Тема 1 (2 час, лекция 1)

Лекция 4

Теплопроводность при нестационарном тепловом режиме. Методы решения задач теплопроводности при нестационарном режиме. Теплопроводность тонкой пластины, длинного цилиндра при граничных условиях III рода. Анализ решений, частные случаи.

Нагревание (охлаждение) параллелепипеда и цилиндра **конечной длины**. Определение количества теплоты, отдаваемого или воспринимаемого телом в процессе нестационарной теплопроводности. **Регулярный режи**м нагревания (охлаждения) тел. Численные методы решения задач теплопроводности. Использование современной вычислительной техники.

<u>Термически</u> тонкие тела

$V, F,$

$t_0,$

$\lambda, c, \rho,$

$t(\tau)$

$q_v = 0$

$\mathrm{Bi} \ll 1$

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda} = \frac{l/\lambda}{1/\alpha} \text{ – число Био}$$

Пластина : $l = \delta$ - полутолщина

Цилиндр, шар : $l = r_0$ - радиус

Произвольное тело : $l = \dfrac{V}{F}$

$$dU = \pm c\rho V dt \quad = \quad \delta Q = Q \cdot d\tau = qF \cdot d\tau \quad = \mp \alpha (t - t_ж) F \cdot d\tau$$

$$c\rho V \frac{dt}{d\tau} = -\alpha (t - t_ж) F, \qquad \theta = t - t_ж \quad \text{– избыточная температура}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\theta}{\theta} = -\dfrac{\alpha F}{c\rho V} d\tau \;\Rightarrow\; \ln\theta = -\dfrac{\alpha F}{c\rho V}\tau + c \\ \tau = 0 \;\Rightarrow\; c = \ln(t_0 - t_ж) = \ln\theta_0 \end{array}\right\} \Theta = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_ж}{t_0 - t_ж} = \exp\left(-\frac{\alpha F}{c\rho V}\tau\right)$$

$$0 \le \Theta \le 1$$

$$\Theta = \exp\left(-\frac{\alpha F}{c\rho V}\tau\right)$$

$$\frac{\alpha F}{c\rho V}\tau \times \frac{\lambda \cdot l}{\lambda \cdot l} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{c\rho} \cdot \frac{F}{V} \cdot \tau \cdot \frac{1}{l} = \left| \frac{\lambda}{c\rho} = a,\ \frac{F}{V} = \frac{1}{l} \right| = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} \cdot \frac{a \cdot \tau}{l^2} = \mathrm{Bi} \cdot \mathrm{Fo}$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{R_\lambda}{R_\alpha} - \text{ число Био}$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{\tau}{\tau_{\text{масштабное}}} - \text{число Фурье, безразмерное время}$$

$$\tau_{\text{масштабное}} = \frac{l^2}{a} - \text{ за этот промежуток } \Theta \text{ изменяется в } e - \text{ раз}$$

$$\Theta = \exp\left(-\mathrm{Bi}_\delta \cdot \mathrm{Fo}_\delta\right) - \text{ тонкая пластина}$$

$$\Theta = \exp\left(-2\mathrm{Bi}_{r_0} \cdot \mathrm{Fo}_{r_0}\right) - \text{ бесконечный тонкий цилиндр}$$

$$\Theta = \exp\left(-3\mathrm{Bi}_{r_0} \cdot \mathrm{Fo}_{r_0}\right) - \text{ шар}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНО !!!!

ВОПРОС НА КОЛЛОКВИУМ !!!!

Электрический провод в охлаждающей среде с постоянными температурой и коэффициентом теплоотдачи.

Подается напряжение.

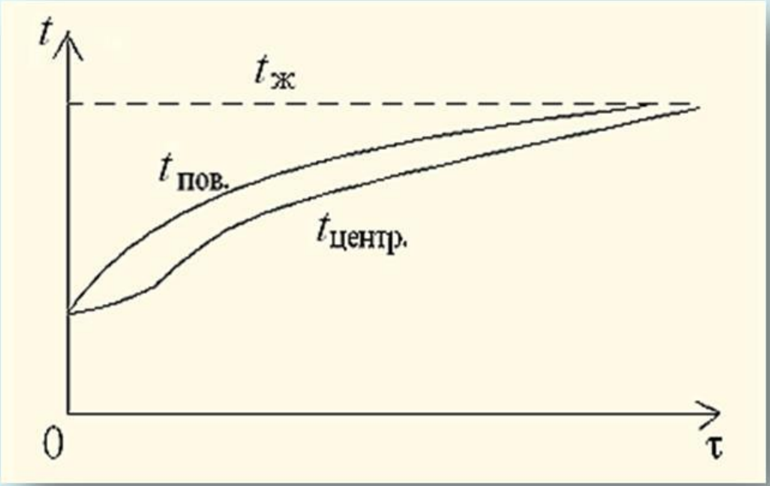
- ✓ **Как меняется температура провода?**
- ✓ **До какой температуры происходит нагрев?**
- ✓ **Как происходит остывание после отключения электрического тока?**

Массивные тела

Среди практических задач нестационарной теплопроводности важнейшее значение имеют две группы процессов:

- тело стремится к тепловому равновесию;
- температура тела претерпевает периодические изменения.

Мы для простоты первый случай. Однородная изотропная с постоянными теплофизическими свойствами пластина в окружении среды с постоянными температурой и коэффициентом теплоотдачи.



Аналитическое описание процесса теплопроводности включает в себя дифференциальное уравнение и условия однозначности.

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = a\nabla^2\theta$$

$$\theta = \theta(x, y, z, \tau)$$

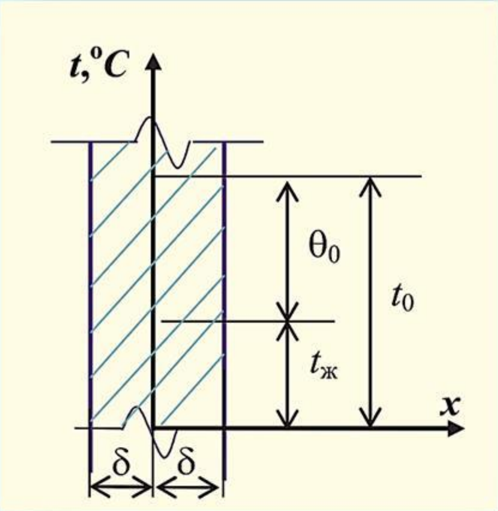
У.О.:

формы и геометрических размеров объекта $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n$;

физических параметров λ, c, ϱ;

температуры тела в начальный момент времени $\tau = 0 \quad t = t_0 = f(x, y, z)$;

граничных условий, например, третьего рода $\alpha = -\frac{\lambda}{\theta_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)_{n=0}$



Неограниченная пластина

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

Геометрические условия: $\delta \le x \le +\delta$;

Физические условия: $a = \lambda / (c_p \cdot \rho)$;

Начальные условия:при $\tau = 0$; $t_0 = const$, а превышение температуры пластины над температурой среды (в случае ее охлаждения) $\theta_1 = t_0 - t_ж$ (начальная избыточная температура);

Граничные условия III рода при $\tau > 0$

$$\begin{cases} x = 0 & \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \\ x = \delta & -\lambda\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=\pm\delta} = \alpha\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad \times\frac{1}{a\cdot\varphi(\tau)\cdot\psi(x)}$$

$$\theta(x,\tau) = \varphi(\tau)\psi(x)$$

$$\frac{\varphi'(\tau)}{a\cdot\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = const = -k^2$$

$$\begin{cases} \varphi'(\tau) + ak^2\cdot\varphi(\tau) = 0 \\ \psi''(x) + k^2\cdot\psi(x) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(\tau) = c_1 e^{-ak^2\cdot\tau}$$

$$\psi(x) = c_2\sin(kx) + c_3\cos(kx)$$

$$D_1 = c_1\cdot c_2;\quad D_2 = c_1\cdot c_3$$

$$\theta(x,\tau) = \left[D_1\sin(kx) + D_2\cos(kx)\right]\cdot e^{-ak^2\cdot\tau}$$

ГУ на x=0:

$$\theta(x,\tau) = \left[D_1 \sin(kx) + D_2 \cos(kx)\right] \cdot e^{-ak^2 \cdot \tau}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 = e^{-ak^2 \cdot \tau} \cdot \left[kD_1 \cos(kx) - kD_2 \sin(kx)\right]\Big|_{x=0}$$

$$\left[kD_1 \cos(k0) - kD_2 \sin(k0)\right] = 0$$

$$\left[kD_1 \cdot 1 - kD_2 \cdot 0\right] = 0$$

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = D$$

$$\boxed{\theta(x,\tau) = D\cos(kx) \cdot e^{-ak^2 \cdot \tau}}$$

ГУ на x=δ:

$$-\lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=\pm\delta} = \alpha\theta$$

$$\theta(x,\tau) = D\cos(kx)\cdot e^{-ak^2\cdot\tau}$$

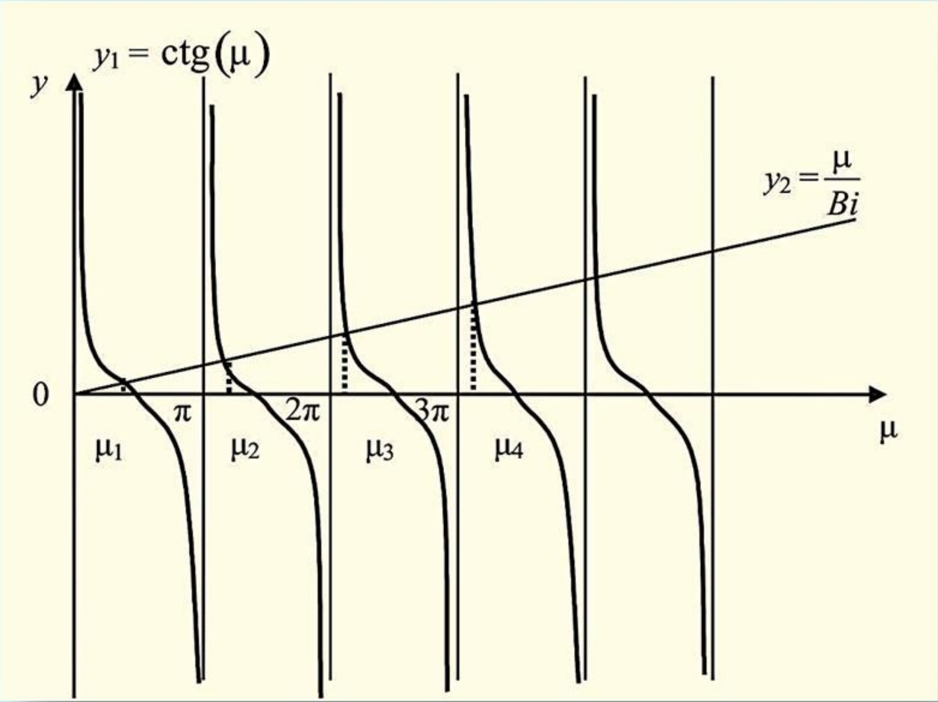
$$D\cos(kx)\cdot e^{-ak^2\cdot\tau}$$

$$-\lambda\cdot\left(-kD\sin(kx)\cdot e^{-ak^2\cdot\tau}\right) = \alpha D\cos(kx)\cdot e^{-ak^2\cdot\tau}$$

$$\lambda\cdot k\sin(k\delta) = \alpha\cos(k\delta) \qquad \Big|\times\delta$$

$$k\delta\cdot \mathrm{tg}(k\delta) = \frac{\alpha\delta}{\lambda}; \qquad \mathrm{Bi} = \frac{\alpha\delta}{\lambda}; \qquad \mu = k\delta.$$

$$\boxed{\frac{\mu}{\mathrm{Bi}} = \mathrm{ctg}(\mu)}$$



$$\frac{\mu}{\mathrm{Bi}} = \mathrm{ctg}(\mu)$$

$$\theta_i(x,\tau) = D_i \cos(kx) \cdot e^{-ak^2 \cdot \tau}$$

$$\theta_i(x,\tau) = D_i \cos(k_i \delta \frac{x}{\delta}) \cdot e^{-a(k\delta)^2 \cdot \frac{\tau}{\delta^2}}$$

$$X = \frac{x}{\delta}; \qquad \mu_i = k_i \delta; \qquad \mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2}$$

$$\theta_i(X, Fo) = D_i \cos(\mu_i X) \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot Fo}$$

$$\boxed{\theta(X, Fo) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos(\mu_i X) \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot Fo}}$$

Н.У.: $$\theta(X,0)=\theta_0=\sum_{i=1}^{\infty} D_i\cos(\mu_i X)$$

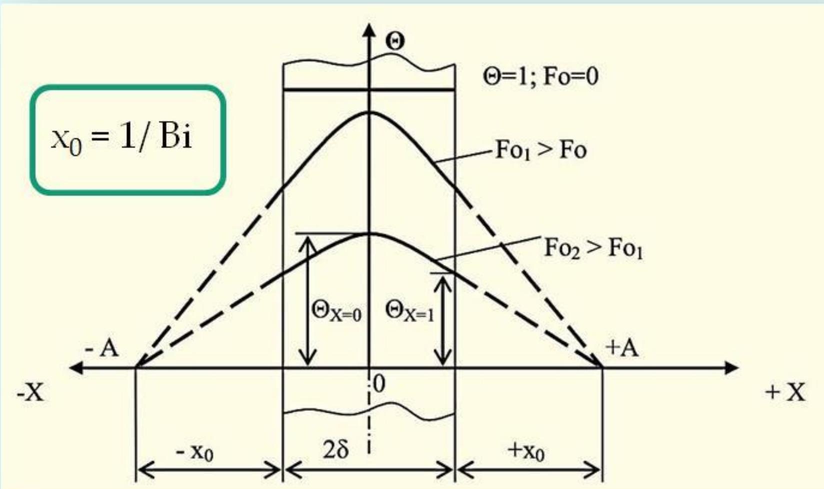
$$\int_{-1}^{+1}\theta_0\cos(\mu_j X)dX=\int_{-1}^{+1}\sum_{i=1}^{\infty} D_i\cos(\mu_i X)\cos(\mu_j X)dX$$

$$\int_{-1}^{+1} D_i\cos(\mu_i X)\cos(\mu_j X)dX=\begin{cases}0 & \text{при } \mu_j\neq\mu_i\\ \varnothing & \text{при } \mu_j=\mu_i\end{cases}$$

$$D_i=\theta_0\frac{2\sin(\mu_i)}{\mu_i+\sin(\mu_i)\cos(\mu_i)}$$

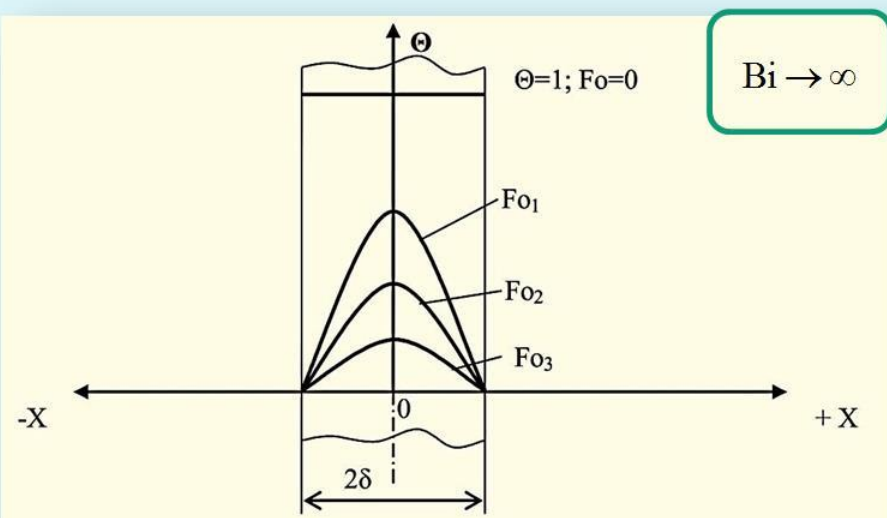
$$\Theta=\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{t(x,\tau)-t_ж}{t_0-t_ж}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\sin(\mu_i)}{\mu_i+\sin(\mu_i)\cos(\mu_i)}\cos(\mu_i X)\cdot e^{-\mu_i^2\cdot Fo}$$

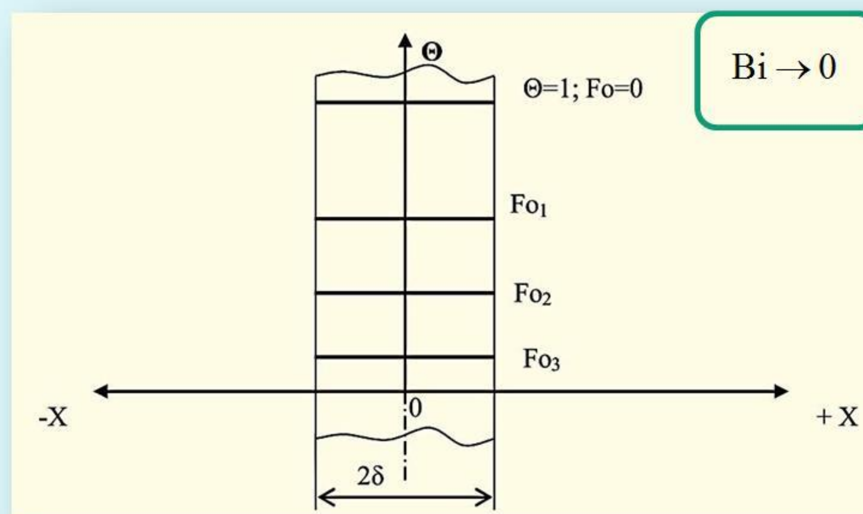
Многочисленные исследования показали, что уже при Fo ≥ 0,3, ряд становится настолько быстросходящимся, что температурное поле достаточно точно описывается первым членом ряда, ошибка не превышает 1 %.



САМОСТОЯТЕЛЬНО !!!!
РАССМОТРЕТЬ СЛУЧАЙ
И
ПОЛУЧИТЬ РЕШЕНИЕ
ПРИ

$$Bi \to 0$$

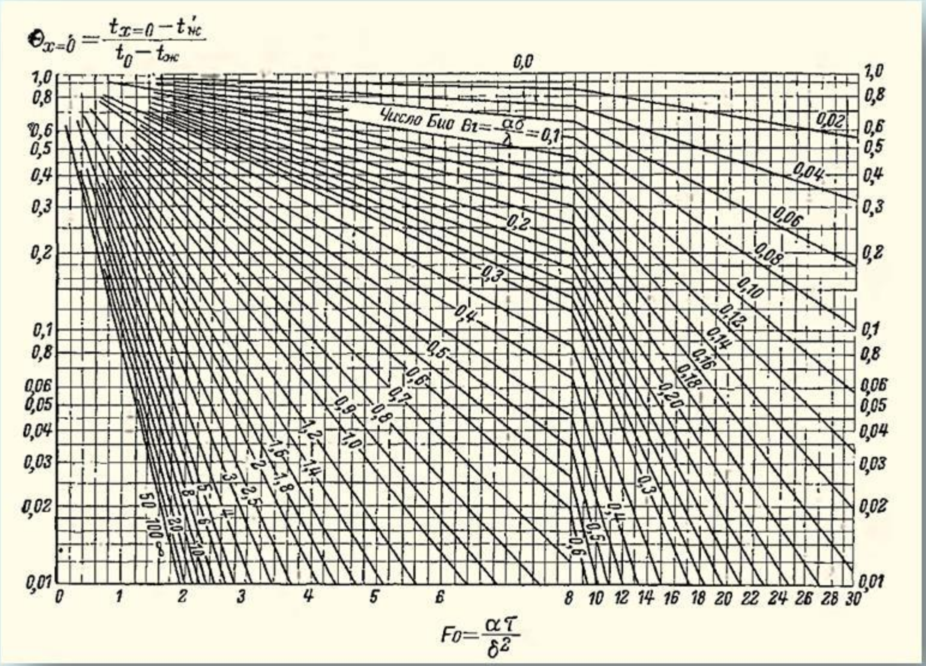


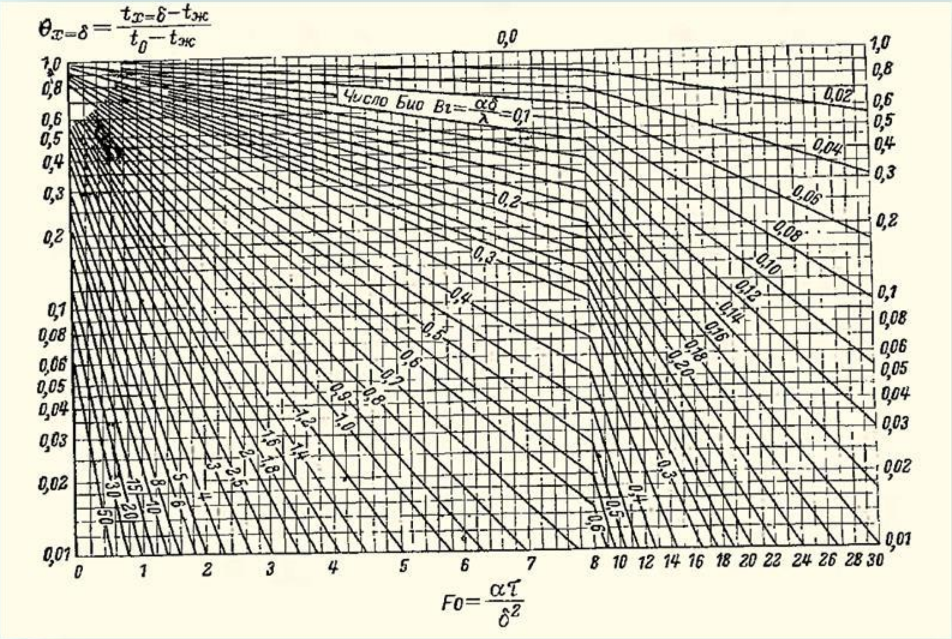


$Fo > 0.3$

$$\Theta = \underbrace{\frac{2\sin(\mu_1)}{\mu_1 + \sin(\mu_1)\cos(\mu_1)}\cos(\mu_1 X)}_{NP(\mathrm{Bi}, X)} \cdot e^{-\mu_1^2 \cdot Fo}$$

$$\ln\Theta = \ln\left[NP(\mathrm{Bi}, X)\right] - \mu_1^2 \cdot Fo$$





Определение количества теплоты, отданного пластиной в процессе охлаждения

$$Q_\tau = cm(\bar{t} - t_0)$$

$$Q_\tau = cm(\bar{t} - t_ж - t_0 + t_ж) = cm\left[\left(\bar{t} - t_ж\right) - \left(t_0 - t_ж\right)\right] =$$

$$= -\left(t_0 - t_ж\right)cm\left[1 - \frac{\left(\bar{t} - t_ж\right)}{\left(t_0 - t_ж\right)}\right] = \underbrace{cm\left(t_ж - t_0\right)}_{Q_n}\left[1 - \bar{\Theta}\right]$$

$$Q_\tau = Q_n\left[1 - \bar{\Theta}\right]$$

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{1}\int_{X=0}^{X=1} \Theta\, dX = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\sin^2(\mu_i)}{\mu_i^2 + \mu_i \sin(\mu_i)\cos(\mu_i)} \cdot e^{-\mu_i{}^2 \cdot Fo}$$

Охлаждение (нагревание) бесконечно длинного цилиндра

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t(r,\tau) - t_ж}{t_0 - t_ж} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2I_1(\mu_i)}{\mu_i \left[I_0^2(\mu_i) + I_1^2(\mu_i) \right]} I_0(\mu_i R) \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot Fo}$$

I_0, I_1 – функции Бесселя 1-го рода нулевого и первого порядка

$$\frac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)} = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}; \qquad \mathrm{Bi} = \frac{\alpha r_0}{\lambda}; \qquad \mathrm{Fo} = \frac{a\delta}{r_0^2}.$$

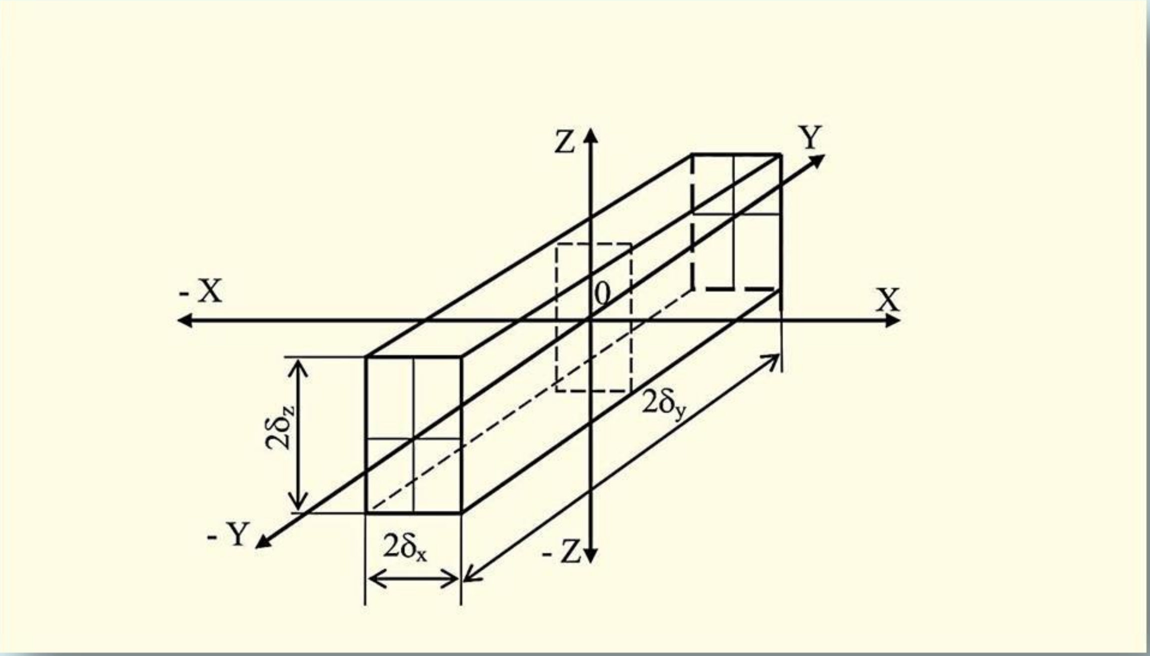
Для случая $\mathrm{Fo} \geq 0{,}3$ (в некоторых источниках 0,25), можно ограничиться первым членом ряда.

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{1} \int_{R=0}^{R=1} \Theta \, dR = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2I_1^2(\mu_i)}{\mu_i^2 \left[I_0^2(\mu_i) + I_1^2(\mu_i) \right]} \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot Fo}$$

Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров

$$\frac{\partial t(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = a\nabla^2 t(x,y,z,\tau);$$

Доказано, что решение таких задач представляется произведением безразмерных температур для тел неограниченных размеров, в результате пересечения которых образовалось рассматриваемое тело.

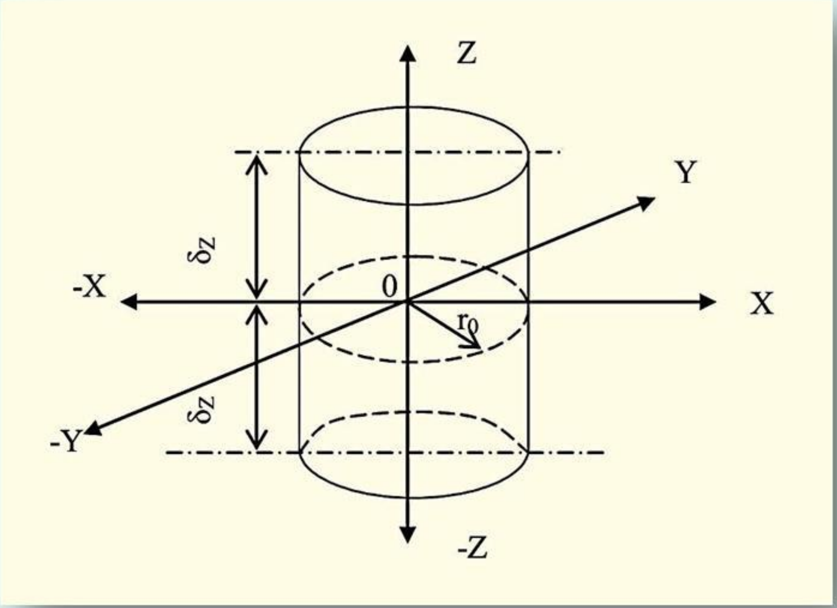


$$\Theta = \Theta_x \cdot \Theta_y \cdot \Theta_z$$

Полученное решение справедливо и для нахождения средней температуры:

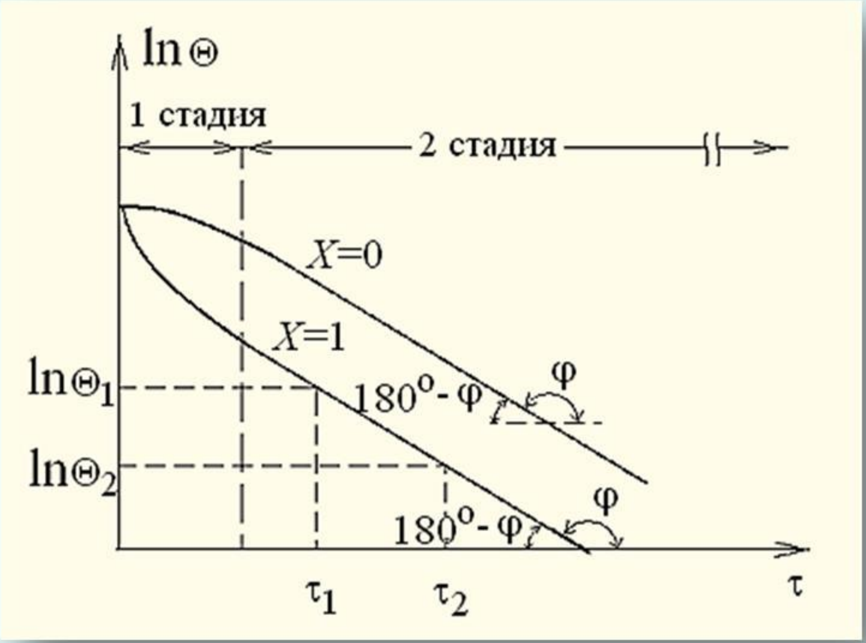
$$\overline{\Theta} = \overline{\Theta}_x \cdot \overline{\Theta}_y \cdot \overline{\Theta}_z$$

Цилиндр конечной длины можно рассматривать как результат пересечения безграничного цилиндра радиусом r_0 и пластины толщиной $2\delta_Z$



$$\Theta = \Theta_r \cdot \Theta_z$$

Регулярный режим охлаждения тел



$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot U_i \cdot e^{-m_i \cdot \tau}$$

$$\ln(\theta) = \ln(AU) - m \cdot \tau$$

Из этого уравнения следует, что натуральный логарифм избыточной температуры для всех точек тела изменяется во времени по линейному закону. Графическая зависимость будет иметь вид прямой. При длительном охлаждении ($\tau \to \infty,\ Fo \to \infty$) все точки тела в конце концов принимают одинаковую температуру, равную температуре окружающей среды (наступило стационарное состояние).

После дифференцирования уравнения по времени получаем:

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = -m = const \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{\ln\theta_1 - \ln\theta_2}{\tau_2 - \tau_1}$$

Первая теорема Кондратьева.

Относительная скорость охлаждения (темп охлаждения) однородного и изотропного тела при конечном значении коэффициента теплоотдачи α пропорциональна коэффициенту теплоотдачи на поверхности тела, площади поверхности тела и обратно пропорциональна его полной теплоемкости.

Bi < 0,1:

Температуры по объему и по поверхности равны, следовательно, Ψ=1;

$$c \cdot \rho \cdot V \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \tau} = -\bar{\alpha} \cdot \bar{\theta}_F \cdot F$$

Bi > 100:

Задача внутренняя, температура поверхности равна температуре окружающей среды, температурный напор на поверхности равен нулю, следовательно, Ψ=0.

$$c \cdot \rho \cdot V \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \tau} = -\bar{\alpha} \cdot \bar{\theta}_F \cdot F$$

$$-\frac{1}{\bar{\theta}_v} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \tau} = \frac{\bar{\theta}_F}{\bar{\theta}_v} \frac{\bar{\alpha} F}{c \cdot \rho \cdot V} = \Psi \cdot \frac{\bar{\alpha} F}{C}$$

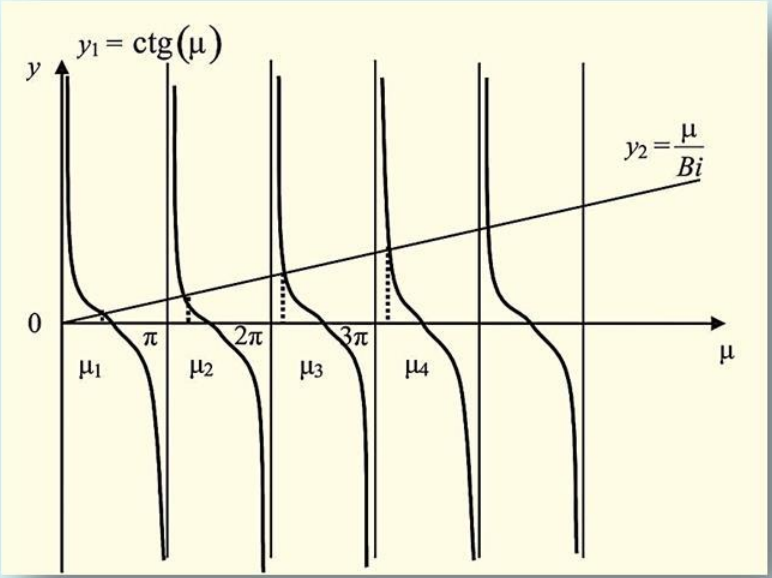
Получаем, что значение коэффициента неравномерности распределения температуры в теле меняется от нуля до единицы.

$$\boxed{m = \Psi \cdot \frac{\bar{\alpha} F}{C}}$$

Вторая теорема Кондратьева.

При коэффициенте теплоотдачи, стремящемся к бесконечности, темп охлаждения становится прямо пропорционален коэффициенту температуропроводности тела:

$$m = \frac{\mu^2 a}{\delta^2} \quad \Rightarrow \quad \mu = \delta\sqrt{\frac{m}{a}}$$



$$\frac{\mu}{\mathrm{Bi}} = \mathrm{ctg}(\mu)$$

$$\mathrm{Bi} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i \to (i-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Bi} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \mu_i \to (2i-1)\frac{\pi}{2}$$

При регулярном режиме $\mathrm{Bi} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \mu \to \frac{\pi}{2}$

$$m_\infty = \left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2 a$$

$$\boxed{a = K m_\infty}$$

$$a = K m_\infty$$

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2} - \text{Пластина}$$

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{r_0}\right)^2} - \text{Шар}$$

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_3}\right)^2} - \text{Параллелепипед}$$

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{2.405}{r_0}\right)^2} - \text{Цилиндр конечной длины}$$

На основе теории регулярного режима разработаны различные экспериментальные методики определения теплофизических характеристик разных материалов.