Тема 1 (2 час, лекция 1)

Лекция 2

Теплопроводность при стационарном режиме. Передача теплоты через однослойную и многослойную плоские стенки при граничных условиях I и III рода. Распределение температур при переменном и постоянном коэффициенте теплопроводности. Передача теплоты через однослойную и многослойную цилиндрическую стенки при граничных условиях I и III рода. Линейный коэффициент теплопередачи. Критический диаметр изоляции. Передача теплоты через шаровую стенку.

Типы проблем (задач) теплообмена (теплопроводности в частности):
1. Определение температурного поля как конечной цели
2. Определение теплового потока как конечной цели

Решение этих задач:
1. Экспериментально
2. Теоретически

Методика теоретического решения:
Выбор вида уравнения → возможное упрощение → определение условий единственности (на этом этапе математики говорят – задача поставлена) → выбор метода решения (графический, графо-аналитический, аналитический, приближенный, численный) → получение и анализ «числа»

В ду теплопроводности входят
1. Независимые переменные (три пространственные координаты и временная координата – время)
2. Зависимая переменная или функция со своими производными
3. Параметры задачи: c, ρ, λ, q_v в общем случае тоже функции переменных (независимых и зависимой)

Упрощение – сокращение количества независимых переменных и параметров задачи + использование средних постоянных значений параметров

СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Множество задач

$$\mathrm{div}\lambda\,\mathrm{grad}(t) + q_v = 0$$

СОКРАЩЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ПАРАМЕТРОВ

$$q_v = 0$$

Множество задач

$$\mathrm{div}\lambda\,\mathrm{grad}(t) = 0$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДНИХ ПОСТОЯННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

$$\lambda = const$$

Множество задач

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}(t) = 0$$

$$\nabla^2 t = 0$$

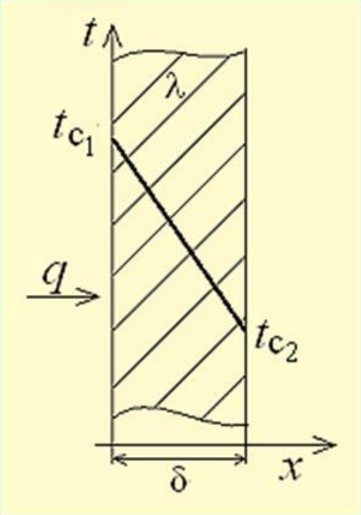
∇^2 - Оператор Лапласа

СОКРАЩЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ

Плоская, цилиндрическая и сферические стенки

Плоская стенка

- Одинаковые условия теплообмена по всей поверхности справа
- Одинаковые условия теплообмена по всей поверхности слева
- Одинаковая толщина δ пластины
- Теплопроводность зависит только от температуры $\lambda(t)$



$$\frac{\partial t}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\lambda\frac{\partial t}{\partial y}=0; \qquad \frac{\partial t}{\partial z}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\lambda\frac{\partial t}{\partial z}=0.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\lambda(t)\frac{dt}{dx}=0}$$

Г.У. $\quad x=0 \quad t=t_{c1}$

$\quad x=\delta \quad t=t_{c2}$

$$\lambda(t)\frac{dt}{dx}=c_1 \to \lambda(t)dt=c_1dx \to \int\lambda(t)dt=c_1x+c_2 \to F(t)=c_1x+c_2$$

$$x = 0 \quad t = t_{c1}$$
$$x = \delta \quad t = t_{c2}$$

$$F(t_{c2}) = c_1\delta + F(t_{c1}) \ \rightarrow \ c_1 = \frac{F(t_{c2}) - F(t_{c1})}{\delta}$$

$$F(t) = F(t_{c1}) + \frac{F(t_{c2}) - F(t_{c1})}{\delta}x$$

$$\boxed{\lambda = const}$$

$$F(t) = \lambda t \qquad t = t_{c1} + \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta}x$$

$$q = -\lambda \mathrm{grad}\left(t\right) = -\lambda\frac{dt}{dx} = -\lambda\frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\dfrac{\delta}{\lambda}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{R_t}$$

$\dfrac{\delta}{\lambda}$ - термическое сопротивление теплопроводности плоской однослойной стенки

$$\boxed{t_{c1} - t_{c2} = \Delta t = q\frac{\delta}{\lambda} = qR_t}$$

$$\frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} = -\frac{q}{\lambda}$$

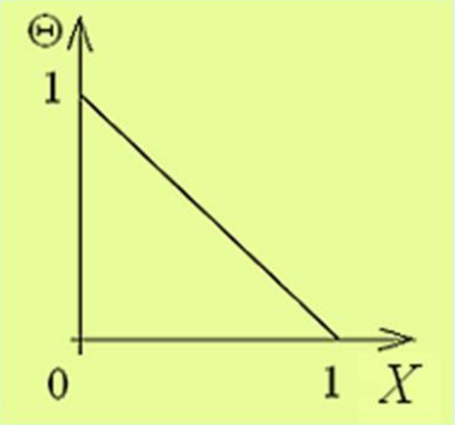
$$t = t_{c1} - \frac{q}{\lambda}x$$

Чем меньше λ тем круче меняется t

Чем больше q тем круче меняется t

$$\left.\begin{aligned}\Delta t &= t - t_{c2} \\ \Delta t_0 &= t_{c1} - t_{c2}\end{aligned}\right\} \Delta t = \Delta t_0 - \frac{\Delta t_0}{\delta} x \;\Rightarrow\; \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 1 - \frac{x}{\delta} \;\Rightarrow\; \boxed{\Theta = 1 - X}$$

Уравнение температурного поля является универсальным, так как распределение температуры в стенке можно представить единой прямой для любых заданных значений температур стенок.



$$\boxed{\lambda = \lambda_0\left[1+b\left(t-t_0\right)\right]}$$

$$\frac{d}{dx}\lambda(t)\frac{dt}{dx}=0 \qquad q=-\lambda(t)\frac{dt}{dx}=const$$

$$qdx=-\lambda(t)dt \qquad qdx=-\lambda_0\left[1+b\left(t-t_0\right)\right]dt$$

$$\int_0^{\delta} qdx=-\lambda_0\int_{t_{c1}}^{t_{c2}}\left[1+b\left(t-t_0\right)\right]dt$$

$$q\delta=-\lambda_0\left\{\left[\left(t_{c2}-t_0\right)-\left(t_{c1}-t_0\right)\right]+\frac{b}{2}\left[\left(t_{c2}-t_0\right)^2-\left(t_{c1}-t_0\right)^2\right]\right\}$$

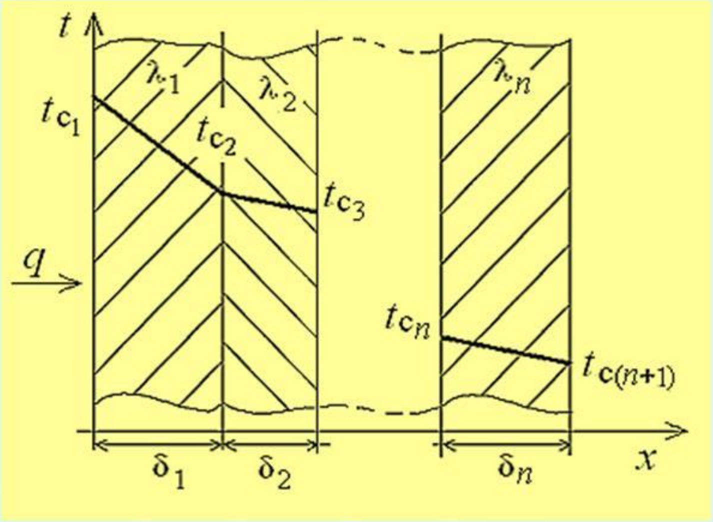
$$q\delta=-\lambda_0\left\{1+\frac{b}{2}\left[\left(t_{c2}-t_0\right)+\left(t_{c1}-t_0\right)\right]\right\}\left(t_{c2}-t_{c1}\right)$$

$$\bar{\lambda}=\lambda_0\left\{1+\frac{b}{2}\left[\left(t_{c2}-t_0\right)+\left(t_{c1}-t_0\right)\right]\right\}=\frac{\lambda_0\left\{1+b\left(t_{c2}-t_0\right)\right\}+\lambda_0\left\{1+b\left(t_{c1}-t_0\right)\right\}}{2}=$$

$$\bar{\lambda}=\frac{\lambda\left(t_{c2}\right)+\lambda\left(t_{c1}\right)}{2}$$

$$\boxed{q==\frac{t_{c1}-t_{c2}}{\delta/\bar{\lambda}}}$$

Самостоятельно – температурное поле



$$q = const$$

$$q = \frac{\lambda_1}{\delta_1}\left(t_{c1} - t_{c2}\right)$$

$$q = \frac{\lambda_2}{\delta_2}\left(t_{c2} - t_{c3}\right)$$

$$q = \frac{\lambda_3}{\delta_3}\left(t_{c3} - t_{c4}\right)$$

....

$$q = \frac{\lambda_n}{\delta_n}\left(t_{cn} - t_{c(n+1)}\right)$$

$$q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \ldots \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right) = t_{c1} - t_{c(n+1)}$$

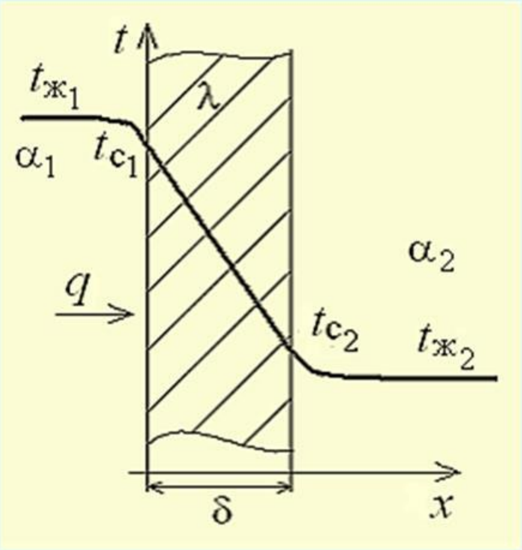
$$q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}$$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ - полное ТС теплопроводности плоской многослойной стенки

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{\lambda_{экв}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$$

$$F\sum_{i=1}^{n} \delta_i = V; \quad F\delta_i = V_i; \quad r_i = \frac{\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}$$

$$\frac{1}{\lambda_{экв}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{\lambda_i}$$



$$q = \alpha_1 \left(t_{ж1} - t_{c1} \right)$$

$$q = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}$$

$$q = \alpha_2 \left(t_{c2} - t_{ж2} \right)$$

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = k \left(t_{ж1} - t_{ж2} \right)$$

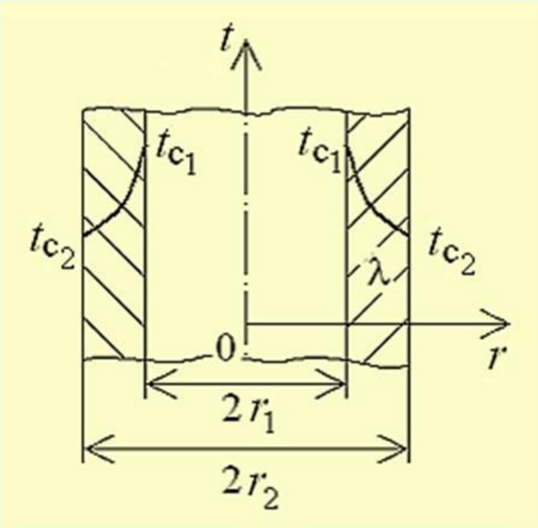
$\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}$ - полное ТС теплопередачи через плоскую многослойную стенку

k – коэффициент теплопередачи

$\frac{1}{\alpha}$ – ТС теплоотдачи

$$t_i = t_{i+1} + q \cdot \frac{\delta_i}{\lambda_i} = t_{i+1} + q \cdot R_{ti} = t_{i+1} + \Delta t$$

!!!!!!!!



Бесконечный цилиндр $\lambda = const$

Г.У. $t\Big|_{r=r_1} = t_{c1}$; $t\Big|_{r=r_2} = t_{c2}$

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dt}{dr} = 0$$

Дивергентная форма: $\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right) = 0$

$$r\frac{dt}{dr} = c_1 \qquad t(r) = c_1\cdot\ln(r) + c_2$$

$$\left.\begin{aligned} r = r_1 \quad t_{c1} = c_1\cdot\ln(r_1) + c_2 \\ r = r_2 \quad t_{c2} = c_1\cdot\ln(r_2) + c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 \; u \; c_2$$

$$t(r) = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2})\frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$Q = -\lambda\frac{dt}{dr}\cdot 2\pi r\ell = -\lambda\left(-\frac{t_{c1}-t_{c2}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\frac{1}{r}\right)2\pi r\ell = \lambda\left(\frac{t_{c1}-t_{c2}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\frac{1}{r}\right)2\pi r\ell = \frac{\pi\ell(t_{c1}-t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$Q = \frac{\pi\ell(t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{2\pi\lambda\ell}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1}}$$

$\frac{1}{2\pi\lambda\ell}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1}$ или $\frac{1}{2\lambda\ell}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1}$ - термическое сопротивление теплопроводности цилиндрической однослойной стенки

$$q_\ell = \frac{Q}{\ell}$$

Линейная плотность теплового потока

$$q_\ell = \frac{\pi(t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}}$$

$\frac{1}{2\pi\lambda}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1}$ или $\frac{1}{2\lambda}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1}$ - линейное термическое сопротивление теплопроводности цилиндрической однослойной стенки

$$q_\ell = \frac{\pi(t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\overline{\lambda}}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{2\pi\overline{\lambda}}\ln\frac{d_2}{d_1}}; \quad \overline{\lambda} = \frac{1}{|t_{c1} - t_{c2}|}\int_{t_{c1}}^{t_{c2}} \lambda(t)dt$$

$$\ln\frac{d_2}{d_1}=\left(\frac{d_2}{d_1}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{d_2}{d_1}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{d_2}{d_1}-1\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{d_2}{d_1}-1\right)^4\ldots$$

$$\frac{d_2}{d_1}\to 1 \qquad \ln\frac{d_2}{d_1}=\frac{d_2}{d_1}-1=\frac{2\delta}{d_1}$$

Подставим и убедимся – плоская стенка. Самостоятельно.

Для инженерных расчетов плоская при $\frac{d_{\max}}{d_{\min}}<1.8$

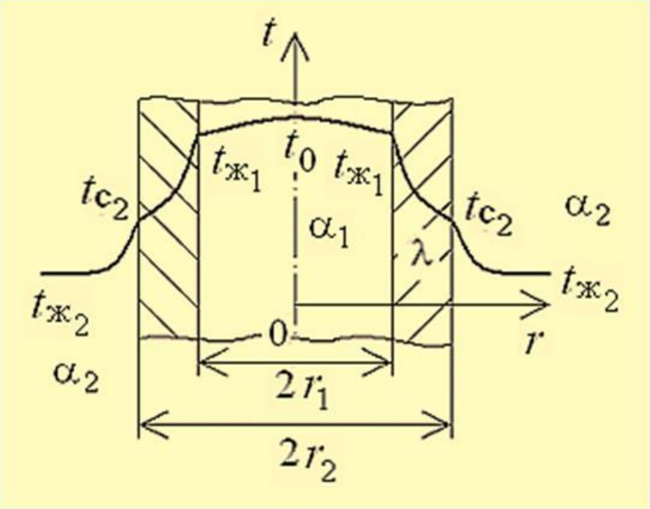
$$Q=\frac{\pi\ell(t_{c1}-t_{c(n+1)})}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\cdot\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}=\frac{t_{c1}-t_{c(n+1)}}{\frac{1}{2\pi\ell}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\cdot\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

$$q_\ell=\frac{\pi(t_{c1}-t_{c(n+1)})}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\cdot\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}=\frac{t_{c1}-t_{c(n+1)}}{\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\cdot\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

Вывод подобно плоской. Самостоятельно.

Полное и полное линейное термические сопротивления теплопроводности многослойной цилиндрической стенки - самостоятельно

Теплопередача через цилиндрическую стенку



$$Q = \frac{\pi \ell (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}$$

$$q_\ell = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}$$

Как назвать термические сопротивления ?
Как связаны t_i и t_{i+1} ?

$$\frac{d_{max}}{d_{min}} < 1.8$$

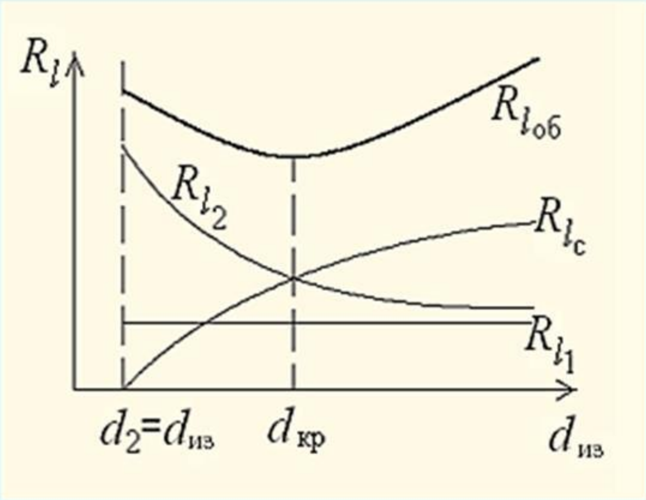
$$Q = \pi d_{расч} \ell \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

$$d_{расч} = d_1 \qquad \text{при} \quad \alpha_1 \ll \alpha_2$$

$$d_{расч} = d_2 \qquad \text{при} \quad \alpha_2 \ll \alpha_1$$

$$d_{расч} = \frac{d_1 + d_2}{2} \qquad \text{при} \quad \alpha_1 \approx \alpha_2$$

Критический диаметр цилиндрической стенки



$$q_\ell = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2\lambda}\cdot\ln\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{1}{2\lambda_\text{из}}\cdot\ln\dfrac{d_\text{из}}{d_2} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_\text{из}}}$$

$$R_{l1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1}$$

$$R_{l\text{c}} = \frac{1}{2\lambda_\text{из}}\cdot\ln\frac{d_\text{из}}{d_2}$$

$$R_{l2} = \frac{1}{\alpha_2 d_\text{из}}$$

$$R_{l\text{об}} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\cdot\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_\text{из}}\cdot\ln\frac{d_\text{из}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_\text{из}}$$

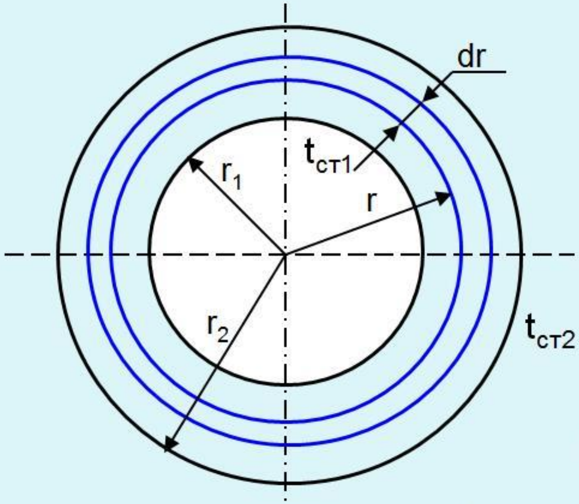
$$\left.\frac{\partial\left(R_{l\text{об}}\right)}{\partial\left(d_\text{из}\right)}\right|_{d_\text{из}=d_{\kappa p}} = 0 = 0 + \frac{1}{2\lambda_\text{из}}\cdot\frac{1}{d_\text{кр}} + (-1)\frac{1}{\alpha_2\left(d_\text{кр}\right)^2}$$

$$d_\text{кр} = \frac{2\lambda_\text{из}}{\alpha_2}$$

$$d_2 > d_\text{кр}$$

$$\lambda_\text{из} < \frac{\alpha_2 d_2}{2}$$

Теплопроводность при стационарном режиме и граничных условиях I рода через шаровую стенку



$$\lambda = const$$

Г.У. $\quad t\Big|_{r=r_1} = t_{c1}\,;\ \ t\Big|_{r=r_2} = t_{c2}$

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{dt}{dr} = 0$$

Дивергентная форма: $\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dt}{dr}\right) = 0$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{c_1}{r^2} \qquad t(r) = c_2 - \frac{c_1}{r}$$

$$t(r) = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2})\frac{\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r}\right)}{\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)}$$

$$Q = -\lambda F\frac{dt}{dr} = -\lambda 4\pi r^2\frac{dt}{dr} = \frac{4\pi\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}} = \frac{2\pi\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}} = \pi\lambda\frac{d_1 d_2(t_{c1} - t_{c2})}{\delta}$$