Тема 2 (2 час, лекция 1)

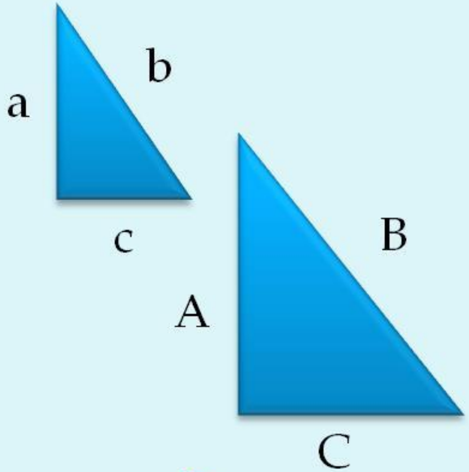
Лекция 6

Основы метода подобия и моделирования. Пи – теорема, приведение уравнений конвективного теплообмена к безразмерному виду. Числа подобия. Общие условия подобия физических процессов, свойства подобных процессов. Сущность моделирования. Обобщение опытных данных и получение эмпирических зависимостей.

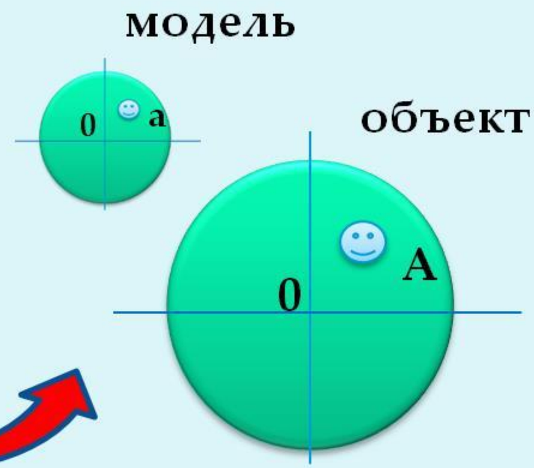
Из-за сложности в основу моделирования процессов тепломассобмена положены **метод анализа размерностей и теория подобия**.

Мы знакомы с геометрическим подобием

Масштаб (нем. Maßstab, буквально «**мерная палка**»: Maß «мера», Stab «палка») — первоначально отношение двух линейных размеров. Во многих областях практического применения масштабом называют отношение размера изображения к размеру изображаемого объекта.



$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = n \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{ABC}}{S_{abc}} = n^2$$



Аналогию можно продлить на физические и иные явления одинаковой природы

Геометрически более сложный случай

Одинаковая природа явлений обеспечивает одинаковые связи между *параметрами явлений*

Гениальное предвидение этой науки было высказано Ньютоном в 1686 г для механических систем. Но только в 1848 г. Член французской академии наук Жозеф Бертран впервые установил основное свойство подобных явлений, сформулировав первую теорему подобия, теорему о существовании инвариантов подобия – критериев подобия, которые одинаковые (инварианты) для модели и объекта.

I

Первое правило (**теорема**) **подобия** (**теорема Ньютона-Бертрана**): при **подобии** систем всегда могут быть найдены такие безразмерные комплексы величин, которые для **сходственных точек** данных систем одинаковы.

Если у двух физических явлений в сходственных точках (геометрическое подобие) в сходственные времена (временное подобие) безразмерные комплексы величин, определяющие явления равны (силовое, гидродинамическое, кинематическое, тепловое и т.д. подобие) то эти явления считаются физически подобными.

Одинаковые связи – это и **одинаковые дифференциальные уравнения** математических моделей, <u>интегрирование которых можно представить в виде функциональных зависимостей для критериев (чисел) подобия</u>.

***Симплекс* (*simplex*)** – это отношение одноименных (однородных величин), которые могут быть геометрическими, физическими или другими. Очевидно, симплекс является безразмерной величиной, то есть отвлеченным числом. Например, отношение длины L к диаметру:

$$\frac{L}{D} = \mathrm{K}$$

***Комплекс* (*complex*)** – это безразмерная величина, составленная из разнородных величин с разной размерностью, описывающих процесс или систему.

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

***Критерий подобия* (*similarity criterion*)** – это симплекс или безразмерный комплекс (иногда его называют инвариант подобия), численное значение которого одинаково для модели и натурного объекта.

$$\frac{L}{D} = \frac{l}{d} = \mathrm{K} = \mathrm{idem}$$

Критерий представляет собой *меру* отношения физических эффектов. Все критерии можно разделить на две основные группы: *определяемые* (*числа подобия*) и *определяющие*.

Определяемые - из эксперимента.

От **определяющих -** зависит результат эксперимента.

Существует и группа **независимых критериев** или **параметров** (в том числе безразмерные координаты и безразмерное время). Хотя в обратных задачах конвективного теплообмена безразмерное время может быть определяемым критерием.

Любая комбинация критериев - тоже критерий. Если процесс не зависит от какого-либо критерия, то этот процесс называют ***автомодельным*** (**независимым**) по отношению к этому критерию

Размерностью единицы измерения – называется выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения. Размерность записывается символически в виде формулы, в которой символ единицы длины обозначается буквой *L*, символ единицы массы - буквой *M*, символ единицы времени – буквой *T*.

О размерности можно говорить только применительно к определенной системе единиц.

Система СГС

$$\frac{\text{г}}{M},\ \frac{\text{см}}{L},\ \frac{\text{с}}{T}$$

С 1960 года введена Международная система единиц СИ (SI) – System International d'Unites

$$\frac{\text{кг}}{M},\ \frac{\text{м}}{L},\ \frac{\text{с}}{T}$$

В технике также используется система *FLT*, в которой основные единицы измерения имеют вид:

$$\frac{\text{кгс}}{F},\ \frac{\text{м}}{L},\ \frac{\text{с}}{T}$$

Размерностью единицы измерения – называется выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения. Размерность записывается символически в виде формулы, в которой символ единицы длины обозначается буквой *L*, символ единицы массы - буквой *M*, символ единицы времени – буквой *T*.
О размерности можно говорить только применительно к определенной системе единиц.

Для определения размерности физической величины *a* используют символ [*a*], введенный Максвеллом. Например, для размерности силы *F* будем писать

$$[F] = \frac{ML}{T^2} \qquad [F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$$

Размерная физическая величина (***dimensional physical quantity***) – это физическая величина, числовое значение которой зависит от выбора системы единиц, то есть от выбора эталонов.

Размерная физическая величина выражается произведением числового значения на единицу измерения.

Безразмерная физическая величина (***dimensionless physical quantity***) – это физическая величина, числовое значение которой не зависит от выбора системы единиц, то есть от выбора эталонов.

Безразмерная физическая величина выражается только числом.

Отметим, что во всех приведенных примерах размерность физической величины представляется степенным одночленом. И это не случайно.

Размерность любой физической величины *a* всегда представляет степенной одночлен (формула Фурье)

$$[a] = P^{\alpha} \cdot Q^{\beta} \cdot R^{\gamma} \cdot S^{\delta} \ldots$$

где $PQRS\ldots$ – система единиц измерения, α, β, γ – безразмерные величины.

II

Вторая теорема подобия Теорема Бекингема - Федермана - **π–теорема**

Любая зависимость между физическими величинами, характеризующими процесс, может быть представлена в виде взаимной зависимости между критериями подобия, то есть в виде обобщенного критериального уравнения типа

$$f(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$$

Всякое уравнение, связывающее ***n*** физических величин, может быть приведено к зависимости между ***i*** безразмерными комплексами из этих величин, причем: ***i = n – k,*** где ***k*** – количество первичных величин (масса, длина, время…) или величин независимой размерности.

$a_1, a_2, a_3, a_3, \ldots a_n$ - имеют независимую размерность, если размерность ни одной из этих величин нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин.

$$\pi = \Phi(\pi_{k+1}, \pi_{k+2}, \ldots, \pi_n),$$

$$[a] = [a_1]^{\alpha} \cdot [a_2]^{\beta} \cdot \ldots, \cdot [a_k]^{\gamma}$$

$$\pi = \frac{a}{a_1^{\alpha} \cdot a_2^{\beta} \cdot \ldots, \cdot a_k^{\gamma}}, \ldots, \pi_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_{k+1}} \cdot a_2^{\beta_{k+1}} \cdot \ldots, \cdot a_k^{\gamma_{k+1}}}$$

$$\pi_{k+i} = \frac{a_{k+i}}{a_1^{\alpha_{k+i}} \cdot a_2^{\beta_{k+i}} \cdot \ldots, \cdot a_k^{\gamma_{k+i}}}, \ldots, \pi_n = \frac{a_n}{a_1^{\alpha_n} \cdot a_2^{\beta_n} \cdot \ldots, \cdot a_k^{\gamma_n}}$$

Устанавливаем минимальное число ***i***, при этом для тепловых – добавляется Кельвин.

III

Третья теорема устанавливает условия, необходимые и достаточные для того, чтобы явления оказались подобными друг другу. Формулировка ее была дана М.В.Кирпичевым и А.А.Гухманом, а доказательство теоремы – М.В.Кирпичевым в 1930 г.

Подобны те явления, процессы или системы, которые описываются одинаковыми **уравнениями связи** и **условия однозначности** которых подобны.

Для решения задач

Исходя из этой теоремы, полное подобие модели реальному объекту определяется **выполнением условий**:

- ✓ Процессы в модели и образце относятся к одному классу явлений (явления качественно одинаковы) и, следовательно, эти процессы описываются одними и теми же уравнениями;
- ✓ Качественно одинаковы (подобны) условия единственности (геометрические, начальные, краевые условия);
- ✓ Определяющие критерии подобия (безразмерные комплексы, составленные из масштабных величин и параметров задачи) в соответствующие времена в соответствующих точках численно равны.

Михаил Викторович Кирпичев (1879 – 1955), крупнейший ученый теплотехник, академик АН СССР (с 1939), профессор. Физическую сущность процессов в котельных агрегатах. Теория теплового моделирования.
Работал и преподавал в ЛФТИ, ЛПИ, ЦКИ и Энергетическом институте АН СССР, МЭИ и институте Химического машиностроения.

Труды по практической теплотехники (рационализация паровых котлов, увеличение производительности, внедрение сжигания угля в виде пыли, перевод на высокое давление). Теория регулярного режима, метод элементарных балансов, расчета конвективного теплообмена по методу теплового пограничного слоя, расчета теплоотдачи при кипении жидкостей и конденсации паров. Оригинальные методы экспериментального изучения теплоотдачи и теплопроводности. Составлены таблицы водяного пара и других рабочих веществ и разработаны нормы теплового расчета паровых котлов.

Теория подобия и теория моделирования технических устройств, на основе которых можно изучать работу любого технического устройства еще в процессе проектирования и создать его наиболее совершенную конструкцию.

Исследования способствовали научно-обоснованному проектированию и совершенствованию энергетических агрегатов.

Под его руководством воспитано несколько сотен инженеров, более ста докторов и кандидатов технических наук.

В 1941 г. Сталинская премия (труд «Моделирование тепловых устройств»), в 1945 г. орден Трудового Красного Знамени и в 1953 году орден Ленина. К 100-летию Михаила Викторовича Кирпичева Академия наук СССР выпустила сборник «Теория подобия и тепловое моделирование». – М.: Наука, 1987. – 163 с.

Гухман Александр Адольфович (1897—1992), теплофизик, профессор Московского института химического машиностроения. Исследования в области термодинамики. Совместно с М. В. Кирпичёвым создал теорию подобия и развил её до теории обобщённого анализа. Разработал научные основы сублимационной сушки, конвективного тепло- и массообмена.

Михеев Михаил Александрович (1902 - 1970), теплотехник, академик АН СССР (1953); Работал в Физико-техническом институте и других НИИ Ленинграда, Энергетическом институте им. Г. М. Кржижановского АН СССР, МЭИ. Основные труды по проблемам теплопередачи и теплового моделирования. Выполнил ряд исследований, выясняющих физические особенности процессов теплопередачи при свободной и вынужденной конвекции различных теплоносителей. Совместно с М.В. Кирпичёвым монография "Моделирование тепловых устройств" (1936, Государственная премия СССР, 1941) и учебник "Основы теплопередачи" (1947, Государственная премия СССР, 1951). Награжден орденом Ленина, 3 другими орденами, а также медалями.

Петухов Борис Сергеевич (1912 – 1984), доктор технических наук, член-корреспондент АН СССР, советский физик, один из основателей российской теплофизической школы, видный советский специалист в области теплообмена. Под его руководством созданы научные коллективы в Институте высоких температур АН СССР и Московском энергетическом институте. Б. С. Петухов является одним из создателей теплофизической специальности в высшей школе. Исследования процессов конвективного теплообмена в потоках жидкостей и газа при высоких тепловых нагрузках, переменных физических свойствах теплоносителя, наличии химических реакций и околокритических параметрах вещества. Научной группой Б. С. Петухова были выполнены исследования теплообмена в жидких металлах, а также взаимодействие потока жидкого металла с электромагнитным полем. Б. С. Петухов начал работы в области исследования теплообмена при воздействии поля силы тяжести на турбулентные пристенные течения, радиационно-кондуктивный теплообмен, процессы кипения в потоках гелия.

Основные критерии подобия, описывающие исследуемый процесс, можно получить двумя способами – с помощью метода анализа размерностей (алгебраический метод Рэлея) и путем анализа дифференциальных уравнений.

Мы путем анализа дифференциальных уравнений.

Вводим масштабные величины, которые так же связаны между собой, как и исходные в уравнениях: $\tau_0, L, W...$

Гидродинамическое подобие

Подобие скоростей и сил в поле течения, включая границы.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+\frac{\partial\left(\rho \cdot w_x\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho \cdot w_y\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho \cdot w_z\right)}{\partial z}=0:$$

$$\left.\begin{aligned} R_{11} &= \left|\frac{\rho}{\tau_0}\right| \\ R_{12} &= \left|\frac{\rho W}{L}\right| \end{aligned}\right\} \frac{R_{12}}{R_{11}} = \boxed{\mathrm{Ho} = \frac{W\tau_0}{L}} - \text{ критерий (число) гомохронности}$$

Учитывает влияние нестационарности движения на скорость жидкости. Часто называется числом Струхаля: Str

$$\rho\left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau}+\frac{\partial w_x}{\partial x}\cdot w_x+\frac{\partial w_x}{\partial y}\cdot w_y+\frac{\partial w_x}{\partial z}\cdot w_z\right)=\rho\cdot g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right)$$

$G_{11}=\left|\frac{\rho W}{\tau_0}\right|$ – скорость изменения количества движения единичного объема

$G_{12}=\left|\frac{\rho W^2}{L}\right|$ – приход количества движения в единичный объем за счет движени

(приход сил инерции)

$G_{13}=\left|\rho g\right|$ – сила тяжести единичного объема

$G_{14}=\left|\frac{\Delta P}{L}\right|$ – равнодействующая сил давления единичного объема

$G_{15}=\left|\frac{\mu W}{L^2}\right|$ – равнодействующая сил вязкого трения единичного объема

$$\frac{G_{12}}{G_{11}}=\mathrm{Ho}=\frac{W\tau_0}{L}=\mathrm{Str}$$ – критерий (число) гомохронности (Струхаля)

$$\frac{G_{13}}{G_{12}} = \mathrm{Fr} = \frac{\mathrm{g}L}{W} -$$ критерий (число) Фруда мера отношения сил тяжести и инреции

$$\frac{G_{14}}{G_{12}} = \mathrm{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho W^2} -$$ критерий (число) Эилера мера отношения сил внешнего давления и инреции

$$\frac{G_{12}}{G_{15}} = \mathrm{Re} = \frac{WL}{\nu} -$$ критерий (число) Рейнольдса мера отношения сил инреции и вязкого трения

Тепловое подобие

Подобие (пропорциональность) температурного поля и законов переноса теплоты в поле течения, включая границы.

$$\frac{\partial c_p \rho \theta}{\partial \tau} + c_p \rho \left(w_x \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + q_v$$

$\theta = t - t_0$ $\qquad\qquad$ $\theta_0 = t_c - t_0$

$T_{11} = \left| \dfrac{c_p \rho \theta_0}{\tau_0} \right|$ – скорость изменения энтальпии единичного объема

$T_{12} = \left| \dfrac{c_p \rho W \theta_0}{L} \right|$ - приток энтальпии в единичный объем за счет конвекции

$T_{13} = \left| \dfrac{\lambda \theta_0}{L} \right|$ - приток энтальпии в единичный объем за счет теплопроводности

$T_{13} = \left| q_v \right|$ - приток энтальпии в единичный объем за счет внутренних источников

$$\frac{\partial c_p \rho \theta}{\partial \tau} + c_p \rho \left(w_x \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + q_v$$

$$\theta = t - t_0 \qquad \theta_0 = t_c - t_0$$

$\frac{T_{13}}{T_{11}} = \mathrm{Fo} = \frac{a\tau_0}{L^2}$ – число (критерий) Фурье

$\frac{T_{12}}{T_{13}} = \mathrm{Pe} = \frac{WL}{a}$ – число (критерий) Пекле

$\frac{T_{14}}{T_{13}} = \frac{q_v L^2}{\lambda \theta}$ – число (критерий) внутреннего тепловыделения

$$\alpha = -\left(\frac{\lambda}{\Delta t} \right) \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} \qquad \theta = \theta_0 \Theta \qquad n = L \cdot N$$

$$\alpha = -\left(\frac{\lambda}{\theta_0} \right) \cdot \frac{\theta_0}{L} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial N} \right)_{N=0}$$

$\boxed{\mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = -\left(\frac{\partial \Theta}{\partial N} \right)_{N=0}}$ – число (критерий) Нуссельта

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}}$$

$$\mathrm{Fr} \cdot \mathrm{Re}^2 = \frac{\mathrm{g}L}{W} \cdot \frac{W^2 L^2}{\nu^2} = \frac{\mathrm{g}L^3}{\nu^2} = \mathrm{Ga}$$

$$\mathrm{Ar} = \mathrm{Ga} \cdot \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} = \frac{\mathrm{g}L^3}{\nu^2} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}$$

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} = \beta \cdot \theta_0$$

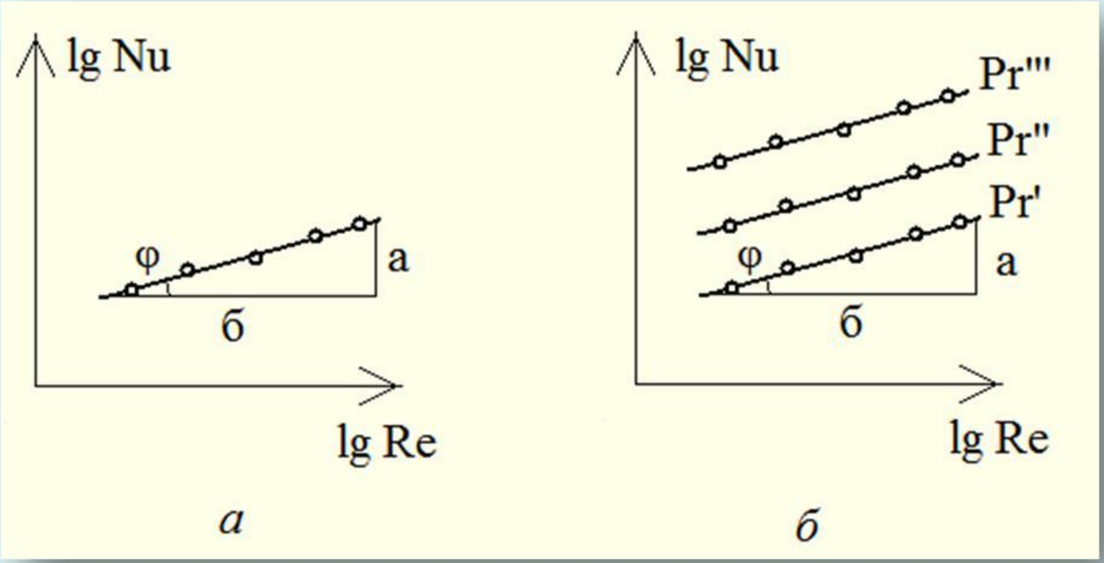
$$\mathrm{Gr} = \mathrm{Ga} \cdot \beta \cdot \theta_0 = \frac{\mathrm{g}L^3}{\nu^2} \cdot \beta \cdot \theta_0$$

$$\mathrm{Nu} = -\left(\frac{\partial \Theta}{\partial N}\right)_{N=0} = f(X_\mathrm{c}, Y_\mathrm{c}, Z_\mathrm{c}, \mathrm{Ho}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Eu}, \mathrm{Re}, \mathrm{Fo}, \mathrm{Pe}, \frac{q_v L^2}{\lambda \theta}, \mathrm{Gr})$$

$$\mathrm{Nu}_1 = f_1(X_{c1}, Y_{c1}, Z_{c1}, \mathrm{Ho}_1, \ \mathrm{Fr}_1, \ \mathrm{Eu}_1, \mathrm{Re}_1, \mathrm{Fo}_1, \mathrm{Pe}_1, \left(\frac{q_v L^2}{\lambda\theta}\right)_1, \mathrm{Gr}_1, \mathrm{Pr}_1)$$

$$\mathrm{Nu}_2 = f_2(X_{c2}, Y_{c2}, Z_{c2}, \mathrm{Ho}_2, \ \mathrm{Fr}_2, \ \mathrm{Eu}_2, \mathrm{Re}_2, \mathrm{Fo}_2, \mathrm{Pe}_2, \left(\frac{q_v L^2}{\lambda\theta}\right)_2, \mathrm{Gr}_2, \mathrm{Pr}_2)$$

- ✓ Процессы в модели и образце относятся к одному классу явлений (явления качественно одинаковы) и, следовательно, эти процессы описываются одними и теми же уравнениями; → Одинаковые диф. уравнения и набор критериев
- ✓ Качественно одинаковы (подобны) условия единственности (геометрические, начальные, краевые условия); → Одинаковый вид решения
- ✓ Определяющие критерии подобия (безразмерные комплексы, составленные из масштабных величин и параметров задачи) в соответствующие времена в соответствующих точках численно равны. → $\mathrm{Nu}_1 \equiv \mathrm{Nu}_2$



$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr})$$

$$\mathrm{Nu} = A\,\mathrm{Re}^m\,\mathrm{Pr}^n$$

$$\lg(\mathrm{Nu}) = \lg\left(A\,\mathrm{Pr}^n\right) + m\lg(\mathrm{Re})$$

Лианеризация и в дальнейшем самые различные методы.