ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ I семестр

1. Функция: определение, способы задания, классификация, основные характеристики поведения функции.
2. Числовые последовательности: определение, основные характеристики поведения. Предел числовой последовательности, геометрическая интерпретация. Свойства сходящихся последовательностей. Теорема Вейерштрасса (доказать). Число e.
3. Бесконечно большие последовательности: определение, геометрическая интерпретация, свойства.
4. Предел функции (определение по Коши, по Гейне, их эквивалентность) Свойства пределов.
5. Бесконечно малые функции: определение, роль в теории пределов, свойства бесконечно малых функций.
6. Бесконечно большие функции: определение, свойства.
7. Односторонние пределы. Теорема о существование $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
8. Замечательные пределы и их следствия.
9. Сравнение бесконечно малых. Теорема о замене бесконечно малых на эквивалентные в пределе и теорема о главной части бесконечно малой.
10. Непрерывность функции в точке (на языке пределов, на языке $\varepsilon - \delta$, геометрическое). Односторонняя непрерывность. Непрерывность на интервале, на отрезке. Свойства непрерывных функций.
11. Точки разрыва, их классификация.
12. Свойства функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ (теоремы Вейерштрасса (без доказательства) и Коши (доказать)).
13. Производная: определение, геометрический и физический смысл. Условие существования производной. Связь между существованием $f'(x_0)$ и непрерывностью функции $f(x)$ в точке x_0.
14. Основные правила дифференцирования. Производная обратной функции. Логарифмическое дифференцирование.
15. Определение дифференцируемой функции. Связь дифференцируемости функции с существованием производной.
16. Дифференциал функции: определение, геометрический смысл. Свойства дифференциала. Инвариантность формы записи первого дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
17. Производные высших порядков: определение, производные высших порядков для суммы, произведения (формула Лейбница). Физический смысл второй производной.

18. Дифференциалы высших порядков: определение, связь с производными высших порядков, не инвариантность формы записи.
19. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа, Коши; все с доказательством).
20. Правило Лопиталя раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.
21. Возрастание и убывание функции. Необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) дифференцируемой функции.
22. Экстремумы функции: определение, необходимое условие экстремума (теорема Ферма). Достаточные условия экстремума.
23. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба: определения, необходимое и достаточное условия выпуклости (вогнутости) кривой $y = f(x)$, необходимые и достаточные условия перегиба кривой $y = f(x)$.
24. Асимптоты кривой: определение, виды, нахождение.
25. ФНП: определение, способы заданий, предел и непрерывность.
26. Определение частной производной. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных. Частные производные высших порядков.
27. Дифференцируемость ФНП: определение, необходимые (доказать) и достаточное (без доказательства) условия дифференцируемости ФНП.
28. Дифференциал ФНП: определение, геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Дифференциалы высших порядков.
29. Частные производные и дифференциал сложной функции. Инвариантность формы записи первого дифференциала. Неинвариантность формы записи дифференциалов высших порядков.
30. Неявные функции: теорема существования, дифференцирование неявно заданных функций одной и нескольких переменных.
31. Экстремум ФНП: определение экстремума и точки экстремума, необходимое и достаточное условия экстремума.
32. Условный экстремум: определение, нахождение.
33. Производная по направлению: определение, физический смысл, вычислительная формула.
34. Градиент: определение, свойства.

УПРАЖНЕНИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
I семестр

1. Доказать, что последовательность может иметь не более одного предела.
2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
3. Доказать, что произведение бесконечно малой и ограниченной последовательности есть бесконечно малая последовательность.
4. Доказать, что если все члены последовательности неотрицательны (положительны), то ее предел – неотрицательный.
5. Доказать, что если сходящиеся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ удовлетворяют условию $x_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
6. Доказать лемму о двух милиционерах.
7. Доказать, что сумма двух бесконечно больших последовательностей одного знака является бесконечно большой того же знака.
8. Доказать, что сумма бесконечно большой и ограниченной последовательности является бесконечно большой последовательностью.
9. Доказать, что произведение двух бесконечно больших последовательностей является бесконечно большой последовательностью.
10. Доказать, что произведение бесконечно большой и отделимой от нуля ограниченной последовательности является бесконечно большой последовательностью.
11. Уметь доказывать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, где $\{x_n\}$ – некоторая заданная сходящаяся последовательность.
12. Уметь доказывать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, где $\{x_n\}$ – некоторая заданная бесконечно большая последовательность.
13. Уметь доказывать по определению, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, где $f(x)$ – некоторая заданная функция.
14. Уметь доказывать по определению, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, где $f(x)$ – некоторая заданная функция.
15. Доказать формулу замены переменной в пределе функции.
16. Доказать следствия первого замечательного предела.
17. Доказать следствия второго замечательного предела.
18. Доказать, что $C' = 0$ и $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
19. Доказать, что $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
20. Доказать, что производная четной функции является функцией нечетной, а производная нечетной функции является функцией четной.

21. Доказать, что производная периодической функции является функцией периодической, с тем же самым периодом.
22. Найти по определению производные функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, a^x, $\ln x$, $\log_a x$.
23. С помощью теоремы о производной обратной функции найти производные функций $\arcsin x$, $arctgx$, $\arccos x$, $arcctgx$.
24. Зная производные функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, найти производные функций tgx, $ctgx$, shx, chx, thx, $cthx$.
25. Используя дифференциал, доказать, что если α – мало, то $\sqrt[n]{1+\alpha}-1\sim\dfrac{\alpha}{n}$.
26. Доказать теорему Ролля.
27. Доказать теорему Лагранжа.
28. Доказать теорему Ферма.
29. Доказать первое достаточное условие экстремума.
30. Найти $d^2 f(x,y)$, если $x=\varphi_1(u,v)$, $y=\varphi_2(u,v)$. Сделать вывод об инвариантности формы записи дифференциалов высших порядков ФНП.