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos\alpha \\ \lambda_1 \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \sin\alpha \\ \lambda_2 \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} A\cos\alpha + B\sin\alpha = \lambda_1\cos\alpha, \\ B\cos\alpha + C\sin\alpha = \lambda_1\sin\alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -A\sin\alpha + B\cos\alpha = -\lambda_2\sin\alpha, \\ -B\sin\alpha + C\cos\alpha = \lambda_2\cos\alpha. \end{cases}$$

Но тогда
$$A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha =$$
$$= (A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha) + (B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha) =$$
$$= \cos\alpha(A\cos\alpha + B\sin\alpha) + \sin\alpha(B\cos\alpha + C\sin\alpha)$$
$$= \lambda_1\cos^2\alpha + \lambda_1\sin^2\alpha = \lambda_1.$$

Аналогично доказывается, что
$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B\cos^2\alpha - 2B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$$
и
$$A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha = \lambda_2.$$

Таким образом, в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$ уравнение кривой будет иметь вид
$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + F = 0$$
и, следовательно, $\tilde{x}O\tilde{y}$ – искомая каноническая система координат кривой.

3) Рассмотрим общий случай, т.е. уравнение
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{73}$$

Очевидно, что каноническая система координат кривой (73) по отношению к исходной развернута на некоторый угол α и смещена в точку C_0. При построении такой кривой, сначала находят α, а затем точку C_0.

ПРИМЕР. Построить кривую
$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

РЕШЕНИЕ

1) Запишем матрицу $\mathbf{Q}$ и найдем ее собственные значения. Имеем:
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$
$$\Rightarrow\quad |\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{E}| = 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16,$$
$$\Rightarrow\quad \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -2.$$

2) Найдем собственные подпространства $L_{\lambda=8}$ и $L_{\lambda=-2}$. Имеем:
$$\mathbf{Q} - 8\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{Q}-8\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad -5x_1+5x_2=0,$$

$$\Rightarrow \quad x_1=x_2 \quad \text{– общее решение;}$$

$$\Rightarrow \quad (1;\,1) \qquad \text{– ф.с.р.}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{f}}_1=\{1;\,1\}=\mathbf{i}+\mathbf{j} \text{ – базис } L_{\lambda=8},\ \left|\bar{\mathbf{f}}_1\right|=\sqrt{2}\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{c}}_1=\frac{\bar{\mathbf{f}}_1}{\left|\bar{\mathbf{f}}_1\right|}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \text{ – базис } L_{\lambda=8}.$$

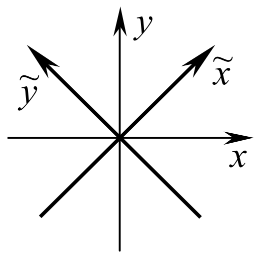
Так как векторы $\bar{\mathbf{c}}_1$ и $\bar{\mathbf{c}}_2$ – перпендикулярны, то можем положить

$$\bar{\mathbf{c}}_2=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \text{ – базис } L_{\lambda=-2}.$$

Итак, направляющие векторы осей «развернутой» системы координат $\tilde{x}O\tilde{y}$:

$$\bar{\mathbf{c}}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{c}}_2=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix},$$



$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}.$$

3) Найдем уравнение кривой в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$:

$$8\tilde{x}^2-2\tilde{y}^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}\right)-14\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}\right)-13=0,$$

$$8\tilde{x}^2-2\tilde{y}^2-\frac{16}{\sqrt{2}}\tilde{x}-\frac{12}{\sqrt{2}}\tilde{y}-13=0,$$

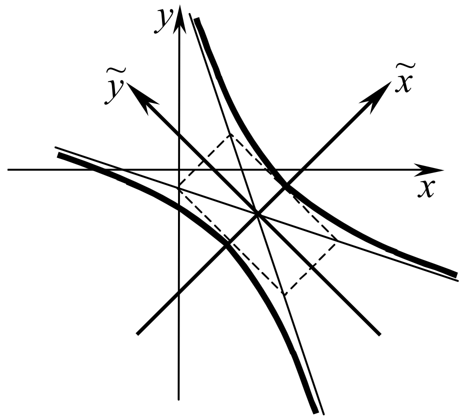
$$8\tilde{x}^2-2\tilde{y}^2-8\sqrt{2}\tilde{x}-6\sqrt{2}\tilde{y}-13=0.$$

4) Определим центр C гиперболы в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$:

$$8\left(\tilde{x}^2-\sqrt{2}\tilde{x}\right)-2\left(\tilde{y}^2+3\sqrt{2}\tilde{y}\right)-13=0,$$

$$8\left(\tilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(\tilde{y}^2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-8\cdot\frac{2}{4}+2\cdot\frac{9}{2}-13=0,$$

$$8\left(\widetilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(\widetilde{y}^2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-8=0,$$



$$\frac{\left(\widetilde{x}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1}-\frac{\left(\widetilde{y}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}=1,$$

$$\Rightarrow \quad C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

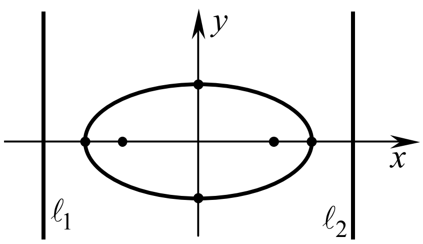
5) Построим кривую, предварительно построив ее каноническую систему координат.

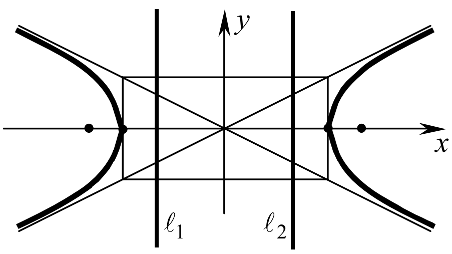
6. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы

Эллипс, гиперболу и параболу объединяет не только то, что это кривые второго порядка. У них есть свойство, которое позволяет дать для них общее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямые* $\ell_{1,2}=\mp\dfrac{a}{\varepsilon}$ *называются директрисами эллипса* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *и гиперболы* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Так как для эллипса $\varepsilon<1$, а для гиперболы $\varepsilon>1$, то директрисы не пересекают кривые.





Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса или гиперболы, r_i – расстояние от точки M до фокуса F_i, d_i – расстояние от точки M до директрисы ℓ_i. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Для любой точки* M *эллипса (гиперболы) выполняется равенство* $\dfrac{r_i}{d_i}=\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда

$$r_1 = a + \varepsilon x\,, \quad r_2 = a - \varepsilon x\,.$$

$$\Rightarrow \ \frac{r_1}{d_1} = \frac{a+\varepsilon x}{x - \left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)} = \frac{a+\varepsilon x}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{a+\varepsilon x}{\frac{x\varepsilon + a}{\varepsilon}} = \varepsilon\,,$$

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{a-\varepsilon x}{\frac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon\,.$$

Аналогично проводится доказательство для гиперболы. ■

Замечание. Парабола определяется как геометрическое место точек, для которых $r = d$, т.е. $\frac{r}{d} = 1$. Поэтому можно считать, что парабола это кривая второго порядка, для которой эксцентриситет $\varepsilon = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фиксированной точки плоскости (фокуса) и расстояния до фиксированной прямой плоскости (директрисы) есть величина постоянная и равная ε, называется*

1) *эллипсом, если* $\varepsilon < 1$;
2) *гиперболой, если* $\varepsilon > 1$;
3) *параболой, если* $\varepsilon = 1$.

Так как у эллипса, гиперболы и параболы существует общее определение, то логично поставить вопрос о существовании для них общего по форме уравнения. Такое уравнение существует, но только в полярной системе координат, при некотором специальном расположении полярной оси.

Замечание. В случае гиперболы, это уравнение будет определять только одну ее ветвь.

7. Полярная система координат. Полярное уравнение параболы, эллипса и ветки гиперболы

Полярная система координат вводится на плоскости следующим образом. Выбирается некоторая точка O (ее называют *полюсом*) и проводится луч OP (его называют *полярной осью*). Если M – произвольная точка плоскости, то расстояние $r = |OM|$ и угол φ между лучом OP и вектором $\overline{\mathbf{OM}}$ (φ считают положительным, если поворот от OP к $\overline{\mathbf{OM}}$

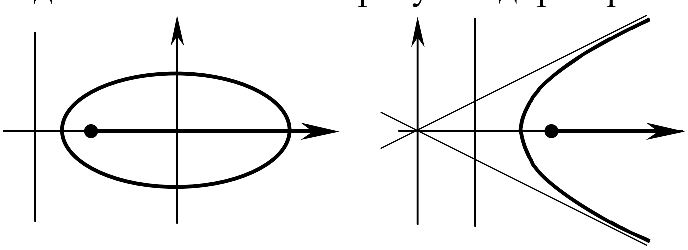
идет против часовой стрелки и отрицательным в противном случае) однозначно определяют её положение на плоскости. Эти два числа r и φ называют *полярными координатами точки* M .

Очевидно, что полярный радиус точки M определяется однозначно, полярный угол φ – с точностью до $2\pi k$. Значение $\varphi \in [0;\ 2\pi)$ (или $\varphi \in (-\pi;\ \pi])$ называют *главным значением* полярного угла.

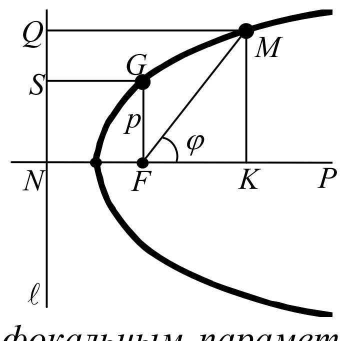
Если поместить полюс в начало декартовой системы координат, а полярную ось направить в положительную сторону оси Ox, то легко получить, что полярные и декартовы координаты точки будут связаны следующими равенствами:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi .$$

Поместим полюс в фокус эллипса (параболы, одной ветки гиперболы) и направим полярную ось по оси кривой в сторону, противоположную одноименной с этим фокусом директрисы.



Пусть $M(x;y)$ – текущая точка кривой, r и φ – ее полярные координаты в указанной полярной системе координат (т.е. $r = |MF|$, φ – угол между лучом FP и вектором $\overline{\mathbf{FM}}$). Заметим, что полярный радиус точки в выбранной полярной системе координат является ее фокальным радиусом.



По общему определению эллипса, гиперболы и параболы

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \ \Rightarrow\ r = \varepsilon \cdot d ,$$

где $\quad d = |QM| = |NK| = |NF| + |FK|,$

$$\Rightarrow\quad d = |NF| + r\cos\varphi .$$

Длину отрезка GF обозначим p и назовем *фокальным параметром кривой* (это обозначение согласуется с параметром p параболы). Пусть r_G – расстояние от точки G до фокуса кривой, d_G – расстояние от точки G до одноименной с этим фокусом директрисы. Тогда

$$\frac{r_G}{d_G} = \frac{|GF|}{|GS|} = \varepsilon .$$

Так как $$\left|GS\right| = \left|NF\right|,$$

то $$\frac{p}{\left|NF\right|} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|NF\right| = \frac{p}{\varepsilon}.$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi,$$

$$\Rightarrow \quad r = \varepsilon \cdot d = \varepsilon \cdot \left(\frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi\right) = p + r\varepsilon\cos\varphi,$$

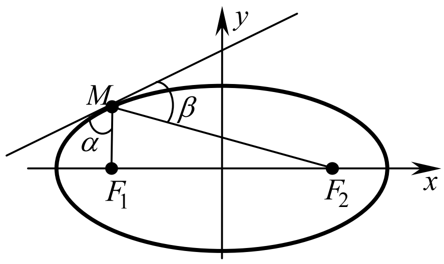
$$\Rightarrow \quad r - r\varepsilon\cos\varphi = p,$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$ – *полярное уравнение эллипса, параболы и одной ветви гиперболы*.

8. Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы

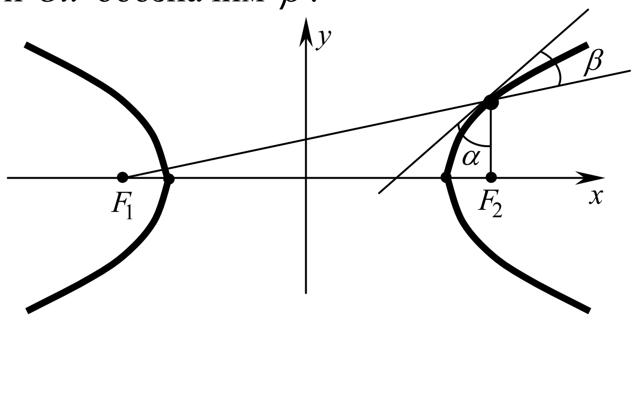
К числу наиболее замечательных свойств эллипса, гиперболы и параболы относятся их так называемые оптические свойства. Они показывают, что название «фокус» имеет источник в физике. Сначала сформулируем эти свойства в геометрическом виде.

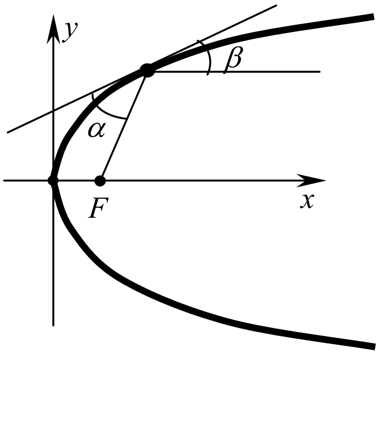
Возьмем произвольную точку M эллипса и проведем через нее касательную к кривой. Углы, которые образуют с этой касательной фокальные радиусы точки M, обозначим α и β.



Возьмем произвольную точку M гиперболы и проведем через нее касательную к кривой. Углы, которые образуют с этой касательной фокальные радиусы точки M, обозначим α и β.

Возьмем произвольную точку M параболы и проведем через нее касательную к кривой. Угол, который образует с этой касательной фокальный радиус точки M, обозначим α; угол наклона касательной к оси Ox обозначим β.





Оказалось, что для всех трех кривых $\alpha = \beta$. С физической точки зрения это означает:

1) *если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе*;
2) *если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее так, как если бы они исходили из другого фокуса*;
3) *если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее параллельно оси*.

§15. Поверхности второго порядка

Напомним, что поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ – многочлен степени 2.

Следовательно, в общем случае уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0.$$

Поверхности второго порядка делятся на две группы: 1) вырожденные и 2) невырожденные.

Вырожденные поверхности второго порядка это точки и плоскости, которые заданы уравнениями второго порядка. Например,

а) уравнение $x^2+y^2+z^2=0$ задает точку $O(0;\ 0;\ 0)$;

б) уравнение $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-2x-2y-2z+1=0$ задает плоскость $x+y+z-1=0$. Действительно,

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-2x-2y-2z+1=(x+y+z-1)^2,$$

$$\Rightarrow\ (x+y+z-1)^2=0,$$

$$\Rightarrow\ x+y+z-1=0.$$

в) уравнение $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-1=0$ определяет пару параллельных плоскостей. Действительно,

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-1=(x+y+z-1)(x+y+z+1),$$

$$\Rightarrow\ (x+y+z-1)(x+y+z+1)=0,$$

$$\Rightarrow\ x+y+z-1=0 \text{ или } x+y+z+1=0.$$

Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка пространства, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную поверхность (мнимую поверхность второго порядка).

Свои названия поверхности второго порядка получили, в большинстве случаев, от названия кривых, которые получаются при их пересечении плоскостями.

Также как и для кривых второго порядка, наиболее простое уравнение поверхность второго порядка будет иметь в декартовой системе координат, которая привязана к осям симметрии поверхности. Такие системы координат называют каноническими системами координат поверхности. В зависимости от вида уравнения в канонической системе координат, невырожденные поверхности второго порядка разделяют на пять типов. Рассмотрим эти типы.

1. Эллипсоид

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Эллипсоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (74)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой эллипсоид имеет уравнение (74) называется его *канонической системой координат*, а уравнение (74) – *каноническим уравнением эллипсоида*.

Исследование канонического уравнения эллипсоида позволяет сделать вывод, что он имеет центр симметрии $O(0;0;0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.

Действительно, если $M(x;y;z)$ – точка эллипсоида, то кроме равенства (74) будут справедливы также равенства

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}+\frac{(-z)^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(-z)^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Следовательно, на эллипсоиде лежат точки $M_1(-x;-y;-z)$, $M_2(x;y;-z)$, $M_3(x;-y;z)$, $M_4(-x;y;z)$, которые симметричны точке

$M(x;y;z)$ относительно начала координат и координатных плоскостей xOy, xOz, yOz соответственно.

Для дальнейшего определения формы эллипсоида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении эллипсоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}. \tag{74.1}$$

Уравнение (74.1) определяет:

а) при $|h| < a$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $h = \pm a$ – точку $A_{1,2}(\mp a;\ 0;0)$;

в) при $|h| > a$ – мнимую кривую.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении эллипсоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}. \tag{74.2}$$

Уравнение (74.2) определяет:

а) при $|h| < b$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $h = \pm b$ – точку $B_{1,2}(0;\ \mp b;\ 0)$;

в) при $|h| > b$ – мнимую кривую.

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении эллипсоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \tag{74.3}$$

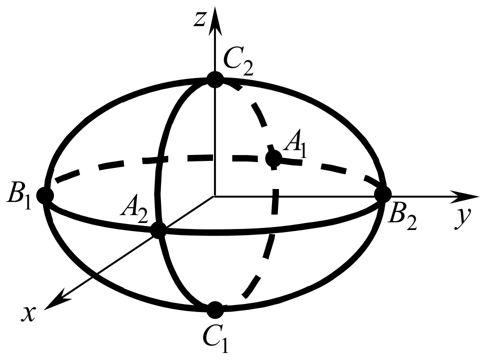
Уравнение (74.3) определяет:

а) при $|h| < c$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $h = \mp c$ – точку $C_{1,2}(0;\ 0;\ \mp c)$;

в) при $|h| > c$ – мнимую кривую.

На основании полученных данных построим эллипсоид.



Величины a, b и c называются *полуосями* эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется *трехостным*. В случае, когда две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей. Например, если $a = b$, то эллипсоид получится в результате вращения лежащего в плоскости yOz эллипса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг его оси Oz. При этом, если $a = b < c$, то эллипсоид называется *вытянутым*, а при $a = b > c$ – *сжатым*.

Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют *сферой*. Каноническое уравнение сферы принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r – величина полуосей, которая называется *радиусом сферы*. С геометрической точки зрения, *сфера – геометрическое место точек пространства, равноудаленных* (на расстояние r) *от некоторой фиксированной точки (*называемой *центром)*. В канонической системе координат сферы, центр – начало координат.

2. Гиперболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Однополостным гиперболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{75}$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (75) называется его *канонической системой координат*, а уравнение (75) – *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*.

Вид канонического уравнения однополостного гиперболоида позволяет сделать вывод, что он имеет центр симметрии $O(0;0;0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.

Для дальнейшего определения формы однополостного гиперболоида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении однополостного гиперболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}. \qquad (75.1)$$

Уравнение (75.1) определяет:

а) при $|h| < a$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oy;

б) при $h = \pm a$ – пару прямых;

в) при $|h| > a$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oz.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении однополостного гиперболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}. \qquad (75.2)$$

Уравнение (75.2) определяет:

а) при $|h| < b$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Ox;

б) при $|h| > b$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oz;

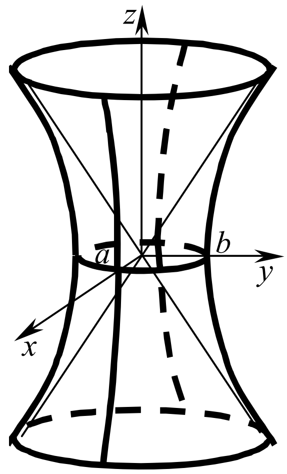
в) при $h = \pm b$ – пару прямых.

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении однополостного гиперболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}. \qquad (75.3)$$

Уравнение (75.3) определяет эллипс при любом h. При $h = 0$ полуоси эллипса будут наименьшими. Этот эллипс называют *горловым эллипсом* однополостного гиперболоида.

На основании полученных данных построим поверхность.



Величины a, b и c называются *полуосями* гиперболоида.

В случае, когда $a=b$, однополостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг своей мнимой оси. В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z=h$ будут окружности.

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ и } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

тоже определяют однополостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Двуполостным гиперболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{76}$$

где a,b,c – положительные константы.

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (76) называется его *канонической системой координат*, а уравнение (76) – *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида*.

По виду канонического уравнения двуполостного гиперболоида определяем, что он имеет центр симметрии $O(0;0;0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.

Изучим сечения двуполостного гиперболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x=h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении двуполостного гиперболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{h^2}{a^2}. \tag{76.1}$$

Уравнение (76.1) при любом h определяет гиперболу, действительная ось которой параллельна оси Oz.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении двуполостного гиперболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2}. \tag{76.2}$$

Уравнение (76.2) при любом h определяет гиперболу, действительная ось которой параллельна оси Oz.

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении двуполостного гиперболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}. \tag{76.3}$$

Уравнение (76.3) определяет:

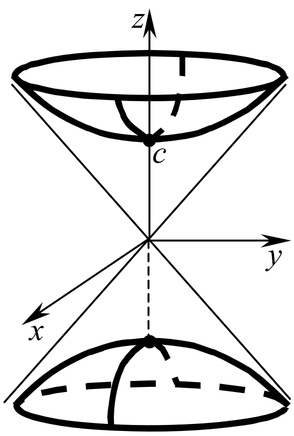
а) при $|h| > c$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);

б) при $h = \mp c$ – точку $C_{1,2}(0;\ 0;\ \mp c)$;

в) при $|h| > c$ – мнимую кривую.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a, b и c называются *полуосями* двуполостного гиперболоида. В случае, когда $a = b$, двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ вокруг своей мнимой оси. В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.



Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

3. Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Конусом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (77)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой конус имеет уравнение (77) называется его *канонической системой координат*, а уравнение (77) – *каноническим уравнением конуса*.

По виду канонического уравнения конуса определяем, что он имеет центр симметрии $O(0;0;0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.

Изучим сечения конуса плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x=h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении конуса этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{a^2}. \qquad (77.1)$$

Уравнение (77.1) определяет:

а) при $|h|\neq 0$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oz;

б) при $h=0$ – пару прямых.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y=h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении конуса этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{b^2}. \qquad (77.2)$$

Уравнение (77.2) определяет:

а) при $|h|\neq 0$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oz;

б) при $h=0$ – пару прямых.

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z=h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении конуса этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

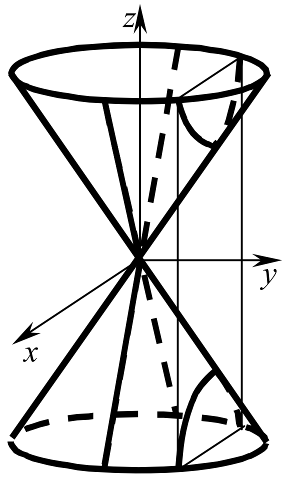
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}. \qquad (77.3)$$

Уравнение (77.3) определяет:

а) при $|h|\neq 0$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);

б) при $h=0$ – точку $O(0;0;0)$.

На основании полученных данных построим поверхность.



Величины a, b и c называются *полуосями* конуса. Центр симметрии $O(0;0;0)$ называется *вершиной* конуса.

В случае, когда $a=b$, конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения прямой $z=\dfrac{c}{b}y$ (ее называют *образующей* конуса) вокруг оси Oz. В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z=h$ будут окружности.

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ и } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

4. Параболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Эллиптическим параболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, \tag{78}$$

где a,b – положительные константы.

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет уравнение (78) называется его *канонической системой координат*, а уравнение (78) – *каноническим уравнением эллиптического параболоида*.

По виду канонического уравнения эллиптического параболоида определяем, что он имеет две плоскости симметрии xOz и yOz.

Для дальнейшего определения формы эллиптического параболоида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x=h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении эллиптического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2}=2z-\frac{h^2}{a^2}. \tag{78.1}$$

Уравнение (78.1) при любом h определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz, параметр $p = b^2$, ветви направлены вверх. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении эллиптического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{h^2}{b^2}. \qquad (78.2)$$

При любом h оно определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz, параметр $p = a^2$, ветви направлены вверх. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении эллиптического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h. \qquad (78.3)$$

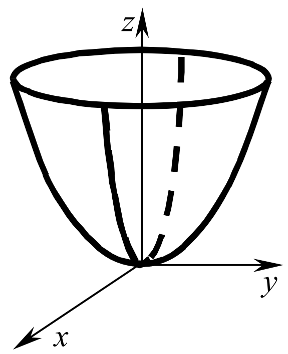
Уравнение (78.3) определяет:

а) при $h > 0$ – эллипс (причем, чем больше h, тем больше его полуоси);

б) при $h = 0$ – точку $O(0;\ 0;\ 0)$;

в) при $h < 0$ – мнимую кривую.

На основании полученных данных построим поверхность.



Величины a и b называются *параметрами* параболоида. Точка $O(0;0;0)$ называется *вершиной* эллиптического параболоида.

В случае, когда $a = b$, эллиптический параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения параболы $y^2 = 2b^2 z$ вокруг оси Oz. В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.

Замечания.

1. Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.
2. Уравнения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \pm 2y$ и $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \pm 2x$ определяют эллиптические параболоиды, но с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

3. Все параболы, которые получаются в сечении плоскостью $x = h$, имеют один параметр. Следовательно, их можно получить одну из другой в результате параллельного переноса. Поэтому *эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Гиперболическим параболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{79}$$

где a, b *– положительные константы*.

Система координат, в которой гиперболический параболоид имеет уравнение (79) называется его *канонической системой координат*, а уравнение (79) – *каноническим уравнением гиперболического параболоида*.

По виду канонического уравнения гиперболического параболоида определяем, что он имеет две плоскости симметрии xOz и yOz.

Исследуем сечения гиперболического параболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении гиперболического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$-\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}. \tag{79.1}$$

При любом h это уравнение определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz, параметр $p = b^2$, ветви направлены вниз. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении гиперболического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z + \frac{h^2}{b^2}. \tag{79.2}$$

Уравнение (79.2) при любом h определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz, параметр $p = a^2$, ветви направлены вверх. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вниз.

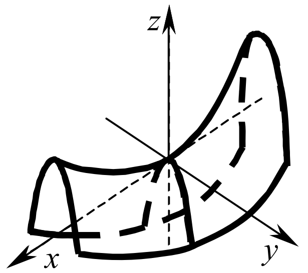
3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении гиперболического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h. \qquad (79.3)$$

Уравнение (79.3) определяет:

а) при $h \neq 0$ – гиперболу (при $h > 0$ действительная ось гиперболы параллельна оси Ox, при $h < 0$ – оси Oy);

б) при $h = 0$ – пару прямых.



На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a и b называются *параметрами* гиперболического параболоида.

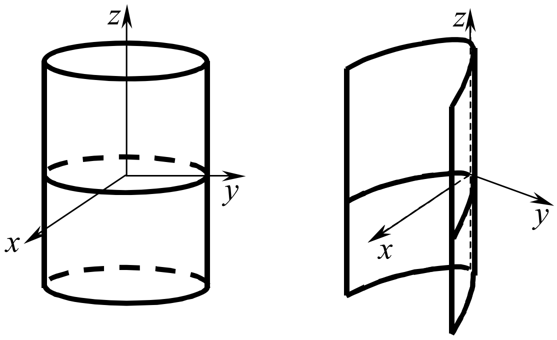
***Замечания*.**

1. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.
2. Уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$ определяют эллиптические параболоиды, но с осями симметрии Oy и Ox соответственно.
3. Все параболы, которые получаются в сечении плоскостью $x = h$, имеют один параметр. Следовательно, их можно получить одну из другой в результате параллельного переноса. Поэтому *эллиптический параболоид* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ *можно рассматривать как поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви подвижной параболы направлены вниз, неподвижной – вверх)*.

5. Цилиндры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Цилиндрической поверхность (цилиндром) называется поверхность, которую описывает прямая (называемая образующей), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой направляющей).*

Цилиндры называют по виду направляющей: *круговые*, *эллиптические*, *параболические*, *гиперболические*.



Пусть направляющая цилиндра лежит в плоскости xOy и имеет уравнение $F(x,y)=0$, а образующая параллельна оси Oz. Заметим, что если точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит направляющей, то $M(x_0;y_0;z)$ – принадлежит цилиндру при любом z. Следовательно, координаты точек цилиндра будут удовлетворять уравнению $F(x,y)=0$.

Аналогично, если поместим направляющую в плоскость xOz (yOz) и возьмем образующую параллельно оси Oy (Ox), то уравнение цилиндра будет иметь вид $F(x,z)=0$ ($F(y,z)=0$), где $F(x,z)=0$ ($F(y,z)=0$) – уравнение направляющей в координатной плоскости.

Таким образом, получили*, что цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат. Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра; а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты*.

6. Общее уравнение поверхности второго порядка

Также как и для кривых второго порядка, уравнение в котором отсутствуют слагаемые с произведением координат

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0$$

будет определять поверхность, чья каноническая система координат смещена по отношению к заданной в некоторую точку $C_0(x_0;y_0;z_0)$. Ее легко найти в результате элементарных преобразований уравнения (группировка членов и выделение полных квадратов).

В общем случае, каноническая система координат поверхности развернута и смещена по отношению к заданной. Существует несколько способов ее найти, но они выходят за рамки нашего курса.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ образовывали треугольник.
2. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ имели единственную общую точку.
3. Даны две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$. С помощью рангов r и R матриц $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямые: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.
4. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка $M_0(x_0;y_0)$ лежала между двумя параллельными прямыми $Ax+By+C_1=0$ и $Ax+By+C_2=0$.
5. Даны три параллельные прямые: $Ax+By+C_1=0$, $Ax+By+C_2=0$, $Ax+By+C_3=0$. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вторая прямая лежала в полосе, образованной первой и третьей прямыми.
6. Найти расстояние d между двумя параллельными прямыми $Ax+By+C_1=0$ и $Ax+By+C_2=0$.
7. Записать уравнения прямых, параллельных прямой $Ax+By+C=0$ и отстоящих от нее на расстоянии d.
8. Прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$. Найти ее нормальное уравнение.
9. Доказать, что если $\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y-p=0$ – нормальное уравнение прямой, то $d=\left|\cos\alpha\cdot x_0+\cos\beta\cdot y_0-p\right|$ – расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до этой прямой.
10. Доказать, что прямая $Ax+By+C=0$ параллельна прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ тогда и только тогда, когда $Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C\neq 0$.
11. Даны две смежные стороны параллелограмма $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и точка пересечения его диагоналей $M_0(x_0;y_0)$. Записать уравнения двух других его сторон.
12. Точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ не лежат на прямой $Ax+By+C=0$. Найдите отношение λ, в котором точка пересечения прямой $Ax+By+C=0$ и прямой M_1M_2 делит отрезок M_1M_2.

13. Стороны треугольника заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Найти длину высоты треугольника, опущенную на третью сторону.
14. Прямая на плоскости задана векторным уравнением $(\bar{\mathbf{r}}, \overline{\mathbf{N}}) + C = 0$, $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}$ – радиус-вектор точки M_0. Найти радиус-вектор точки M_1, симметричной точке M_0 относительно заданной прямой.
15. Точка M_0 лежит на прямой $Ax + By + C = 0$. Вектор M_0M_1 имеет координаты $\{A; B\}$. Доказать, что точка M_1 лежит в положительной полуплоскости относительно прямой $Ax + By + C = 0$.
16. Две прямые на плоскости заданы векторными уравнениями: $(\bar{\mathbf{r}}, \overline{\mathbf{N}}) + C = 0$ и $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} + t \cdot \bar{\ell}$ (где $(\overline{\mathbf{N}}, \bar{\ell}) \neq 0$). Найдите радиус-вектор точки пересечения прямых.
17. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежала между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ (сравните с задачей 4).
18. Даны три параллельные плоскости: $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $Ax + By + Cz + D_3 = 0$. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вторая плоскость лежала в полосе, образованной первой и третьей плоскостями (сравните с задачей 5).
19. Найти расстояние d между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ (сравните с задачей 6).
20. Записать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии d (сравните с задачей 7).
21. Плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Найти ее нормальное уравнение (сравните с задачей 8).
22. Доказать, что если $\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0$ – нормальное уравнение плоскости, то $d = \left| \cos\alpha \cdot x_0 + \cos\beta \cdot y_0 + \cos\gamma \cdot z_0 - p \right|$ – расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до этой плоскости (сравните с задачей 9).
23. Три вектора $\overline{\mathbf{OA}} = \bar{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{OB}} = \bar{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{OC}} = \bar{\mathbf{c}}$ – некомпланарные. Доказать, что плоскость, проходящая через точки A, B, C перпендикулярна вектору $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}] + [\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}]$.
24. Даны две плоскости
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы плоскости: а) пересекались; б) были параллельны; в) совпадали.

25. Даны три плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$. С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы

1) три плоскости имели одну общую точку;
2) три плоскости были различны и пересекались по одной прямой;
3) плоскости попарно пересекались и линия пересечения любых двух плоскостей была параллельна третьей стороне (т.е. плоскости образовывают «призму»).
4) две плоскости были параллельны, а третья их пересекала;
5) три плоскости были параллельны;
6) две плоскости совпадали, а третья их пересекала;
7) две плоскости совпадали, а третья – им параллельна;
8) три плоскости совпадали.

26. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$ ($k=1,2,3,4$) образуют пирамиду?

27. Запишите векторное уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 с радиус-вектором $\bar{\mathbf{r}}_0$ параллельно неколлинеарным векторам $\bar{\ell}_1$ и $\bar{\ell}_2$ (не используя смешанное произведение векторов).

28. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$ чтобы эта прямая а) была параллельна оси Ox (оси Oy, оси Oz); б) пересекала ось Ox (ось Oy, ось Oz); в) совпадала с осью Ox (осью Oy, осью Oz).

29. Дана прямая $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ и плоскость $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$. С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая: а) пересекалась с плоскостью; б) была параллельна плоскости; в) лежала в плоскости.

30. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ перпендикулярно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.
31. Записать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ на прямую $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.
32. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$
33. Даны точка M_0 с радиус-вектором $\overline{\mathbf{r_0}}$ и плоскость $(\overline{\mathbf{r}},\overline{\mathbf{N}})+D=0$. Найти радиус-вектор точки M_1, симметричной точке M_0 относительно заданной плоскости.
34. Записать уравнение проекции прямой $\overline{\mathbf{r}}=\overline{\mathbf{r_0}}+t\cdot\overline{\ell}$, не перпендикулярной плоскости $(\overline{\mathbf{r}},\overline{\mathbf{N}})+D=0$, на эту плоскость.
35. Записать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с радиус-вектором $\overline{\mathbf{r_0}}$ и пересекающей две скрещивающиеся прямые $\overline{\mathbf{r}}=\overline{\mathbf{r_1}}+t_1\cdot\overline{\ell}_1$ и $\overline{\mathbf{r}}=\overline{\mathbf{r_2}}+t_2\cdot\overline{\ell}_2$.
36. Записать уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым $\overline{\mathbf{r}}=\overline{\mathbf{r_1}}+t_1\cdot\overline{\ell}_1$ и $\overline{\mathbf{r}}=\overline{\mathbf{r_2}}+t_2\cdot\overline{\ell}_2$.
37. Прямая $\overline{\mathbf{r}}=\overline{\mathbf{r_0}}+t\cdot\overline{\ell}$ и плоскость $(\overline{\mathbf{r}},\overline{\mathbf{N}})+D=0$ не параллельны. Точка M лежит на прямой на расстоянии d от плоскости. Найти радиус вектор точки M .
38. Запишите векторное уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку M_0 с радиус-вектором $\overline{\mathbf{r_0}}$ перпендикулярно двум неколлинеарным векторам $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$.
39. Доказать, что произведение расстояний от любой дочки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная.
40. Найти наибольший радиус окружности, лежащей внутри параболы $y^2=2px$ и касающейся параболы в ее вершине.
41. Доказать, что если две гиперболы имеют общие асимптоты и лежат в одной и той же паре вертикальных углов, образованных их асимптотами, то их эксцентриситеты равны между собой.

42. Доказать, что если две гиперболы имеют общие асимптоты и лежат в разных парах вертикальных углов, образованных их асимптотами, то произведение их эксцентриситетов больше или равно 2, причем это произведение равно 2 только для равносторонних гипербол.
43. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус эллипса делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная. **Подсказка**: использовать полярное уравнение кривой.
44. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус гиперболы делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная. **Подсказка**: использовать полярное уравнение кривой.
45. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус параболы делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная. **Подсказка**: использовать полярное уравнение кривой.
46. Через точку гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ проведены две прямые, параллельные асимптотам. Доказать, что площадь параллелограмма, образованного этими прямыми и асимптотами гиперболы есть величина постоянная, равная $0{,}5ab$.
47. Доказать, что точки пересечения эллипсов $n^2x^2+m^2y^2-m^2n^2=0$ и $m^2x^2+n^2y^2-m^2n^2=0$ (где $m\neq n$) лежат на окружности. Указать центр и радиус этой окружности.
48. Доказать, что расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до ее асимптоты равно b.
49. Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с произвольной его точкой, заключена между длинами полуосей этого эллипса.
50. Доказать, что произведение расстояний от фокусов эллипса до касательной, проведенной к эллипсу в любой точке M_0, равно квадрату малой полуоси.
51. Записать уравнение сферы с центром в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и радиуса R в векторной форме.
52. Если M – отличная от начала координат точка на конусе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, то все точки прямой OM также лежат на конусе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апатенок Р.Ф. Элементы линейной алгебра и аналитической геометрии / Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. – Минск. 1986. – 272 с.
2. Ильин В.А. Линейная алгебра / Ильин В.А., Позняк Э.Г. – Москва. Наука, 1999. – 296 с.
3. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / Ильин В.А., Позняк Э.Г. – Москва. Наука, 1999. – 224 с.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И.В. – Москва. Наука. 1978. – 384 с.
5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Клетеник Д.В. – Москва. Наука, 1998. – 200 с.
6. Моденов П.С. Сборник задач по аналитической геометрии / Моденов П.С., Пархоменко А.С. – Москва. Наука 1976. – 384 с.