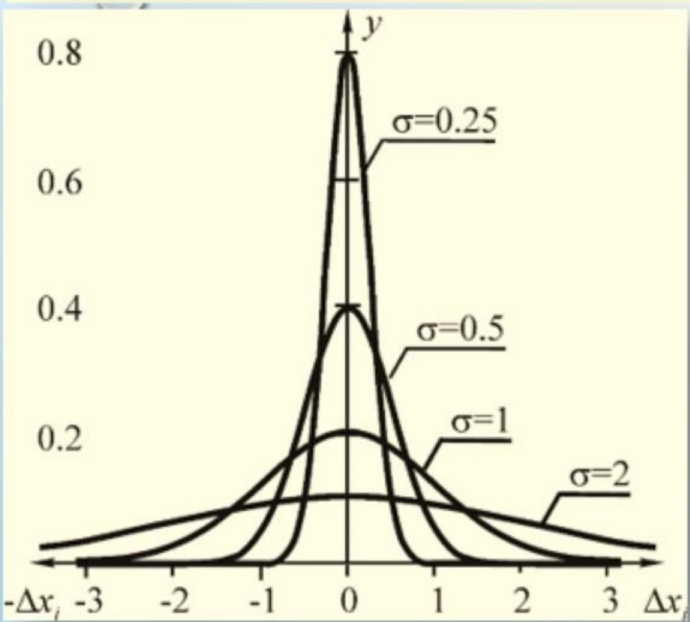
Погрешности отдельных измерений *

За вероятность $y(\Delta x_i)d\Delta x_i$ появления абсолютной погрешности Δx_i в интервале $d\Delta x_i$ принимают отношение числа всех значений Δx_i, попадающих в интервал $d\Delta x_i$, к числу всех значений Δx_i (при $n \to \infty$).



$$y(\Delta x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta x_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

Доверительной вероятностью (*надежностью*) результата измерений называется вероятность того, что истинное значение измеряемой величины попадает в данный доверительный интервал

$$\alpha = P\left(\bar{x} - \Delta x_i < x_{ист} < \bar{x} + \Delta x_i\right)$$

Как уже было рассмотрено наиболее распространена оценка с помощью *средней квадратической погрешности*, которую иногда называют *стандартной погрешностью*, или *стандартом измерений*:

$$\Delta x_i = {}^nS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x} - x_i\right)^2}{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} {}^nS = \sigma$$

* Основы теории инженерно-физического эксперимента : [учебное пособие] / В. А. Архипов, А. П. Березиков ; Федерал. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Том. политех. ун-т". - Томск : Томский политехнический университет, 2008. - 205 с. : рис., табл. - 200 экз.. - ISBN 5-98298-296-2.

Доверительная вероятность как было показано для доверительного интервала Δx_i
в долях среднеквадратичной дисперсии

$$\alpha\left(\frac{\Delta x_i}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta x_i/\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Повторим:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } \Delta x_i = \sigma, & \alpha = 0.6827, \\ \text{при } \Delta x_i = 2\sigma, & \alpha = 0.9545, \\ \text{при } \Delta x_i = 3\sigma, & \alpha = 0.9973. \end{array}\right\}$$

Приведенные значения **σ** полезно запомнить, так как если в публикациях приведено значение средней квадратической погрешности (**σ**, 2**σ** или 3**σ**), то соответствующие значения доверительной вероятности **α** обычно не указываются.

Погрешности серии измерений

$\Delta\bar{x}$ – абсолютной погрешности серии измерений (*погрешности среднего арифметического значения*)

$$y(\Delta\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\Delta\bar{x}^2}{2\sigma_{\bar{x}}^2}\right)$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

При ограниченном числе измерений приближенным выражением *генеральной дисперсии* будет выборочная дисперсия :

$$^nS_{\bar{x}}^2 = \frac{^nS^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{n(n-1)}$$

При этом *средняя квадратическая погрешность результата серии измерений* равна

$$^nS_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{^nS^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{n(n-1)}}$$

В принципе, при $n \to \infty$ можно полностью устранить влияние случайных погрешностей на результат измерения

При небольшом количестве измерений n необоснованно завышается точность измерений.

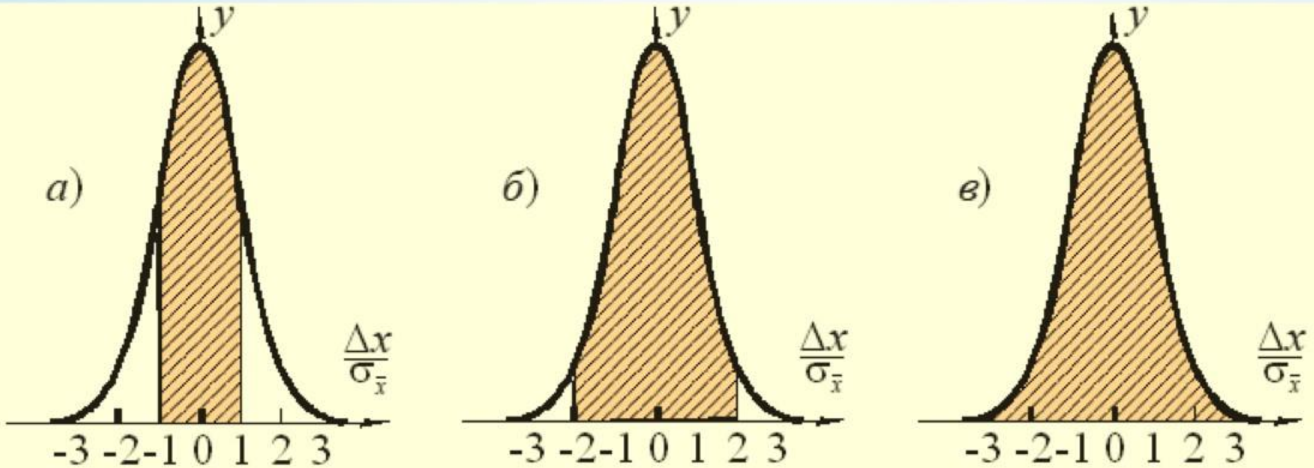
Для учета ограниченности количества измерений n доверительный интервал для результата серии измерений представляется в виде:

$$\Delta x = t(\alpha, n)\frac{{}^{n}S}{\sqrt{n}} = t(\alpha, n)\,{}^{n}S_{\overline{x}}$$

$t(\alpha, n)$ - коэффициент Стьюдента, зависящий от числа проведенных измерений n и от выбранной величины доверительной вероятности α.

При увеличении числа измерений (фактически, при $n > 60 \div 100$) *коэффициент Стьюдента* стремится к предельной величине, зависящей от выбранного значения α.

Уи́льям Си́ли Го́ссет (William Sealy Gosset, 13 июня 1876, Кентербери — 16 октября 1937, Беконсфильд) — британский учёный-статистик, более известный под своим псевдонимом Стьюдент (Student) благодаря своим работам по исследованию т. н. распределения Стьюдента. Исследования были обращены к нуждам пивоваренной компании и проводились на малом количестве наблюдений. Чтобы предотвратить раскрытие коммерческой информации Госсет вынужден был опубликовать свои работы под псевдонимом Стьюдент, чтобы скрыть себя от работодателя.



Значения надежности α (заштрихованная площадь) при разных значениях $k = \Delta x/\sigma_{\bar{x}}$

а – $k = 1$, α=0.68; б – $k = 2$, α=0.95; в – $k = 3$, α=0.997

Коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$

n	α							
	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
2	1.38	2.0	3.1	6.3	12.7	31.8	63.7	636.6
3	1.06	1.3	1.9	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	0.98	1.3	1.6	2.4	3.2	4.5	5.8	12.9
5	0.94	1.2	1.5	2.1	2.8	3.7	4.6	8.7
10	0.88	1.1	1.4	1.8	2.3	2.8	3.3	4.8
20	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.9
25	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
30	0.85	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
40	0.85	1.1	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.6
60	0.85	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.5
120	0.84	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.6	3.4

Выбор числа измерений

$$^{n}S_{\bar{x}} = \frac{^{n}S}{\sqrt{n}}$$

Можно использовать два способа – улучшение точности используемого метода измерений (уменьшение ^{n}S) или увеличение числа измерений n.

Для этого необходимо, чтобы доверительный интервал, определенный с выбранной надежностью α, был существенно меньше величины систематической погрешности $\Delta x_{\text{пр}}$:

$$\Delta x << \Delta x_{\text{пр}}$$

Практически обычно удовлетворяются гораздо менее жестким требованием:

$$\Delta x \le \frac{\Delta x_{\text{пр}}}{3} \quad \text{или} \quad \Delta x \le \frac{\Delta x_{\text{пр}}}{2}$$

$$\Delta x_{\Sigma} = \sqrt{t^2(\alpha, n)\, {}^{n}S_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{t(\alpha, \infty)}{3}\right)^2 \Delta x_{\text{пр}}^2}$$

$$\Delta x = t(\alpha, \infty)\frac{^{n}S}{\sqrt{n}}$$

$$n = \left[\frac{t(\alpha, \infty)\, {}^{n}S}{\Delta x}\right]^2$$

Погрешности косвенных измерений

$$z = f\left(a, b, c, \ldots, A, B, C, \ldots\right)$$

$a, b, c, \ldots$ – результаты прямых измерений;

$A, B, C, \ldots$ – числовые константы.

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2 + \ldots}$$

$$z = f\left(a, b, c, \ldots, A, B, C, \ldots\right) = \overline{z} \pm \Delta z$$

Запись результатов измерений

- Все результаты измерений, а также вычисленный по ним окончательный результат обязательно приводятся вместе с погрешностью. Абсолютную погрешность всегда указывают вместе с найденным значением измеряемой величины.

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = (7.62 \pm 0.03)\ \text{мм}$$

- Для окончательного результата приводят также и относительную погрешность, которую записывают отдельно.

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\,\% = \frac{0.03}{7.62} \cdot 100\,\% = 0.39\,\%$$

- Абсолютную погрешность всегда выражают в тех же единицах, что и саму измеряемую величину.
- Результат измерений и его абсолютную погрешность записывают так, чтобы их последние цифры принадлежали к одному и тому же разряду.
- При записи результата измерений нуль писать так же обязательно, как и любую другую цифру. x=(25.70±0.02) кг
- Округлять погрешности следует в сторону завышения. В сторону занижения округляются только числа, вторая цифра которых не превышает 1/3 интервала округления (вторая цифра меньше 4 – при округлении до одной значащей цифры; вторая цифра меньше 2 – при округлении до двух значащих цифр).
- Следует привести результаты измерений к легко читаемому виду, используя множитель 10 в соответствующей степени или приставки “милли”, “микро” и т.д.,

Алгоритм обработки результатов измерений

- Составить таблицу измерений
- Найти среднее арифметическое значение величин

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Найти *среднюю квадратическую погрешность отдельного результата* при ***n*** измерениях (*погрешность метода измерений*)

$$^{n}S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x} - x_i\right)^2}{n-1}}$$

- Отбраковать результаты (*исключить промахи*)

- Отбраковать результаты (*исключить промахи*)

Найти относительное уклонение "*подозрительного*" измерения, выраженное в долях :

$$\vartheta_{\kappa} = \left| \frac{\bar{x} - x_k}{{}^{n}S} \right|$$

Найти значения $\vartheta_{\min}$ и $\vartheta_{\max}$ по известному количеству измерений в таблице

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
$\vartheta_{\min}$	1.41	1.65	1.79	1.89	1.97	2.04	2.10	2.15	2.19	2.23	2.26	$\beta = 0.1$
$\vartheta_{\max}$	1.41	1.72	1.96	2.13	2.27	2.37	2.46	2.54	2.61	2.66	2.71	$\beta = 0.01$

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
$\vartheta_{\min}$	2.30	2.33	2.35	2.38	2.40	2.43	2.45	2.47	2.49	2.50	2.52	$\beta = 0.1$
$\vartheta_{\max}$	2.76	2.80	2.84	2.87	2.90	2.93	2.96	2.98	3.01	3.03	3.05	$\beta = 0.01$

β - вероятность случайного появления выскакивающих значений в ряду ***n*** измерений.

Сравнить

$\vartheta > \vartheta_{\max}$ – промах

$\vartheta > \vartheta_{\min}$ – оставить

$\vartheta_{\min} < \vartheta < \vartheta_{\max}$ – можно оставить или нет

- Найти уточненные значения после отбраковки результатов для $\overline{x},\ {}^{n}S$

- Найти среднее квадратичное отклонение среднего арифметического (погрешность результата серии измерений $ {}^{n}S_{\overline{x}} = \dfrac{{}^{n}S}{\sqrt{n}}$

- Найти доверительный интервал для (абсолютную погрешность результата серии измерений).

  Задать доверительную вероятность α (обычно 0.95)

  Найти табличное значение коэффициента Стьюдента

  Определить $\Delta x = {}^{n}S_{\overline{x}} \cdot t(\alpha, n)$

- Если величина погрешности результата серии измерений окажется сравнимой с величиной систематической погрешности (погрешности прибора), то в качестве доверительного интервала следует взять величину

$$\Delta x_{\Sigma} = \sqrt{t^{2}(\alpha, n)\,{}^{n}S_{\overline{x}}^{2} + \left(\frac{t(\alpha, \infty)}{3}\right)^{2} \Delta x_{\text{пр}}^{2}}$$

- Записать результат измерений в виде:

$$x = \left(1.4386 \pm 0.381\right) \text{с}$$

Округлить

$$\Delta x = 0.381\,\text{с} \approx 0.4\,\text{с} \quad (\text{для} \quad n = 5 \div 10);$$
$$\Delta x = 0.381\,\text{с} \approx 0.38\,\text{с} \quad (\text{для} \quad n \geq 25);$$

Округлить

$$x = \left(1.4 \pm 0.4\right) \text{с} \quad (\text{для} \quad n = 5 \div 10);$$
$$x = \left(1.44 \pm 0.38\right) \text{с} \quad (\text{для} \quad n \geq 25);$$

Косвенные измерения

- Для каждой серии измерений величин, входящих в определение искомой величины , провести обработку, как описано в предыдущем разделе (прямые измерения). При этом для измеряемых величин   задают одно и то же значение доверительной вероятности.
- Оценить границы доверительного интервала для результата косвенных измерений.
- Определить относительную погрешность результата серии косвенных измерений.
- Окончательный результат записать в виде.
- Привести в соответствие с полученной погрешностью запись результата измерений.