

Домашнее задание по теме: «Матрицы и действия над ними»

1) Решить систему матричных уравнений:
$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Найти $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. **Ответ:** $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

3) Найти $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k$. **Ответ:** $\begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^k \end{pmatrix}$.

4) Вычислить $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$, используя равенство

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{pmatrix}$.

5) Найти $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$. **Ответ:** $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

6) Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

Ответ: $\pm E, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a^2 = 1 - bc$.

Как изменится произведение AB матриц A и B , если:

- 7) переставить i -ю и j -ю строки матрицы A ?
- 8) переставить i -й и j -й столбцы матрицы B ?
- 9) к i -й строке матрицы A прибавить ее j -ю строку, умноженную на число c ?
- 10) к i -му столбцу матрицы B прибавить ее j -й столбец, умноженный на число c ?

Ответ: 7) i -я и j -я строки матрицы AB поменяются местами.

8) i -й и j -й столбцы матрицы AB поменяются местами.

9) к i -й строке матрицы AB прибавится j -я строка, умноженная на число c .

10) к i -му столбцу матрицы AB прибавится j -й столбец, умноженный на число c .

11) Доказать, что если матрица B перестановочна с матрицей A , то она перестановочна и с матрицей $A - \lambda E$ (где λ – любое отличное от нуля число).

12) Следом квадратной матрицы A (обозначают trA) называют сумму ее элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.

$$trA = a_{11} + a_{22} \dots + a_{nn}.$$

Доказать, что $trAB = trBA$.