Домашнее задание по теме: «Линейные операторы»

1. Доказать, что оператор пространства $V^{(3)}$, действующий на произвольный вектор $\overline{\mathbf{x}}$ по формуле $\varphi\overline{\mathbf{x}} = [\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}]$, где $\overline{\mathbf{a}}$ – фиксированный ненулевой вектор, является линейным. Найти матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, если вектор $\overline{\mathbf{a}}$ имеет в этом базисе координаты $\overline{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

   Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Найти матрицу оператора φ_α поворота плоскости на угол α вокруг начала координат против часовой стрелки в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

   Ответ: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

3. В базисе 1, x, x^2 пространства $\mathbb{R}^3[x]$ оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $f_1(x) = 3x^2 + 2x$, $f_2(x) = 5x^2 + 3x + 1$, $f_3(x) = 7x^2 + 5x + 3$.

   Ответ: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -15/4 & -4 & -5 \\ 9/4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. В базисе $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, …, $\mathbf{e_n}$ пространства L_n оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A}$. Как изменится матрица оператора φ, если а) в базисе поменять местами векторы $\mathbf{e_i}$ и $\mathbf{e_j}$; б) записать базисные векторы в обратном порядке?

   Ответ: а) поменяются местами i-й и j-й столбцы и i-я и j-я строчки;
   б) все строки и столбцы запишутся в обратном порядке.

5. Линейный оператор φ пространства L_3 имеет в некотором базисе $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ матрицу $\mathbf{A}$. Выяснить, диагонализируем ли линейный оператор, и если да – то найти его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

   а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

   Ответ: а) Да. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 2$. $L_{\lambda=-1} = L(\mathbf{f_1})$, $L_{\lambda=2} = L(\mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})$,
   где $\mathbf{f_1} = \{1, -1, -1\}$, $\mathbf{f_2} = \{1, 1, 0\}$, $\mathbf{f_3} = \{1, 0, 1\}$.
   б) Нет. $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 3$. $L_{\lambda=-1} = L(\mathbf{f_1})$, $L_{\lambda=3} = L(\mathbf{f_2})$,
   где $\mathbf{f_1} = \{2, -1, 0\}$, $\mathbf{f_2} = \{1, -1, 1\}$.