Домашнее задание по теме: «Линейные пространства и подпространства»

1. Проверить, образуют ли подпространство линейного пространства $\mathbb{R}^n$ следующие подмножества:

   а) $M_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots = 0\}$; в) $M_3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 = \alpha_n\}$;

   б) $M_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots\}$; г) $M_4 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{Z},\ \forall i\}$.

   Ответы: а) да; б) да; в) да; г) нет.

2. Проверить, образуют ли подпространство линейного пространства $M(3\times 3, \mathbb{R})$ следующие подмножества:

   а) $S(3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \right\}$; б) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ b & 1 & e \\ c & e & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

   в) $KS(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix} \right\}$; г) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ -b & 1 & e \\ -c & -e & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   Ответы: а) да; б) нет; в) да; г) нет.

3. Доказать, что если некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима.
4. Доказать, что если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.

5. Выяснить, является ли данная система векторов $\mathbb{R}^4$ линейно зависимой или линейно независимой:

   $$a_1 = (4,-5,2,6),\quad a_2 = (2,-2,1,3),\quad a_3 = (1,-3,3,9),\quad a_4 = (4,-1,5,6).$$

   Ответ: линейно независимая ($D = -45$).

6. Выяснить, является ли данная система векторов $\mathbb{R}[x]$ линейно зависимой или линейно независимой:

   $$f_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4,\qquad f_2(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5,$$
   $$f_3(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6,\quad f_4(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7.$$

   Ответ: линейно зависимая.

7. Проверить, что векторы

   $$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1,\quad f_2(x) = 2x^2 - x + 2,\quad f_3(x) = -x^2 + 2x + 2$$

   образуют базис пространства $\mathbb{R}^3[x]$ и найти координаты вектора $g(x) = x^2 + x + 1$ в этом базисе.

   Ответ: $\left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$.

8. На плоскости даны два вектора $\overline{\mathbf{p}} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Доказать, что они образуют базис на плоскости и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}} = 9\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ в базисе $\overline{\mathbf{p}}$, $\overline{\mathbf{q}}$. **Ответ**: $\overline{\mathbf{a}} = 2\overline{\mathbf{p}} + 5\overline{\mathbf{q}}$.

9. В пространстве даны три вектора $\overline{\mathbf{p}} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{q}} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{r}} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Доказать, что они образуют базис в пространстве и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{c}} = 11\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ в базисе $\overline{\mathbf{p}}$, $\overline{\mathbf{q}}$, $\overline{\mathbf{r}}$.
Ответ: $\overline{\mathbf{c}} = 2\overline{\mathbf{p}} - 3\overline{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{r}}$.

10. Проверить, что векторы $e_1 = (1,5)$, $e_2 = (2,7)$ и $f_1 = (3,9)$, $f_2 = (3,3)$ образуют базисы пространства $\mathbb{R}^2$ и найти координаты вектора x в базисе f_1, f_2, если известно, что в базисе e_1, e_2 он имеет координаты $\{4;–2\}$.
Ответ: $\{1; -1\}$, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.