РАСЧЕТ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА

Понятие взаимной поверхности

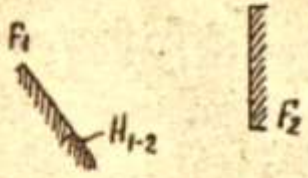


Рис. I

Пусть два тела с площадью поверхностей обращенных друг к другу, F_1 и F_2, произвольно расположены в пространстве (рис. I).

Пусть угловой коэффициент $\varphi_{1-2} = \frac{1}{3}$.

Произведение

$$\varphi_{1-2} F_1 = \frac{1}{3} F_1 = H_{1-2}, \ м^2,$$

H_{1-2} – взаимная поверхность первого тела относительно второго – это доля поверхности первого тела, полное излучение которой попадает на второе тело.

$H_{2-1} = \varphi_{2-1} \cdot F_2$ – взаимная поверхность второго тела относительно первого.

Свойства взаимных поверхностей

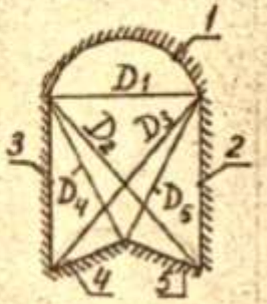


Рис. 2

На рис. 2 показан протяженный канал, стенки которого, обозначенные номерами I–5, имеют разные температуры T_i, разные степени черноты ε_i и обмениваются потоками излучения.

Число взаимных поверхностей для системы из 5 тел равно 5^2, соответственно для n тел – n^2. Существуют определенные связи между взаимными поверхностями, называемые свойствами взаимных поверхностей.

I. Свойство взаимности:

$$H_{1-2} = H_{2-1}, \quad H_{1-3} = H_{3-1}, \quad H_{1-4} = H_{4-1} \quad \text{и т.д.}$$

Для системы, состоящей из n тел, число условий взаимности

$$\frac{n^2 - n}{2}.$$

2. Свойство замыкаемости: поверхность излучающего тела равна сумме взаимных поверхностей этого тела на все поверхности, в том числе и на себя

$$F_1 = H_{1-1} + H_{1-2} + H_{1-3} + H_{1-4} + H_{1-5},$$

$$F_2 = H_{2-1} + H_{2-2} + H_{2-3} + H_{2-4} + H_{2-5},$$

и т.д.

Для системы из n тел можно записать n условий замыкаемости.

3. Свойство затеняемости. Для данной системы тел (рис. 2) можно записать одно условие затеняемости

$$H_{4-5} = 0.$$

Поток излучения с четвертого тела не попадает на пятое и наоборот. Число возможных условий затеняемости $n_з$ для любой системы тел определяется взаимным расположением тел в системе.

4. Свойство невогнутости: плоские и выпуклые тела сами на себя не излучают. Для данной системы тел (рис. 2) можно записать 4 условия невогнутости

$$H_{2-2} = 0, \ H_{3-3} = 0, \ H_{4-4} = 0, \ H_{5-5} = 0.$$

Число условий невогнутости $n_н$ любой системы определяется формой излучающих поверхностей.

5. Свойство полного делителя системы.

Полный делитель замкнутой системы тел – это натянутая поверхность, которая делит систему на две замкнутые системы, не нарушая целостности отдельных поверхностей.

Система из 5 излучающих поверхностей, приведенная на рис. 2, имеет 5 полных делителей $D_1 - D_5$. Согласно теореме о полном делителе системы, поверхность полного делителя равна сумме взаимных поверхностей тел, излучение которых пересекает делитель в одном направлении, т.е.

$$F_{D_1} = H_{1-2} + H_{1-4} + H_{1-5} + H_{1-3},$$

$$F_{D_2} = H_{1-3} + H_{1-4} + H_{1-5} + H_{2-3} + H_{2-4} + H_{2-5},$$

и т.д.

Число условий полных делителей системы n_D определяется взаимным расположением тел в системе.

МЕТОД ПОТОЧНОЙ АЛГЕБРЫ (МЕТОД ПОЛЯКА)
для определения угловых коэффициентов

Сущность метода состоит в том, что для замкнутой системы тел на основании свойств взаимных поверхностей записывается система алгебраических уравнений, решение которой позволяет найти неизвестные взаимные поверхности, а через них - угловые коэффициенты. Если число неизвестных взаимных поверхностей равно числу алгебраических уравнений, такая задача решается, и все неизвестные угловые коэффициенты находятся. Возможность решения задачи проверяется уравнением

$$z = n^2 - \left(\frac{n^2 - n}{2} + n + n_з + n_H + n_D\right) = 0. \qquad (1)$$

Если $z = 0$, все угловые коэффициенты определяются, если $z > 0$, часть угловых коэффициентов придется найти другими способами.

Для системы из 5 тел (рис. 2)

$$z = 5^2 - \left(\frac{5^2 - 5}{2} + 5 + 1 + 4 + 5\right) = 0,$$

т.е. число уравнений равно числу неизвестных и все угловые коэффициенты могут быть найдены.

Связь лучистых потоков

Различают следующие потоки излучения: падающий (Q пад.), отраженный (Q отр), поглощенный (Q погл.), пропущенный (Q проп), собственный (Q соб), результирующий (Q рез), эффективный (Q эф). Для подавляющего большинства твердых тел Q проп = 0.

Собственное излучение твердого тела

$$Q_{соб} = C_0 \varepsilon \left(\frac{T}{100}\right)^4 F, \ Вт \qquad (2)$$

определяется свойствами поверхности излучающего тела (степень черноты ε) и его температурой T. $C_0 = 5{,}67 \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$ - коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Результирующее излучение тела - это разность между поглощением и собственным излучением тела

$$Q_{рез} = Q_{погл} - Q_{соб}. \qquad (3)$$

Эффективное излучение - это сумма собственного и отраженного излучений

$$Q_{эф} = Q_{соб} + Q_{отр}. \qquad (4)$$

Другие связи между потоками определяются путем следующего анализа.

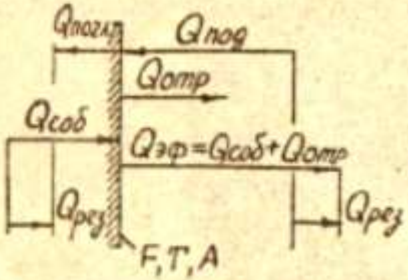


Рис. 3

Пусть на тело с площадью поверхности F, температурой T, коэффициентом поглощения A падает поток излучения $Q_{пад}$. Часть этого потока поглощается ($Q_{погл} = A \cdot Q_{пад}$), остальная часть отражается ($Q_{отр}$). Собственное излучение тела $Q_{соб} > Q_{погл}$. Сложение векторов $Q_{соб}$ и $Q_{отр}$ дает $Q_{эф}$, а разность

$$Q_{пад} - Q_{эф} = Q_{рез}. \qquad (5)$$

Из (3)

$$Q_{рез} = A Q_{пад} - Q_{соб},$$

$$Q_{пад} = \frac{Q_{рез}}{A} + \frac{Q_{соб}}{A}.$$

После подстановки значения $Q_{пад}$ в (5)

$$Q_{рез} = \frac{Q_{рез}}{A} + \frac{Q_{соб}}{A} - Q_{эф},$$

$$Q_{эф} = Q_{рез}\left(\frac{1}{A} - 1\right) + \frac{Q_{соб}}{A}.$$

Согласно закона Кирхгофа $A = \varepsilon$, $\frac{Q_{соб}}{A} = C_0 F \left(\frac{T}{100}\right)^4$.

$$Q_{эф} = Q_{рез}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + C_0 F \left(\frac{T}{100}\right)^4. \qquad (6)$$

Формула (6) устанавливает связь между эффективным и результирующим излучением для любого тела и широко используется при расчетах лучистого теплообмена.

Метод результирующих потоков

Целью расчета лучистого теплообмена в системе тел является определение результирующего излучения каждого тела. Метод результирующих потоков позволяет найти эти потоки. Сущность метода состоит в следующем.

Для системы из n тел записывается система $2n$ алгебраических уравнений, решение которой позволяет найти эффективные и результирующие потоки каждого тела ($Q_{эф_i}$, $Q_{рез_i}$).

Так, для I тела (рис. 2)

$$Q_{эф_1} = Q_{рез_1}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + C_0 F_1 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4,$$

$$Q_{рез_1} = Q_{пад_1} - Q_{эф_1} - \left(Q_{эф_1}\varphi_{1-1} + Q_{эф_2}\varphi_{2-1} + Q_{эф_3}\varphi_{3-1} + Q_{эф_4}\varphi_{4-1} + Q_{эф_5}\varphi_{5-1}\right) - Q_{эф_1}$$

По такому же принципу записываются уравнения для остальных 4 тел. В результате решения системы I0 уравнений определяются эффективные и результирующие потоки каждого тела.

Пример решения задачи.

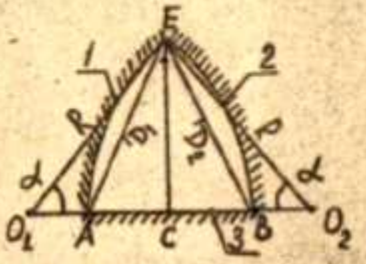


Рис. 4

Для системы из трех поверхностей, образующих протяженный канал, дано: R = 2 м, расстояние между центрами O_1O_2 = 2,5 м, t_1 = 500°C, t_2 = 300°C, t_3 = I00°C, ε_1 = 0,9, ε_2 = 0,8, ε_3 = 0,7.

Рассчитать все угловые коэффициенты и результирующие потоки каждой поверхности ($Q_{рез_i}$, $\frac{Вт}{м}$)

Решение

Определим площади поверхностей F_1 , F_2 , F_3 и полных делителей F_{D_1} , F_{D_2} в расчете на I м длины канала.

$$F_1 = F_2 = 2\pi R \frac{\alpha}{360} = 1{,}79\ м^2, \quad F_3 = AB, \quad F_{D_1} = F_{D_2} = BE.$$

Так как $O_1O_2 - R = O_1A = O_2B = 0{,}5\ м$, то $AB = O_1O_2 - 2O_1A = 1{,}5\ м$,

$$CB = \frac{AB}{2} = 0{,}75\ м, \quad CO_2 = CB + O_2B = 1{,}25\ м, \quad \cos\alpha = \frac{CO_2}{R} = 0{,}625,$$

$$\alpha = 51{,}4°, \quad \frac{BE}{2/R} = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad BE = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 1{,}735\ м.$$

Таким образом,

$F_1 = F_2$ = I,79 м^2, F_3 = I,5 м^2, $F_{D_1} = F_{D_2}$ = I,735 м^2.

Определим все угловые коэффициенты:

φ_{1-1}, φ_{1-2}, φ_{1-3}, φ_{2-1}, φ_{2-2}, φ_{2-3}, φ_{3-1}, φ_{3-2}, φ_{3-3}.

Проверим по формуле (I), можно ли это сделать методом поточной алгебры

$$z = 3^2 - \left(\frac{3^2 - 3}{2} + 3 + 0 + I + 2\right) = 0.$$

Можно, т.к. число уравнений равно числу неизвестных. Запишем эти уравнения.

Условия взаимности

$$H_{I-2} = H_{2-I}, \quad (I^*)$$

$$H_{I-3} = H_{3-I} \quad (2^*)$$

$$H_{2-3} = H_{3-2} \quad (3^*)$$

Условия замыкаемости

$$F_1 = H_{I-2} + H_{I-3} + H_{I-I}. \quad (4^*)$$

$$F_2 = H_{2-I} + H_{2-2} + H_{2-3}. \quad (5^*)$$

$$F_3 = H_{3-I} + H_{3-2} + H_{3-3}. \quad (6^*)$$

Условие невогнутости

$$H_{3-3} = 0 \quad (7^*)$$

Условия полных делителей

$$F_{D_1} = H_{I-2} + H_{I-3}. \quad (8^*)$$

$$F_{D_2} = H_{2-I} + H_{2-3}. \quad (9^*)$$

Из условия симметрии канала и отсутствия самоизлучения плоской поверхности 3 :

$$\varphi_{3-3} = 0, \quad \varphi_{3-1} = \varphi_{3-2} = 0{,}5, \quad \varphi_{1-2} = \varphi_{2-1}, \quad \varphi_{1-3} = \varphi_{3-2}, \quad \varphi_{1-1} = \varphi_{2-2}.$$

Используя (2*), находим:

$$H_{1-3} = H_{3-1} = \varphi_{3-1}\cdot F_3 = 0,5\,F_3\,,$$

$$\varphi_{1-3} = \frac{0,5F_3}{F_1}. \qquad (10^*)$$

Из условия (8*)

$$H_{1-2} = F_{D_2} - H_{1-3} = F_{D_2} - 0,5F_3\,,$$

$$\varphi_{1-2} = \frac{F_{D_2}}{F_1} - 0,5\frac{F_3}{F_1}. \qquad (11^*)$$

Из условия (4*)

$$H_{1-1} = F_1 - H_{1-2} - H_{1-3} = F_1 - F_{D_2} + 0,5F_3 - 0,5F_3\,,$$

$$\varphi_{1-1} = 1 - \frac{F_{D_2}}{F_1}. \qquad (12^*)$$

Расчет угловых коэффициентов по формулам (10* - 12*) дает:

$\varphi_{1-3} = \varphi_{2-3} = 0.419$, $\varphi_{1-2} = \varphi_{2-1} = 0.55$, $\varphi_{1-1} = \varphi_{2-2} = 0.031$.

Запишем уравнения эффективных и результирующих потоков:

$$Q_{эф_1} = Q_{рез_1}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + C_0 F_1 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4, \qquad (13^*)$$

$$Q_{эф_2} = Q_{рез_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + C_0 F_2 \left(\frac{T_2}{100}\right)^4, \qquad (14^*)$$

$$Q_{эф_3} = Q_{рез_3}\left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1\right) + C_0 F_3 \left(\frac{T_3}{100}\right)^4, \qquad (15^*)$$

$$Q_{рез_1} = Q_{эф_1}\varphi_{1-1} + Q_{эф_2}\varphi_{2-1} + Q_{эф_3}\varphi_{3-1} - Q_{эф_1}, \qquad (16^*)$$

$$Q_{рез_2} = Q_{эф_2}\varphi_{2-2} + Q_{эф_1}\varphi_{1-2} + Q_{эф_3}\varphi_{3-2} - Q_{эф_2}, \qquad (17^*)$$

$$Q_{рез_3} = Q_{эф_1}\varphi_{1-3} + Q_{эф_2}\varphi_{2-3} - Q_{эф_3}. \qquad (18^*)$$

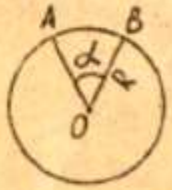
Подстановка (13*) - (15*) в (16*) -(18*) дает систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными $Q_{рез_1}$, $Q_{рез_2}$, $Q_{рез_3}$:

$$-1,108\,Q_{рез_1} + 0,1375\,Q_{рез_2} + 0,2145\,Q_{рез_3} = 28273,1\,.$$
$$0,06105\,Q_{рез_1} - 1,242\,Q_{рез_2} + 0,2145\,Q_{рез_3} = -10151,7\,.$$
$$0,0465\,Q_{рез_1} + 0,1047\,Q_{рез_2} - 1,429\,Q_{рез_3} = -18121,4\,.$$

которая решается с помощью определителей, и находятся результирующие потоки $Q_{рез_1} = -21790\ \frac{Вт}{м}$, $Q_{рез_2} = 9220\ \frac{Вт}{м}$, $Q_{рез_3} = 12570\ \frac{Вт}{м}$.

ЗАДАЧИ

Для решения задач потребуются некоторые сведения из математики, которые приводятся ниже.



Длина окружности радиусом R

$$l = 2\pi R.$$

Длина дуги центрального угла α

$$l_{AB} = 2\pi R\,\frac{\alpha}{360}.$$

Площадь круга радиусом R

$$F = \pi R^2.$$

Площадь сферы радиусом R

$$F = 4\pi R^2.$$

Боковая поверхность конуса

$$F = \pi R l$$

Боковая поверхность цилиндра радиусом R, высотой h

$$F = 2\pi R h.$$

Боковая поверхность усеченного конуса

$$F = (R_1 + R_2)\pi l.$$

Система линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}$$

решается с помощью определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Схема вычисления определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ - & - & - & + & + \quad + \end{array} =$$

$$= ab_1c_2 + bc_1a_2 + ca_1b_2 - a_2b_1c - b_2c_1a - c_2a_1b.$$