ВАРИАНТ 1

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4\mathrm{A} - 2\mathrm{B}$,

б) матрицу $\mathrm{AB} - \mathrm{BA}$,

в) матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathrm{A})$, если $f(x) = x^2 - x - 1$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = -1, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{e}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{e}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{e}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{x}$:

$$\overline{a}_1 = \{1;1;1\},\ \overline{a}_2 = \{1;1;2\},\ \overline{a}_3 = \{1;2;3\},\ \overline{x} = \{6;9;14\}.$$

а) доказать, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу A перехода от базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ к базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ и матрицу B перехода от базиса $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ к базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ и $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$.

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-2\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0, \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 0, \\ -5x_1 + 16x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 26x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$: $\overline{\mathbf{a}}_1 = \{1;2;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-2;3;-2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{3;-4;-5\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{6;20;6\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 3

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $\frac{1}{2}\mathbf{A} - \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 11 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 21 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{5;0;4\},\ \overline{\mathbf{a}}_2 = \{2;5;-5\},\ \overline{\mathbf{a}}_3 = \{-9;-6;0\},\ \overline{\mathbf{x}} = \{-6;-12;6\}.$$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 4

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 35 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -4; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 10, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -12, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 14x_4 = 0; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0,. \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;5;4\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-3;1;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-3;2\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{17;-2;16\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 5

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 4 \\ 14 & 9 & 17 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;1\},\ \overline{\mathbf{a}}_2 = \{-1;0;-1\},\ \overline{\mathbf{a}}_3 = \{-1;2;0\},\ \overline{\mathbf{x}} = \{1;4;0\}.$$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 6

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-5\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 0 & -33 & 27 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \ 5x_4 = \ 2, \\ 2x_1 + \ x_2 + 4x_3 + \ x_4 = -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - \ 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12x_4 = \ 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - \ 2x_2 + \ x_3 - \ x_4 + \ x_5 = \ 1, \\ x_1 + \ 2x_2 - \ x_3 + \ x_4 - \ 2x_5 = \ 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + \ 7x_5 = \ 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 \quad - \quad 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 \quad = 0, \\ x_1 \quad - \quad x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ x_3 - x_4 - x_5 - \ x_6 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \quad - \ 3x_6 = 0, \\ x_1 + \ x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \quad = 0, \\ -2x_1 \quad - \ 3x_3 - x_4 + x_5 + 4x_6 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{1;-4;-6\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-2;2\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{-8;5;45\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 7

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -13 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 20 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4\mathbf{A} - \mathbf{B}$,
б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,
в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 + x - 1$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$.

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_6 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;6\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{-4;0;1\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{5;-3;1\}$, $\bar{\mathbf{x}} = \{21;-18;30\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 8

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-1;1;-1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-1;3\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{4;2;6\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 9

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 25x_1 + 31x_2 + 17x_3 + 43x_4 = 0, \\ 75x_1 + 94x_2 + 53x_3 + 132x_4 = 0, \\ 75x_1 + 94x_2 + 54x_3 + 134x_4 = 0, \\ 25x_1 + 32x_2 + 20x_3 + 43x_4 = 0, \\ 50x_1 + 63x_2 + 36x_3 + 89x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{1;2;1\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{-2;1;-3\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{1;-1;2\}$, $\bar{\mathbf{x}} = \{7;-2;11\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 10

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 - 3x + 7$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{1;3;2\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{2;-5;7\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{1;3;-1\}$, $\bar{\mathbf{x}} = \{4;1;8\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 11

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4A - 2B$,

б) матрицу $AB - BA$,

в) матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = -1, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathrm{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathrm{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathrm{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathrm{a}}_1, \bar{\mathrm{a}}_2, \bar{\mathrm{a}}_3, \bar{\mathrm{x}}$:

$$\bar{\mathrm{a}}_1 = \{1;1;1\},\ \bar{\mathrm{a}}_2 = \{1;1;2\},\ \bar{\mathrm{a}}_3 = \{1;2;3\},\ \bar{\mathrm{x}} = \{6;9;14\}.$$

а) доказать, что векторы $\bar{\mathrm{a}}_1, \bar{\mathrm{a}}_2, \bar{\mathrm{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу A перехода от базиса $\bar{\mathrm{e}}_1, \bar{\mathrm{e}}_2, \bar{\mathrm{e}}_3$ к базису $\bar{\mathrm{a}}_1, \bar{\mathrm{a}}_2, \bar{\mathrm{a}}_3$ и матрицу B перехода от базиса $\bar{\mathrm{a}}_1, \bar{\mathrm{a}}_2, \bar{\mathrm{a}}_3$ к базису $\bar{\mathrm{e}}_1, \bar{\mathrm{e}}_2, \bar{\mathrm{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathrm{x}}$ в базисе $\bar{\mathrm{a}}_1, \bar{\mathrm{a}}_2, \bar{\mathrm{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathrm{e}}_1, \bar{\mathrm{e}}_2, \bar{\mathrm{e}}_3$ и $\bar{\mathrm{a}}_1, \bar{\mathrm{a}}_2, \bar{\mathrm{a}}_3$.

ВАРИАНТ 12

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-2\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0, \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 0, \\ -5x_1 + 16x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 26x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$: $\overline{\mathbf{a}}_1 = \{1;2;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-2;3;-2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{3;-4;-5\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{6;20;6\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$, $\overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 13

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $\frac{1}{2}\mathbf{A} - \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 11 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 21 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{5;0;4\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{2;5;-5\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{-9;-6;0\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{-6;-12;6\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 14

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 35 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -4; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 10, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -12, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 14x_4 = 0; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0,. \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;5;4\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-3;1;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-3;2\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{17;-2;16\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 15

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 4 \\ 14 & 9 & 17 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;1\},\ \bar{\mathbf{a}}_2 = \{-1;0;-1\},\ \bar{\mathbf{a}}_3 = \{-1;2;0\},\ \bar{\mathbf{x}} = \{1;4;0\}.$$

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 16

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-5\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 0 & -33 & 27 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 + 4x_6 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{1;-4;-6\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-2;2\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{-8;5;45\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 17

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -13 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 20 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4\mathbf{A} - \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 + x - 1$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$.

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_6 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;6\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{-4;0;1\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{5;-3;1\}$, $\bar{\mathbf{x}} = \{21;-18;30\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 18

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-1;1;-1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-1;3\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{4;2;6\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 19

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 25x_1 + 31x_2 + 17x_3 + 43x_4 = 0, \\ 75x_1 + 94x_2 + 53x_3 + 132x_4 = 0, \\ 75x_1 + 94x_2 + 54x_3 + 134x_4 = 0, \\ 25x_1 + 32x_2 + 20x_3 + 43x_4 = 0, \\ 50x_1 + 63x_2 + 36x_3 + 89x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{1;2;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-2;1;-3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-1;2\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{7;-2;11\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 20

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 - 3x + 7$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{1;3;2\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{2;-5;7\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{1;3;-1\}$, $\bar{\mathbf{x}} = \{4;1;8\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 21

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4\mathrm{A} - 2\mathrm{B}$,

б) матрицу $\mathrm{AB} - \mathrm{BA}$,

в) матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathrm{A})$, если $f(x) = x^2 - x - 1$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = -1, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{e}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{e}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{e}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{x}$:

$$\overline{a}_1 = \{1;1;1\},\ \overline{a}_2 = \{1;1;2\},\ \overline{a}_3 = \{1;2;3\},\ \overline{x} = \{6;9;14\}.$$

а) доказать, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу A перехода от базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ к базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ и матрицу B перехода от базиса $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ к базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ и $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$.

ВАРИАНТ 22

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-2\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0, \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 0, \\ -5x_1 + 16x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 26x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$: $\bar{\mathbf{a}}_1 = \{1;2;3\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{-2;3;-2\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{3;-4;-5\}$, $\bar{\mathbf{x}} = \{6;20;6\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 23

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $\frac{1}{2}\mathbf{A} - \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 11 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 21 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{5;0;4\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{2;5;-5\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{-9;-6;0\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{-6;-12;6\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 24

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 35 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -4; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 10, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -12, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 14x_4 = 0; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0,. \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;5;4\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-3;1;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-3;2\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{17;-2;16\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 25

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 4 \\ 14 & 9 & 17 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;1\},\ \bar{\mathbf{a}}_2 = \{-1;0;-1\},\ \bar{\mathbf{a}}_3 = \{-1;2;0\},\ \bar{\mathbf{x}} = \{1;4;0\}.$$

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 26

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-5\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 0 & -33 & 27 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \ 5x_4 = \ \ 2, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 + \ \ \ x_4 = -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - \ 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12x_4 = \ \ 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - \ 2x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 + \ \ \ x_5 = \ \ 1, \\ x_1 + \ 2x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 - \ 2x_5 = \ \ 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + \ 7x_5 = \ \ 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 + 4x_6 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{1;-4;-6\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-2;2\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{-8;5;45\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 27

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -13 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 20 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4\mathbf{A} - \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 + x - 1$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$.

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_6 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;6\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{-4;0;1\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{5;-3;1\}$, $\bar{\mathbf{x}} = \{21;-18;30\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 28

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-1;1;-1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-1;3\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{4;2;6\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 29

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 25x_1 + 31x_2 + 17x_3 + 43x_4 = 0, \\ 75x_1 + 94x_2 + 53x_3 + 132x_4 = 0, \\ 75x_1 + 94x_2 + 54x_3 + 134x_4 = 0, \\ 25x_1 + 32x_2 + 20x_3 + 43x_4 = 0, \\ 50x_1 + 63x_2 + 36x_3 + 89x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{1;2;1\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{-2;1;-3\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{1;-1;2\}$, $\bar{\mathbf{x}} = \{7;-2;11\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ВАРИАНТ 30

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 - 3x + 7$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему методом Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+\ x_3 \qquad\quad = 8, \\ \qquad\ x_2+3x_3+\ x_4=15, \\ 4x_1 \qquad +\ \ x_3+\ x_4=11, \\ x_1+\ x_2 \qquad +\ 5x_4=23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4+\ 3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+\ 5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+\ x_3+\ x_4+\ 2x_5=1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1-2x_2+\ x_3+\ x_4-\ x_5=0, \\ 2x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4+\ x_5=0, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1-\ x_2-2x_3+\ x_4-\ x_5=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \qquad x_2-\ x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-4x_2+3x_3+\ x_4=0, \\ x_1-2x_2+\ x_3-4x_4=0, \\ 4x_1-7x_2+4x_3-4x_4=0. \end{cases}$

9. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1=\{1;3;2\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2=\{2;-5;7\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3=\{1;3;-1\}$, $\bar{\mathbf{x}}=\{4;1;8\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.