

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

П.В. Бурков, С.П. Буркова

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ В НЕФТЕГАЗОВОМ ДЕЛЕ

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2012

УДК 681.327.1

ББК 30.36

Б-91

Бурков П.В., Буркова С.П.

Б-91 **Компьютерное моделирование технологий в нефтегазовом деле: учебное пособие / П.В. Бурков, С.П. Буркова; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 143 с.**

В анализе конструкций находит свое наиболее важное применение метод конечных элементов. Первичными переменными, которые вычисляются в ходе конструкционного анализа, являются смещения. В дальнейшем, исходя из вычисленных смещений в узлах сетки, определяются и другие важные параметры – такие как напряжения, упругая или пластическая деформация и пр. В данной работе основные положения компьютерного инженерного анализа конструкций рассмотрены в примерах, решенных с помощью программы ANSYS, которая относится к классу "тяжелых" систем и имеет расширенные вычислительные возможности.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Нефтегазовое дело».

УДК 681.327.1

ББК 30.36

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор КузГТУ

Г.Д.Буялич

Кандидат технических наук, доцент ЮТИ ТПУ

А.А.Казанцев

Кандидат технических наук, доцент ИПР ТПУ

В.Г.Креуц

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2012

© Бурков П.В., Буркова С.П., 2012

© Обложка. Издательство Томского политехнического университета, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ	6
1.1. Общие понятия и классификация задач вычислительной механики.....	6
1.2. Основные понятия и концепция МКЭ	14
1.3. Понятие о конечных элементах.....	21
1.4. Постановка плоской задачи теории упругости.....	29
1.5. Конечно-элементная формулировка плоской задачи теории упругости: базовые соотношения.....	37
1.6. Конечно-элементная формулировка плоской задачи теории упругости: вывод СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений) МКЭ.....	43
1.7. Треугольный линейный конечный элемент: система координат и интерполяция.....	49
1.8. Треугольный линейный конечный элемент: вывод расчетных соотношений	55
1.9. Изопараметрический подход в МКЭ	62
1.10. Четырехсторонние двумерные элементы.....	69
1.11. Формирование и решение глобальной системы конечно-элементных уравнений	75
1.12. Виды конструкционного анализа	82
ГЛАВА 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПИЧНЫХ ЗАДАЧ.....	89
2.1. Решение типичной задачи в ANSYS	89
2.2. Исследование напряженно-деформированного состояния пластины с отверстием при растяжении (Задача №1).....	98

2.3. Исследование напряженно-деформированного состояния трубы под давлением (Задача №2)	116
2.4. Исследование напряженно-деформированного состояния болтового соединения с затяжкой (Задача №3)	125
2.5. Исследование напряженно-деформированного состояния корпуса задвижки жестко закрепленного по отверстиям магистральных фланцев (Задача №4)	136
ЛИТЕРАТУРА	142

ВВЕДЕНИЕ

Экстремальные условия работы элементов современных конструкций, сложность их формы и большие габариты делают исключительно дорогим осуществление натурального или полунатурного эксперимента, особенно, если речь идет об установлении предельных (разрушающих) нагрузок. Зачастую единственной возможностью экспрессного анализа инженерной проблемы является компьютерное математическое моделирование. Прогресс в разработке численных методов позволил существенно расширить круг задач, доступных анализу. Полученные на основе этих методов результаты используются практически во всех областях науки и техники.

В анализе конструкций находит свое наиболее важное применение метод конечных элементов. Первичными переменными, которые вычисляются в ходе конструкционного анализа, являются смещения. В дальнейшем, исходя из вычисленных смещений в узлах сетки, определяются и другие важные параметры – такие как напряжения, упругая или пластическая деформация и пр.

В данной работе основные положения компьютерного инженерного анализа конструкций рассмотрены в примерах, решенных с помощью программы ANSYS, которая относится к классу "тяжелых" систем и имеет расширенные вычислительные возможности.

Глава 1. Теоретические основы расчета на прочность

1.1. Общие понятия и классификация задач вычислительной механики

При выполнении инженерных расчетов на прочность неизбежен этап создания моделей прочностной надежности элементов конструкции. С помощью таких моделей возможно выбрать материал, необходимые размеры конструкций и оценить ее сопротивление внешним воздействиям.

Модель – система представлений, зависимостей, условий и ограничений, описывающих исследуемый и рассчитываемый процесс или явление. Модель представляет собой отображение объективной реальности и может иметь разную природу, структуру и форму представления.

Надежность – свойство позволяющее изделию выполнять свои функции в заданных пределах в течение определенного промежутка времени.

Прочностная надежность – отсутствие отказов, связанных с разрушением или недопустимыми деформациями. Основной мерой надежности является вероятность безотказной работы изделия. Более распространенная величина оценки прочностной надежности - *запас прочности* n . Для прочностных расчетов это отношение *критического усилия* $P_{кр}$ – предельного усилия приводящего к разрушению, к *максимальному рабочему усилию* P_{max} :

$$n = P_{кр}/P_{max}$$

Условие прочностной надежности записывается в виде:

$$n > [n]$$

При проведении прочностных расчетов, всегда используются модели материала, формы деталей и конструкций, условий нагружения и предельного состояния. При разработке моделей приходится идти на компромисс между достаточно полным и адекватным описанием рассчитываемого явления и доступностью, трудоемкостью расчета. В практике используют как аналитические, так и численные методы расчетов.

Аналитические методы расчетов базируются на математических методах решения краевых задач. Эти методы обычно сложны, трудоемки и ограничены достаточно простыми формами тел и схем нагружения.

Численные методы, к которым относятся метод конечных разностей, метод граничных интегральных уравнений, метод граничных элементов, метод конечных элементов, не ограничены ни формой тел, ни способом приложения нагрузки. Однако для решения задач такими методами необходимы мощные вычислительные средства, что на настоящем этапе развития вычислительной техники не является большой проблемой. Кроме того, часто важно знать эволюцию процесса деформирования или разрушения. В таких случаях обойтись без численных решений практически невозможно.

В настоящее время создано большое число программных комплексов способных решать довольно сложные задачи численными методами. Наиболее мощные из них программы ANSYS (ANSYS Inc.), Cosmos, NASTRAN. Механическая и математическая основа названных программных продуктов представляет собой метод конечных элементов (МКЭ) - наиболее распространенный и достаточно универсальный метод анализа *напряженно-деформированного состояния (НДС)*.

Механика как фундаментальная научная дисциплина может быть подразделена на три основные части:

	<i>Теоретическая</i>
Механика	<i>Прикладная</i>
	<i>Вычислительная</i>

Теоретическая механика имеет дело с фундаментальными законами и принципами, описывающими механическое движение абсолютно твердых и деформируемых тел. *Прикладная механика* на основе теорем теоретической механики занимается построением математических моделей физических явлений, формулировкой и решением научно-исследовательских и инженерных задач. *Вычислительная механика* решает специфические задачи путем математического моделирования с помощью численных методов, реализованных на цифровых вычислительных машинах.

Вычислительная механика

Области приложений вычислительной механики могут быть выделены в соответствии с физическим масштабом решаемых задач.

Вычислительная механика	<i>Наномеханика и микромеханика</i>	Твердые тела и конструкции Механика жидкости и газа Связанные междисциплинарные задачи
	<i>Механика сплошной среды</i>	
	<i>Механика систем</i>	

Наномеханика имеет дело с явлениями на молекулярном и атомном уровнях материи и, таким образом, тесно взаимодействует с физикой частиц и химией. Микромеханика в основном рассматривает явления на уровне кристаллов и гранул. Ее основное технологическое приложение – дизайн и производство материалов и микроприборов.

Механика сплошной среды изучает тела на макроскопическом уровне, используя континуальные модели, в которых микроструктура гомогенизируется с помощью феноменологического подхода. Две традиционные области приложения механики сплошной среды – механика жидких и твердых тел; последняя включает механику конструкций, которые, очевидно, изготавливаются из твердых тел. Вычислительная механика твердого тела использует научно-прикладной подход, в то время как вычислительная механика конструкций акцентирует внимание на технологических приложениях к анализу и дизайну конструкций.

Вычислительная механика жидкостей имеет дело с задачами, описывающими равновесие и движение жидкости и газов, включая такие хорошо разработанные области как гидродинамику, аэродинамику, физику атмосферы, физику горения и взрыва.

Механика связанных задач – одна из последних областей приложения численных методов. Подразумевается, что эта область включает физические системы, выходящие за классические границы механики твердых и жидких тел, рассматривает взаимодействие жидкостей и конструкций. Например, фазовые задачи, такие как таяние льда или застывание металла, соответствуют данной категории, поскольку включают взаимодействие механических и электромагнитных явлений.

Наконец, механика систем имеет дело с механическими объектами, естественными или искусственными, проявляющими характерные макроскопические функции. Пример искусственных систем – самолеты, дома, мосты, двигатели, машины, микрочипы, роботы и т.д.; биологических систем – целые животные или деревья, изучаемые с позиций биомеханики. В выше рассмотренной схеме системы представляют собой наиболее общую концепцию, изучаются они путем декомпозиции: поведение отдельных компонент системы плюс взаимодействие между компонентами. В свою очередь компоненты могут быть разложены на более мелкие части и т.д. Продолжая этот иерархический процесс мож-

но получить отдельные компоненты достаточно простые для того, чтобы быть изученными в рамках отдельных дисциплин. Однако взаимодействие между ними может оказаться гораздо более сложным. Соответственно, искусство исследователя состоит в том, чтобы правильно определить, на каком иерархическом уровне системы необходимо остановиться для того, чтобы получить нетривиальный результат.

Статика и динамика

Задачи механики сплошной среды могут быть классифицированы в соответствии с тем, принимается во внимание эффект инерции или нет:

Механика сплошной среды	<i>Статика Динамика</i>
------------------------------------	-----------------------------

В динамике явно рассматривается зависимость от времени, поскольку вычисление сил инерции (а так же, возможно, демпфирующих сил) требует вычисления производных по времени.

Задачи статики так же могут быть временно зависимыми, однако, силами инерции пренебрегают в силу их малости. Статические задачи могут быть так же подразделены на строго статические и квазистатические. В математическую формулировку последних время явно не входит; вместо него в случае необходимости используются временно подобный параметр, характеризующий историю процесса. В других квазистатических задачах, таких как расчет деформации ползучести, циклическая усталость, пластичность, зависящая от скорости нагружения, требуется более реалистичная оценка времени, однако, и в этом случае инерциальные силы пренебрежимо малы.

Линейность и нелинейность

Задачи механики могут быть так же подразделены на линейные и нелинейные:

Механика	<i>Линейная Нелинейная</i>
-----------------	--------------------------------

Линейная механика имеет дело с проблемами, в которых отклик системы линеен в причинно-следственном смысле. Например, если приложенные внешние силы удваиваются, то результирующие перемеще-

ния и внутренние напряжения так же удваиваются. В противоположном случае задачи классифицируются как нелинейные.

Методы дискретизации

Последняя классификация задач вычислительной механики базируется на методе дискретизации, с помощью которого непрерывная математическая модель преобразуется в дискретную модель, состоящую из конечного числа степеней свободы:

Методы пространственной дискретизации

Метод конечных элементов (МКЭ)
Метод граничных элементов (МГЭ)
Метод конечных разностей МКР
Метод конечных объемов МКО
Спектральный метод
Метод свободных сеток

В настоящее время в линейной механике твердого тела метод конечных элементов наиболее распространен, в то время как применение метода граничных элементов для решения данных задач находится на втором месте. Для нелинейных задач метод конечных элементов является наиболее эффективным и доминирующим.

Классический метод конечных разностей почти полностью потерял свое значение при решении практических задач механики твердого тела. Это утверждение, однако, неверно для механики жидкости и газов, где разностные методы до сих пор широко распространены. Метод конечных объемов, основанный на законах сохранения, применяется для решения сильно нелинейных задач механики жидкости и газов. Спектральные методы используются в различных областях механики и основаны на пространственно-временном преобразовании в область, где задача может быть легко решена. Метод свободных сеток – один из новых методов вычислительной математики и основан на конечно-разностном подходе с использованием независимых сеток, полученных в результате применения конечно-элементных технологий.

Варианты МКЭ

Термин *Метод Конечных Элементов* в действительности определяет широкий спектр вычислительных технологий в соответствии с некоторыми общими свойствами, которые будут рассмотрены в дальнейшем. Классификация МКЭ применительно к механике конструкций в

зависимости от типа искомой функции может быть представлена следующим образом:

Формулировка МКЭ	В перемещениях
	В напряжениях
	Смешенная
	<i>Гибридная</i>

Различие между этими формулировками проистекает из вида вариационного принципа, используемого для построения алгоритма МКЭ, и, соответственно, из вида искомой функции:

Вариационный принцип механики	В перемещениях	<i>Минимума потенциальной энергии Логранжа</i>
	В напряжениях	<i>Минимума дополнительной работы Костильяно</i>
	Смешенная	<i>Смешанный принцип Рейснера</i>
	<i>Гибридная</i>	<i>Принцип Хувашицу и др.</i>

Процесс конечно-элементного анализа

Процесс конечно-элементного анализа включает определенную последовательность шагов. Эта последовательность имеет две канонические конфигурации в зависимости от окружения, в котором используется МКЭ:

- Математический подход
- Физический подход.

Схема математического подхода изображена на рис. 1.1. В центре данного подхода находится *математическая модель*. Обычно это есть обыкновенное дифференциальное уравнение или уравнение в частных производных по пространственным координатам и времени. Дискретная конечно-элементная модель генерируется путем применения какого-либо вариационного принципа к исходной системе дифференциальных уравнений или же метода взвешенных невязок в его ослабленном варианте. Этот шаг называется *дискретизацией*. Получаемая система конечно-элементных уравнений решается одним из методов прикладной математики решения больших систем алгебраических уравнений. В результате чего получается так называемое дискретное, или приближенное, решение.

Идеальная физическая система в данном случае может быть представлена как *реализация* математической модели; и наоборот, математическая модель есть *идеализация* этой системы. Например, если математическая модель есть уравнение Пуассона, то его реализацией может быть проблема распределения электростатического заряда или распре-

деление тепла. В принципе этот шаг не существенен и может быть опущен. Другими словами, конечно-элементная дискретизация может быть приведена и без обращения к физике явления.



Рис. 1.1. Математическая концепция МКЭ

Концепция ошибки, или погрешности, возникает, когда приближенное решение подставляется в математическую модель. Эта подстановка называется *верификацией*. Полная ошибка численного подхода включает в себя *ошибку решения* системы алгебраических уравнений и *погрешность дискретизации*. Подстановка приближенного решения в идеальную физическую систему, т.е. проведение теста или опыта, в принципе могла бы дать оценку этой ошибки моделирования. Однако, в концепции математического подхода МКЭ физическая система не играет большой роли и является лишь некоторым идеализированным образом математической модели.

Схема физического подхода изображена на рис. 1.2. Центральным звеном в этом случае является *физическая система*, которая должна быть рассчитана. Процедуры идеализации и конечно-элементной дискретизации проводятся *одновременно*, чтобы получить дискретную модель. Приближенное дискретное решение получают аналогично предыдущему.

Идеальная математическая модель в данном подходе может быть представлена как *предельный переход* или «континуализация» дискретной модели. Для определенных физических систем, которые хорошо моделируются непрерывными полями, этот шаг существенен, для других, таких как сложные инженерные системы, подобный переход не имеет большого смысла. Для них конечно-элементная модель может

быть построена без обращения к математическим моделям только на основе экспериментальных измерений.

Понятие *погрешности*, или *ошибки*, возникает в физическом подходе благодаря двум процедурам – *верификации* численного решения и *оценки* результатов моделирования (*ратификации*). Верификация имеет тот же смысл, что и в математическом подходе: численное решение подставляется в дискретную модель, в результате чего получается погрешность решения. Подстановка приближенного решения в идеальную математическую модель, в принципе, может дать ошибку дискретизации. Однако это редко используется в сложных инженерных системах, поскольку, как правило, в данном случае математической модели не существует, и сравнивать полученное решение необходимо с исходной физической системой. Таким образом, оценка или ратификация численного решения основана на сравнении результатов моделирования с экспериментальными данными, что и дает *суммарную погрешность моделирования*.



Рис. 1.2. Физическая концепция МКЭ

Один из способов настройки дискретной модели, для того чтобы она лучше соответствовала физической системе, называется *уточнением модели* (рис. 1.3). Имеющиеся свободные параметры модели определяются путем сравнения дискретного приближенного решения с результатами эксперимента, как показано на рис. 1.3. Поскольку, условия минимизации ошибки моделирования, как правило, нелинейные (даже ес-

ли конечно-элементная модель линейная), то процесс уточнения является существенно итерационным.

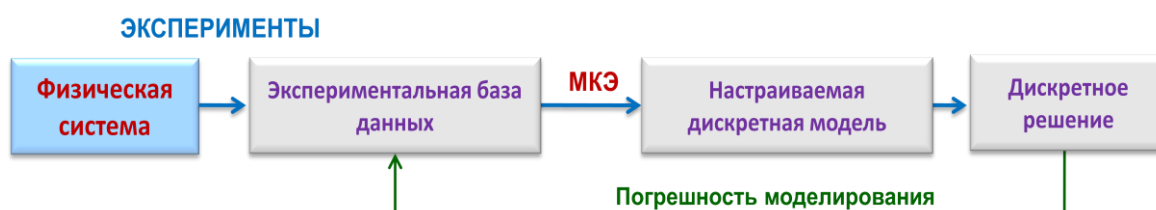


Рис. 1.3. Процесс уточнения дискретной модели

Выше рассмотренные подходы применения МКЭ не являются взаимоисключающими, а дополняют друг друга. Исторически физический подход был первым для разработки конечно-элементных моделей очень сложных инженерных систем, таких как самолеты, корабли и т.п. Математический подход возник позднее и среди прочих вещей призван обеспечить необходимый теоретический фундамент МКЭ, для того чтобы распространить метод на решение различных междисциплинарных задач выходящих за рамки общепринятого прочностного анализа конструкций.

1.2. Основные понятия и концепция МКЭ

Классическая аналитическая механика была разработана Эйлером и Лагранжем в конце 18 века и впоследствии развита Гамильтоном и Якоби, как систематическая формулировка механики Ньютона. Объектами изучения аналитической механики являются модели механических систем от отдельных частиц, состоящих из достаточно большого числа молекул, до сложных инженерных конструкций и тел солнечной системы. Пространственная конфигурация любой из таких систем описывается *числом степеней свободы* системы, или другими словами, *обобщенными координатами*. В математически ориентированных курсах для их обозначения используются так же термины *переменные состояния* и *главные переменные*.

Если число степеней свободы модели конечно, модель называется *дискретной*, и *непрерывной (континуальной)* в противном случае.

Поскольку МКЭ представляет собой один из методов дискретизации, то число степеней свободы конечно-элементной модели необходимо конечно. Обычно, все степени свободы собираются в матричный вектор, обозначаемый **U** и называемый *вектором степеней свободы* или *вектором состояния*. Термин *вектор узловых перемещений* обычно используется в механических приложениях.

В аналитической механике каждой степени свободы соответствует сопряженная переменная, представляющая собой *обобщенную силу*. В немеханических приложениях также существует подобное множество сопряженных переменных, которые для универсальности называются силами или силовыми переменными. Эти силы объединяются в матричный вектор, обозначаемый \mathbf{F} . Отметим, что внутреннее произведение вектора сил на вектор степеней свободы имеет смысл внешней энергии или работы.

Предполагается, что соотношение между \mathbf{U} и \mathbf{F} является линейным и однородным. Последнее означает, что если \mathbf{U} стремится к нулю, то и \mathbf{F} стремится к нулю, в этом случае соотношение между ними выражается следующим основным уравнением:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

\mathbf{K} для универсальности называется *матрицей жесткости*, даже в случае нечисто механических приложений, поскольку к настоящему времени нет общего соглашения по обозначению этой матрицы в различных дисциплинах.

Физический смысл векторов \mathbf{U} и \mathbf{F} изменяется в зависимости от области приложения МКЭ, как это показано в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Физический смысл векторов \mathbf{U} и \mathbf{F} в различных конечно-элементных приложениях

Область приложения	Вектор состояния \mathbf{U}	Сопряженный вектор \mathbf{F}
Механика конструкций и твердых тел	Перемещение	Механическая сила
Теплопроводность	Теплопроводность	Тепловой поток
Потенциальное течение	Давление	Скорость частицы
Общий вид течения	Скорость	Поток
Электростатика	Электрический потенциал	Плотность заряда
Магнитостатика	Магнитный потенциал	Интенсивность магнитного поля

Заметим, что если соотношение между силами и перемещениями линейное, но неоднородное, уравнение 1.1 обобщается на следующее соотношение:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_I \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{F}_I есть узловый вектор начальных сил, который возникает, например, при решении задач термоупругости для учета начальных температурных напряжений; \mathbf{F}_M - вектор механических сил.

Основные шаги МКЭ

Основные шаги МКЭ показаны на рис. 1.4. Схематично их можно назвать следующим образом:

- Идеализация
- Дискретизация
- Решение.



1.4. Основные шаги численного моделирования

Идеализация

Под идеализацией понимают процесс перехода от исходной физической системы к математической модели. Этот процесс является наиболее важным шагом при решении технической или инженерной задачи.

Ключевым пунктом в этом процессе является понятие *модели*, которую можно определить как символическое устройство, построенное для моделирования и предсказания поведения системы. Математическое моделирование, или идеализация, есть процесс, с помощью которого инженер переходит от реальной физической системы к математической модели системы. Данный процесс называется идеализацией, поскольку математическая модель необходимо абстрагируется от физической реальности.

В качестве примера реальной физической системы рассмотрим инженерную конструкцию в виде плоской пластины, нагруженную поперечными силами. Математические модели данной системы, которые инженер может использовать для анализа напряжений в пластине, могут быть следующими:

1. Модель очень тонкой пластины, основанная на теории изгиба мембран.
2. Модель тонкой пластины, основанная на классической теории Кирхгоффа.
3. Модель достаточно толстой пластины, основанная, например, на теории Миндлина-Рейсснера.
4. Модель очень толстой пластины, основанная на трехмерной теории упругости.

Очевидно, инженер должен обладать достаточными теоретическими знаниями, чтобы правильно выбрать соответствующую математическую модель системы (конструкции), которую ему необходимо исследовать.

Явное и неявное моделирование

Как было отмечено, диаграмма на рис. 1.4 представляет собой упрощенную схему инженерного процесса. В обобщенном виде он представлен на рис. 1.5.

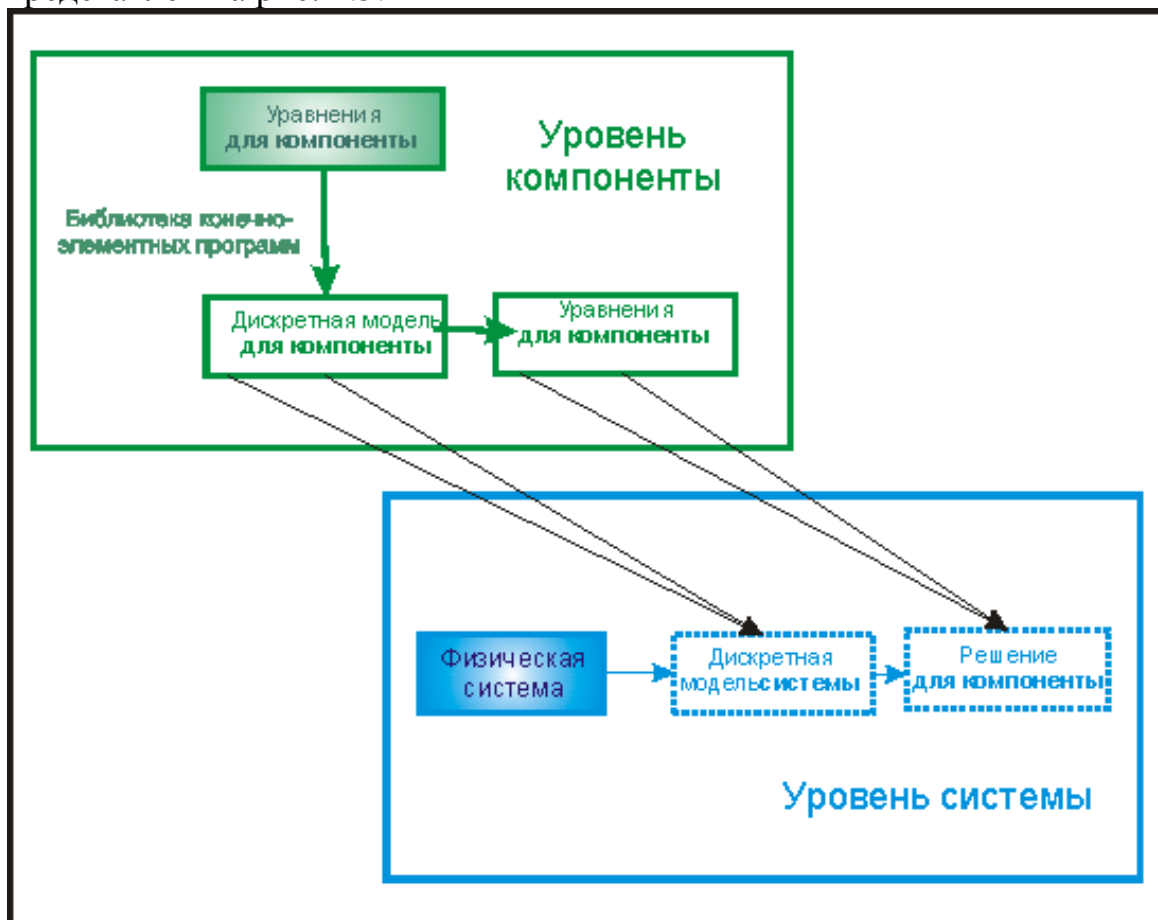


Рис. 1.5. Общий вид инженерного процесса

Рассмотрим современный сценарий действий инженера-механика в крупной компании. Предположим, необходимо рассчитать некоторую техническую конструкцию с помощью некоторого коммерческого универсального конечно-элементного комплекса. Как правило, любой коммерческий пакет предлагает широкий каталог различных типов элементов. Например, стержневые, балочные, оболочечные, трехмерные и т.д. В момент выбора того или иного элемента из каталога инженер автоматически принимает некоторую математическую модель, на которой этот элемент основан. Это называется *безусловным моделированием*. В идеале инженер должен быть полностью компетентен в принятии решения. Обеспечение выпускника подобной «конечно-элементной грамотностью» есть одна из целей данного курса.

Под *явным моделированием* понимается подход, когда выбору математической модели уделяется значительное внимание. При этом приобретаются специализированные конечно-элементные программы, реализующие данную модель, или же такие программы пишутся самостоятельно. Очевидно, данный подход требует гораздо больше знаний, опыта и ресурсов, чем безусловное моделирование. Однако, для многих задач, которые не могут быть решены с помощью общего подхода, явное моделирование является единственным способом решения. Заметим, что на практике часто используются комбинации обоих подходов.

Дискретизация

Математическое моделирование есть первый упрощающий шаг при решении реальных инженерных задач. Однако, математические модели физических систем вовсе необязательно просты для решения. Они часто описываются связанными системами уравнений в частных производных по пространству и времени и сложными граничными условиями. Такие модели имеют *бесконечное* число степеней свободы.

Решение полученных уравнений может быть аналитическим или численным. Аналитические решения, называемые также решениями в замкнутой форме, могут быть применены к широкому классу задач, поскольку, выражаются в символической форме. Однако, к сожалению, возможность их получения ограничена простыми уравнениями, регулярными областями и постоянными граничными условиями.

Поскольку, большинство проблем, стоящих перед инженером не может быть решено аналитически или требуют для этого непропорционально больших усилий, то единственной альтернативой является применение численного моделирования.

Для того, чтобы численное моделирование могло быть применено на практике необходимо уменьшение числа степеней свободы до *конечного* значения. Этот процесс называется дискретизацией. Результатом процесса дискретизации является *дискретная модель*. Для сложных инженерных систем эта модель есть результат многоуровневой декомпозиции. Отметим, что дискретизации могут подвергаться как пространственные координаты, так и время. Соответственно, выделяют *пространственную дискретизацию* и *временную*.

Источники ошибки и аппроксимация

Как показано на рис. 1.4, каждый шаг численного моделирования вносит свою ошибку. В инженерной практике погрешность перехода от физической модели к математической является одной из наиболее существенной. Однако, ошибки этого шага достаточно трудны и дорогостоящи для оценки, поскольку, верификация модели требует доступа и сравнения с экспериментальными данными, объем которых часто недостаточен или же они вообще отсутствуют в случае новых инженерных продуктов.

Следующая по важности идет *ошибка дискретизации*. Даже, если ошибка этапа решения дискретной модели игнорируется, полученное численное решение, в общем, является лишь *аппроксимацией*, или приближением, точного решения математической модели. Тем самым мы получаем ошибку, или погрешность, дискретизации. Изучением свойств и поведения этой ошибки занимается раздел прикладной математики, называемый теорией аппроксимаций.

Интуитивно можно ожидать, что точность решения дискретной модели должна улучшаться при увеличении числа степеней свободы модели и, следовательно, ошибка дискретизации стремится к нулю при стремлении числа степеней свободы к бесконечности. Данное утверждение описывает так называемое требование *сходимости* приближенного решения. Однако доказательство этого утверждения не всегда возможно и является одной из ключевых целей теории аппроксимаций.

Общая схема алгоритма МКЭ

Последовательность процедур алгоритма МКЭ может быть представлена в следующем виде:

1. Дискретизация рассматриваемой области, т.е. замена континуальной среды совокупностью КЭ заданной формы, соединенных между собой в узлах конечным числом связей.

Этот этап, несмотря на видимую простоту, имеет важное значение, хотя он и не обусловлен строгими теоретическими рекомендациями и во многом определяется интуитивно. Обычно при построении конечно-элементной модели руководствуются предварительными представлениями о характере ожидаемого результата, и в местах высоких градиентов искомых величин сетку конечных элементов сгущают.

2. Выбор вариационного принципа.

Выбор вариационного принципа определяет основные неизвестные функции, через которые впоследствии устанавливаются остальные неизвестные. В задачах механики деформируемого твердого тела используются следующие вариационные принципы: принцип Лагранжа, в соответствии с которым варьируются перемещения; принцип Кастильяно (варьируются напряжения), принцип Рейсснера (варьируются перемещения и напряжения), принцип Ху-Вашицы (варьируются перемещения, напряжения и деформации).

В практических расчетах чаще всего используется принцип Лагранжа. Поэтому дальнейшее изложение базируется на его основе.

3. Выбор аппроксимирующих функций.

При кусочно-непрерывной аппроксимации предполагается, что перемещения внутри элемента могут быть выражены через перемещения в его узлах. Эта связь описывается при помощи так называемых функций формы, которые аппроксимируют действительное поле перемещений внутри элемента. От выбора аппроксимирующих функций в значительной степени зависит точность решения. Эти функции должны удовлетворять следующим критериям:

- критерию полноты: при стремлении размеров элемента к нулю выбранные функции формы должны обеспечить любые простые значения.
- критерию совместимости: функции формы должны обеспечивать непрерывность перемещений и ее производных до $(n-1)$ -го порядка на границе между элементами (где n -порядок старшей производной в функционале энергии). Если выбранный тип элемента обеспечивает непрерывность поля перемещений, то по классификации его относят к классу C^0 – элементов, а если обеспечивается и непрерывность деформации, то к классу C^1 – элементов.

При выполнении этих критериев с увеличением числа конечных элементов, моделирующих конструкцию, результаты расчета монотон-

но сходятся к точному решению. Нарушение критерия совместимости в ряде случаев приводит к достоверному результату, но сходимость в этих случаях не будет монотонной.

4. Реализация вариационного принципа.

На этом этапе осуществляется вычисление матриц жесткостей элементов и построение глобальной матрицы системы алгебраических уравнений и вектора узловых сил. Глобальная матрица жесткости может быть получена несколькими методами:

- методом непосредственного сложения жесткостей;
- методом конгруэнтного преобразования;
- при помощи конечно-разностных операторов.

5. Учет граничных условий.

Полученная на основе указанных методов матрица жесткости является вырожденной, поскольку в соответствии с уравнениями равновесия заданной системы часть уравнений (для пространственных систем – шесть, а для плоских – три) окажутся взаимно зависимыми. Корректировка этой матрицы при учете граничных условий приводит к невырожденной системе линейных алгебраических уравнений.

6. Решение системы алгебраических уравнений.

Для решения системы алгебраических уравнений используются стандартные программы, имеющиеся в математическом обеспечении ЭВМ, и специально подготовленные и лучшим образом учитывающие симметрию и структуру матрицы жесткости системы – редкосополненность или ленточность.

7. Определение деформаций и напряжений.

После определения узловых перемещений в соответствии с известными соотношениями теории упругости могут быть определены деформации и напряжения.

1.3. Понятие о конечных элементах

Метод конечных элементов представляет собой наиболее распространенный приближенный метод в механике твердого тела и может быть интерпретирован с физической или математической точки зрения.

Основа физической концепции МКЭ – это разбиение математической модели конструкции на непересекающиеся компоненты (подобласти) простой геометрии, называемые *конечными элементами* или просто *элементами* для краткости. Множество элементов, на которые разбита конструкция, называется *конечно-элементной сеткой*. Механическое поведение каждого элемента выражается с помощью конечного

числа степеней свободы или значений искомых функций во множестве узловых точек. Поведение математической модели, таким образом, аппроксимируется поведением дискретной модели, полученной путем сборки или ансамблирования всех элементов. Заметим, что концепция разбиения-сборки естественно возникает при исследовании многих искусственных или живых систем. Например, легко представить мост, здание, двигатель или скелет, как сложную систему, составленную из простых компонентов. В отличие от метода конечных разностей, конечные элементы не накладываются друг на друга в пространстве.

Атрибуты элемента

Рассмотрим основные типы конечных элементов и их *свойства*, называемые *атрибутами* элементов (рис. 1.6).

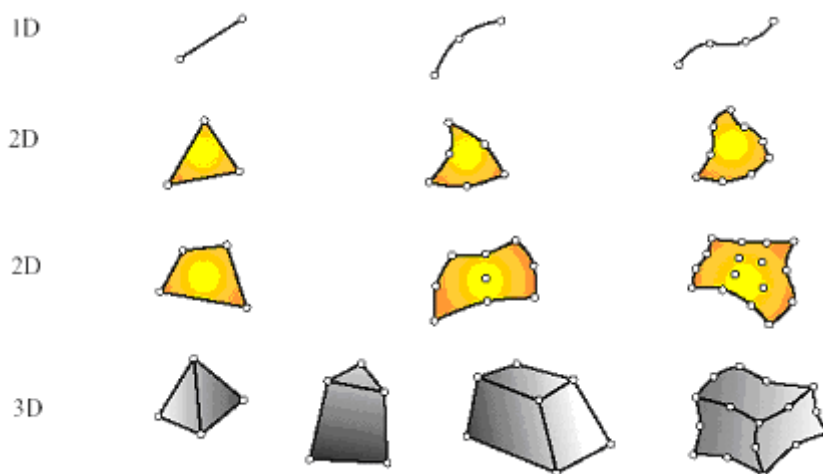


Рис. 1.6. Основные типы конечных элементов для одно-, дву- и трехмерных задач механики

1. **Собственная размерность.** Конечные элементы могут описываться одной, двумя или тремя пространственными координатами в зависимости от размерности задачи, для решения которой они предназначены. Соответствующее число внутренних или локальных координат называется собственной размерностью элемента. В динамическом анализе время рассматривается как дополнительная размерность. В расчетах используются также специальные элементы с нулевой размерностью, такие как, точечные массы или сосредоточенные упругие элементы (пружины).

2. **Узловые точки.** Каждый элемент описывается множеством характерных точек, называемых узловыми точками или узлами для краткости. Узлы предназначены для описания геометрии элемента и для

задания физических степеней свободы (числа неизвестных функций). Узлы обычно находятся в угловых или крайних точках элемента, но могут быть также расположены между угловыми узлами и внутри элемента. Данное различие связано с порядком аппроксимации, который обеспечивает данный конечный элемент. Элементы, имеющие только угловые узлы, называются *линейными* и обеспечивают линейную интерполяцию геометрии и функций. Элементы, имеющие дополнительные узлы на своих границах между угловыми точками, могут обеспечивать квадратичную или даже кубическую интерполяцию (рис. 1.6). В первом случае такие элементы называются *квадратичными*. Существуют элементы, имеющие внутренние узлы. Теоретически такие элементы обеспечивают более точное описание геометрии тела и искомых функций, однако широкого распространения данный тип элементов не получил. При наличии современных автоматических генераторов конечно-элементных сеток часто бывает проще и удобнее разбить конструкцию на большое число линейных элементов простой формы, чем использовать элементы высокого порядка, требующие для построения сетки значительной работы вручную. Элементы, не имеющие внутренних узлов, относятся к так называемому *серендипову семейству*.

3. **Геометрия элемента.** Геометрия элемента определяется расположением узловых точек. Большинство элементов, используемых в расчетах, имеют достаточно простую геометрическую форму. Например, в одномерном случае элементы обычно представляют собой прямолинейные отрезки или сегменты кривых линий; в двумерном случае элементы имеют трехстороннюю или четырехстороннюю форму; в трехмерных задачах наиболее распространены такие геометрические фигуры, как тетраэдры, призмы и гексаэдры (рис. 1.6).

4. **Степени свободы.** Степени свободы определяют физическое состояние элемента, т.е. физическое поле, которое описывает данный элемент. Благодаря общим степеням свободы в соседних элементах осуществляется сборка модели и формирование глобальной системы конечно-элементных уравнений. В качестве степеней свободы могут фигурировать как узловые значения неизвестной функции, так и ее производные по пространственным координатам в узлах. В первом случае элементы относятся к типу *лагранжевых* элементов; во втором случае – типу *эрмитовых* элементов. Например, в простейшей задаче о растяжении стержня неизвестной функцией является продольное перемещение стержня. Соответственно в качестве степеней свободы выступают узловые значения данной функции и, следовательно, конечный элемент относится к лагранжевому типу. Наоборот, в задаче об изгибе стержня не-

известной функцией является поперечное перемещение центральной оси стержня, а в качестве степеней свободы используются как узловые значения самой функции, так и ее производной по продольной координате. Физический смысл этой производной – угол поворота поперечного сечения стержня. Таким образом, конечный элемент, применяемый в расчетах стержня на изгиб, относится к типу эрмитовых элементов. Отметим также, что данные обозначения происходят от названия полиномов Лагранжа и Эрмита, широко используемых в прикладной математике для интерполяции функций по узловым значениям.

5. **Узловые силы.** Система узловых сил полностью соответствует степеням свободы элемента и выражается с помощью глобального вектора узловых сил.

6. **Определяющие соотношения.** Для конечных элементов, используемых в механических расчетах, определяющее соотношение задает поведение материала, из которого изготовлена конструкция. Например, в качестве такого соотношения во многих случаях используется обобщенный закон Гука, связывающий тензор деформаций и тензор напряжений в точке. Для линейного упругого стержневого элемента достаточно задать один модуль Юнга E и один коэффициент температурного расширения α .

7. **Свойства сечения.** К свойствам сечения относятся площади и моменты инерции одномерных и двумерных конечных элементов, таких как балки, стержни, пластины. В эту группу также входит толщина пластин и оболочек. При построении конечного элемента свойства сечений считаются заданными и входят в результирующую матрицу жесткости элемента.

Классификация конечных элементов, используемых в механике

1. **Простейшие конструкционные элементы.** К простейшим структурным элементам относятся элементы типа стержень, балка, труба, брус, панель, работающая на сдвиг (рис. 1.7). Уравнения, описывающие данные элементы, выводятся из теоретических положений сопротивления материалов, т.е. из упрощенных механических формулировок. Исторически первыми стали использоваться именно эти типы конечных элементов.



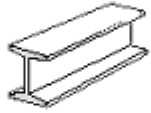







Компонента физической конструкции (структуры)	Имя математической модели	Конечно-элементная дискретизация
	стержень	
	балка	
	труба	
	брус средней толщины	
	сдвиг панели	

Рис. 1.7. Простейшие конструкционные элементы

2. **Континуальные элементы.** Континуальные элементы представляют собой конечные объемы или площади сплошной среды (континуума). Например, к континуальным элементам относятся пластины, оболочки, трехмерные твердотельные элементы (рис. 1.8). Уравнения, описывающие данный тип конечных элементов, получаются из общих соотношений механики сплошной среды и, в частности, теории упругости.

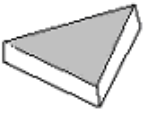



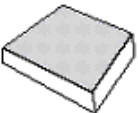
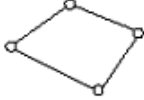
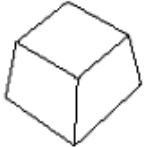
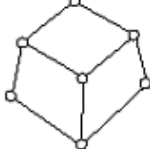
Физическое тело	Конечно-элементная идеализация	Физическое тело	Конечно-элементная идеализация
	 пластины		 твердые тела
			

Рис. 1.8. Континуальные конечные элементы

3. **Специальные элементы.** Специальные элементы обладают свойствами как конструкционных, так и континуальных элементов. Они выводятся из уравнений механики сплошной среды, но включают в себя некоторые особенности непосредственно связанные с физическими особенностями решаемых задач. В качестве примера можно привести следующие специальные элементы: элемент с трещиной для задач механики разрушения; многослойная панель; бесконечные и полубесконечные элементы; контактные и штрафные элементы; абсолютно твердотельные элементы (рис. 1.9).

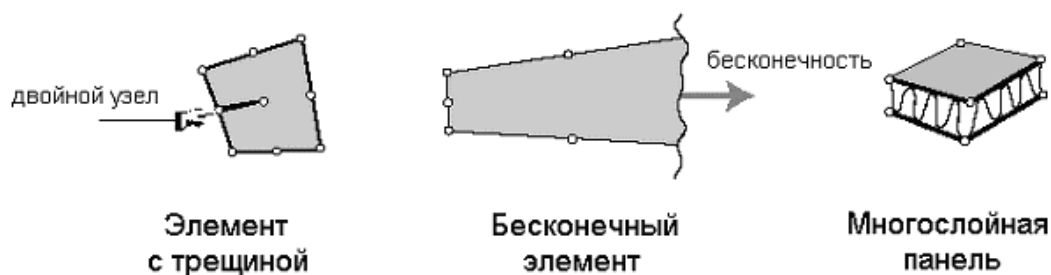


Рис. 1.9. Специальные конечные элементы

4. **Макроэлементы.** Макроэлементы представляют собой более сложный тип конечных элементов. Как правило, они получаются путем сборки из более простых конструкционных элементов. Число таких элементов, входящих в макроэлемент, как правило, невелико (рис. 1.10).

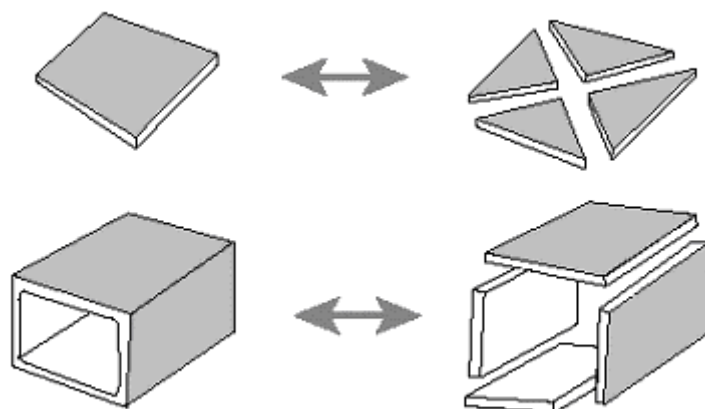


Рис. 1.10. Макроэлементы

5. **Подструктуры.** Подструктуры можно определить как макроэлементы с явно выраженными структурными особенностями или функциями. Как правило, они получаются путем деления полной

конструкции на функциональные компоненты. Например, крылья и фюзеляж самолета, пролет и тросы подвесного моста. Заметим, что различия между понятиями полной конструкции, подструктур и макроэлементов не всегда очевидны и четко определены. Поэтому часто используется понятие суперэлемента как обобщенного названия для всех типов макроэлементов или подструктур, представляющих собой комбинацию простейших конструктивных элементов.

Ансамблирование

Ансамблирование или сборка представляет собой объединение отдельных элементов в конечно-элементную сетку. С математической точки зрения ансамблирование состоит в объединении матриц жесткости отдельных элементов в одну глобальную матрицу жесткости всей конструкции. При этом существенно используются две системы нумерации узлов элементов: локальная и глобальная. Локальная нумерация представляет собой фиксированную нумерацию узлов для каждого типа конечных элементов в соответствии с введенной локальной системой координат на элементе. Глобальная нумерация узлов всей конструкции может быть совершенно произвольной, также как и глобальная нумерация конечных элементов. Однако, между локальными номерами и глобальными номерами узлов существует взаимнооднозначное соответствие, на основе которого и формируется глобальная система конечно-элементных уравнений.

Граничные условия

Согласно терминологии математической физики, рассматривающей различные дифференциальные уравнения, описывающие физические поля, с единой математической точки зрения, граничные или краевые условия для данных дифференциальных уравнений делятся на два основных типа: *существенные* и *естественные*. Обычно, существенные условия накладываются на искомую функцию, а естественные на ее производные по пространственным координатам. В математической физике естественные граничные условия получают «естественным» образом вместе с исходными дифференциальными уравнениями (уравнениями Эйлера) из соответствующего вариационного принципа, в то время как существенные граничные условия должны выполняться независимо.

С позиции метода конечных элементов существенные граничные условия – это такие, которые непосредственно влияют на степени сво-

боды модели и накладываются на компоненты глобального вектора неизвестных U . Наоборот, естественные граничные условия – это такие, которые опосредованно влияют на степени свободы через глобальную систему конечно-элементных уравнений и накладываются на правую часть системы – вектор F .

В задачах механики, как правило, к существенным граничным условиям относят те, которые включают в себя *перемещения* (но не деформации, представляющие собой производные перемещений по пространственным координатам). Согласно терминологии теории упругости такие граничные условия называются *кинематическими*. Например, заделка и шарнирное опирание в стержневых задачах представляют собой существенные, или кинематические, граничные условия, наложенные на прогиб или продольные перемещения точек стержня. Заметим, что в задаче изгиба стержня к существенным условиям относится также условия, наложенные на первую производную по продольной координате от прогиба стержня, которая имеет механический смысл угла поворота сечения стержня. Тоже можно сказать об углах поворота сечений в теории изгиба пластин.

К естественным граничным условиям в механических приложениях МКЭ относят условия, наложенные на различные внешние силовые факторы, действующие на точки поверхности тела – сосредоточенные силы и моменты в стержневых задачах; распределенные силы в двумерных и трехмерных задачах. Такие ограничения носят название *силовых граничных условий*.

В постановках задач механики сплошной среды, и в частности теории упругости, широко используются *смешанные* граничные условия. Это означает, что в данной точке поверхности тела одновременно заданы некоторые компоненты перемещений и поверхностных сил. Например, такие условия возникают при решении геометрически симметричных задач. Если остальные граничные условия и внешние силы также зеркально симметричны относительно некоторой плоскости, то смешанные граничные условия на плоскости симметрии представляют собой равенство нулю нормальных перемещений и равенство нулю касательных сил.

Перечисленные три варианта граничных условий наиболее распространены в чисто механических приложениях МКЭ. Однако, в междисциплинарных приложениях МКЭ, и в частности, при расчете температурных напряжений, граничные условия накладываются на различные физические переменные и зависят от особенностей математической постановки соответствующих задач.

1.4. Постановка плоской задачи теории упругости

Плоская задача теории упругости является наиболее подходящим примером для демонстрации алгоритма МКЭ применительно к решению многомерных задач механики сплошных сред. Базовые соотношения и особенности алгоритма метода конечных элементов в данном случае существенно отличаются от расчета одномерных задач (растяжения, кручения и изгибы стержней).

В механике конструкций плоский тонкий лист материала называется *пластиной*. Расстояние между верхней и нижней поверхностью пластины называется *толщиной* и обозначается через h . Пластина имеет также *срединную плоскость*, лежащую между двух поверхностей. Направление перпендикулярное срединной плоскости называется *трансверсальным*. Как правило, глобальная ось z направлена перпендикулярно срединной плоскости, в то время как оси x и y лежат в срединной плоскости, образуя глобальную декартову систему координат (рис.1.11). Таким образом, уравнение срединной плоскости имеет вид: $z=0$.

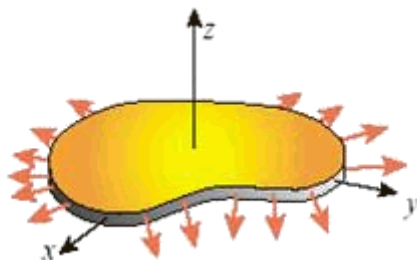


Рис. 1.11. Двумерная конструкция в плоско-напряженном состоянии

Для того чтобы пластина находилась в *плоско-напряженном* состоянии, необходимо чтобы выполнялись следующие условия:

1. Все внешние нагрузки: поверхностные, действующие на точки боковой поверхности пластины, и объемные, действующие на внутренние точки пластины, - перпендикулярны оси z , т.е. лежат в плоскости xy , и симметричны относительно срединной плоскости.
2. Все условия закрепления симметричны относительно срединной плоскости.
3. Внутренние перемещения, деформации и напряжения принимаются постоянными по толщине пластины.
4. Нормальные и сдвиговые компоненты тензора напряжений в направлении оси z равны нулю или пренебрежимо малы.
5. Пластина изготовлена из материала, не меняющего своих свойств по толщине. Такие пластины называются *трансверсально-однородными*.

3 и 4 предположения не являются необходимым следствием первых двух. Чтобы они выполнялись толщина h должна быть достаточно малой, обычно не более 10% наименьшего характерного размера пластины в срединной плоскости. Кроме того, если толщина пластины изменяется, то это изменение должно быть достаточно плавным. И, наконец, геометрия пластины должна быть симметричной относительно срединной плоскости.

Последнее предположение очевидно исключает из рассмотрения плоские композиционные конструкции, типа ячеистых сотоподобных структур или сэндвич-структур. Разработка моделей таких конструкций требует достаточно сложного интегрирования по толщине пластины, а также учета эффектов изгиба и растяжения, и в данном курсе рассматриваться не будет.

Замечание 1. Нагрузка перпендикулярная срединной плоскости приводит к напряженному состоянию, называемому *изгибом пластины*, описываемому дифференциальным уравнением IV-го порядка относительно прогиба пластины. Алгоритм МКЭ в этом случае имеет принципиально иной характер, поскольку данная задача относится к классу одномерных задач.

Замечание 2. Если принято, что напряжения вдоль оси z имеют место, то состояние пластины носит название *обобщенного плоско-напряженного состояния*.

Замечание 3. Кроме плоско-напряженного состояния в теории упругости широко применяется понятие *плоско-деформированного состояния*, согласно которому деформация вдоль оси z равна нулю. Физически это соответствует протяженным конструкциям, нагруженным силами перпендикулярно оси z . Например, плотина, дамба или лопатка ротора генератора при некоторых допущениях.

Математическая модель

Математическая модель пластины в плоско-напряженном состоянии есть двумерная краевая задача теории упругости, заданная в области Ω с границей Γ , как показано на рис. 1.12.

Все основные переменные, входящие в исходные уравнения, представляют собой функции двух переменных x и y и считаются осредненными по толщине пластины. Например, внешние силы, действующие в области Ω и входящие в правую часть уравнения движения точек сплошной среды, есть не что иное, как интегралы по толщине пластины от заданных объемных сил.

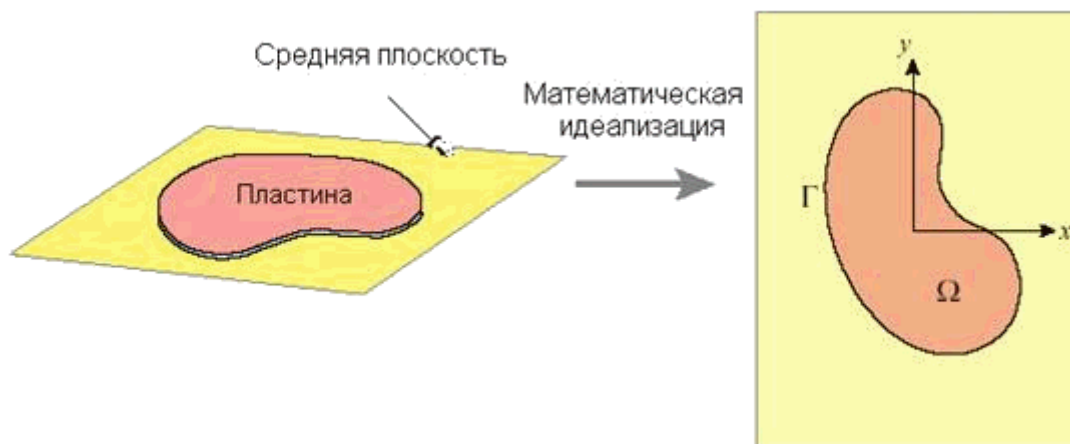


Рис. 1.12. Математическая модель пластины в плоско-напряженном состоянии

Исходные данные

Исходные данные включают в себя следующие объекты:

Геометрия области. Геометрия тела представляет собой область Ω с границей Γ , показанную на рис. 1.12.

Толщина пластины. Во многих случаях пластины, используемые как конструктивные элементы, имеют постоянную толщину. Если же толщина пластины изменяется, то толщина есть функция двух пространственных координат $h=h(x,y)$, при этом для сохранения плоско-напряженного состояния изменение толщины должно быть достаточно медленным.

Материал пластины. Свойства материала задаются с помощью определяющих соотношений. Рассмотрим случай линейно упругого, но не обязательно изотропного материала.

Силы, действующие в области Ω . «Областные» силы действуют на внутренние точки области Ω . В общем случае они могут быть двух типов. Во-первых, стандартные объемные силы, определенные как силы, действующие на единицу объема пластины, например, вес тела. Во-вторых, специфические областные силы, действующие по касательной к верхней и нижней поверхностям пластины, например, силы трения, которые могут возникать при относительном движении пластины по другому телу. Эти силы определенным образом должны быть приведены к срединной плоскости пластины.

Заданные поверхностные силы. Поверхностные силы – это известные силы, действующие на точки границы Γ . Часто они называются поверхностными усилиями. При решении технических задач необходимо

обращать внимание на размерность этих сил, т.к. они могут быть заданы как сила на единицу поверхности или как сила на единицу длины.

Кинематические граничные условия. Кинематические граничные условия задают способы закрепления пластины. Точки на границе области могут быть зафиксированы в одном или в двух направлениях. Дополнительно могут быть заданы условия симметрии или антисимметрии. Если кинематические граничные условия не заданы, то такие граничные условия называются свободными.

Искомые функции

В задачах механики основными неизвестными величинами являются поля перемещений, деформаций и напряжений. Согласно ранее сделанным предположениям, все основные искомые физические переменные не зависят от нормальной координаты z и являются функциями только координат x и y .

Перемещения. Вектор перемещений состоит из двух компонент:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Нормальная компонента перемещений $u_z(x, y, z)$ в общем случае отлична от нуля из-за эффекта коэффициента Пуассона и зависит от z . Однако это перемещение не входит в разрешающее уравнение задачи и может быть вычислено отдельно по найденным основным компонентам.

Деформации. Деформации, лежащие в плоскости, формируют тензор, определяемый тремя независимыми компонентами: e_{xx} , e_{yy} и e_{xy} . Для удобства формулировки конечно-элементных уравнений матричной формы компоненты тензора деформации представим в виде трехкомпонентного «вектора деформации»:

$$\mathbf{e}(x, y) = \begin{bmatrix} e_{xx}(x, y) \\ e_{yy}(x, y) \\ 2e_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Удвоенная компонента e_{xy} представляет собой деформацию сдвига $\gamma_{xy} = 2e_{xy}$ и используется для сокращения записи выражения энергии деформации. Остальные сдвиговые компоненты e_{xz} и e_{yz} равны нулю согласно исходным предположениям. Нормальная компонента e_{zz} обычно не равна нулю из-за эффекта Пуассона. Однако также как перемещение u_z нормальная компонента деформации не входит в разрешающее

уравнение как неизвестная. В выражении энергии деформации произведение σ_{zz} обращается в ноль, поскольку нормальное напряжение $\sigma_{zz} \epsilon_{zz}$ равно нулю по исходным предположениям.

Напряжения. Тензор напряжений также определяется тремя независимыми компонентами σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} , лежащими в плоскости пластины. Как и в случае с деформациями для удобства представления конечно-элементных уравнений в матричном виде сформируем трехкомпонентный «вектор напряжений»:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Оставшиеся три компоненты тензора напряжений σ_{zz} , σ_{xz} и σ_{yz} равны нулю согласно определению плосконапряженного состояния.

Объемные внутренние силы могут быть получены путем интегрирования напряжений по толщине пластины. В случае однородного распределения напряжений по координате z , данные силы, также образующие тензор, легко могут быть вычислены согласно следующей формуле:

$$P_{xx} = \sigma_{xx} h, \quad P_{yy} = \sigma_{yy} h, \quad P_{xy} = \sigma_{xy} h. \quad (1.6)$$

В литературе такие силы часто называются мембранными силами (рис. 1.13.).

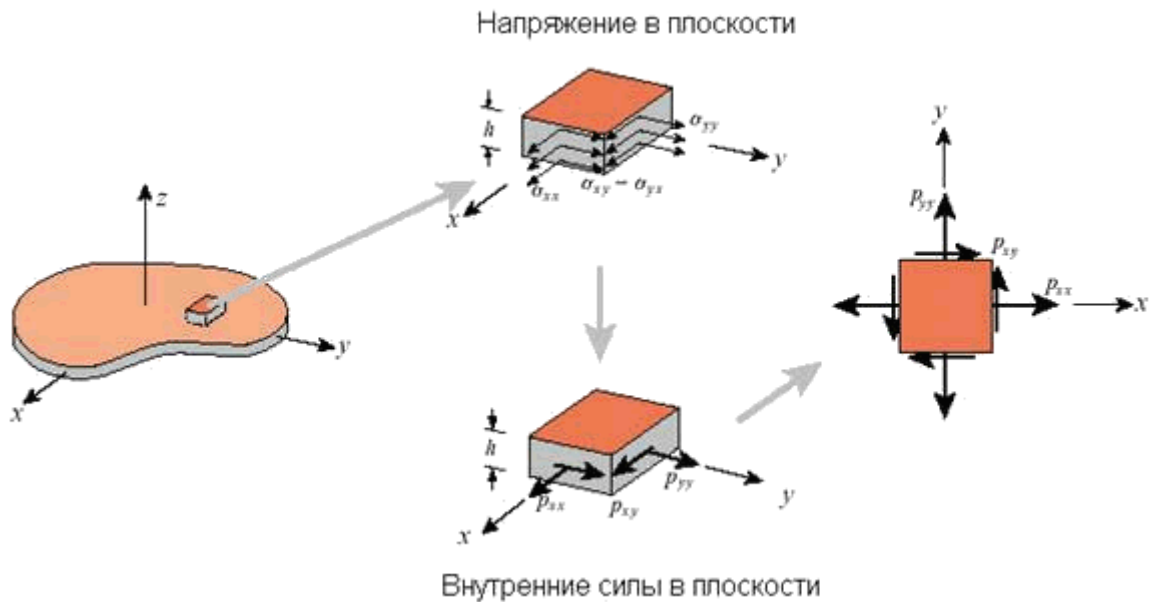


Рис. 1.13. Внутренние силы и напряжения, действующие на произвольный элемент мембраны

Разрешающие уравнения

Система разрешающих уравнений классической линейной теории упругости схематично представлена на рис. 1.14 в виде так называемой диаграммы Тонти.

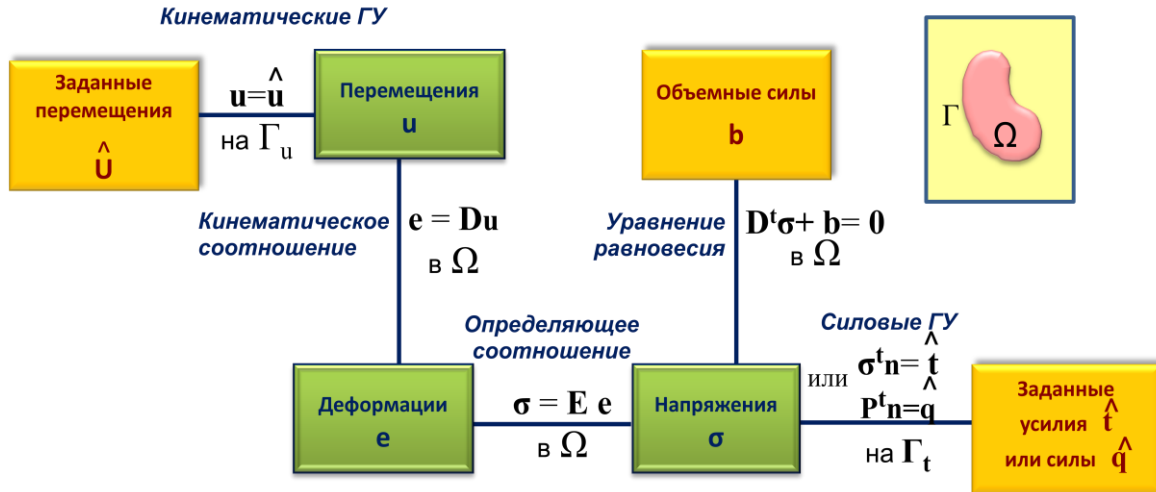


Рис. 1.14. Система разрешающих уравнений классической линейной теории упругости в виде диаграммы Тонти

Система разрешающих уравнений теории упругости относительно трех неизвестных физических полей перемещений, деформации и напряжений состоит из трех групп уравнений: кинематических соотношений, определяющих уравнений и уравнений равновесия в области тела. При отсутствии начальных напряжений в теле эта система уравнений может быть записана в следующем символично-матричном виде:

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad (1.7a)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.7B)$$

Кроме уже введенных матричных векторов перемещений, деформаций и напряжений, записанная система трех матричных уравнений содержит вектор объемных сил с компонентами b_x, b_y , входящий в уравнение равновесия, матрицу упругих модулей с компонентами E_{ij} , связывающую напряжения и деформации в точке тела, а также две символические матрицы, состоящие из частных производных по пространственным координатам. Заметим, что символические матрицы, входящие в кинематическое соотношение и в уравнение равновесия, совпадают с точностью до операции транспонирования.

В матричном виде система (1.7) может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{e}, \quad \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

где \mathbf{E} – симметричная матрица упругих модулей, \mathbf{D} – символическая матрица, состоящая из частных производных, \mathbf{b} – матричный вектор объемных сил.

Заметим, что приведенная система уравнений (1.8) несколько отличается от координатной или тензорной форм записи полной системы уравнений теории упругости, часто используемым в литературе. Достоинство данной формулировки состоит в том, что все уравнения уже записаны в матричном виде, наиболее удобном для вывода соотношений метода конечных элементов.

Если материал пластины является изотропным, то как известно из теории упругости компоненты матрицы упругих модулей \mathbf{E} могут быть выражены через технические константы материала: модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига G :

$$E_{11} = E_{22} = E / (1 - \nu^2),$$

$$E_{33} = \frac{1}{2} E / (1 + \nu) = G,$$

$$E_{12} = \nu E_{11},$$

$$E_{13} = E_{23} = 0.$$

При этом напомним, что только две из перечисленных технических констант являются независимыми. Формула, связывающая модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига G , имеет следующий вид:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Граничные условия

В классической задаче теории упругости граничные условия, заданные на поверхности Γ , могут быть двух типов: кинематические граничные условия и силовые граничные условия. Предполагается, что каждый тип граничных условий задан на своей части поверхности: Γ_u и Γ_t соответственно (рис. 1.15).

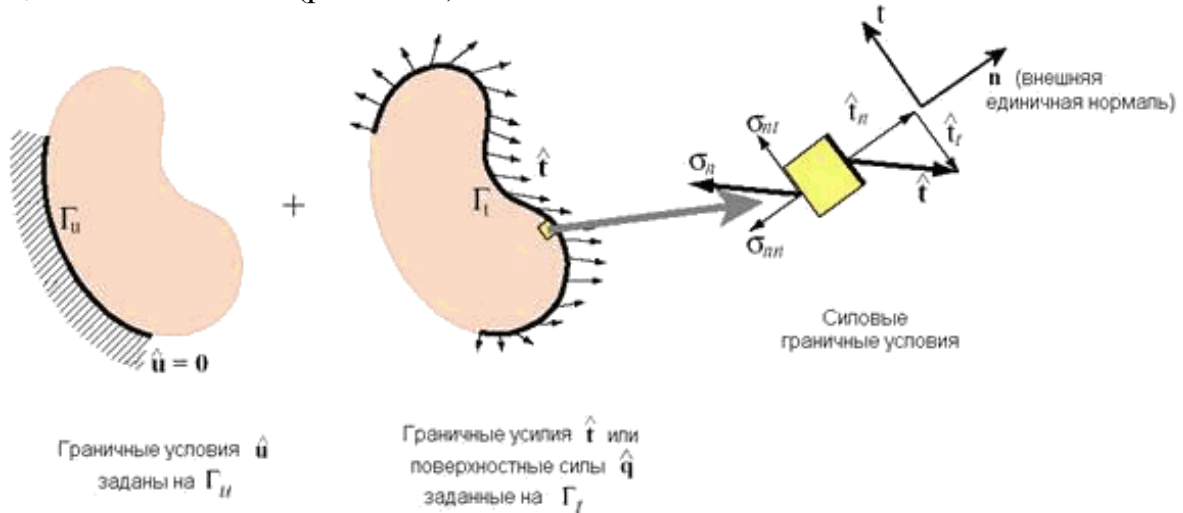


Рис. 1.15. Кинематические и силовые граничные условия в плоской задаче теории упругости

Кинематические граничные условия заданы на части поверхности Γ_u и могут быть записаны в следующей формуле:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}. \quad (1.9)$$

Правая часть соотношения (1.9) представляет собой заданные перемещения точек поверхности. Во многих случаях эти перемещения равны нулю. Например, в случае, если часть поверхности каким-либо образом закреплена, как показано на рис. 1.15.

Силовые граничные условия заданы на части поверхности Γ_t и могут быть записаны в следующей форме:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\mathbf{t}}. \quad (1.10)$$

В формуле (1.10) правая часть представляет собой заданные поверхностные силы или поверхностные усилия, а левая часть – вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} .

Альтернативная форма записи силовых граничных условий может быть записана в виде:

$$\mathbf{p}_n = \hat{\mathbf{q}}. \quad (1.11)$$

где $\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{n}$ и $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{t}} \mathbf{n}$.

Вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} определяется согласно формуле Коши через компоненты внешней нормали к поверхности и компоненты тензора упругости в точке поверхности:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

где n_x и n_y обозначают декартовы координаты единичной нормали к поверхности $\mathbf{n}^{(e)}$ (направляющие косинусы). Таким образом (1.10) может быть записано в виде двух скалярных соотношений $\hat{t}_x = \sigma_{nx}$ и $\hat{t}_y = \sigma_{ny}$.

В некоторых случаях бывает удобно записать условие (1.10) в локальной системе координат, образованной нормалью $n \langle B \langle i \rangle \rangle$ и ортом касательной t :

$$\sigma_{nn} = \hat{t}_n, \quad \sigma_{nt} = \hat{t}_t \quad (1.13)$$

где соответствующие компоненты напряжений в локальной системе координат могут быть выражены следующим образом:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{nx}n_x + \sigma_{ny}n_y \quad \sigma_{nt} = -\sigma_{nx}n_y + \sigma_{ny}n_x$$

1.5. Конечно-элементная формулировка плоской задачи теории упругости: базовые соотношения

Ослабленная формулировка задачи теории упругости

Задачи математической физики могут быть поставлены различным образом. Принято различать три основные формулировки краевых задач математической физики и в частности задачи теории упругости:

1. Прямая (строгая) формулировка, представляющая собой исходную систему дифференциальных уравнений;
2. Ослабленная формулировка, выражаемая в виде некоторого вариационного принципа;
3. Обратная формулировка, в которой исходное уравнение задачи выражено в виде некоторого интегрального уравнения.

Диаграмма Тонти, рис. 1.14, представляет собой прямую формулировку задач теории упругости. Все соотношения между физическими переменными в данном случае должны выполняться в каждой точке тела. Это строгое условие схематично выражено черными линиями на диаграмме (рис. 1.14).

Ослабленная формулировка изображена на рис. 1.16. Схематично она может быть получена путем ослабления одного или более строгого

соотношения. На рис. 1.16 такие ослабленные соотношения изображены серыми линиями. Ослабленные соотношения означают, что соответствующие уравнения выполняются не в каждой точке тела, а в среднем, т.е. в некотором интегральном смысле. Ослабленные связи обеспечиваются с помощью некоторых вариационных формулировок, подходящих для данной задачи. Заметим, что, в общем, для одной и той же задачи может быть сформулирован не один вариационный принцип, и, следовательно, может быть составлено множество ослабленных формулировок задачи. В противоположность этому прямая, или строгая, формулировка всегда единственна.

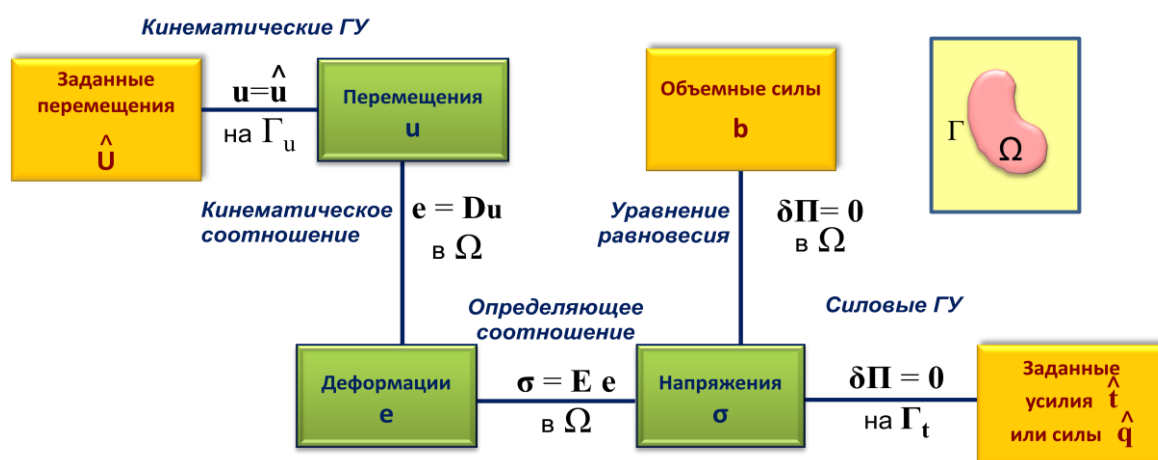


Рис. 1.16. Ослабленная формулировка задач теории упругости в виде диаграммы Гонти

На рис. 1.16 представлена ослабленная формулировка плоской задачи теории упругости, связанная с вариационным принципом минимума полной потенциальной энергии тела. Согласно данной формулировке уравнение равновесия в области и силовые граничные условия на части поверхности Γ_t выполняются в ослабленном смысле как вариационные соотношения принципа минимума полной потенциальной энергии $\delta \Pi = 0$, где функционал энергии Π будет подробно рассмотрен ниже. Соответствующие связи выражены серыми линиями. Формулировка метода конечных элементов в перемещениях основывается на данной ослабленной формулировке задачи.

Полная потенциальная энергия тела

Функционал полной потенциальной энергии идеально упругого тела определяется следующей формулой:

$$\Pi = U - A. \quad (1.14)$$

В соотношении (1.14) U есть внутренняя энергия деформации тела, вычисляемая как интеграл по объему тела от удельной энергии деформации тела, равной половине матричного произведения вектора напряжений на вектор деформаций:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h \mathbf{e}^T \mathbf{E} \mathbf{e} d\Omega. \quad (1.15)$$

Толщина h появляется под знаком интеграла в результате представления объемного интеграла через повторный интеграл по области Ω и нормальной координате z :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_0^h \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} dz \right) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} \int_0^h dz d\Omega.$$

Поскольку напряжения и деформации не зависят от координаты z согласно постановке плоской задачи теории упругости, то их произведение может быть вынесено за знак интеграла по толщине пластины h . Заметим, что сама толщина может быть переменной в области пластины, и поэтому полностью за знак интеграла не выносится.

Величина A в формуле (1.14) представляет собой работу внешних объемных и поверхностных сил, заданных соответственно в области Ω и на части поверхности Γ_t :

$$A = \int_{\Omega} h \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} h \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (1.16)$$

Аналогично предыдущему объемный интеграл от объемных сил преобразуется к повторному и затем в результате интегрирования по толщине - к интегралу по области пластины Ω . Второй интеграл, представляющий собой работу поверхностных сил, действующих на боковой грани пластины преобразуется сходным образом:

$$A_t = \int_{S_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \left(\int_0^h \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} dz \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \int_0^h dz d\Gamma.$$

Обратим внимание, что в соотношении (1.16) используется интеграл только по части поверхности Γ_t , поскольку только на данной части поверхности заданы внешние силы.

Конечно-элементная интерполяция

Согласно основной идее метода конечных элементов область тела Ω представляется в виде множества непересекающихся подобластей, называемых конечными элементами, как показано на рис. 1.17.

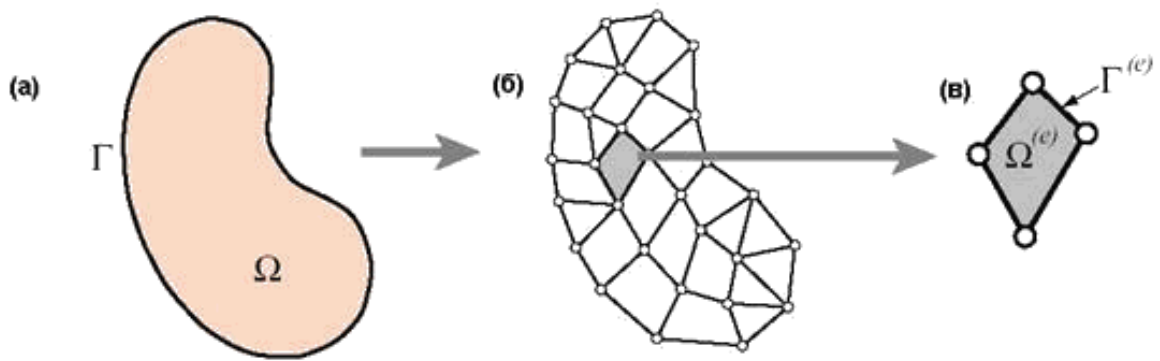


Рис. 1.17. Конечно-элементная дискретизация области тела: (а) – исходная область Ω с границей Γ ; (б) – дискретизованная область Ω , представленная в виде сетки конечных элементов; (в) – конечный элемент, занимающий область $\Omega^{(e)}$ с границей $\Gamma^{(e)}$

Как правило, для решения плоской задачи теории упругости используются трехсторонние или четырехсторонние конечные элементы. Каждый конечный элемент определяется набором узлов. В качестве примера на рис. 1.17 приведен четырехсторонний элемент с линейной интерполяцией координат и перемещений, заданный четырьмя узлами. Напомним, что в случае использования квадратичной интерполяции координат или перемещений четырехсторонний элемент должен описываться восемью узлами (рис. 1.6).

В случае плоской задачи в каждом узле заданы две компоненты перемещений, которые являются искомыми степенями свободы. Искомые степени свободы, или узловые переменные, принято объединять в так называемые элементные вектора узловых переменных, в данном случае узловых перемещений:

$$\mathbf{u}^{(e)} = [u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{x2} \quad \dots \quad u_{xn} \quad u_{yn}]^T. \quad (1.17)$$

Таким образом, каждый элементный вектор содержит $2n$ степеней свободы, где n – число узлов элемента. В данном случае $n=4$ (рис. 1.17), однако, число узлов может быть различным в зависимости от типа элемента (рис. 1.18). Заметим также, что, пронумеровав узлы от 1 до n в пределах данного элемента, мы тем самым ввели *локальную нумерацию узлов* на элементе. Необходимо отметить, что способ нумерации узлов в пределах элемента может быть произвольным. Однако, один раз выбрав способ нумерации для данного типа элементов, необходимо его придерживаться.

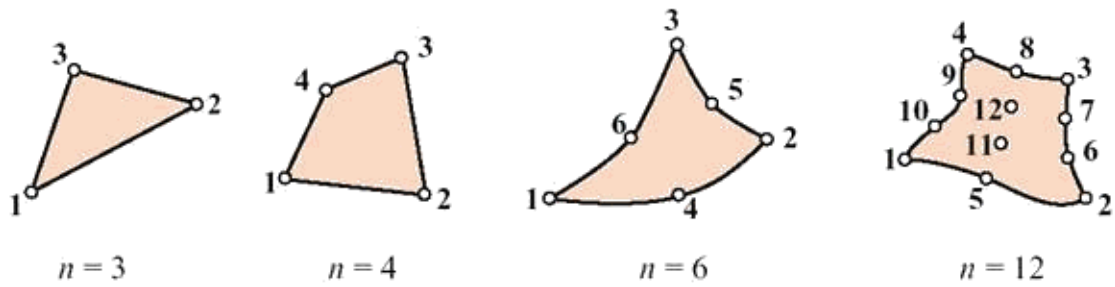


Рис. 1.18. Примеры двумерных конечных элементов, определяемых различным числом узлов

После выбора узловых переменных необходимо задать закон изменения искомой функции в пределах конечного элемента. Поле перемещений в пределах элемента определяются с помощью интерполирующих соотношений:

$$u_x(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(x, y) u_{xi}, \quad u_y(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(x, y) u_{yi}, \quad (1.18)$$

где $N_i^{(e)}(x, y)$ - специальные интерполирующие функции, или функции формы элемента.

Эти функции обладают рядом специфических свойств, которые будут рассматриваться в дальнейшем. Одно из основных свойств, которое хотелось бы отметить сейчас – локальность, или финитность, интерполирующих функций, что означает, что эти функции заданы только в пределах данного элемента. Заметим также, что функции формы играют значительную роль в алгоритме метода конечного элемента, поскольку задают порядок интерполяции искомых переменных.

Минимальное условие, которое должно быть наложено на функции $N_i^{(e)}(x, y)$, то, что каждая функция $N_i^{(e)}(x, y)$ должна принимать единичное значение в узле i элемента, и обращаться в ноль в остальных узлах.

В матричной форме интерполирующие соотношения (1.18) могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \dots & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & \dots & 0 & N_n^{(e)} \end{bmatrix} \mathbf{u}^{(e)} \quad (1.19a)$$

откуда получаем:

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}. \quad (1.19б)$$

В соотношениях (1.19а) и (1.19б) $\mathbf{N}^{(e)}$ представляет собой матрицу интерполирующих функций размерности $2 \times 2n$, поскольку рассматрива-

ется двумерная задача. В случае трехмерной задачи теории упругости соответствующая матрица интерполирующих функций имела бы размерность $3 \times 3n$. При этом вид соотношения (1.19б) не изменился бы. В этом проявляется значительное достоинство метода конечных элементов: основные формулы общего алгоритма остаются справедливыми и не меняют своего вида при анализе различных задач теории упругости.

Соотношение (1.19б) является одним из наиболее важных фундаментальных уравнений метода конечных элементов, поскольку участвует при выводе практически всех формул алгоритма МКЭ. В частности, теперь с помощью данного уравнения можно преобразовать кинематическое соотношение (1.7а), входящее в постановку плоской задачи теории упругости и связывающее перемещения и деформации в точке. В матричном виде данное соотношение в произвольной точке конечного элемента может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{e}(x, y) = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{u}(x, y), \quad (1.20a)$$

где \mathbf{D} – матрица, состоящая из частных производных интерполирующих функций по пространственным координатам.

Подставляя в соотношение (1.20а) интерполирующее соотношение (1.19б), получим:

$$\mathbf{e}(x, y) = \mathbf{DN}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)}, \quad (1.20б)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{DN}^{(e)}$ – представляет собой матрицу размерности $3 \times 2n$, называемую *матрицей градиентов*.

Явное выражение матрицы градиентов может быть получено, если перемножить матрицу \mathbf{D} размерности 3×2 на матрицу $\mathbf{N}^{(e)}$ размерности $2 \times 2n$. В результате получим:

$$\mathbf{B} = \mathbf{DN}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

В развернутом виде выражение деформации в точке, таким образом, может быть записано в виде:

$$\mathbf{e}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u}^{(e)}. \quad (1.22)$$

Заметим, что матрица градиентов, также как и матрица интерполирующих функций зависит от номера элемента e . В данном случае индекс e опущен только для сокращения записи.

После определения вектора деформации в точке можно вычислить и вектор напряжений согласно формуле (1.7б). В матричном виде она может быть представлена следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{E} \mathbf{e}(x, y) \quad (1.23)$$

Данное соотношение выполняется во всех точках конечного элемента и поэтому вместо вектора деформации $\mathbf{e}(x, y)$ может быть подставлено его выражение (1.20б). В результате получим:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)} \quad (1.24)$$

Таким образом, пользуясь основным интерполяционным соотношением МКЭ, получили необходимые выражения векторов деформаций и напряжений в произвольной точке произвольного конечного элемента. Эти формулы существенным образом будут использованы при выводе разрешающих уравнений метода конечных элементов применительно к плоской задаче теории упругости.

1.6. Конечно-элементная формулировка плоской задачи теории упругости: вывод СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений) МКЭ

Принцип минимума потенциальной энергии

Согласно вариационному принципу Лагранжа полная потенциальная энергия тела, находящегося в равновесии под действием внешних объемных и поверхностных сил, достигает минимума на истинном поле перемещений, т.е. на поле перемещений, удовлетворяющем полной системе уравнений теории упругости. Отсюда следует, что вариация функционала энергии на истинных перемещениях должна быть равна нулю:

$$\delta \Pi = 0. \quad (1.25)$$

Поскольку полная потенциальная энергия тела складывается из потенциальной энергии деформации тела и работы внешних сил (1.14), то последнее соотношение (1.25) может быть записано следующим образом:

$$\delta U - \delta A = 0 \quad (1.26)$$

где δU — вариация потенциальной энергии деформации тела, δA — вариация работы внешних сил, совпадающая по своему виду с элементарной работой внешних сил на возможных перемещениях.

Вычислим первое слагаемое в формуле (1.26). Ране было отмечено, что потенциальная энергия деформации тела представляет собой интеграл по объему тела от удельной потенциальной энергии:

$$U = \int_{\Omega} h W d\Omega \quad (1.27)$$

где W — удельная потенциальная энергия тела, или так называемый упругий потенциал.

Выражение упругого потенциала полученное в матричном виде может быть записано следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{E} \mathbf{e} \quad (1.28)$$

Как следует из соотношения (1.28) упругий потенциал представляет собой квадратичную форму относительно компонент вектора деформации. Запишем соотношение (1.28) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} 2W &= [e_1 \ e_2 \ e_3] \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = [e_1 \ e_2 \ e_3] \begin{Bmatrix} E_{11}e_1 + E_{12}e_2 + E_{13}e_3 \\ E_{21}e_1 + E_{22}e_2 + E_{23}e_3 \\ E_{31}e_1 + E_{32}e_2 + E_{33}e_3 \end{Bmatrix} = \\ &= E_{11}e_1^2 + E_{12}e_1e_2 + E_{13}e_1e_3 + E_{21}e_2e_1 + E_{22}e_2^2 + E_{23}e_2e_3 + \\ &+ E_{31}e_3e_1 + E_{32}e_3e_2 + E_{33}e_3^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

В данной формуле для сокращений записей были использованы индексные обозначения компонент вектора деформации:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_x \\ e_2 &= e_y \\ e_3 &= \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.30)$$

С учетом симметрии матрицы упругих модулей:

$$E_{ij} = E_{ji}, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.31)$$

соотношение (1.29) может быть записано в виде квадратичной формы:

$$2W = E_{11}e_1^2 + E_{22}e_2^2 + E_{33}e_3^2 + 2E_{12}e_1e_2 + 2E_{13}e_1e_3 + 2E_{23}e_2e_3 \quad (1.32)$$

Применим теперь операцию варьирования к выражению потенциальной энергии деформации тела:

$$\delta U(\mathbf{e}) = \delta \int_{\Omega} h W(\mathbf{e}) d\Omega = \int_{\Omega} h \delta W(\mathbf{e}) d\Omega \quad (1.33)$$

Отметим, что в данном случае потенциальная энергия является функцией деформаций, которые в свою очередь зависят от поля перемещений. Поэтому необходимо использовать правило варьирования сложной функции многих переменных:

$$W = W(e_1, e_2, e_3) \quad (1.34)$$

где перемещения являются независимыми варьируемыми функциями, а деформации – варьируемыми функциями, зависящими от перемещений.

Заметим также, что с формальной точки зрения математически операция вычисления вариации функции эквивалентна операции вычисления дифференциала функции, т.е. выполняется по тем же правилам:

$$\delta W = \frac{1}{2} \{ E_{11} 2e_1 \delta e_1 + E_{22} 2e_2 \delta e_2 + E_{33} 2e_3 \delta e_3 + 2E_{12} (\delta e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot \delta e_2) + 2E_{13} (\delta e_1 \cdot e_3 + e_1 \cdot \delta e_3) + 2E_{23} (\delta e_2 \cdot e_3 + e_2 \cdot \delta e_3) \} \quad (1.35)$$

Перегруппировав слагаемые в соотношении (1.35), получим выражение δW в виде:

$$\delta W = [\delta e_1 \quad \delta e_2 \quad \delta e_3] \begin{Bmatrix} E_{11}e_1 + E_{12}e_2 + E_{13}e_3 \\ E_{21}e_1 + E_{22}e_2 + E_{23}e_3 \\ E_{31}e_1 + E_{32}e_2 + E_{33}e_3 \end{Bmatrix} \quad (1.36)$$

Окончательно вариация упругого потенциала может быть записана в следующем матричном виде:

$$\delta W = \delta \mathbf{e}^T \mathbf{E} \mathbf{e} \quad (1.37)$$

где $\delta \mathbf{e}$ – вариация вектора деформаций.

Тогда вариация потенциальной энергии деформации тела будет записана следующим образом:

$$\delta U = \int_{\Omega} h \delta \mathbf{e}^T \mathbf{E} \mathbf{e} d\Omega \quad (1.38)$$

Вариация работы внешних сил находится простым варьированием соотношения (1.16) с учетом того, что варьируемой независимой функцией является поле перемещений:

$$\delta A = \int_{\Omega} h \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} h \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (1.39)$$

где $\delta \mathbf{u} = [\delta u_x, \delta u_y]^T$ – вариация вектора перемещений.

Заметим еще раз, что выражение (1.39) совпадает с выражением элементарной работы внешних сил на возможных перемещениях $\delta \mathbf{u}$.

Вывод разрешающих уравнений

Согласно рассмотренному выше алгоритму конечно-элементной дискретизации область тела представляется в виде множества не пересекающихся подобластей. В соответствии с этим разбиением объемные и поверхностные интегралы, входящие в выражения потенциальной энергии и работы внешних сил, равны сумме интегралов по конечным элементам. Следовательно, интегральные соотношения (1.38) и (1.39) будут представлены в виде:

$$\delta U = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} h \delta \mathbf{e}^T \mathbf{E} \mathbf{e} d\Omega \quad (1.40)$$

$$\delta A = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} h \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \sum_{e=1}^{N_e^*} \int_{\Gamma^e} h \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (1.41)$$

где N_e – общее число конечных элементов, N_e^* – число конечных элементов, выходящих на границу области.

Для повышения универсальности рассматриваемого алгоритма введем в рассмотрение так называемые матрицы кинематических связей \mathbf{a}^e , состоящие из нулей и единиц. Введем также глобальный вектор узловых перемещений \mathbf{U} , состоящий из декартовых координат векторов перемещений в узлах конечно-элементной сетки. При этом нумерация узлов сетки называется *глобальной нумерацией*, в отличие от локальной нумерации узлов на элементе. Размер глобального вектора узловых перемещений равен $2N_p$, где N_p – общее число узлов конечно-элементной сетки. Очевидно, что компоненты любого элементного вектора перемещений содержатся в соответствующих позициях глобального вектора перемещений. Матрицы кинематических связей как раз и устанавливают взаимосвязь между этими векторами на основе того очевидного факта, что любой узел любого элемента имеет свой локальный номер в пределах данного элемента и уникальный глобальный номер в пределах всей конечно-элементной сетки. Таким образом, связь между векторами может быть выражена следующим соотношением:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{a}^e \mathbf{U}, \quad e = 1, \dots, N_e \quad (1.42)$$

Когда формулы (1.19б) и (1.20б), представляющие собой перемещения и деформации в любой точке конечного элемента, могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(x, y) &= \mathbf{B}^e(x, y)\mathbf{u}^e = \mathbf{B}^e(x, y)\mathbf{a}^e \mathbf{U} \\ \mathbf{u}(x, y) &= \mathbf{N}^e(x, y)\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e(x, y)\mathbf{a}^e \mathbf{U}\end{aligned}\quad (1.43)$$

Соответственно вариации функций \mathbf{u} и \mathbf{e} вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{e}(x, y) &= \mathbf{B}^e(x, y)\mathbf{a}^e \delta\mathbf{U} \\ \delta\mathbf{u}(x, y) &= \mathbf{N}^e(x, y)\mathbf{a}^e \delta\mathbf{U}\end{aligned}\quad (1.44)$$

поскольку именно глобальный вектор перемещений содержит независимые варьируемые функции – перемещения в узлах конечно-элементной модели. Но несмотря на зависимость матрицы интерполирующих функций \mathbf{N}^e и матрицы градиентов \mathbf{B}^e от пространственных координат x и y , эти матрицы не являются варьируемыми функциями.

Применим операцию транспонирования к выражению (1.44). Согласно правилам вычисления транспонированной матрицы, представляющей собой произведение трех матриц, запишем:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}^T &= \delta\mathbf{U}^T (\mathbf{a}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \\ \delta\mathbf{e}^T &= \delta\mathbf{U}^T (\mathbf{a}^e)^T (\mathbf{B}^e)^T\end{aligned}\quad (1.45)$$

Подставим теперь выражения (1.45) и (1.43) в формулу вариации потенциальной энергии (1.40). Получим:

$$\delta U = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} h \delta\mathbf{U}^T (\mathbf{a}^e)^T (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e \mathbf{U} d\Omega = \delta\mathbf{U}^T \sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{a}^e)^T \int_{\Omega^e} h (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} \mathbf{B}^e d\Omega \mathbf{a}^e \mathbf{U}, \quad (1.46)$$

где вектора \mathbf{U} и $\delta\mathbf{U}$ вынесены за знаки суммы и интеграла, поскольку эти вектора состоят из независимых скалярных величин, матрицы \mathbf{a}^e , состоящей из нулей и единиц, вынесены только за знак интеграла, так как зависят от номера конечного элемента e .

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} h (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} \mathbf{B}^e d\Omega, \quad (1.47)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e, \quad (1.48)$$

где \mathbf{k}^e называется *элементной матрицей жесткости*, \mathbf{K} называется *глобальной матрицей жесткости*. В результате получим компактное матричное выражение потенциальной энергии тела:

$$\delta U = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (1.49)$$

Аналогично предыдущему запишем выражение элементарной работы внешних объемных и поверхностных сил:

$$\delta A = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} h \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{a}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega + \sum_{e=1}^{N_e^*} \int_{\Gamma^e} h \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{a}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (1.50)$$

Введем стандартные обозначения элементарных векторов сил:

$$\mathbf{f}_V^e = \int_{\Omega^e} h (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega, \quad (1.51)$$

$$\mathbf{f}_S^e = \int_{\Gamma^e} h (\mathbf{N}^e)^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad (1.52)$$

где \mathbf{f}_V^e называется элементарным вектором узловых сил, статически эквивалентным заданным объемным силам, \mathbf{f}_S^e называется элементарным вектором узловых сил, статически эквивалентным заданным поверхностным силам.

Аналогично предыдущему элементарные вектора сил объединяются в глобальные вектора:

$$\mathbf{F}_V = \sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}_V^e, \quad (1.53)$$

$$\mathbf{F}_S = \sum_{e=1}^{N_e^*} (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}_S^e, \quad (1.54)$$

где \mathbf{F}_V называется глобальным вектором узловых сил, статически эквивалентным заданным объемным силам, \mathbf{F}_S называется глобальным вектором узловых сил, статически эквивалентным заданным поверхностным силам.

Отметим, что процесс формирования глобальной матрицы жесткости и глобальных векторов узловых сил в методе конечных элементов называется *ансамблированием*.

Таким образом, формула (1.50) будет представлена в следующем компактном виде:

$$\delta A = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_V + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_S \quad (1.55)$$

Подставим полученные выражения (1.49) и (1.55) в основную формулу принципа минимума потенциальной энергии Лагранжа (1.26):

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_V - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_S = 0 \quad (1.56)$$

Отсюда получаем:

$$\delta \mathbf{U}^T (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}_V - \mathbf{F}_S) = 0 \quad (1.57)$$

Поскольку вариация глобального вектора узловых перемещений представляет собой вектор, состоящий из независимых произвольных вариаций узловых перемещений, то в общем случае он отличен от нуля. Следовательно, в ноль должно обращаться выражение в круглых скобках. Откуда получаем *разрешающую систему конечно-элементных уравнений* относительно глобального вектора узловых перемещений:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S \quad (1.58)$$

Матричное уравнение (1.58) представляет собой стандартную форму записи системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов (СЛАУ МКЭ).

1.7. Треугольный линейный конечный элемент: система координат и интерполяция

Рассмотрим особенности формирования системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов (СЛАУ МКЭ) на примере трехузлового треугольного элемента с линейной интерполяцией перемещений, применяемого для решения плоской задачи теории упругости. Для краткости будем называть такой элемент *линейным треугольным конечным элементом*.

Этот элемент имеет ряд отличительных особенностей:

1. Он принадлежит к семейству так называемых изопараметрических элементов;
2. Он позволяет получить выражения элементных матриц жесткости и элементных векторов сил в замкнутой форме, что означает отсутствие необходимости в численном интегрировании при вычислении элементных матриц жесткости и элементных векторов сил;
3. Точность решения, обеспечиваемая данным элементом, не может быть повышена путем добавления внутренних степеней свободы.

В дополнение хотелось бы отметить, что линейный треугольный конечный элемент имеет определенное историческое значение. Он был одним из двух первых конечных элементов, представленных в статье Мартина, Тернера, Клоха и Топпа в 1956 году. Эта публикация обще-

признанно считается началом современного метода конечных элементов.

Хотя линейный треугольный конечный элемент в настоящее время реже используется при расчетах конструкции ввиду его низкой точности, тем не менее, он широко используется в тех случаях, когда нет необходимости в высокоточных расчетах, например, концентрации напряжений в конструкции. Другая причина широкого применения треугольного элемента состоит в том, что он очень удобен при использовании в алгоритмах автоматической генерации сетки, например, в широко известном и популярном алгоритме триангулизации по Делоне.

Параметрическое представление функций

В дальнейшем изложении существенным образом будет использоваться понятие *параметрического представления функции*. Совместно с алгоритмами численного интегрирования данный подход играет ключевую роль в системной разработке различных типов конечных элементов для решения двумерных и трехмерных задач механики деформируемых тел.

Основная идея параметрического представления функции может быть продемонстрирована на простейшем примере. Рассмотрим каноническое уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1.59)$$

Кроме канонического представления (1.59) уравнение окружности может быть представлено в виде стандартной функциональной зависимости:

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad (1.60)$$

а также в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 1 \cdot \cos \theta \\ y(\theta) &= 1 \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (1.61)$$

В представлении (1.61) θ есть полярный угол, который может быть интерпретирован в виде независимого скалярного параметра, меняющегося в заданных пределах. Очевидно, что подстановка (1.61) в (1.59) дает тождественное равенство.

В общем случае параметрическое представление кривой линии на плоскости или в пространстве имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi) \\ y &= y(\xi) \end{aligned} \quad (1.62a)$$

$$\begin{aligned} x &= x(\xi) \\ y &= y(\xi), \\ z &= z(\xi) \end{aligned} \quad (1.62б)$$

где ξ - независимый скалярный параметр, меняющейся в заданных пределах.

Вид функций, входящих в (1.62), может быть любым. Главное условие, наложенное на эти функции, состоит в том, чтобы каждому значению параметра ξ однозначно соответствовала бы точка на плоскости, имеющая координаты $(x(\xi), y(\xi))$, или в пространстве - $(x(\xi), y(\xi), z(\xi))$.

Аналогично определяется параметрическое представление куска плоскости на координатной плоскости или куска поверхности в трехмерном пространстве:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (1.63а)$$

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta), \\ z &= z(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (1.63б)$$

Здесь (ξ, η) – система двух независимых параметров, меняющихся в заданных пределах. Вид функций, входящих в (1.63), может быть также любым. Главное условие, наложенное на эти функции, состоит в том, чтобы имело место взаимоднозначное соответствие системы параметров (ξ, η) и координат (x, y) в соотношении (1.63а). В случае соотношения (1.63б) достаточно выполнения одного соответствия точки на плоскости (ξ, η) и точки на поверхности в пространстве $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta))$.

Параметрическое представление функций существенным образом используется в алгоритмах метода конечных элементов.

Система координат треугольного элемента

Геометрия трехузлового треугольного конечного элемента задается тремя угловыми точками в плоскости (x, y) – узлами конечного элемента (рис. 1.19). Локальные номера узлов на элементе: 1, 2, 3; причем узлы нумеруются таким образом, чтобы обход по контуру элемента был бы против часовой стрелки, если смотреть со стороны внешней нормали к плоскости пластины. Напомним, что внешняя нормаль к плоскости пластины совпадает с положительным направлением глобальной оси z . По-

ложение узлов определяется декартовыми координатами в глобальной системе координат:

$$(x_i, y_i), i = 1, 2, 3 \quad (1.64a)$$

Линейный треугольный конечный элемент имеет шесть степеней свободы, образуемые компонентами элементного вектора узловых перемещений:

$$(u_{xi}, u_{yi}), i = 1, 2, 3 \quad (1.64б)$$

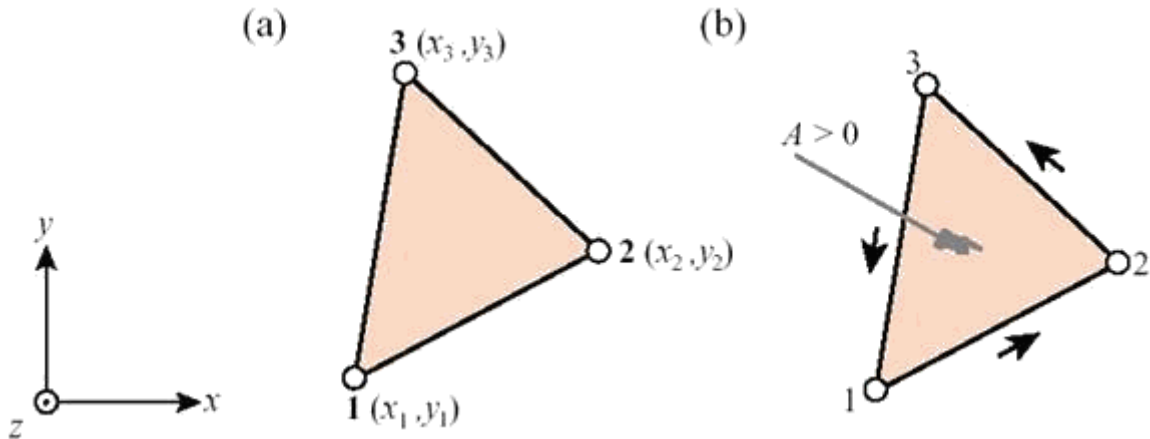


Рис. 1.19. Линейный треугольный конечный элемент: (а) – геометрия элемента; (б) – положительное направление обхода контура элемента

Обозначим площадь элемента через A . Согласно известной формуле линейной алгебры, площадь плоского треугольника может быть вычислена с помощью определителя, составленного из координат вершин треугольника. Следовательно, площадь линейного треугольного конечного элемента равна:

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (1.65)$$

Заметим, что площадь области, определяемой формулой (1.65), имеет знак. Она положительна, если локальная нумерация узлов (1, 2, 3) выполнена против часовой стрелки, если смотреть со стороны внешней нормали к плоскости пластины, как это было отмечено выше и показано на рисунке 1.19. В противном случае, знак A будет отрицательным, что сигнализирует об ошибке. Такое соглашение будет использоваться и в дальнейшем изложении материала.

Кроме глобальной системы координат (x, y, z) введем *локальную параметрическую систему координат* в плоскости элемента, задаваемую тремя переменными величинами:

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \quad (1.66)$$

Эти три локальные параметрические координаты в литературе по МКЭ называются также *естественными* и *треугольными*. С помощью введенной системы координат устанавливается взаимоднозначное соответствие между глобальными декартовыми координатами произвольной точки элемента и тремя скалярными параметрами $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$:

$$\begin{aligned} x &= x(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \\ y &= y(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \end{aligned} \quad (1.67)$$

Сразу обратим внимание на кажущееся противоречие между формулами (1.67) и (1.63а), которое легко устраняется, если допустить наличие связи между параметрами $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. На самом деле, так оно и есть: три треугольные координаты не являются независимыми, а связаны одним соотношением:

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1 \quad (1.68)$$

Очевидно, что из соотношения (1.68) можно выразить, например, координату ζ_3 через другие две ζ_1, ζ_2 . Тогда соотношение (1.67) примет стандартный вид (1.63а). Однако, использование трех параметров оказывается более удобным с точки зрения вычислений и разработки эффективных численных алгоритмов, о чем всегда необходимо помнить, когда имеешь дело с вычислительной механикой.

На рисунке 1.20 дано геометрическое пояснение математического смысла введенных координат.

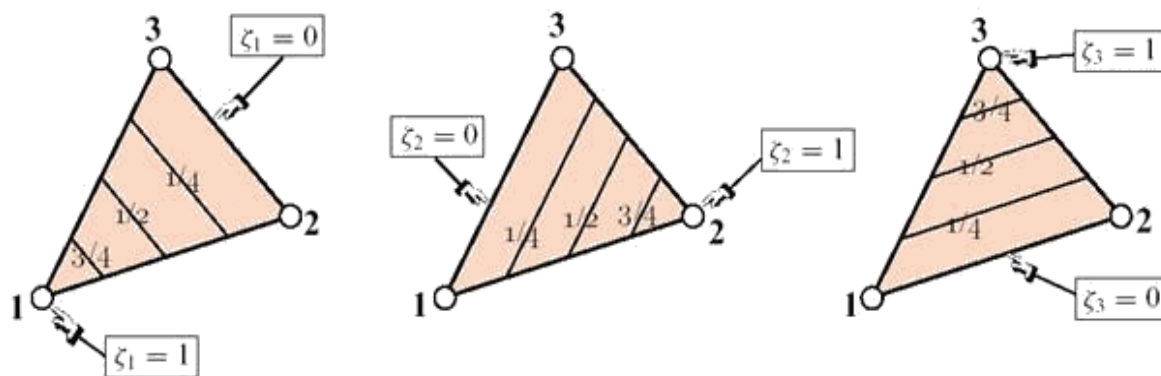


Рис. 1.20. Треугольные координаты

Три уравнения, записанные в виде:

$$\zeta_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.69)$$

геометрически представляют собой множество прямых линий, параллельных стороне, противоположной i -му узлу.

Например, уравнения сторон треугольного элемента 1-2, 2-3 и 3-1 будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{side } 1-2: \zeta_3 &= 0 \\ \text{side } 2-3: \zeta_1 &= 0 \\ \text{side } 3-1: \zeta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.70a)$$

Три вершины треугольного элемента будут иметь следующие локальные координаты:

$$\begin{aligned} \text{node } 1: \zeta_1 &= 1, \zeta_2 = 0, \zeta_3 = 0 \\ \text{node } 2: \zeta_1 &= 0, \zeta_2 = 1, \zeta_3 = 0 \\ \text{node } 3: \zeta_1 &= 0, \zeta_2 = 0, \zeta_3 = 1 \end{aligned} \quad (1.70б)$$

В качестве примера приведем также координаты средних точек сторон треугольного элемента и геометрического центра элемента:

$$\begin{aligned} \text{middle node of side } 1-2: \zeta_1 &= 0.5, \zeta_2 = 0.5, \zeta_3 = 0 \\ \text{middle node of side } 2-3: \zeta_1 &= 0, \zeta_2 = 0.5, \zeta_3 = 0.5 \\ \text{middle node of side } 3-1: \zeta_1 &= 0.5, \zeta_2 = 0, \zeta_3 = 0.5 \\ \text{centroid of element: } \zeta_1 &= 1/3, \zeta_2 = 1/3, \zeta_3 = 1/3 \end{aligned} \quad (1.70в)$$

Еще раз напомним, что три параметра не являются независимыми и связаны одним дополнительным соотношением:

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1$$

Интерполяционные соотношения линейного треугольного элемента

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию двух переменных, которая изменяется *линейно* в пределах некоторой плоской треугольной области. В декартовой системе координат эта функция может быть записана следующим образом:

$$f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y, \quad (1.71)$$

где a_0, a_1, a_2 - произвольные постоянные коэффициенты.

Пусть теперь мы хотим ввести аппроксимацию данной функции в пределах треугольного элемента. Обозначим через:

$$f_1, f_2, f_3, \quad (1.72)$$

значения данной функции в соответствующих узлах конечного элемента – так называемые *узловые значения* функции.

С помощью этих значений могут быть определены неизвестные коэффициенты в представлении (1.71). В самом деле, получим:

$$\begin{aligned}
f_1 &\equiv f(x_1, y_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 \\
f_2 &\equiv f(x_2, y_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2, \\
f_3 &\equiv f(x_3, y_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3
\end{aligned}
\tag{1.73}$$

Соотношения (1.73) представляют систему трех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2 . Решив систему (1.73), получим однозначное выражение функции (1.71) через ее узловые значения. Однако, это выражение достаточно сложное и неудобное в использовании. Поэтому используют представление функции не в глобальной, а в локальной системе координат на элементе. Очевидно, что если установлено взаимнооднозначное соответствие между глобальной и локальной системами координат, то и выражения функции в различных координатах будут соответственными друг другу.

Используя данный подход, представим функцию (1.71) в треугольных координатах через ее узловые значения следующим образом:

$$f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 + f_3 \zeta_3 = [f_1 \ f_2 \ f_3] \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3] \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}
\tag{1.74}$$

Соотношение (1.74) называется *линейным интерполирующим соотношением* произвольной непрерывной функции f в треугольных координатах.

1.8. Треугольный линейный конечный элемент: вывод расчетных соотношений

Преобразование координат

Математические величины, которые тесно связаны с геометрией треугольного конечного элемента, естественным образом выражаются через треугольные координаты $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. С другой стороны, такие физические величины как перемещения, деформации и напряжения часто выражены в декартовых координатах (x, y) . Следовательно, необходимы уравнения, связывающие эти две системы координат, с помощью которых возможно переходить от одной системы координат к другой.

Используя универсальное соотношение (1.74), глобальные декартовые координаты произвольной точки на треугольном элементе (x, y) могут быть выражены через глобальные координаты узлов элемента и локальные треугольные координаты этой же точки $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix}, \quad (1.75)$$

где (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ – глобальные декартовы координаты узлов треугольного элемента.

Поясним матричное выражение (1.75). Мысленно развернем его. Тогда первое уравнение будет выражать собой тот факт, что сумма трех локальных координат равна единице. Два последних уравнения представят собой развернутые интерполяционные соотношения глобальных координат точек треугольного элемента:

$$\begin{aligned} x &= x(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 \\ y &= y(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = y_1\zeta_1 + y_2\zeta_2 + y_3\zeta_3 \end{aligned} \quad (1.76)$$

Разрешим систему (1.75) относительно вектора $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. Найдем обратную матрицу к матрице системы (1.75) и запишем решение в виде:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}, \quad (1.77)$$

где A – определитель матрицы системы (1.75), численно совпадающий с площадью треугольного элемента (1.65).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} x_{jk} &= x_j - x_k \\ y_{jk} &= y_j - y_k \\ 2A_{jk} &= x_jy_k - x_ky_j \end{aligned}, \quad (1.78)$$

где A_{jk} – математически представляет собой площадь треугольника, образованного двумя вершинами элемента и центром глобальной системы координат; x_{jk} , y_{jk} – проекции длин сторон элемента на оси глобальной системы координат. Очевидно, что если начало координат расположено в центре элемента, то $A_{12} = A_{23} = A_{31} = A/3$.

В обозначениях (1.78) решение (1.77) примет вид:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (1.79)$$

Вычисление частных производных

Из соотношений (1.76) и (1.79) легко вычисляются частные производные по соответствующим координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \zeta_i} = x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta_i} = y_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ 2A \frac{\partial \zeta_i}{\partial x} = y_{jk}, \quad 2A \frac{\partial \zeta_i}{\partial y} = x_{kj}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.80)$$

Во второй строке формул (1.80) последовательность $i, j, k = 1, 2, 3$ представляет собой круговую перестановку индексов. Например, если $i = 1$, то $j = 2$ и $k = 3$. Если $i = 2$, то $j = 3$ и $k = 1$.

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию двух переменных, которая изменяется *линейно* в пределах некоторой плоской треугольной области (см. формулы 7.13 и 7.16). Эта функция может быть представлена как в глобальной декартовой системе координат (x, y) , так и в локальной треугольной системе координат $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. Представим ее как сложную функцию многих переменных:

$$f(x, y) = f(\zeta_1(x, y), \zeta_2(x, y), \zeta_3(x, y)) \quad (1.81)$$

Вычислим теперь частные производные функции (1.81) по глобальным координатам, воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции многих переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \zeta_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.82)$$

Подставим (1.80) в (1.82). Получим выражения частных производных произвольной непрерывной функции по глобальным координатам через три частные производные той же функции по локальным треугольным координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_1} y_{23} + \frac{\partial f}{\partial \zeta_2} y_{31} + \frac{\partial f}{\partial \zeta_3} y_{12} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_1} x_{32} + \frac{\partial f}{\partial \zeta_2} x_{13} + \frac{\partial f}{\partial \zeta_3} x_{21} \right) \end{aligned} \quad (1.83)$$

Окончательно в матричной форме система частных производных произвольной непрерывной функции по глобальным координатам примет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta_3} \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

Таким образом, мы получили все необходимые математические формулы для вывода уравнений, описывающих треугольный линейный конечный элемент.

Вывод уравнений треугольного линейного конечного элемента Интерполяция перемещений

В случае треугольного линейного конечного элемента предполагается, что перемещения в пределах элемента изменяются линейно по пространственным координатам. Это означает, что компоненты вектора перемещений в любой произвольной точке элемента $P(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ могут быть представлены с помощью интерполяционного соотношения 1.74, которое в данном случае примет вид:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = u_{x1}\zeta_1 + u_{x2}\zeta_2 + u_{x3}\zeta_3 \\ u_y &= u_y(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = u_{y1}\zeta_1 + u_{y2}\zeta_2 + u_{y3}\zeta_3 \end{aligned} \quad (1.85)$$

Здесь (u_{xi}, u_{yi}) , $i=1,2,3$ - компоненты вектора перемещений в узлах конечного элемента (рис. 1.21).

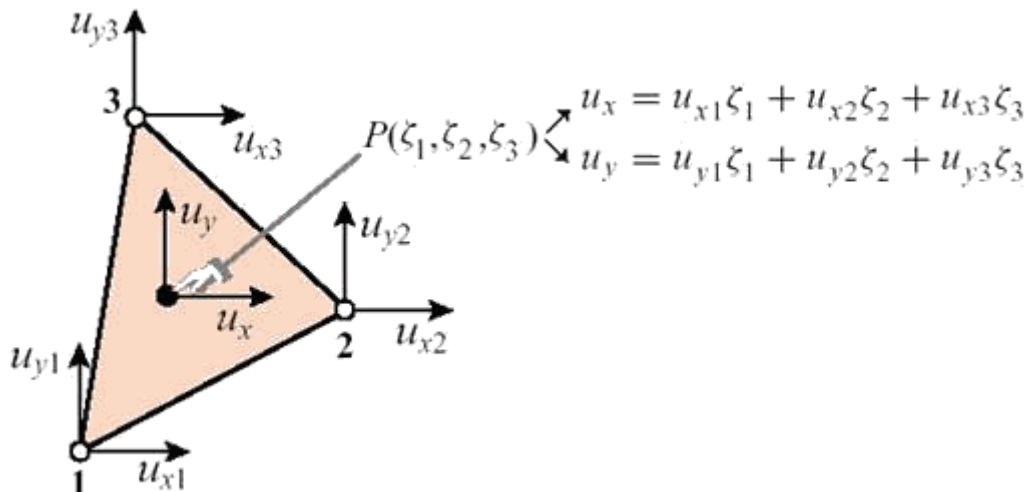


Рис. 1.21. Интерполяция перемещений в пределах треугольного линейного конечного элемента

Интерполяционное соотношение для перемещений (1.85) может быть также представлено в стандартной для метода конечных элементов матричной форме (см. формулы 1.19):

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (1.85a)$$

где $\mathbf{N}^{(e)}$ – матрица интерполирующих функций, $\mathbf{u}^{(e)}$ – элементный вектор узловых перемещений.

Очевидно, что в рассматриваемом случае треугольного линейного конечного элемента интерполирующие функции $N_i^{(e)}$ равны треугольным координатам:

$$N_i^{(e)} = \zeta_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.86)$$

Кинематические уравнения

Компоненты тензора деформаций (вектор деформаций) вычисляются путем дифференцирования вектора перемещений, что приводит к общей формуле (1.20):

$$\mathbf{e}(x, y) = \mathbf{D}\mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)} \quad (1.87)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}^{(e)}$ – матрица градиентов.

Вычислим матрицу градиентов. Согласно формуле (1.21):

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

Интерполирующие функции могут быть интерпретированы как сложные функции многих переменных:

$$N_i^{(e)}(x, y) = N_i^{(e)}(\zeta_1(x, y), \zeta_2(x, y), \zeta_3(x, y)), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.89)$$

С другой стороны, в явном виде они совпадают с треугольными координатами элемента (см. формулу 1.86). Тогда применяя формулы вы-

числения частных производных функций подобного типа по глобальным координатам (1.83) и (1.80), получим выражение матрицы градиентов:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

Обратим внимание, что деформации (1.87) получились постоянными на элементе, поскольку компоненты матрицы градиентов – проекции сторон элемента – постоянные величины.

Определяющие соотношения

Определяющее соотношение анизотропного идеально-упругого материала записывается в виде хорошо известного закона Гука. В матричном виде оно было получено в параграфе 1.5. Здесь мы его еще раз приведем для полноты изложения:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{e}(x, y), \quad (1.91)$$

где E_{ij} – упругие модули материала.

Если считать, что упругие свойства материала не меняются на элементе, то, поскольку деформации постоянны, напряжения также постоянны на элементе.

Элементные матрицы жесткости

Для задачи о плоско-деформированном состоянии тела общий вид матриц жесткости был получен в разделе 1.6. Напомним его:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} h(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} \mathbf{B}^e d\Omega \quad (1.92)$$

Как было отмечено выше, матрицы градиентов и упругих модулей постоянны для рассматриваемого треугольного линейного конечного элемента. Следовательно, их произведение может быть вынесено за знак интеграла:

$$\mathbf{k}^e = (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} \mathbf{B}^e \int_{\Omega^e} h d\Omega \quad (1.93)$$

Если элемент имеет постоянную толщину ($h=const$), то h также выносится за знак интеграла по площади элемента, который, таким образом, легко вычисляется и будет равен площади элемента A . В результате, получим выражение элементной матрицы жесткости:

$$\mathbf{k}^e = Ah(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} \mathbf{B}^e \mathbf{V} =$$

$$= \frac{h}{4A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

Заметим, что все геометрические переменные и модули упругости могут быть разными на разных элементах и, следовательно, зависят от номера элемента e .

Элементные вектора узловых сил

Для простоты рассмотрим сейчас только вычисление элементного вектора узловых сил, статически эквивалентных заданным объемным силам. Причем, пусть объемные силы представляют собой плотность сил собственного веса тела (сила на единицу объема):

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

Согласно общей формуле вычисления вектора объемных узловых сил:

$$\mathbf{f}_V^e = \int_{\Omega^e} h(\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega^e} h \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_1 \\ \zeta_2 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3 \end{bmatrix} \mathbf{b} d\Omega \quad (1.96)$$

Пусть толщина элемента постоянна и плотность объемных сил также постоянна. Тогда h и \mathbf{b} могут быть вынесены за знак интеграл и необходимо вычислить только интегралы от ζ_i по площади элемента:

$$\int_{\Omega^e} \zeta_1 d\Omega = \int_{\Omega^e} \zeta_2 d\Omega = \int_{\Omega^e} \zeta_3 d\Omega = \frac{1}{3}A \quad (1.97)$$

Здесь мы воспользовались известной математической формулой вычисления интеграла по площади треугольника:

$$\frac{1}{2A_{\Omega^e}} \int_{\Omega^e} \zeta_1^i \zeta_2^j \zeta_3^k d\Omega = \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!}, \quad i \geq 0, \quad j \geq 0, \quad k \geq 0 \quad (1.98)$$

Таким образом, вычисляя интегралы от интерполирующих функций и перемножая полученную матрицу на вектор \mathbf{b} , получим окончательное выражение элементного вектора узловых сил, статически эквивалентных заданным постоянным объемным силам:

$$\mathbf{f}_V^e = \frac{Ah}{3} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (1.99)$$

Заметим, что полученные компоненты вектора узловых сил совпадают с результатом простого равномерного распределения суммарной силы, равной Ahb , между тремя узлами.

1.9. Изопараметрический подход в МКЭ

Техника построения линейного треугольного конечного элемента, изложенная выше, формально может быть распространена на четырехсторонние или трехсторонние элементы высокого порядка. Однако, это немедленно приведет к ряду трудностей:

1. Построение функций форм (интерполирующих функций), удовлетворяющих всем необходимым условиям, для элементов с криволинейными границами является очень сложной задачей.
2. Интегралы, возникающие в выражении элементных матриц жесткости и узловых векторов, уже не могут быть вычислены в замкнутой форме.

Имеющиеся трудности оказываются преодолимыми, если использовать концепцию *изопараметрического элемента* совместно с *квадратурами численного интегрирования*. Комбинация этих идей произвела революцию в методе конечных элементов в конце шестидесятых годов прошлого века.

Концепция изопараметрического представления рассмотрена на примере двумерных треугольных и четырехсторонних элементов.

Исходные понятия

Рассмотренный в предыдущих параграфах линейный треугольный конечный элемент представляет собой простейший изопараметрический элемент, хотя его уравнения и были получены другим путем. Запишем основные соотношения этого элемента:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix}, \quad (1.100a)$$

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1}\zeta_1 + u_{x2}\zeta_2 + u_{x3}\zeta_3 \\ u_y &= u_{y1}\zeta_1 + u_{y2}\zeta_2 + u_{y3}\zeta_3 \end{aligned} \quad (1.100б)$$

$$N_i^{(e)} = \zeta_i, \quad i=1,2,3, \quad (1.100в)$$

Интерпретация приведенных уравнений следующая. Треугольные координаты определяют геометрию с помощью соотношения (1.100а). Интерполирующее соотношение для перемещений (1.100б) задано с помощью функций формы элемента $N_i^{(e)}$, которые в случае линейного треугольного элемента совпадают с треугольными координатами. Таким образом, и геометрия элемента (глобальные координаты), и основные переменные (перемещения) оказываются заданны с помощью одинаковых интерполирующих соотношений. Такие элементы носят название *изопараметрических*.

Очевидно, что можно представить плоский треугольный элемент, у которого функция, аппроксимирующая перемещения, задана полиномом более высокого порядка относительно треугольных координат $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ по сравнению с линейной геометрией элемента. Такие элементы носят название *суперпараметрических*. Для полноты отметим, что если имеет место обратная ситуация, то элементы носят название *субпараметрических*. В некоторых случаях применения неизопараметрических элементов оказывается оправданным.

Вернемся к рассмотрению изопараметрического элемента. Перепишем соотношения (1.100а-в) в универсальном виде, чтобы подчеркнуть их внутреннее единство:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (1.101)$$

Формула (1.101) подчеркивает тот факт, что геометрия и перемещения заданы одним и тем же параметрическим представлением с помощью функций формы $N_i^{(e)}$. В этом и состоит ключевая идея изопараметрического подхода в методе конечных элементов.

Рассмотренная методика легко распространяется на случай произвольного по геометрии элемента, включая и трехмерные элементы, что показано на рис.1.22. При этом термин «треугольные координаты» заменяется на более общее понятие «естественные локальные координаты», которые также могут быть интерпретированы как параметры, определяющие соответствующие функции формы элемента.

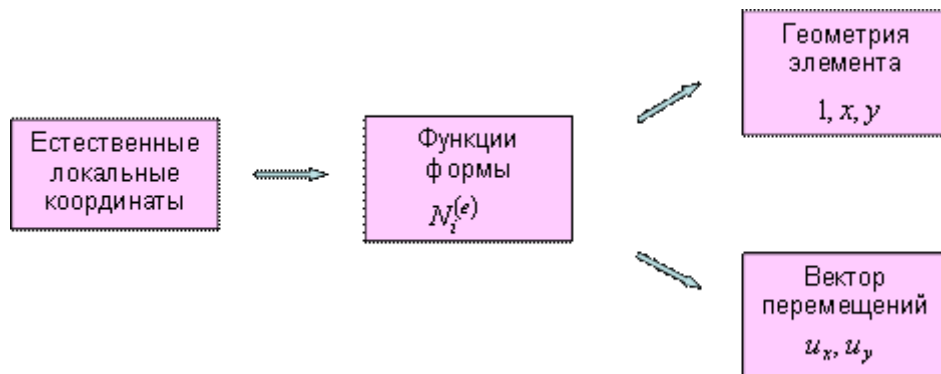


Рис. 1.22. Изопараметрический подход в методе конечных элементов

Общая изопараметрическая формулировка упругого двумерного элемента

Рассмотрим общую изопараметрическую формулировку упругого двумерного элемента, содержащего n узлов. Для описания элемента требуются два типа интерполирующих соотношений: одно для задания геометрии элемента и другое для аппроксимации вектора перемещений на элементе. Оба соотношения строятся с помощью одинаковых функций формы и соответствующих значений функций (глобальных координат и компонент перемещений) в узлах элемента. Таким образом, получаем:

Геометрические соотношения (интерполяция координат):

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i N_i^{(e)}, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i N_i^{(e)} \quad (1.102)$$

Функциональные соотношения (интерполяция перемещений):

$$u_x = \sum_{i=1}^n u_{xi} N_i^{(e)}, \quad u_y = \sum_{i=1}^n u_{yi} N_i^{(e)} \quad (1.103)$$

Уравнения (1.102) и (1.103) могут быть представлены в виде единой формулы в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{xn} \\ u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{yn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ \vdots \\ N_n^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (1.104)$$

Первые три уравнения в (1.104) определяют геометрию элемента, последние два задают аппроксимацию перемещений на элементе. Заметим, что изопараметрический подход позволяет добавлять в систему (1.104) другие функции, зависящие от координат точек элемента, если их интерполяционное соотношение задано с помощью тех же самых функций формы. Например, предположим, что толщина пластины h изменяется, а также, что температурное поле T – переменное на элементе (в случае термоупругой задачи). Тогда базовое уравнение преобразуется в следующее:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \\ h \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{xn} \\ u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{yn} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ \vdots \\ N_n^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (1.105)$$

Обратим внимание, что столбец функций формы при данном расширении механических свойств конечного элемента не изменяется. В этом проявляется одно из достоинств изопараметрического подхода – его универсальность.

Линейный изопараметрический треугольный элемент

Рассмотрим типичные изопараметрические конечные элементы, широко используемые в конечно-элементных программах для решения двумерных задач механики. Рассмотренный в предыдущих параграфах линейный треугольный элемент может быть представлен теперь как простейший изопараметрический структурный двумерный элемент, описываемый матричным уравнением:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (1.106)$$

Функции формы выражаются элементарными соотношениями через треугольные координаты:

$$N_1^{(e)} = \zeta_1, \quad N_2^{(e)} = \zeta_2, \quad N_3^{(e)} = \zeta_3 \quad (1.107)$$

Его вид показан на рис. 1.23.

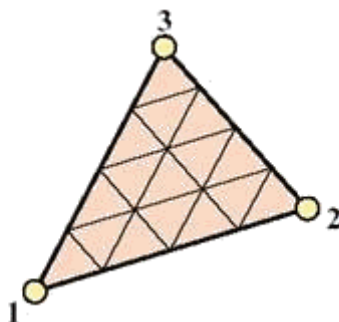


Рис. 1.23. Треухзловой линейный изопараметрический треугольный элемент

Квадратичный изопараметрический треугольный элемент

Рисунок 1.24 представляет шести узловой треугольный элемент, также являющийся типичным представителем семейства изопараметрических конечных элементов, широко применяющихся в расчетах. Он описывается следующим матричным уравнением:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} & u_{x5} & u_{x6} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} & u_{y5} & u_{y6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} \\ N_4^{(e)} \\ N_5^{(e)} \\ N_6^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (1.108)$$

Данный элемент имеет по одному дополнительному узлу на каждой стороне треугольника, что приводит к возможности более точного описания криволинейной границы тела, а также повышает степень аппроксимации перемещений. Последнее свойство достигается тем, что в данном случае используются функции формы в виде полиномов второго порядка:

$$\begin{aligned} N_1^{(e)} &= \zeta_1(2\zeta_1 - 1), & N_2^{(e)} &= \zeta_2(2\zeta_2 - 1), & N_3^{(e)} &= \zeta_3(2\zeta_3 - 1), \\ N_4^{(e)} &= 4\zeta_1\zeta_2, & N_5^{(e)} &= 4\zeta_2\zeta_3, & N_6^{(e)} &= 4\zeta_3\zeta_1 \end{aligned} \quad (1.109)$$

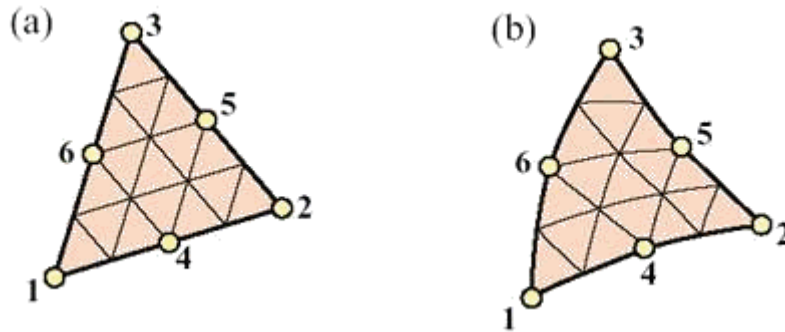


Рис. 1.24. Шести узловый треугольный конечный элемент: (а) – суперпараметрический вариант элемента, имеющий прямолинейные стороны и средние узлы 4, 5, 6, расположенные посередине соответствующих сторон элемента; (б) – изопараметрический вариант того же элемента

Как показано на рис. 1.24 данный тип элемента имеет две модификации, определяемые расположением средних узлов 4, 5, 6. Первый вариант – суперпараметрический конечный элемент, имеющий прямолинейные стороны и средние узлы 4, 5, 6, расположенные посередине соответствующих сторон элемента 1, 2, 3; (б) – изопараметрический вариант того же элемента. Во втором случае и геометрия, и перемещения заданы полиномами второго порядка. Отсюда и название элемента – квадратичный конечный элемент. В литературе встречается также другое определение – параболический конечный элемент.

Одномерный квадратичный изопараметрический элемент

В первой части главы был рассмотрен простейший конечный элемент – двух узловой линейный элемент – широко применяющийся при решении одномерных задач теории упругости (растяжения и кручения стержней). Сейчас мы можем определить этот элемент как *одномерный изопараметрический линейный конечный элемент*.

Используя рассмотренную методику, мы можем теперь легко построить изопараметрический элемент более высокого порядка. В частности, в частности при расчетах стержневых систем применяется также *одномерный изопараметрический квадратичный конечный элемент*.

Пусть имеется трех узловой стержневой элемент. Введем в рассмотрение естественную локальную координату ξ . Два концевых узла и один средний пронумеруем в локальной системе координат как 1, 2 и 3 (локальные номера узлов на элементе). Пусть естественные координаты узлов 1, 2 и 3 на элементе равны соответственно:

$$\xi = \xi_1 = -1, \quad \xi = \xi_2 = 1, \quad \xi = \xi_3 = 0.$$

Пусть значения функций формы в узлах элемента равны либо нулю, либо единицы:

$$N_i^{(e)}(\xi_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad (1.110)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

Тогда функции формы могут быть представлены в виде финитных параболических функций следующим образом (рис. 1.25):

$$N_1^{(e)}(\xi) = \frac{1}{2} \xi(1 - \xi), \quad N_2^{(e)}(\xi) = \frac{1}{2} \xi(1 + \xi), \quad N_3^{(e)}(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (1.111)$$

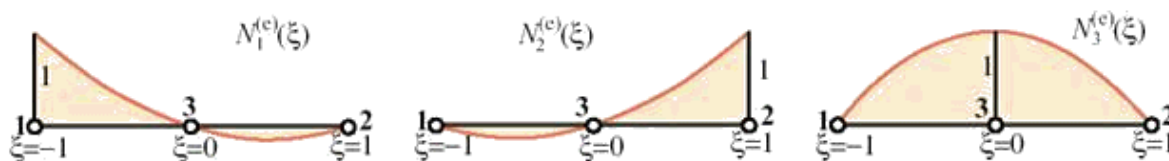


Рис. 1.25. Функции формы стержневого квадратичного изопараметрического элемента. Средние узлы выбраны посередине элемента, однако, в общем случае они могут быть сдвинуты на некоторое расстояние

Окончательно, определим интерполяционное соотношение для нового элемента следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (1.112)$$

где x – глобальная координата элемента (стержня), u – перемещение точек элемента (стержня).

Таким образом, базовые определяющие уравнения элемента построены.

1.10. Четырехсторонние двумерные элементы

Естественные координаты элемента

Согласно общей концепции построения произвольного изопараметрического конечного элемента, введем в рассмотрение *естественную локальную систему координат* на элементе, соответствующую геометрии данного типа элемента. Естественной системой координат трехстороннего элемента являются треугольные координаты $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. Естественной системой координат плоского четырехстороннего элемента является система координат (ξ, η) , показанная на рис. 1.26 для двух вариантов четырехстороннего элемента, имеющего прямолинейные либо криволинейные стороны. Данная система координат относится к известному широкому классу недекартовых координат – *криволинейных косоугольных, в общем случае, координат*. Несмотря на очевидные отличия от декартовой системы, криволинейные косоугольные координат обладают сходными математическими свойствами.

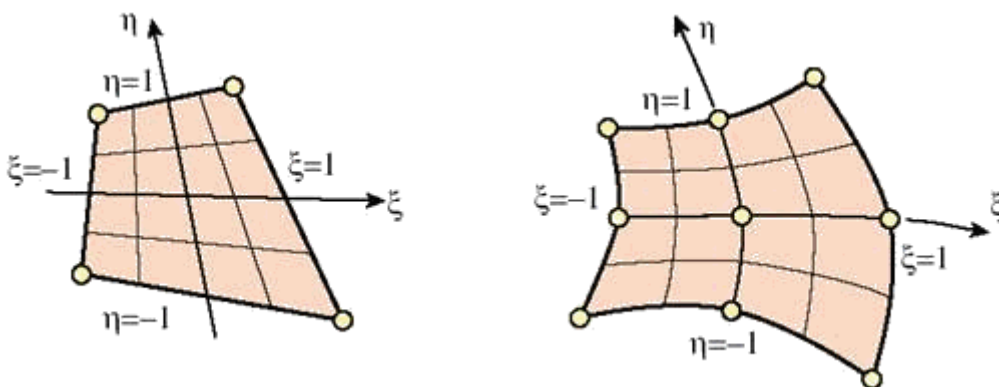


Рис. 1.26. Четырехсторонние двумерные элементы в криволинейных косоугольных координатах

Локальная система координат (ξ, η) является масштабированной. Это означает, что каждая координата изменяется в пределах от -1 на одной стороне элемента до +1 на противоположной стороне, принимая нулевое значение на медианах. Заметим, что пределы изменения локальных координат могут быть выбраны произвольно, например, от 0 до 1. Преимущество введенных пределов состоит в том, что они обеспечивают эффективное применение формул интегрирования Гаусса.

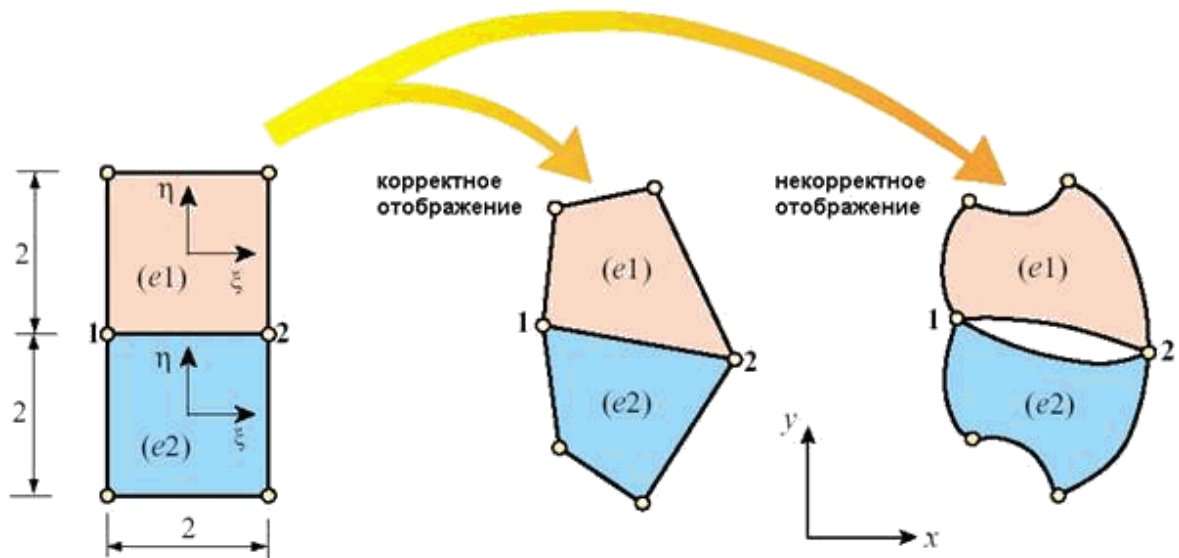


Рис. 1.27. Отображение элемента, заданного в естественных локальных координатах (ξ, η) , на тот же элемент в глобальной системе координат (x, y)

При разработке алгоритмов МКЭ часто бывает удобно визуализировать произвольный конечный элемент в декартовых координатах на плоскости (ξ, η) (рис. 1.27). Любой четырехсторонний конечный элемент в этом случае может быть представлен квадратом со стороной 2 в безразмерных единицах в пределах $\xi \in [-1, 1], \eta \in [-1, 1]$. Взаимооднозначное преобразование между локальной системой координат (ξ, η) и глобальной (x, y) описывается математическими уравнениями общего вида:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), & y &= y(\xi, \eta) \\ \xi &= \xi(x, y), & \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \quad (1.113)$$

В случае произвольного двумерного конечного элемента первая часть формул (1.113) могут быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n x_i N_i^{(\theta)}(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n y_i N_i^{(\theta)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (1.114)$$

где n – число узлов на элементе.

Соотношения типа (1.113) или (1.114) носят название *изопараметрического отображения*. Вопрос корректности отображения может быть достаточно острым при расчетах методом конечных элементов. Необходимо правильное построение сетки конечных элементов, чтобы не было нарушения взаимнооднозначности отображения (рис. 1.27).

В случае корректного отображения имеет место взаимнооднозначное соответствие точек элемента в плоскостях (ξ, η) и (x, y) . В случае некорректного отображения взаимнооднозначное соответствие нарушается. Так, например, видно, что любой одной точке на линии 1-2 в плоскости (ξ, η) соответствует две точки в плоскости (x, y) .

Четырехсторонний билинейный элемент

Четырех-узловой четырехсторонний конечный элемент является простейшим представителем семейства четырехсторонних двумерных элементов. Его вид показан на рис. 1.28, а базовые интерполяционные соотношения представлены следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^{(\theta)} \\ N_2^{(\theta)} \\ N_3^{(\theta)} \\ N_4^{(\theta)} \end{Bmatrix} \quad (1.115)$$

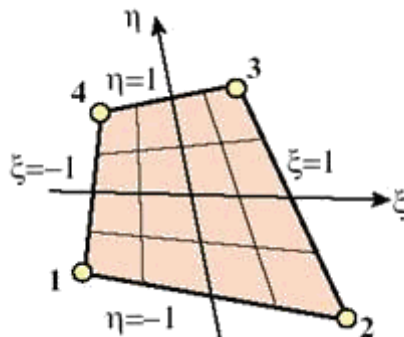


Рис. 1.28. Четырех-узловой четырехсторонний билинейный элемент

Функции формы элемента выражены следующими соотношениями через локальные естественные координаты:

$$\begin{aligned} N_1^{(e)} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & N_2^{(e)} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3^{(e)} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & N_4^{(e)} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (1.116)$$

Отметим, что функции формы (1.116) изменяются линейно вдоль координатных линий $\xi = const$ и $\eta = const$. Однако, они не являются линейными полиномами как в случае треугольного линейного элемента. Такие функции и соответственно элементы, ими описываемые, носят название *билинейных*. На рис. 1.29 приведен графический вид одной из функций формы.

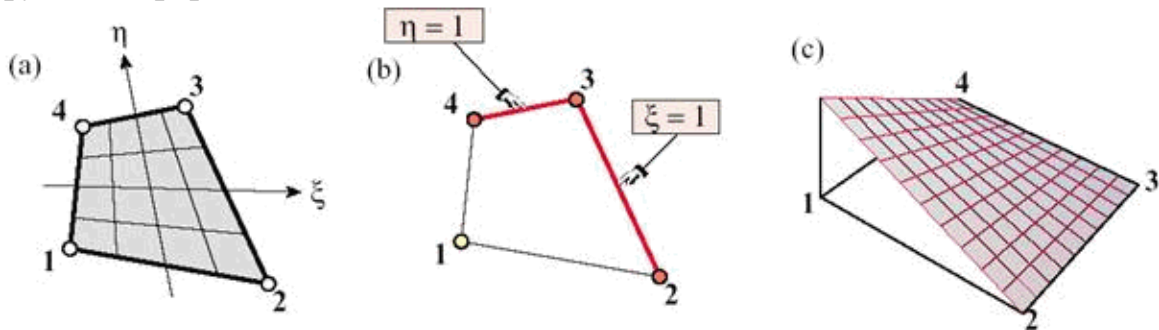


Рис. 1.29. Четырехсторонний билинейный элемент: (а) геометрия элемента; (б) уравнения сторон, противоположных первому узлу; (в) вид функции формы $N_1^{(e)}$

Четырехсторонние элементы высшего порядка

Рассмотрим следующие два варианта семейства четырехсторонних элементов: девяти-узловой и восьми-узловой изопараметрический конечный элемент, показанные на рис. 1.30. Очевидное внешнее отличие между этими элементами состоит в наличии или отсутствии внутреннего узла в центре элемента.

Интерполирующие соотношения элемента первого типа, носящего название *биквадратичный изопараметрический элемент*, имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_9 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_9 \\ u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{x9} \\ u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{y9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ \vdots \\ N_9^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (1.117)$$

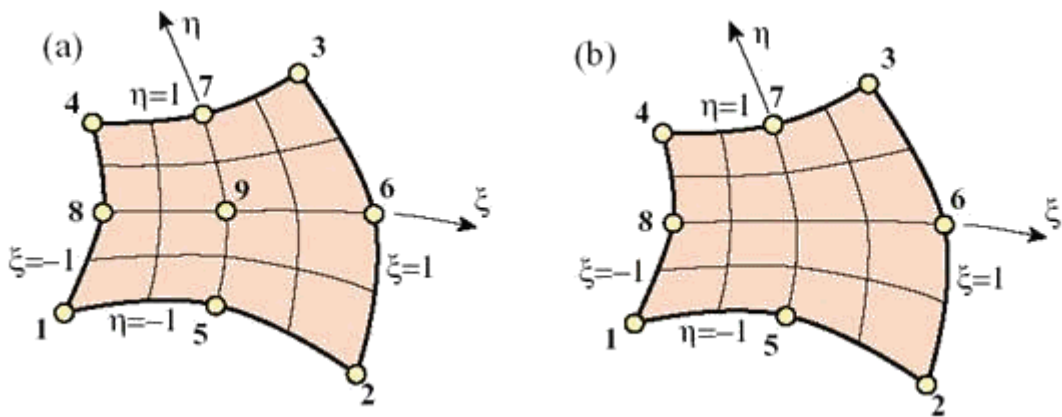


Рис. 1.30. Четырехсторонние конечные элементы высшего порядка: (а) девяти-узловой биквадратичный элемент; (б) восьми-узловой «серендипов» элемент

Приведем формулы для некоторых характерных функций формы биквадратичного конечного элемента (рис. 1.31):

$$\begin{aligned}
 N_1^{(e)} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta, & N_2^{(e)} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta, & \dots \\
 N_5^{(e)} &= -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta, & N_6^{(e)} &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi, & \dots \\
 N_9^{(e)} &= (1-\xi^2)(1-\eta^2)
 \end{aligned}
 \tag{1.118}$$

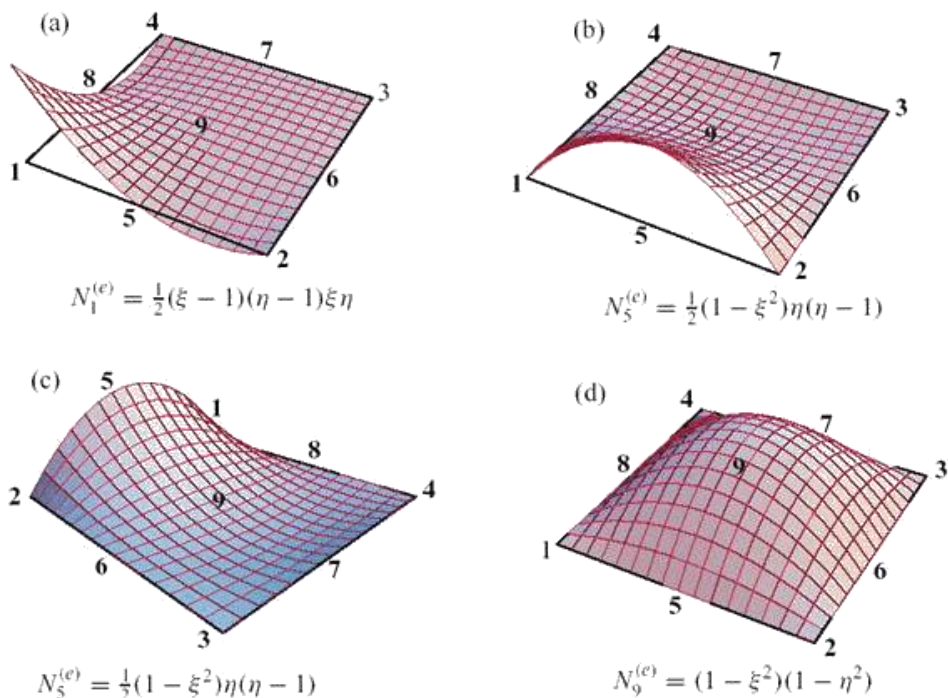


Рис. 1.31. Графики характерных функций формы биквадратичного конечного элемента

Интерполирующие соотношения элемента второго типа, носящего название *изопараметрический элемент серендипова семейства*, имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_8 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_8 \\ u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{x8} \\ u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{y8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \\ \vdots \\ N_8^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (1.119)$$

где функции формы могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} N_i^{(e)} &= \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1), \quad i = 1, \dots, 4 \\ N_i^{(e)} &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 5, 7 \\ N_i^{(e)} &= \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2), \quad i = 6, 8 \end{aligned}, \quad (1.120)$$

где (ξ_i, η_i) – локальные координаты i -го узла на элементе.

Заметим, что соотношения (1.116) линейного элемента также могут быть представлены в компактной форме, удобной для программирования:

$$N_i^{(e)} = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.121)$$

Обратим внимание, что функции формы (1.120) изменяются по квадратичному закону вдоль координатных линий $\xi = const$ и $\eta = const$. Функция формы, связанная с внутренним девятым узлом элемента, в англоязычной литературе по МКЭ называется *bubble function*, что связано с характерной «пузырчатой» формой этой функции. В случае элемента серендипова семейства внутренний узел исключается из рассмотрения путем наложения специальных кинематических связей:

$$\begin{aligned} u_{x9} &= \alpha(u_{x1} + u_{x2} + u_{x3} + u_{x4}) + \beta(u_{x5} + u_{x6} + u_{x7} + u_{x8}) \\ u_{y9} &= \alpha(u_{y1} + u_{y2} + u_{y3} + u_{y4}) + \beta(u_{y5} + u_{y6} + u_{y7} + u_{y8}) \end{aligned} \quad (1.122)$$

Функции формы серендипова конечного элемента строятся таким образом, чтобы их сумма равнялась нулю, и порядок аппроксимации был равен двум по обеим локальным координатам. Отсюда получают два условия для определения констант α и β .

Свойство полноты

Отметим коротко очень важное условие для обеспечения сходимости

сти метода конечных элементов, которому должен подчиняться выбор или построение интерполирующих функций (или, что то же самое, функций формы) – *свойство полноты*. Множество функций формы называется *полным*, если эти функции могут точно описать (аппроксимировать) любую линейную функцию перемещений, заданную в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ u_y &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y \end{aligned} \quad (1.123)$$

где α_0, \dots, β_2 - произвольные константы.

Проверим, удовлетворяют ли рассмотренные функции формы и соответствующие приближенные решения (1.103) данному условию. Вычислим перемещения в узлах согласно соотношениям (1.123):

$$\begin{aligned} u_{xi} &= \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i \\ u_{yi} &= \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 y_i \end{aligned} \quad (1.124)$$

Подставим u_{xi} в первое интерполяционное соотношение (1.103). Получим:

$$u_x = \sum_{i=1}^n u_{xi} N_i^{(e)} = \sum_{i=1}^n (\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i) N_i^{(e)} = \alpha_0 \sum_{i=1}^n N_i^{(e)} + \alpha_1 \sum_{i=1}^n x_i N_i^{(e)} + \alpha_2 \sum_{i=1}^n y_i N_i^{(e)}$$

Подставим геометрические интерполяционные соотношения изопараметрического элемента (1.102) в последнее выражение. Получим первое из соотношений (1.123). Аналогичные вычисления могут быть выполнены для компоненты u_{yi} . Таким образом, изопараметрические функции формы удовлетворяют свойству полноты.

1.11. Формирование и решение глобальной системы конечно-элементных уравнений

В предыдущих параграфах были сформированы все необходимые элементные вектора объемных и поверхностных узловых сил, а также элементные матрицы жесткости. Как правило, это является одним из самых сложных этапов при разработке программной реализации метода конечных элементов. Вторым важным этапом будет сборка глобальных матриц жесткости и векторов нагрузки, формирование системы линейных алгебраических уравнений и решение СЛАУ МКЭ.

Матричное уравнение (1.58) представляет собой стандартную форму записи системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов (СЛАУ МКЭ):

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_s \quad (1.125)$$

где \mathbf{K} – глобальная матрица жесткости конечно-элементной модели;

\mathbf{U} – глобальный вектор степеней свободы (узловых перемещений) модели;

\mathbf{F}_V – глобальный вектор узловых сил, статически эквивалентный заданным объемным силам;

\mathbf{F}_S – глобальный вектор узловых сил, статически эквивалентный заданным поверхностным силам.

Структура глобальной матрицы жесткости

Матрица жесткости конечно-элементной модели формируется путем сложения по определенным правилам элементных матриц жесткости:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e, \quad (1.126)$$

где \mathbf{a}^e - матрицы кинематических связей.

Эта процедура называется *сборкой* или *ансамблированием*.

Рассмотрим процесс сборки (1.126) на простом примере, чтобы понять закономерности формирования глобальной системы алгебраических уравнений. Это поможет лучше понять другие более эффективный алгоритмы построения матрицы \mathbf{K} , рассматриваемые в специальной литературе по МКЭ.

Пусть сетка образована двумя четырех-узловыми линейными изопараметрическими элементами (рис. 1.32). Глобальное число узлов равно шести, при этом каждый узел имеет свой уникальный глобальный номер от 1 до 6. Введем локальную естественную систему координат (ξ, η) на каждом элементе. Пронумеруем узлы на каждом элементе в соответствии с ориентацией локальной системы координат от 1 до 4. Таким образом, получаем, что каждому узлу ставится в соответствие два номера: локальный $i = 1, \dots, 4$ и глобальный $I = 1, \dots, N_p$, где N_p - глобальное число узлов конечно-элементной сетки.

Данное соответствие нумерации узлов помогает легко сформировать матрицы кинематических связей \mathbf{a}^e , которые, по определению (1.42

), связывают глобальный вектор узловых перемещений \mathbf{U} с каждым элементным вектором узловых перемещений:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{a}^e \mathbf{U}, \quad e = 1, \dots, N_e \quad (1.127)$$

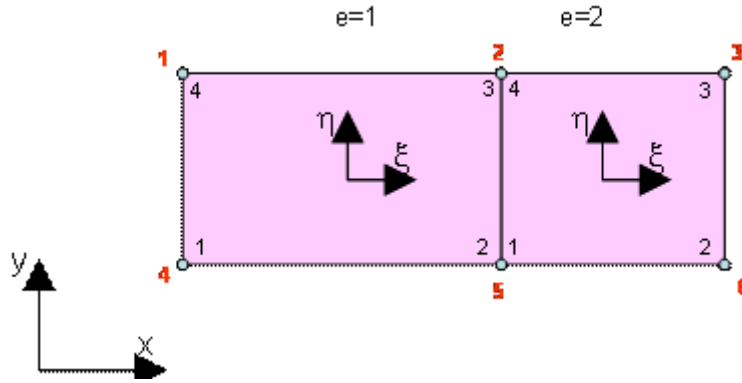


Рис. 1.32. Конечно-элементная сетка, образованная двумя четырех-узловыми линейными изопараметрическими элементами

Показаны локальные и глобальная системы координат, локальная нумерация узлов на каждом элементе от 1 до 4 и глобальная нумерация по всей сетке от 1 до 6.

В данном случае имеем:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & \dots & u_{x6} & u_{y6} \end{bmatrix}, \quad (1.128)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)} &= \begin{bmatrix} u_x^{(1)1} & u_y^{(1)1} & \dots & u_x^{(1)4} & u_y^{(1)4} \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{bmatrix} u_{x4} & u_{y4} & u_{x5} & u_{y5} & u_{x2} & u_{y2} & u_{x1} & u_{y1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.129a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(2)} &= \begin{bmatrix} u_x^{(2)1} & u_y^{(2)1} & \dots & u_x^{(2)4} & u_y^{(2)4} \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{bmatrix} u_{x5} & u_{y5} & u_{x6} & u_{y6} & u_{x3} & u_{y3} & u_{x2} & u_{y2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.129b)$$

Сравнивая выражения (1.129a) и (1.129b) с (1.128) получим для каждого элемента выражения матриц кинематических связей:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.130a)$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.130b)$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица размерности 2×2 ;
 $\mathbf{0}$ – нулевая матрица размерности 2×2 :

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.131)$$

Вычислим первое слагаемое в сумме (1.126):

$$\mathbf{K}^{(1)} = (\mathbf{a}^{(1)})^T \mathbf{k}^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} = (\mathbf{a}^{(1)})^T \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(1)11} & \mathbf{k}^{(1)12} & \mathbf{k}^{(1)13} & \mathbf{k}^{(1)14} \\ \mathbf{k}^{(1)21} & \mathbf{k}^{(1)22} & \mathbf{k}^{(1)23} & \mathbf{k}^{(1)24} \\ \mathbf{k}^{(1)31} & \mathbf{k}^{(1)32} & \mathbf{k}^{(1)33} & \mathbf{k}^{(1)34} \\ \mathbf{k}^{(1)41} & \mathbf{k}^{(1)42} & \mathbf{k}^{(1)43} & \mathbf{k}^{(1)44} \end{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}, \quad (1.132)$$

где $\mathbf{k}^{(1)ij}$ - матричный блок размерности 2×2 .

Перемножив матрицы в формуле (1.132), получим «отображение» элементной матрицы первого элемента на «плоскость» глобальной матрицы:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(1)44} & \mathbf{k}^{(1)43} & 0 & \mathbf{k}^{(1)41} & \mathbf{k}^{(1)42} & 0 \\ \mathbf{k}^{(1)34} & \mathbf{k}^{(1)33} & 0 & \mathbf{k}^{(1)31} & \mathbf{k}^{(1)32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{k}^{(1)14} & \mathbf{k}^{(1)13} & 0 & \mathbf{k}^{(1)11} & \mathbf{k}^{(1)12} & 0 \\ \mathbf{k}^{(1)24} & \mathbf{k}^{(1)23} & 0 & \mathbf{k}^{(1)21} & \mathbf{k}^{(1)22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.133)$$

Сразу заметим, что положение блока $\mathbf{k}^{(1)ij}$ в матрице $\mathbf{K}^{(1)}$ определяется соответствующими глобальными номерами. Так, например, блок $\mathbf{k}^{(1)12}$ имеет локальные номера $i=1$ и $j=2$. Узлы с локальными номерами $i=1$ и $j=2$ на первом элементе имеют глобальные номера $I=4$ и $J=5$. В результате блок $\mathbf{k}^{(1)12}$ перемещается на 4-ю строку, 5-й столбец глобальной матрицы $\mathbf{K}^{(1)}$.

Аналогично рассуждая, вычислим второе слагаемое в сумме (1.126):

$$\mathbf{K}^{(2)} = (\mathbf{a}^{(2)})^T \mathbf{k}^{(2)} \mathbf{a}^{(2)} = (\mathbf{a}^{(2)})^T \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(2)11} & \mathbf{k}^{(2)12} & \mathbf{k}^{(2)13} & \mathbf{k}^{(2)14} \\ \mathbf{k}^{(2)21} & \mathbf{k}^{(2)22} & \mathbf{k}^{(2)23} & \mathbf{k}^{(2)24} \\ \mathbf{k}^{(2)31} & \mathbf{k}^{(2)32} & \mathbf{k}^{(2)33} & \mathbf{k}^{(2)34} \\ \mathbf{k}^{(2)41} & \mathbf{k}^{(2)42} & \mathbf{k}^{(2)43} & \mathbf{k}^{(2)44} \end{bmatrix} \mathbf{a}^{(2)} \quad (1.134)$$

После перемножения получим:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}^{(2)44} & \mathbf{k}^{(2)43} & 0 & \mathbf{k}^{(2)41} & \mathbf{k}^{(2)42} \\ 0 & \mathbf{k}^{(2)34} & \mathbf{k}^{(2)33} & 0 & \mathbf{k}^{(2)31} & \mathbf{k}^{(2)32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}^{(2)14} & \mathbf{k}^{(2)13} & 0 & \mathbf{k}^{(2)11} & \mathbf{k}^{(2)12} \\ 0 & \mathbf{k}^{(2)24} & \mathbf{k}^{(2)23} & 0 & \mathbf{k}^{(2)21} & \mathbf{k}^{(2)22} \end{bmatrix} \quad (1.135)$$

Остается сложить матрицы (1.133) и (1.135), чтобы получить искомую глобальную матрицу жесткости рассматриваемой конструкции:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(1)44} & \mathbf{k}^{(1)43} & 0 & \mathbf{k}^{(1)41} & \mathbf{k}^{(1)42} & 0 \\ \mathbf{k}^{(1)34} & \mathbf{k}^{(1)33} + \mathbf{k}^{(2)44} & \mathbf{k}^{(2)43} & \mathbf{k}^{(1)31} & \mathbf{k}^{(1)32} + \mathbf{k}^{(2)41} & \mathbf{k}^{(2)42} \\ 0 & \mathbf{k}^{(2)34} & \mathbf{k}^{(2)33} & 0 & \mathbf{k}^{(2)31} & \mathbf{k}^{(2)32} \\ \mathbf{k}^{(1)14} & \mathbf{k}^{(1)13} & 0 & \mathbf{k}^{(1)11} & \mathbf{k}^{(1)12} & 0 \\ \mathbf{k}^{(1)24} & \mathbf{k}^{(1)23} + \mathbf{k}^{(2)14} & \mathbf{k}^{(2)13} & \mathbf{k}^{(1)21} & \mathbf{k}^{(1)22} + \mathbf{k}^{(2)11} & \mathbf{k}^{(2)12} \\ 0 & \mathbf{k}^{(2)24} & \mathbf{k}^{(2)23} & 0 & \mathbf{k}^{(2)21} & \mathbf{k}^{(2)22} \end{bmatrix} \quad (1.136)$$

Структура глобального вектора узловых сил

Глобальный вектор узловых сил формируется аналогичным образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S = \sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}_V^e + \sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}_S^e \quad (1.137)$$

Пусть, например, рассмотренная выше конструкция находится под действием сил тяжести. Тогда будут сформированы два элементных вектора объемных сил в узлах:

$$\mathbf{f}_V^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_V^{(1)1} & \mathbf{f}_V^{(1)2} & \mathbf{f}_V^{(1)3} & \mathbf{f}_V^{(1)4} \end{bmatrix}^T, \quad (1.138a)$$

$$\mathbf{f}_V^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_V^{(2)1} & \mathbf{f}_V^{(2)2} & \mathbf{f}_V^{(2)3} & \mathbf{f}_V^{(2)4} \end{bmatrix}^T, \quad (1.138б)$$

где $\mathbf{f}_V^{(e)j}$ – матричный блок размерности 2×1 .

Подставляя выражения (1.138a, б) в (1.137) с учетом вида матриц кинематических связей (1.130a, б), получим глобальный вектор узловых сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_V^{(1)} + \mathbf{F}_V^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_V^{(1)4} & \mathbf{f}_V^{(1)3} + \mathbf{f}_V^{(2)4} & \mathbf{f}_V^{(2)3} & \mathbf{f}_V^{(1)1} & \mathbf{f}_V^{(1)2} + \mathbf{f}_V^{(2)1} & \mathbf{f}_V^{(2)2} \end{bmatrix}^T \quad (1.139)$$

Анализируя выражения (1.136) и (1.139), заметим, что складываются только те элементы матрицы жесткости или вектора нагрузки, которые относятся к общим узлам сетки. Кроме того, если узлы относятся к разным элементам и имеют различные глобальные номера, то соответствующие блоки матрицы жесткости равны нулю. Это является следствием локальности функций формы, благодаря чему имеет место влияние узлов друг на друга только в пределах данного конечного элемента. Влияние же на другие узлы происходит опосредованно через общие узлы между элементами. Это приводит к *разреженной структуре* глобальной матрицы жесткости с *диагональным преобладанием*.

Решение глобальной системы конечно-элементных уравнений

После того как глобальная система конечно-элементных уравнений (1.125) сформирована, необходимо разрешить ее относительно глобаль-

ного вектора степеней свободы модели с тем, чтобы определить все перемещения узлов конструкции. Существует большое количество разработанных методов, алгоритмов и готовых программ для решения систем линейных алгебраических уравнений, наиболее известным из которых является метод исключения Гаусса, состоящий в приведении исходной матрицы к треугольному виду.

Однако при решении и выборе метода расчета систем конечно-элементных уравнений необходимо принимать во внимание ряд свойств СЛАУ и, в частности, *свойств матрицы жесткости К*:

1. При расчете реальных механических конструкций СЛАУ МКЭ может достигать десятков и сотен тысяч уравнений. Современный рекорд формирования и решения СЛАУ МКЭ равняется 50 миллионам уравнений. Заметим здесь же, что если задача отлична от статической линейной, то необходимое число решений системы может быть сколько угодно большим, например, при расчете динамики конструкции. К счастью, сложности, связанные с большим количеством уравнений, частично компенсируются другими свойствами матрицы жесткости, что и делает МКЭ таким привлекательным с точки зрения инженерных расчетов.

2. Матрица жесткости *симметрична*:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \quad (1.140)$$

3. Хотя специально не доказывали свойство (1.140), его легко проверить на примере (1.136), если учесть, что элементные матрицы жесткости симметричны, т.е.:

$$\mathbf{k}^{(e)ij} = \mathbf{k}^{(e)ji} \quad (1.141)$$

4. Матрица жесткости является *положительно-определенной*, что означает, что квадратичная форма:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = x_1^2 k_{11} + x_1 x_2 k_{12} + x_1 x_3 k_{13} + \dots + x_M^2 k_{MM} > 0 \quad (1.142)$$

при любых $x_1, x_2, \dots, x_M \neq 0$.

Свойства положительной определенности и симметрии матрицы являются необходимыми для построения или применения известных более эффективных алгоритмов решения СЛАУ, чем метод исключения Гаусса.

5. Матрица является *ленточной* и *редко-заполненной*, что означает, что ненулевые элементы матрицы сосредоточены вблизи главной диагонали. Следовательно, для эффективного использования машинной памяти и расчета достаточно хранить только ненулевые элементы ленты матрицы. Размер ленты, т.е. число ненулевых элементов в ней, существенно зависит от конкретного вида конструкции и способа нумерации

узлов. В среднем можно принять, что размер ленты равен приблизительно числу уравнений, входящих в систему.

б. Большие матрицы могут быть *плохо-обусловленными*. Число обусловленности равно отношению максимального собственного числа матрицы к минимальному и существенно влияет на устойчивость и точность численного решения. Число обусловленности сильно зависит размеров и формы конечных элементов. Поэтому необходимо внимательно следить за построением сетки и избегать больших градиентов размеров элементов, а также слишком больших или слишком малых углов между сторонами элементов.

Метод треугольной факторизации Холецкого

Метод треугольной факторизации Холецкого является одним из самых популярных прямых методов решения СЛАУ МКЭ, поскольку он учитывает все положительные свойства матрицы жесткости, отмеченные выше. К сожалению, он применим, как и все прямые методы, к относительно небольшим системам уравнений (до 10^4 уравнений). Связано это с внутренней машинной проблемой: при любой реальной точности хранения чисел и операций умножения и деления, достижимой на данном компьютере, ошибка вычислений, тем не менее, накапливается и при большом числе операций может стать катастрофической. Единственным выходом в данной ситуации является применение итеративных методов решения СЛАУ, свободных от данной проблемы.

Итак, рассмотрим вкратце *алгоритм Холецкого*. Подробное описание и расчетные формулы есть во всех книгах по вычислительной математике.

1. *Треугольное разложение* матрицы \mathbf{K} . Представим матрицу \mathbf{K} в виде произведения трех матриц:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T, \quad (1.143)$$

где \mathbf{L} – нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали; \mathbf{D} – диагональная матрица, причем все $d_{ii} > 0$.

2. *Прямой ход*. Решаем систему линейных алгоритмических уравнений в три этапа. Обозначим $\mathbf{D} \mathbf{L}^T \mathbf{U} = \mathbf{Z}$ и решим СЛАУ:

$$\mathbf{L} \mathbf{Z} = \mathbf{F} \quad (1.144)$$

В результате найдем вектор \mathbf{Z} .

3. *Масштабирование*. Решаем СЛАУ с диагональной матрицей, обозначив $\mathbf{L}^T \mathbf{U} = \mathbf{Y}$:

$$\mathbf{D} \mathbf{Y} = \mathbf{Z} \quad (1.145)$$

4. *Обратная подстановка.* Последний шаг – вычисляем искомый вектор перемещений путем решения СЛАУ с нижней диагональной матрицей:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{U} = \mathbf{Y} \quad (1.146)$$

Вычисление напряжений

После решения СЛАУ определены все узловые перемещения. Теперь с помощью интерполирующих соотношений можно определить деформации и напряжения в любой точке конечного элемента по формулам (1.20, 1.23):

$$\mathbf{e}(\xi, \eta) = \mathbf{B}(\xi, \eta) \mathbf{u}^e = \mathbf{B}(\xi, \eta) \mathbf{a}^e \mathbf{U}, \quad (-1 < \xi, \eta < 1) \in \Omega_e \quad (1.147)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta) = \mathbf{E} \mathbf{e}(\xi, \eta) = \mathbf{B}(\xi, \eta) \mathbf{a}^e \mathbf{U}, \quad (-1 < \xi, \eta < 1) \in \Omega_e \quad (1.148)$$

Заметим, что точки $(-1 < \xi, \eta < 1) \in \Omega_e$ могут быть любыми на элементе. Однако, для повышения эффективности и точности вычислений, обычно деформации и напряжения определяются в точках квадратур Гаусса, а затем экстраполируются в узлы элемента.

1.12. Виды конструкционного анализа

1. **Статический** анализ используется для определения напряжений и деформаций в условиях статического нагружения конструкций. Статический анализ может быть линейным или нелинейным. В процессе нелинейного статического анализа можно имитировать пластичное и сверхпластичное поведение материалов, определять жесткость нагружения, задаваться большими деформациями и напряжениями, учитывать контактные поверхности, анализировать ползучесть.

2. **Частотный** анализ используется для вычисления собственных частот и типа колебаний конструкции.

3. **Гармонический** анализ используется для определения отклика конструкции на нагрузки, гармонически изменяющиеся во времени.

4. **Переходный динамический** анализ используется для определения отклика конструкции на нагрузки, изменяющиеся со временем произвольно; здесь можно учитывать все нелинейные эффекты, допустимые в статическом нелинейном анализе.

5. **Вибрационный** анализ является расширением частотного анализа и используется для вычисления напряжений и деформаций, возника-

ющих в конструкции под действием индуцированных колебаний или произвольных вибраций.

Кроме перечисленных задач, анализируя конструкции, можно также моделировать механизм их разрушения, пластическую деформацию и усталостное разрушение, учитывать специфику композиционных материалов.

Статический конструкционный анализ

В процессе статического анализа прогнозируется результат воздействия на конструкцию установившихся, т.е. постоянных во времени, нагрузок без учета центробежных и демпфирующих эффектов или иных явлений, вызываемых изменяющимися во времени нагрузками. Исключение составляют, т.е. могут быть учтены в статическом анализе, такие параметры, как сила гравитации и скорость вращения, а также те изменяющиеся во времени нагрузки, которые могут быть аппроксимированы эквивалентными статическими нагрузками (например, сила ветра или сейсмические колебания - величина данных параметров обычно задается согласно строительным нормативным документам).

В процессе статического анализа определяются напряжения, деформации и силы, возникающие в конструкциях под действием нагрузок, не вызывающих значимых центробежных и вибрационных эффектов. В статическом анализе предполагается, что все нагрузки и реакции конструкции на нагрузки если и изменяются во времени, то очень медленно.

Нагрузками в статическом анализе могут быть:

- внешние силы и моменты сил;
- поверхностное давление;
- постоянные центробежные силы, такие как гравитационные и обусловленные вращением с постоянной скоростью;
- вынужденные ненулевые смещения - линейные и угловые;
- температуры (при анализе термических напряжений);
- потоки (для учета радиационного разбухания материалов).

Основные этапы статического конструкционного анализа:

- в препроцессоре построить модель, задать свойства материалов, сгенерировать сетку;
- в процессоре задать нагрузки и произвести вычисления;

- в постпроцессоре просмотреть и проанализировать результаты расчетов.

Нелинейный конструкционный анализ

Основной специфической особенностью нелинейного поведения конструкции является изменение ее жесткости под действием нагрузки. На уровне физической модели можно говорить о нелинейной зависимости смещений от приложенной силы.

Варианты нелинейного поведения конструкций

Нелинейное поведение конструкций может быть вызвано рядом причин, которые могут быть отнесены к одной из следующих трех категорий.

– Нелинейное изменение геометрии

Прежде всего, имеется в виду большая пластическая деформация.

– Нелинейное поведение материалов

Например, ползучесть: под действием постоянной нагрузки, не превышающей предел прочности, книжная полка с течением времени прогибается, принимая отличную от первоначальной форму.

– Изменение условий, включая условия контакта

Например, трос после приложения нагрузки может сначала провисать, а затем натягивается. Или вращающийся вал - часть времени он может находиться в контакте с опорой, а часть цикла вращения контакт вала с поверхностью опоры может прерываться. Причем изменение условий может прямо зависеть от приложенной нагрузки, а может вызываться иными внешними причинами. Важным является случай изменения условий контакта. Например, при увеличении веса шины автомобиля или велосипеда изменяется таким образом, что площадь поверхности, контактирующей с асфальтом, увеличивается, но не прямо пропорционально.

Консервативное и неконсервативное поведение конструкции

Система называется **неконсервативной**, если энергия, сообщенная системе внешней нагрузкой, системой рассеивается, что происходит, например, при пластической деформации, когда энергия внешней силы расходуется на движение дислокаций и, как следствие, - на изменение геометрической формы. На рис. 1.33 схематически показано поведение неконсервативной системы: удлинение, обусловленное остаточной деформацией в результате пластического течения.

Если после снятия нагрузки энергия системы восстанавливается до первоначального уровня, система называется **консервативной**. Анализ консервативных систем не зависит от траектории; последовательность приложения нагрузок и количество приращений (шагов) не влияют на результат вычислений. Анализ неконсервативных систем зависит от траектории; точность расчетов определяется аппроксимацией нелинейного параметра линейными участками и требует увеличенного числа ступеней (временных шагов) на каждом шаге разбиения.

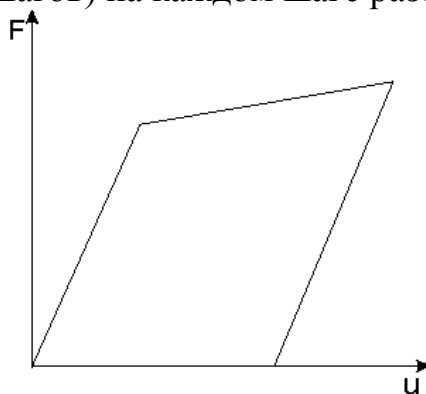


Рис. 1.33. Неконсервативное поведение системы при пластической деформации

Моделирование пластической деформации и деформационного упрочнения материалов

Нелинейное поведение материалов может привести к изменению жесткости конструкции под действием приложенной нагрузки. Так, нелинейная зависимость деформации от напряжения для пластичных и сверхэластичных материалов заставляет конструкцию различным образом реагировать на внешние силы; уровень остаточной деформации определяется величиной приложенных сил и температурным режимом. Нелинейные эффекты, вызванные ползучестью и вязкопластичным (вязкоэластичным) поведением материалов, могут зависеть от времени и скорости нагружения, температурного режима и величины нагрузки. Распухание материалов под действием частиц деформирует конструкцию, причем величина деформации является функцией температуры, времени, потока нейтронов и величины приложенных сил.

В большинстве случаев поведение металлов под действием приложенных сил описывается деформационной кривой, на которой можно выделить несколько характерных точек и участков: 1) до предела пропорциональности деформация металла подчиняется линейному закону; 2) до предела упругости величина остаточной деформации пренебрежимо мала, и поведение металла мало отличается от линейного; 3) выше предела упругости и до предела текучести металл деформируется нели-

нейно; 4) увеличение внешней нагрузки свыше предела текучести и вплоть до предела прочности приводит к интенсивному пластическому деформированию, которое характеризуется накоплением остаточной деформации; данный процесс является неконсервативным и должен подвергаться нелинейному анализу.

Пластическое течение материалов может быть аппроксимировано одним из следующих способов.

– **Билинейное нагружение**

Билинейное нагружение отражает обычное нагружение металлических конструкций и предполагает, что деформационная кривая в истинных координатах напряжение (σ) - логарифм деформации ($\epsilon = \ln(l/l_0)$) состоит из двух линейных участков с одной критической точкой пересечения, соответствующей пределу текучести. Данный способ аппроксимации позволяет учитывать эффект Баушингера и применим для относительно небольших деформаций, когда поведение металла контролируется критерием пластичности фон Мизеса. Кривая деформации при билинейном нагружении представлена на рис. 1.34,а. Эффект Баушингера, описывающий циклическое билинейное нагружение металла, представлен на рис.1.35. Билинейное нагружение не способно моделировать большую пластическую деформацию.

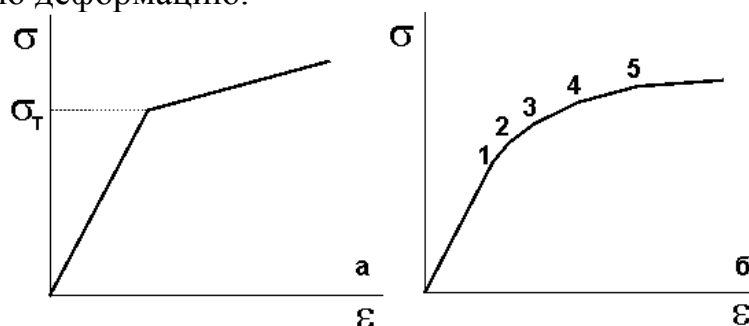


Рис. 1.34. Билинейное (а) и мультилинейное (б) нагружение

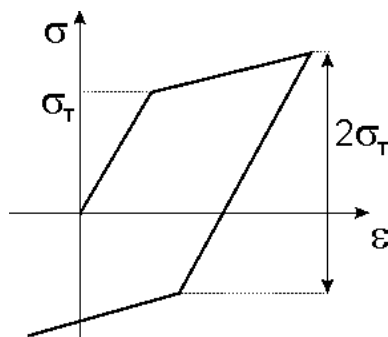


Рис.1.35. Циклическое билинейное нагружение, учитывающее эффект Баушингера – **Мультилинейное нагружение**

Мультилинейное нагружение (рис. 1.34,б) описывается моделью Бесселинга, представляет деформационную кривую в виде нескольких линейных участков и учитывает эффект Баушингера; данный способ не применим для большой пластической деформации.

– **Нелинейное нагружение**

Нелинейное нагружение моделирует большие пластические деформации, циклическое нагружение; учитывает ударные эффекты; является суперпозицией нескольких билинейных и мультилинейных нагружений, которые включаются в расчет в зависимости, например, от температуры нагружения.

– **Изотропное нагружение.**

Изотропное нагружение может быть линейным, мультилинейным или нелинейным, исходя из аппроксимации деформационной кривой, но используется в расчетах при условии изотропности материала. Данный способ применяется для анализа больших пластических деформаций.

– **Анизотропное нагружение.**

Анизотропное нагружение моделирует поведение металлов, в которых предварительной деформационной обработкой, например прокаткой или волочением, была создана преимущественная кристаллографическая ориентация кристаллитов (текстура). Данный способ позволяет учесть различное билинейное поведение в трех направлениях координатных осей и отдельно задать развитие в этих направлениях сжатия, удлинения и сдвига, но не дает точных результатов при циклическом или ярко выраженном нелинейном нагружении.

Метод Ньютона-Рафсона

Нелинейные задачи эффективно решаются итерационным методом Ньютона-Рафсона, который предполагает приближенное разбиение нагрузки на несколько последовательных приращений. Применение метода Ньютона-Рафсона для равновесных итераций в случае двух приращений нагрузки и одной степени свободы показано на рис. 1.36.

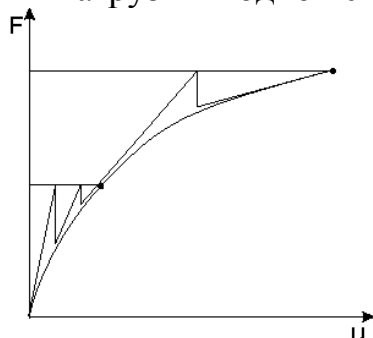


Рис. 1.36. Применение итерационного метода Ньютона-Рафсона для нелинейного анализа: нелинейная нагрузка с одной степенью свободы аппроксимируется двумя линейными приращениями

Таким образом, нелинейная задача сводится к линейной, а точность решения определяется тремя параметрами: 1) **количеством шагов** (или приращений); каждый шаг в отдельности представляет собой линейное нагружение конструкции; 2) **количеством ступеней** (или временных шагов); каждый шаг нагружения разбивается на ступени с целью более точной аппроксимации; 3) **количеством равновесных итераций**; на каждой ступени данный параметр обеспечивает сходимость решения.

ГЛАВА 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПИЧНЫХ ЗАДАЧ

2.1. Решение типичной задачи в ANSYS

Решение типичной для ANSYS задачи включает следующие три этапа:

1. Построение модели.
2. Задание нагрузок и получение решения.
3. Обзор результатов.

Построение модели

На построение конечно элементной модели уходит больше времени, чем на выполнение любой другой части анализа. В начале вы задаете имя решаемой задачи и заголовок анализа. Затем, используя препроцессор PREP7, определяете типы элемента, вещественные константы элемента, свойства материала и геометрию модели.

Задание имени и заголовка анализа

Выполнение этого этапа не является обязательным для проведения анализа.

Задание имени.

Имя анализа идентифицирует, решаемую в ANSYS, задачу. После задания Вами имени анализа, это имя становится первой частью имени всех, создаваемых при проведении анализа, файлов (расширение является идентификатором файла, например .db). Использование индивидуального для каждого анализа имени позволяет избежать перезаписи файлов ранее решенных задач. Если имя анализа не было задано, все файлы получают имя FILE или file, в зависимости от используемой операционной системы. Вы можете изменить, установленное по умолчанию, имя анализа следующим образом:

Используя опцию задания имени при запуске ANSYS. Подробную информацию смотрите в *ANSYS Operations Guide*.

После запуска ANSYS воспользуйтесь одним из нижеприведенных методов:

Команда:

/FILENAME

GUI:

Utility Menu> File> Change Jobname

Команда **/FILENAME** действительна только на начальном уровне. Она позволяет изменить имя анализа даже в том случае, если вы уже задали имя при запуске ANSYS. Заданное имя применимо только к фай-

лам открытым после использования **/FILENAME** и соответственно не применимо к уже открытым файлам. Если Вы хотите запустить новые файлы (например, файл регистрации, Jobname.LOG, или файл ошибок Jobname.ERR) командой **/FILENAME**, задайте аргумент *Key* в **/FILENAME** равным единице. В противном случае, имя открытых файлов останется неизменным.

Задание заголовка анализа:

Команда **/TITLE (Utility Menu> File> Change Title)**, задает заголовки анализа. ANSYS размещает заголовок в графическом окне программы. Для задания подзаголовков используйте команду **/STITLE**. Подзаголовки сопровождают результат вычисления, и не отображаются в графическом окне.

Установка единиц измерения

Программа ANSYS автоматически не устанавливает систему единиц для анализа. Исключением является анализ магнитного поля, в котором можно использовать любую систему единиц до тех пор, пока используется единая для всей вводимой информации система единиц (системы единиц вводимых данных не должны быть противоречивы).

Используя команду **/UNITS**, можно установить маркер в базе данных ANSYS, указывающий на используемую систему единиц. Эта команда не переводит данные из одной системы в другую; служит в качестве записи для последующего обзора анализа.

Установка типов элемента

Библиотека элементов ANSYS содержит более 150 различных типов элемента. Каждый тип элемента имеет уникальный номер и имя, которое идентифицирует категорию элемента: BEAM4, PLANE77, SOLID96, и так далее. Доступны следующие категории элемента:

BEAM	MESH
CIRCUit	PIPE
COMBINation	PLANE
CONTACT	PRETS (предварительное натяжение)
FLUID	SHELL
HF (высокая частота)	SOLID
HYPERelastic	SOURCe
INFINite	SURFace
INTERface	TARGET
LINK	TRANSducer
MASS	USER
MATRIX	VISCOelastic (или вязкопластичный)

Тип элемента среди прочего определяет:

- Набор степени свободы (который в свою очередь определяет дисциплину – структурный, тепловой, магнитный, электрический, и так далее).
- Находится элемент в двух или трехмерном пространстве.

Например, BEAM4 имеет шесть структурных степеней свободы (UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ), является линейным элементом, и может быть смоделирован в трехмерном пространстве. PLANE77 имеет тепловую степень свободы (TEMP), восьми узловый четырехсторонний элемент, может быть смоделирован только в двухмерном пространстве.

Для задания типов элемента необходимо находиться в общем препроцессоре PREP7. Для задания типа используйте семейство ET команд (ET, ETCHG, и так далее) или эквивалентные маршруты GUI.

Тип элемента необходимо задавать по имени и присвоить типу элемента номер ссылки. Например, приведенные ниже команды определяют два типа элемента, BEAM4 и SHELL63, и присваивают им номера ссылки 1 и 2 соответственно.

```
ET,1,BEAM4
```

```
ET,2,SHELL63
```

Таблица номера ссылки типа от имени элемента называется *таблицей типа элемента*. При определении текущих элементов, укажите на соответствующий номер ссылки типа, используя команду **TYPE (Main Menu> Preprocessor> Modeling> Create> Elements> Elem Attributes)**. Многие типы элемента имеют дополнительные опции, известные как KEYOPT (KEYOPT(1), KEYOPT(2), и так далее). Например, KEYOPT(9) для BEAM4 позволяет задать расчет искомых величин в промежуточных положениях каждого элемента, и KEYOPT(3) для SHELL63 позволяет подавить дополнительные формы смещения. Задать KEYOPTы можно командами ET или KEYOPT (**Main Menu> Preprocessor> Element Type> Add/Edit/Delete**).

Определение вещественных констант элемента

Вещественные константы элемента являются свойствами, которые зависят от типа элемента, например свойства сечения beam элемента. BEAM3 (двумерный beam элемент) имеет следующие вещественные константы: площадь (AREA), момент инерции (IZZ), высота (HEIGHT), постоянная отклонения сдвига (SHEARZ), начальная деформация (ISTRN), и дополнительная масса на единицу длины (ADDMAS). Не все типы элемента требуют вещественных констант, и разные элементы од-

ного типа могут иметь различные значения вещественных констант. Можно задать вещественные константы при помощи **R** семейства команд (**R**, **RMODIF**, и так далее) или выбором эквивалентного маршрута GUI. Так же как у типов элемента, каждый набор вещественных констант имеет номер ссылки, и таблица номера ссылки от набора вещественных констант называется *таблицей вещественных констант*. При определении элементов, укажите на соответствующий номер ссылки вещественных констант, используя команду **REAL (Main Menu> Pre-processor> Modeling> Create> Elements> Elem Attributes)**.

При задании вещественных констант, помните о следующих правилах:

- При использовании одной из **R** команд, необходимо вводить вещественные константы в порядке, указанном в таблице Table каждого типа элемента в *ANSYS Elements Reference (Справочник элементов ANSYS)*.
- Для моделей, использующих многочисленные типы элемента, используйте отдельные наборы вещественных констант (то есть разные номера REAL ссылки) для каждого типа элемента. Программа ANSYS выдает предупреждающее сообщение, если несколько типов элемента ссылаются на один и тот же набор вещественных констант. Однако один тип элемента может ссылаться на несколько наборов вещественных констант.
- Для проверки введенных значений веществ констант используйте команды **RLIST** and **ELIST**, с *RKEY = 1* (показан ниже). **RLIST** выводит список значений вещественных констант для всех наборов. Результатом выполнения команды **ELIST,,,,,1** является легко читаемый список, в котором представлены для каждого элемента метки вещественных констант и их значения.

Команда:

ELIST

GUI:

Utility Menu> List> Elements> Attributes + RealConst

Utility Menu> List> Elements> Attributes Only

Utility Menu> List> Elements> Nodes + Attributes

Utility Menu> List> Elements> Nodes + Attr + RealConst

Команда:

RLIST

GUI:

Utility Menu> List> Properties> All Real Constants

Utility Menu> List> Properties> Specified Real Const

- Для линейных и плоских элементов, требующих задания в качестве вещественных констант геометрических параметров (площадь проходного сечения, толщина, диаметр и так далее), можно графически проверить входную информацию, используя следующие команды (в указанном порядке):

/ESHAPE и EPLOT

GUI:

Utility Menu> PlotCtrls> Style> Size and Shape

Utility Menu> Plot> Elements

ANSYS отображает элементы как твердые элементы, используя прямоугольное сечение для link и shell элементов и круглое сечение для pipe элементов. Пропорции сечения определяются по значениям вещественных констант.

Создание сечений

Если необходимо построить модель, используя BEAM44, BEAM188, или BEAM189, используйте команды сечения (**SECTYPE**, **SECDATA**, и так далее) или эквивалентные маршруты GUI для определения и использования поперечных сечений в модели.

Определение свойств материалов

Большинство типов элемента требуют задания свойств материала. В зависимости от решаемой задачи, свойства материалов могут быть линейными или нелинейными. Так же как с типами элемента и вещественными константами, каждый набор свойств материала имеет номер ссылки материала. Таблица номеров ссылки материалов от наборов свойств материала называется *таблицей материала*. В пределах одного анализа вы можете иметь различные наборы свойств материала (соответствующие материалам, используемым в модели). ANSYS идентифицирует каждый набор уникальным номером ссылки. При определении элементов, вы указываете на соответствующий номер ссылки, используя команду **MAT**.

Линейные свойства материала

Линейные свойства материала могут быть постоянными или зависеть от температуры, могут также быть изотропными или ортотропными. Для задания постоянных свойств материала (изотропных или ортотропных) используйте один из нижеприведенных методов:

Команда:

MP

GUI:

Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models

Вы также должны задать соответствующую метку свойства; например, EX, EY, EZ для модуля Юнга, KXX, KYY, KZZ для теплопроводности, и так далее. Для изотропного материала вам следует задать свойство только в направлении X; свойства по остальным направлениям, по умолчанию, принимаются равными свойству в направлении X.

Нелинейные свойства материала

Нелинейные свойства материалов обычно задаются в виде таблиц, например данные пластичности, данные магнитного поля и так далее. Первый шаг в определении нелинейных свойств материала заключается в активации таблицы данных командой **TB**.

Анизотропные упругие свойства материала

При использовании некоторых типов элемента необходимо задать анизотропные свойства упругости материала, которые обычно вводятся в виде матрицы (эти свойства отличаются от анизотропной пластичности, которая требует задания разных зависимостей растяжения сжатия для разных направлений). Следующие типы элемента позволяют использовать анизотропную упругость: SOLID64, PLANE13, SOLID5 и SOLID98.

Процедура задания свойств анизотропного упругого материала совпадает с процедурой задания нелинейных свойств. Вначале активируете таблицу данных, используя команду **TB** (с *Lab* = ANEL) и затем задаете значения коэффициентов матрицы упругости, используя команду **TBDATA**. Проверить введенную информацию можно при помощи команды **TBLIST**.

Создание геометрической модели

После задания свойств материалов следующим этапом анализа является создание конечно элементной модели (узлов и элементов) которая адекватно описывает геометрическую модель.

Существует два метода создания конечно элементной модели: сплошное моделирование и прямая генерация. При сплошном моделировании описывается геометрический вид модели, затем заполняется геометрическая модель узлами и элементами (накладывается конечно элементная сетка). Можно контролировать размер и форму создаваемых программой элементов. В случае прямой генерации, вручную определяя

ется расположение каждого узла и связь каждого элемента. Доступно несколько удобных операций, таких как копирование существующих узлов и элементов, симметричное отражение и так далее.

Задание нагрузений и получение решения

В ходе выполнения этого этапа, используется процессор SOLUTION для установки типа и опций анализа, задания нагрузений, установки опций шага нагружения и запуска конечно элементного решения. Нагрузки можно также задать в препроцессоре PREP7.

Установка типа и опций анализа

Тип анализа выбирается в зависимости от условий нагружения и вычисляемых параметров. Например, в случае вычисления собственных частот и формы колебаний, выбирайте модальный анализ. Программа ANSYS предлагает следующие типы анализа: статический или стационарный, нестационарный, гармонический, модальный, спектр, продольный изгиб и подструктурирование.

Для всех дисциплин можно использовать не все типы анализа. Например, модальный анализ не действителен для тепловой модели. Опции анализа позволяют настроить тип анализа. Типичными опциями анализа являются: метод решения, и опции Newton-Raphson. Для установки типа анализа используйте команда **ANTYPE (Main Menu> Preprocessor=> Loads => Analysis Type => New Analysis or Main Menu => Preprocessor=> Loads => Analysis Type => Restart)**. Для установки опций анализа используются команды **TRNOPT, HROPT, MODOPT, SSTIF, NROPT**, и так далее.

Задание нагрузок

Слово *нагрузки*, используемое в документации ANSYS включает граничные условия (ограничивающие условия, поддержки, или спецификации граничного поля) также как и другие внешне и внутренне заданные нагрузки. Все нагрузки, используемые в программе ANSYS, можно разбить на шесть категорий:

- Ограничивающие условия DOF (степень свободы).
- Силы.
- Поверхностные нагрузки.
- Объемные нагрузки.
- Инерционные нагрузки.
- Сопряженные нагрузки.

Можно задать большинство из этих нагрузок на сплошную модель (ключевые точки, линии, площади) или на конечно элементную модель

(узлы и элементы). С нагрузками связаны два важных термина, которые необходимо знать. Это шаги нагружения и приращения. Под шагом нагружения подразумевается конфигурация нагрузок для которых получается решение задачи. Например, в структурном анализе можно задать ветровую нагрузку на одном шаге нагружения и гравитацию на втором шаге нагружения. Шаги нагружения также полезны при разбиении на несколько фрагментов графика нагрузки нестационарного процесса.

Шаги приращения используются при выполнении каждого шага нагружения в основном для улучшения точности и сходимости нестационарного и нелинейного анализа. Шаги приращения также известны как временные шаги.

Установка опций шага нагружения

Опции шага нагружения можно изменять (количество шагов приращения, время окончания шага нагружения и выходные параметры) от одного шага нагружения к другому. От выполняемого типа анализа зависит задавать опции шага нагружения или нет.

Запуск решения

Для запуска решения воспользуйтесь одним из следующих методов:

Команда:

SOLVE

GUI:

Main Menu=> Solution=> Solve=> Current LS

Main Menu=> Solution=> *solution_method*

При выполнении этих команд, программа ANSYS извлекает информацию о модели и нагрузках из базы данных и рассчитывает результат. Результаты записываются в файл результатов (Jobname.RST, Jobname.RTH, Jobname.RMG, или Jobname.RFL) и также в базу данных. Единственное различие заключается в том, что единовременно в базе данных может находиться только один набор результатов, тогда как вы можете записать все наборы результатов (для всех шагов приращения) в файл результатов. Запустить решение многократных шагов нагружения можно решить следующим образом:

Команда:

LSSOLVE

GUI:

Main Menu> Solution> Solve> From LS Files

Обзор результатов

После получения решения используйте постпроцессоры ANSYS для обзора результатов. Доступны два постпроцессора: POST1 и POST26. Используйте POST1, общий постпроцессор, для обзора результатов одного шага приращения (временного шага) всей модели или одной из ее частей. Для входа в POST1 используется команда **/POST1 (Main Menu> General Postproc)**, действительна только на начальном уровне. Вы можете построить контурные графики, получить списки в табличной форме для обзора результатов анализа. POST1 предлагает множество других возможностей, включающих оценку погрешности, сочетание нагрузок, проведение вычислений среди полученных результатов, и операции пути. Используйте POST26, временной постпроцессор, для обзора результатов определенной точки модели в течение всех временных шагов (в течение всего анализа). Для входа в POST26 используйте команду **/POST26 (Main Menu> TimeHist Postpro)**, команда действительна только на начальном уровне. Вы можете построить график зависимости расчетных данных от времени (или частоты), а также результаты расчета в табличном виде. Другие возможности POST26 включают арифметические вычисления и комплексную алгебру. Дополнительная информация по возможностям POST1 и POST26 и как использовать их описаны в нижеприведенных разделах данного документа.

2.2. Исследование напряженно-деформированного состояния пластины с отверстием при растяжении (Задача №1)

Постановка задачи

Стальная пластинка с круглым центральным отверстием подвергается одноосному растяжению. Задача симметрична, поэтому рассматривается четверть конструкции. На соответствующих границах задаются симметричные краевые условия в перемещениях, устанавливаются две угловые точки сопряжения (конвергенции). Исследуется напряженно-деформированное состояние пластинки с применением уточненного Р-метода решения.

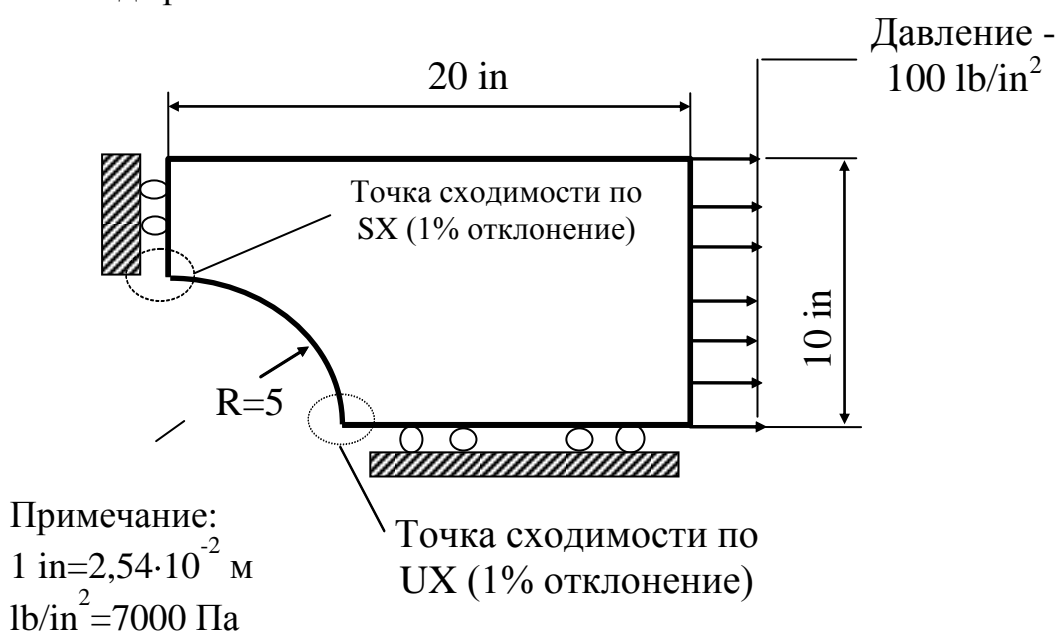


Рис. 2.1. Размеры пластины

Размеры конструкции показаны на рисунке 5.

Материал – сталь AISI C1020 с модулем Юнга $30 \cdot 10^6 \text{ lb/in}^2$ ($2,1 \cdot 10^{11} \text{ lb/in}^2$) (in – дюймы) и коэффициентом Пуассона 0,29.

Допущения: Плосконапряженное состояние.

Этапы решения

Подготовка модели

1. Заголовок задачи.
2. Инициализация параметров для построения геометрии модели.
3. Установка фильтров.
4. Выбор типа и параметров элементов.

5. Определение свойств элементов.
6. Свойства материала.
7. Построение прямоугольной области.
8. Построение круга.
9. Вырезаем отверстие в пластинке (операция **Subtract**).
10. Разбиение области на элементы стандартного размера.
11. Граничные условия в перемещениях.
12. Прикладывание растягивающей распределенной нагрузки на части внешней границы.

Расчет

13. Добавление точек контроля сходимости результатов (конвергенции).
14. Решение.

Анализ результатов (postprocessing)

15. Загрузка постпроцессора и чтение из файла результатов счета.
16. Изображение деформированной пластинки.
17. Приведение результатов к узлам локальной сетки.
18. Изображение напряжений **Sx**.
19. Получение образа графического окна (**Capture Image**).
20. Анализ эквивалентных по Мизесу напряжений.
21. Сгущение локальной сетки внутри Р-элементов до 4 отрезков на сторону.
22. Отображение напряжений **Sx** и сравнение с полученным ранее образом (captured image).
23. Выход из ANSYS-программы.

Поэтапное решение задачи

Прежде, чем приступить к построению модели, необходимо ввести команды так называемого «начального уровня» (*Begin-level commands*), начинающееся со слэша (/): имя задачи (*Jobname*), вид анализа (например, *Mechanical*), графический драйвер (*graphics driver*), заголовок (*the Title*), систему единиц (*the Units*), а затем – использовать препроцессор *PREP7* для задания типа и констант элементов, свойств материала и геометрии модели.

Подготовка модели

1. Заголовок задачи

U_M (Utility Menu (рис. 2.2) – содержит набор утилит для работы с файлами, контроля, выбора, графического контроля, задания общих параметров.): **File** → **Change Title**

1.1. Набрать заголовок «*p-Method Plate with a hole*» (рис. 2.3).

OK

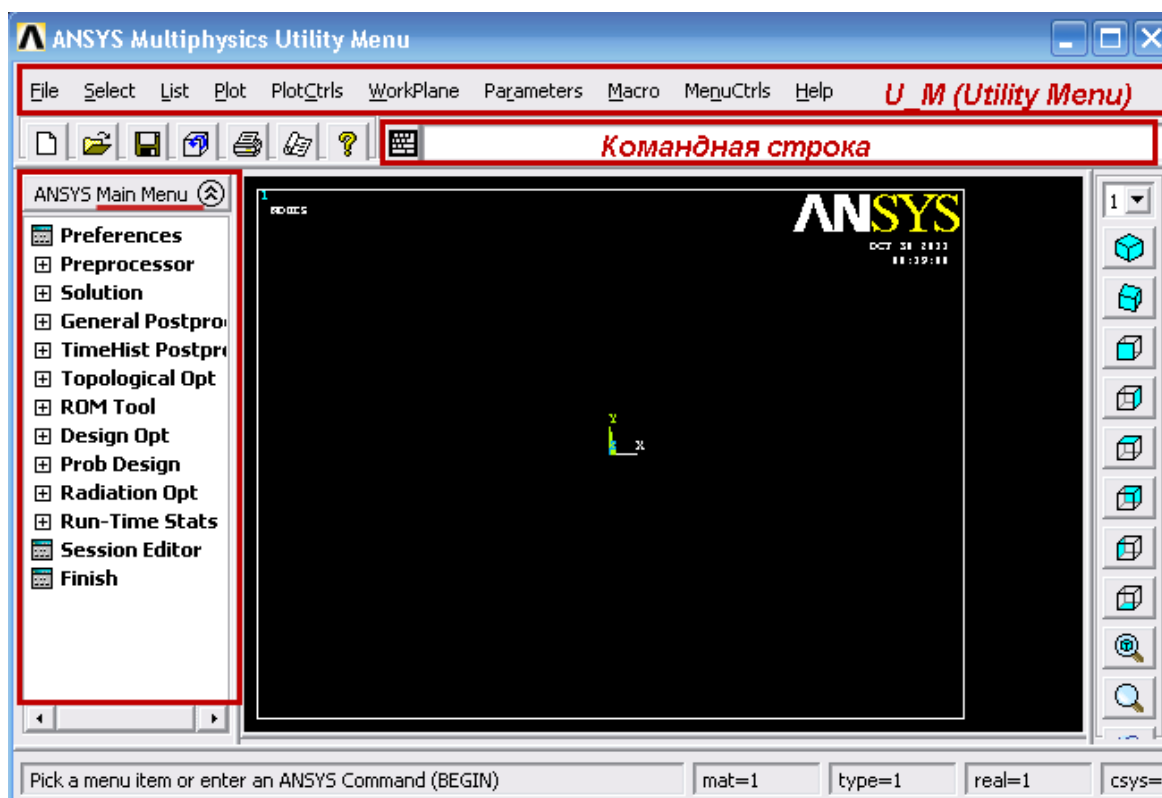


Рис 2.2. Интерфейс программы

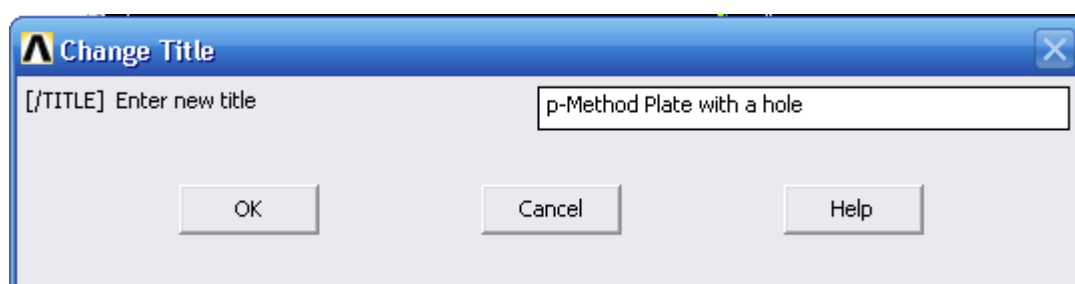


Рис 2.3. Заголовок задачи

2. Инициализация параметров для построения геометрии модели.

U_M: Parameters→**Scalar Parameters**

2.1. В появившемся окне в строке Selection ввести имена и значения переменных (после набора одной переменной – Accept) (рис. 2.4).

height=10
width=20
radius=5

2.2. Close

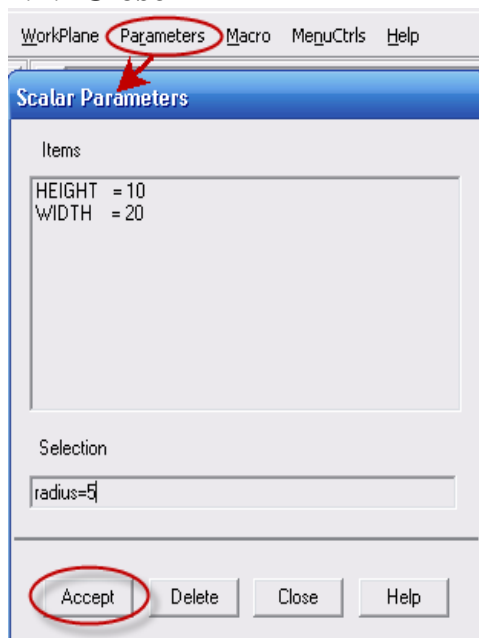


Рис 2.4. Установка геометрических параметров

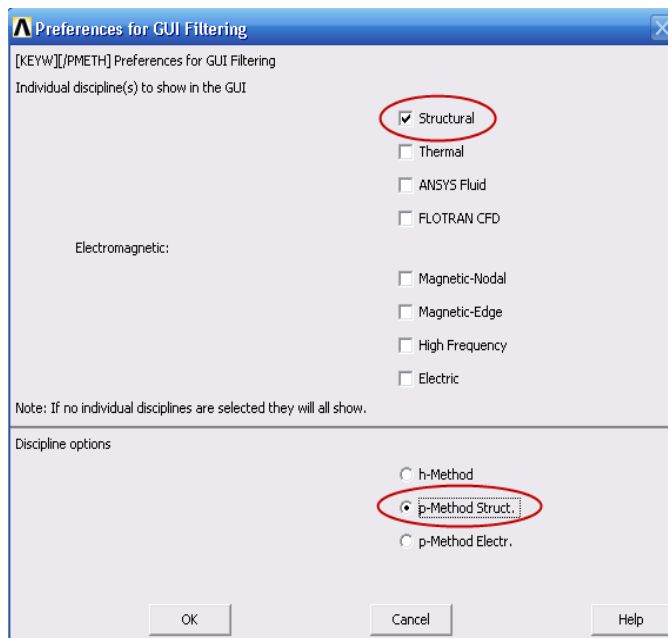


Рис 2.5. Установка фильтров

3. Установка фильтров

Выбор Р-метода ограничивает состав всех меню среды теми пунктами, которые относятся к данному типу расчета.

M_M (Main Menu - основное меню первичных ANSYS-функций): Preferences.

3.1. Выбрать класс задач **Structural**

3.2. Выбрать **P-Method Struct.** в нижней части окна (рис. 2.5)

3.3. **OK**

4. Выбор типа и параметров элементов (элемент высокого порядка Plane 145).

M_M: Preprocessor→Element Type→Add/Edit/Delete.

4.1. **Add** (добавить новый тип элемента)

4.2. Выбрать **2D Quad (PLANE 145)** (рис. 2.6)

4.3. **OK**

4.4. **Options** (параметры элемента)

4.5. Сменить тип анализа с **Plane stress** на **Plane stress + TK** (плосконапряженное состояние с учетом толщины элемента) (рис. 2.7)

4.6. **OK**

4.7. Close

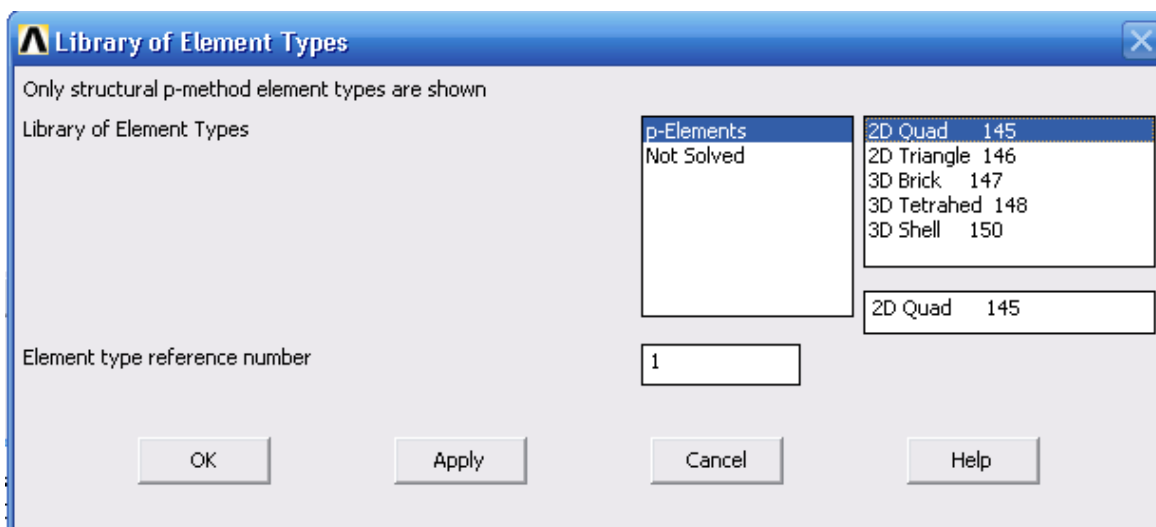


Рис. 2.6. Выбор типа элементов

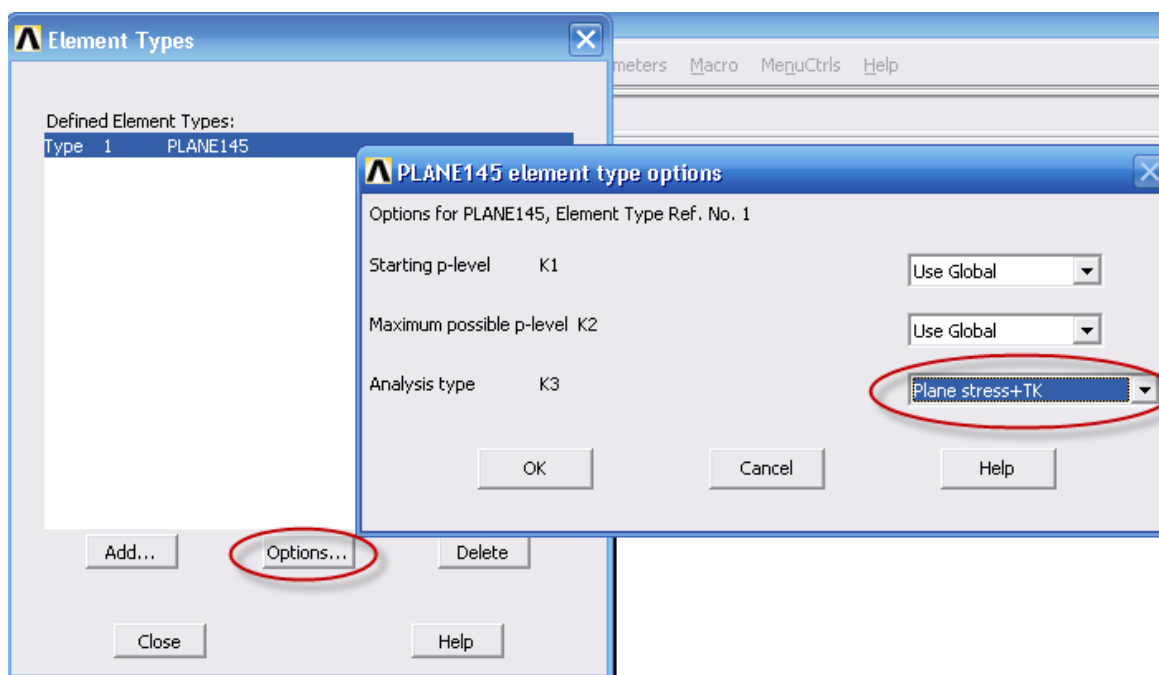


Рис. 2.7. Выбор параметров элементов.

5. Определение свойств элементов

Толщина данного типа элемента (см. предыдущий пункт) задается в пункте Real Constants главного меню.

M_M: Preprocessor → **Real Constants**

5.1. **Add** (добавляем новое множество к списку реальных констант, пока пустому)

5.2. **OK** (множество соответствует элементу PLANE145)

5.3. Ввести **0.25** (толщина в дюймах) (рис. 2.8).

Внимание! Десятичные дроби вводятся через точку.

5.4. **OK**

5.5. **Close**

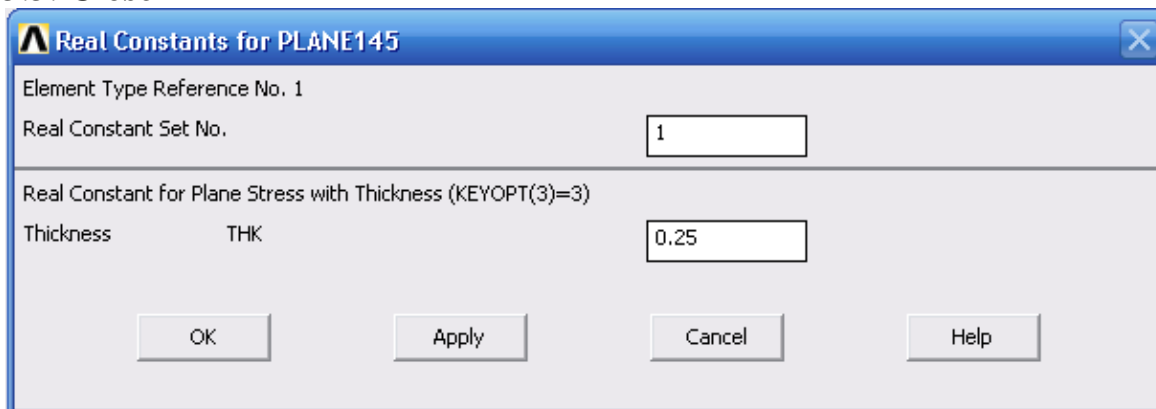


Рис. 2.8. Определение свойств элементов

6. Свойства материала

M_M: Preprocessor→**Material Props**→**Material Models**→**Favorites** →
Linear Static→**Linear Isotropic**

6.1. Материал с номером 1

6.2. Ввести **3030.023e6** для **EX** (модуль Юнга)

6.3. В поле **PRXY** (коэф. Пуассона) задать **0.29** (рис. 2.9)

6.4. **OK**

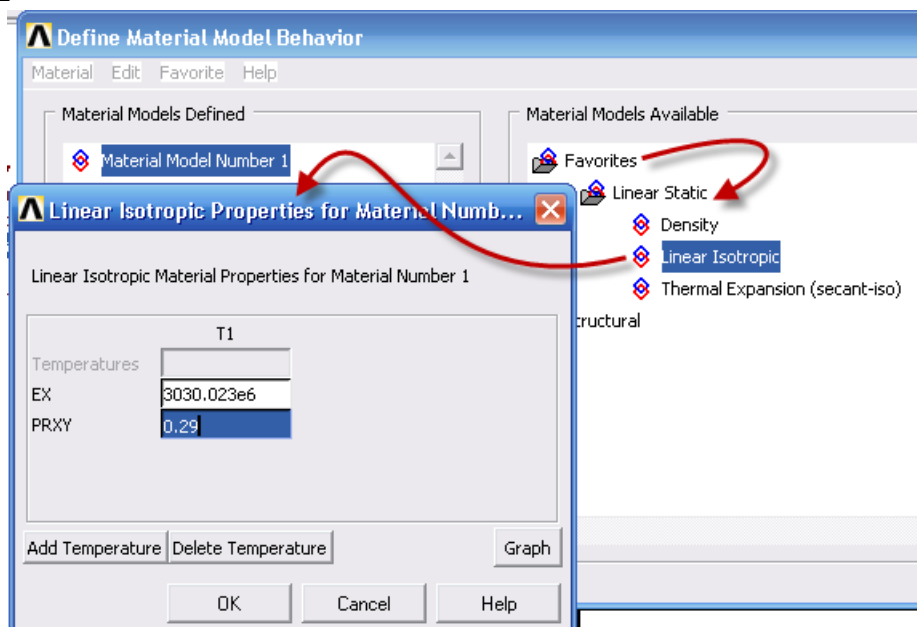


Рис. 2.9. Задание свойств материала

7. Построение прямоугольной области

M_M: Preprocessor→**Modeling**→**Create**→**Areas-Rectangle**→ **By 2 Corners** (рис. 2.10)

7.1. Задаем координаты левого нижнего угла и размеры прямоугольника: $WPX=0$, $WPY=0$, $WIDTH=width$, $HEIGHT=height$ (width и height – инициализированные ранее переменные) (рис. 2.10).

7.2. **OK**

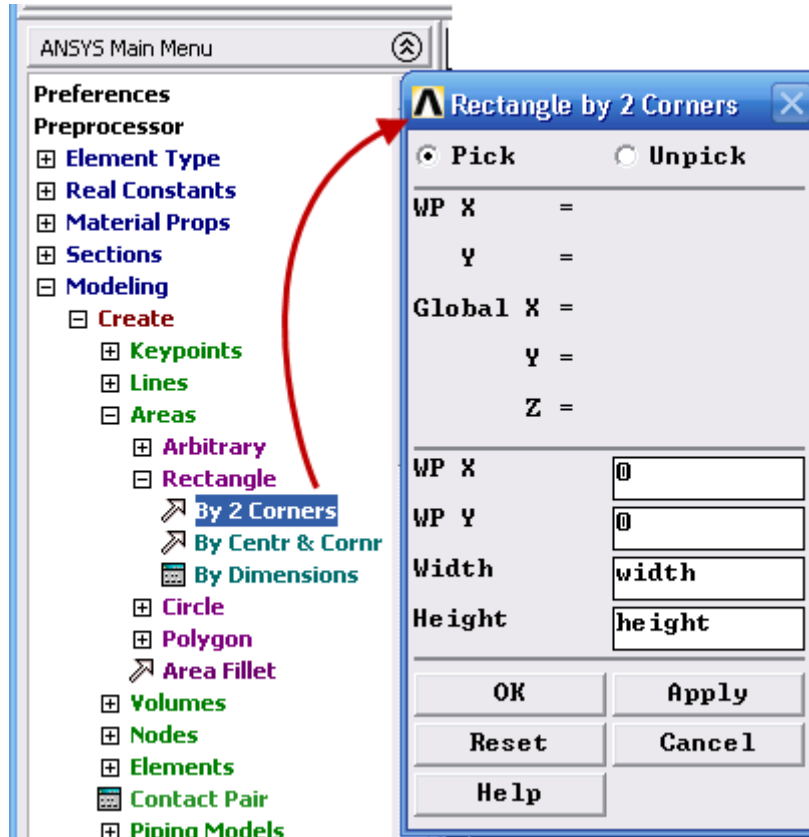


Рис. 2.10. Построение прямоугольной области

Включение нумерации областей в графическом окне:

U_M: PlotCtrls→**Numbering**

7.3. Перевести переключатель **AREA** в положение **ON**

7.4. **OK**

8. Построение круга

M_M: Preprocessor → **Modeling**→ **Create** → **Areas**→ **Circle** → **Solid Circle**

8.1. Вводим координаты центра и радиус: $WPX=0$, $WPY=0$, $RAD =radius$ (рис. 2.11)

8.2. **OK**

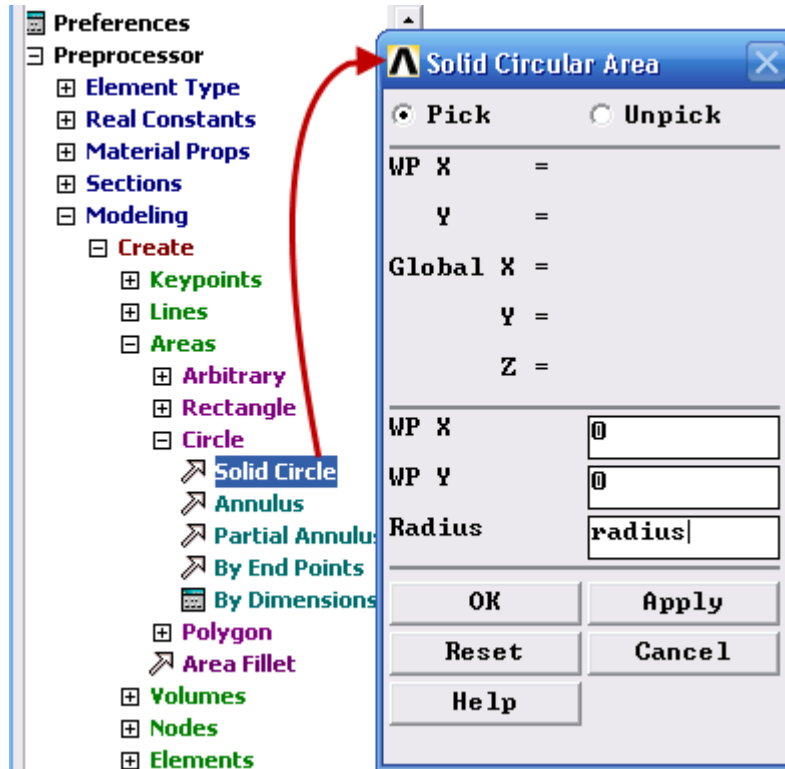


Рис. 2.11. Построение круга

9. Вырезание отверстия в пластинке (операция **Subtract** – исключение)

M_M: Preprocessor→**Modeling** → **Operate** → **Booleans** → **Subtract** → **Areas**

9.1. Указателем мыши отметить прямоугольник A1

9.2. **OK**

9.3. Отметить круг A2

9.4. **OK** (рис. 2.12)

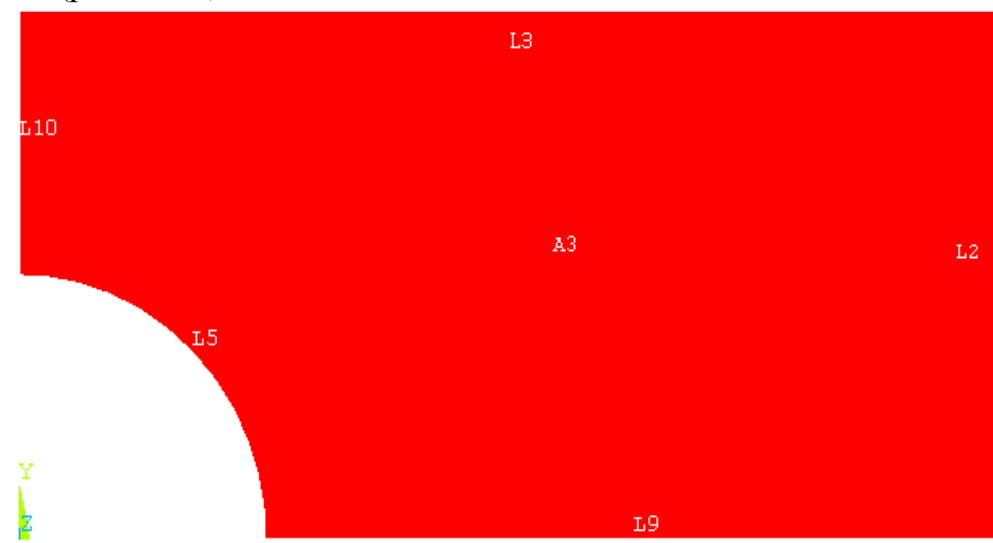


Рис. 2.12. Результат вырезания

10. Разбиение области на элементы стандартного размера.

M_M: Preprocessor→Meshing-Mesh-→Areas-Free

10.1. Нажать **Pick All** (выделить все) (рис.2.13).

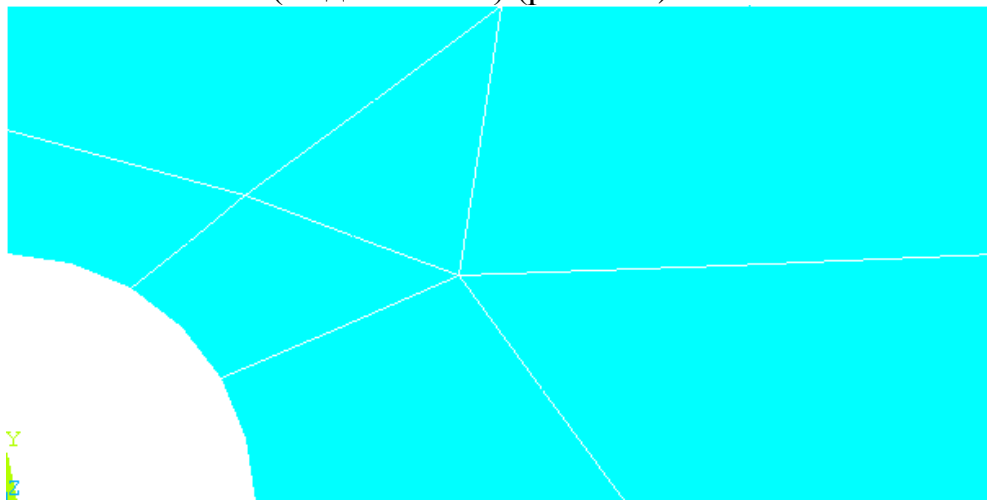


Рис. 2.13. Разбиение области

11.Граничные условия в перемещениях.

В данном примере перемещения на осях симметрии задаются традиционным способом. Альтернативный вариант – использование пункта **Symmetry B.C.** меню **Loading**.

U_M: PlotCtrls→Numbering

11.1. **Line Numbers** – в положение **ON** (вкл. нумерацию линий)

11.2. **Area Numbers** – **Off** (откл. нумерацию областей)

11.3. **OK**

M_M:Preprocessor→Loads → Define Loads →Apply→Structural-Displacement→On Keypoints (задать перемещения по ключевым точкам)

11.4. Отметить концы линии L9

11.5. **OK**

11.6. Выбрать **UY** для **Lab2** (задается перемещение U_y)

11.7. Ввести 0 в **VALUE** (его значение) (рис. 2.14а)

11.8. **Yes** в **KEXPND** (для всех узлов данной линии)

11.9. **Apply**

То же – на вертикальной границе

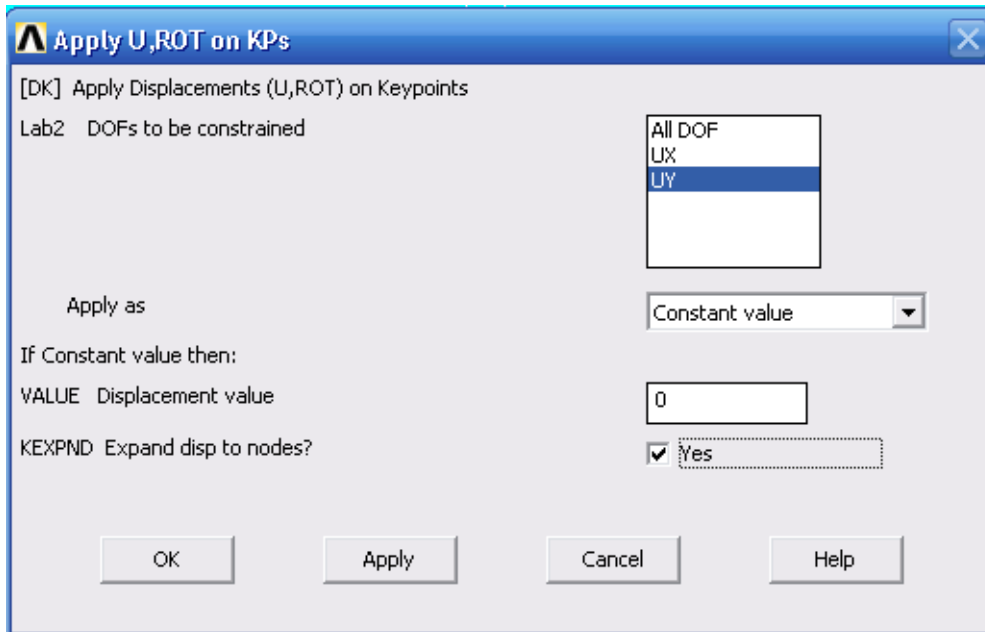
11.10. Отметить концы линии L10

11.11. **OK**

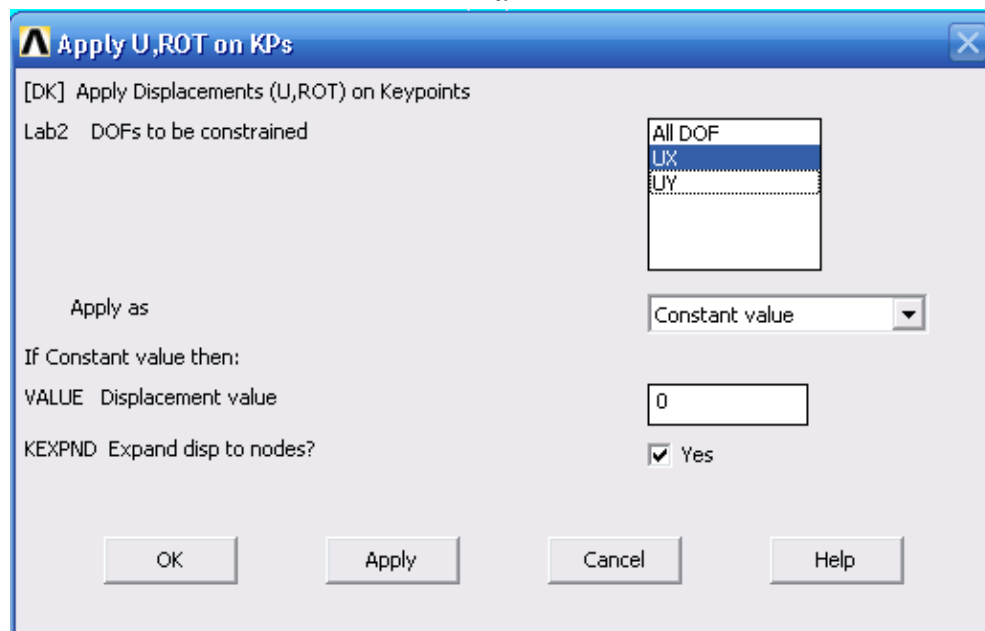
11.12. Выбрать **UX** для **Lab2** (задается перемещение U_x)

11.13. Ввести 0 в **VALUE** (его значение) (рис. 2.14б)

11.14. **OK**



a



б

Рис. 2.14. Перемещения по ключевым точкам

12. Прикладывание растягивающей распределенной нагрузки на части внешней границы.

M_M: Preprocessor→Loads→-Loads-Apply→-Structural-Pressure→On Lines

12.1. Отметить линию L2

12.2. ОК

12.3. Ввести *-100* (минус сто) в **VALUE** (растягивающие напряжения) (рис. 2.15)

12.4. **ОК** (рис. 2.16)

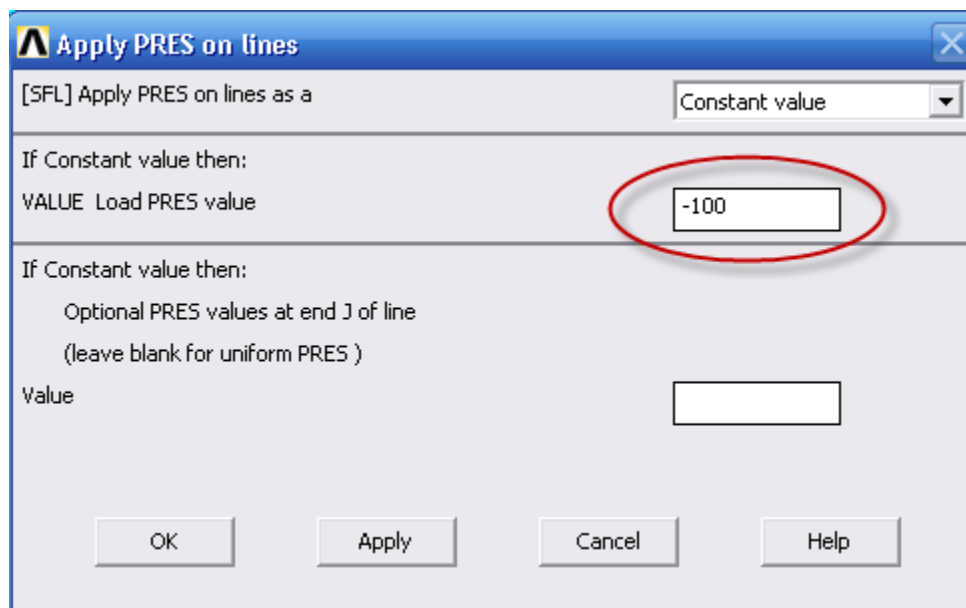


Рис. 2.15. Прикладывание растягивающей распределенной нагрузки

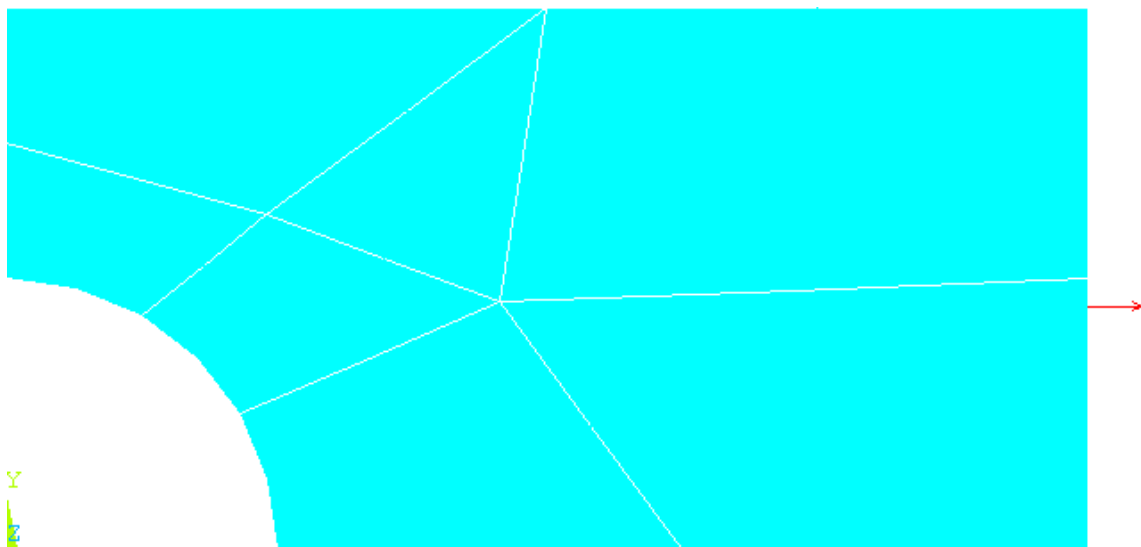


Рис. 2.16. Растягивающая нагрузка

Расчет.

На этапе расчета вводятся две точки конвергенции, после чего инициализируется конечно-элементный алгоритм.

13. Добавление точек контроля сходимости результатов (конвергенции)
M_M: Solution → Load Step Opts → p-Method → Convergence Crit

- 13.1. Выбрать **Replace** (заменить)
- 13.2. Выбрать **Local for Solids** для **p-Convergence criteria**
- 13.3. **OK**
- 13.4. Отметить узел на пересечении линий 5 и 9
- 13.5. **OK**
- 13.6. Изменить погрешность сходимости **TOLER** на 1
- 13.7. Выбрать **DOF solution** (сходимость по перемещениям)
- 13.8. Выбрать **Translation UX** (рис. 2.17)
- 13.9. **OK**
- 13.10. **Add**
- 13.11. **OK**
- 13.12. Выделить пересечение линий 5 и 10
- 13.13. **OK**
- 13.14. Изменить погрешность конвергенции в процентах **TOLER** на 1
- 13.15. Выбрать **stress** (сходимость по напряжениям)
- 13.16. Выбрать **X-direction SX**
- 13.17. **OK**
- 13.18. **Close**

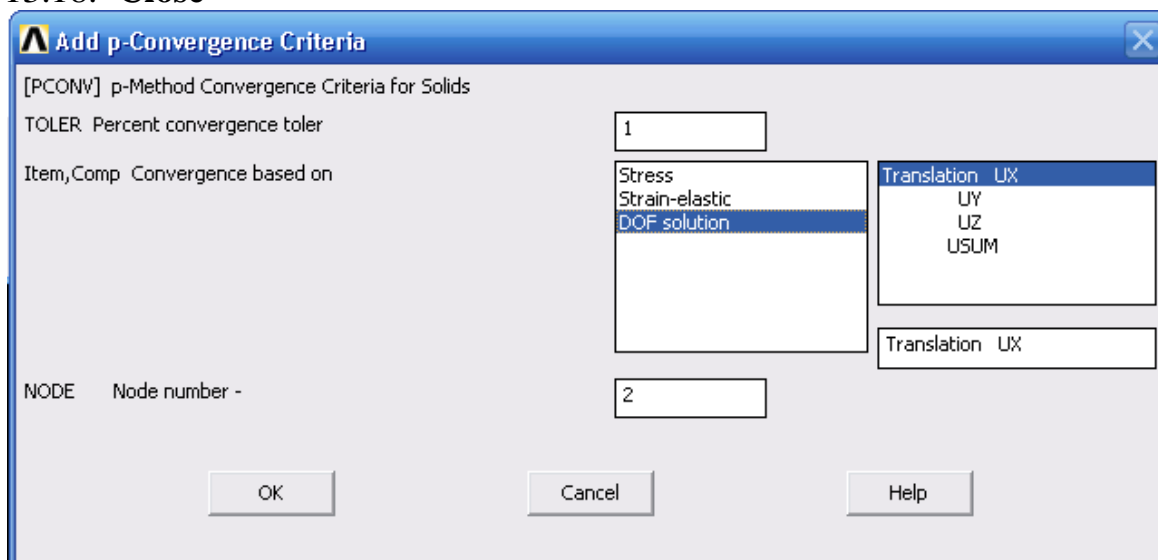


Рис.2.17. Добавление точек конвергенции

14. Решение

M_M: Solution→Solve→Current LS

- 14.1. Прочитать сообщения в окне статуса, закрыть его (**Close**)
- 14.2. **OK** (рис. 2.18)
- 14.3. По окончании счета закрыть окно **Solution is done!**

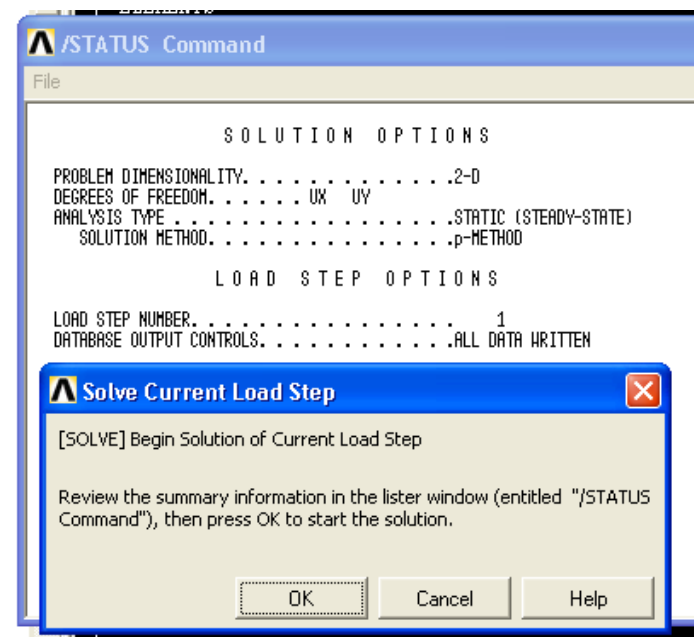


Рис.2.18. Решение

Анализ результатов (postprocessing)

На данном этапе строятся изолинии напряжений и перемещений, а также исследуются напряжения в точках «подсетки» р-элемента.

15. Загрузка постпроцессора и чтение из файла результатов счета.

M_M: General Postproc → Read Results-Last Set

16. Изображение деформированной пластинки

M_M: General Postproc → Plot Results → Deformed Shape

16.1. Отметить **Def+Undef edge** (отображать начальную и конечную форму области) (рис. 2.19)

16.2. **OK**

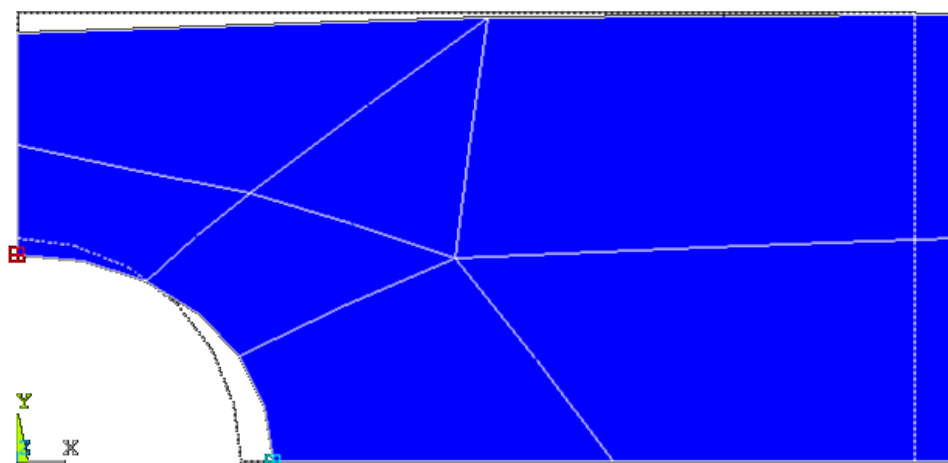


Рис.2.19. Изображение деформированной пластинки

17. Просмотр результатов в узлах локальной сетки.

Для Р-элементов высокого порядка выходные данные вычисляются в узлах локальной на элементе сетки. Сетка задается количеством отрезков, на которые разбивается каждая из сторон элементов (по умолчанию - 2 отрезка на стороне).

U_M: PlotCtrls→Device Options

17.1. Перевести в положение **ON** флажок **Vector mode**.

17.2. **OK**

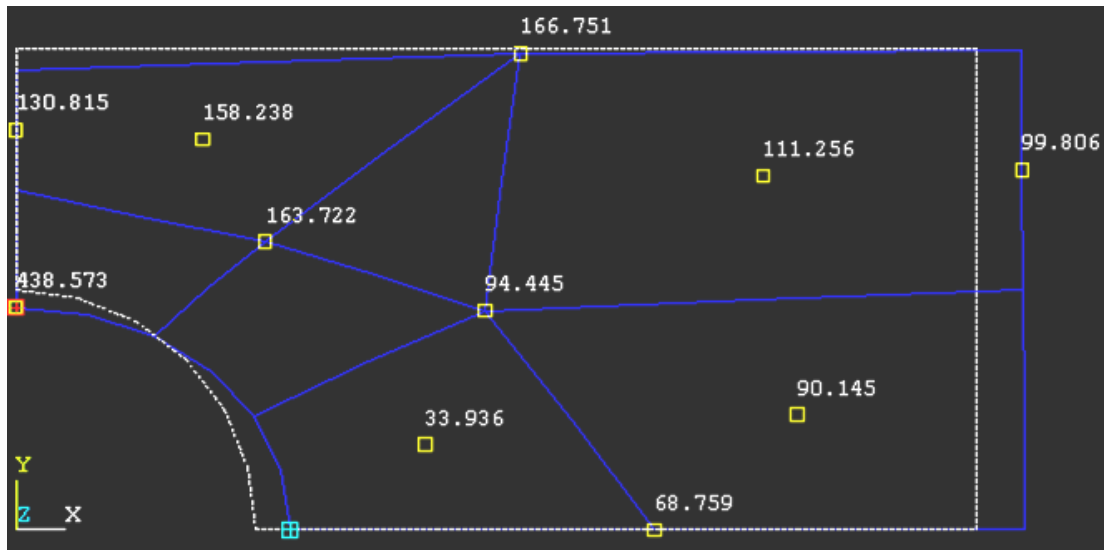


Рис. 2.20. Просмотр результатов в узлах локальной сетки

M_M: General Postproc→Query Results→Subgrid Solu

17.3. Выбрать **Stress** в левом окне (в узлах локальной сетки, построенной внутри Р-элемента, будут вычислены напряжения...)

17.4. Выбрать **X-direction SX** (нормальные, в направлении X)

17.5. **OK**

17.6. Отметить в графическом окне узловые точки локальной сетки для просмотра напряжения SX (рис. 2.20)

17.7. **OK**

U_M: PlotCtrls→Device Options

17.8. Флаг **Vector Mode** – в положение **Off** (результаты счета в графическом окне отображать в виде изообластей)

17.9. **OK**

18. Изображение напряжений **Sx**.

M_M: General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu (построение изолиний по узловым значениям)

18.1. Выбрать **Stress**

18.2. Выбрать **X-Component of stress**

18.3. **OK** (в графическом окне – картина изолиний напряжения **Sx**, уровни выделены разным цветом; легенда – снизу) (рис. 2.21).

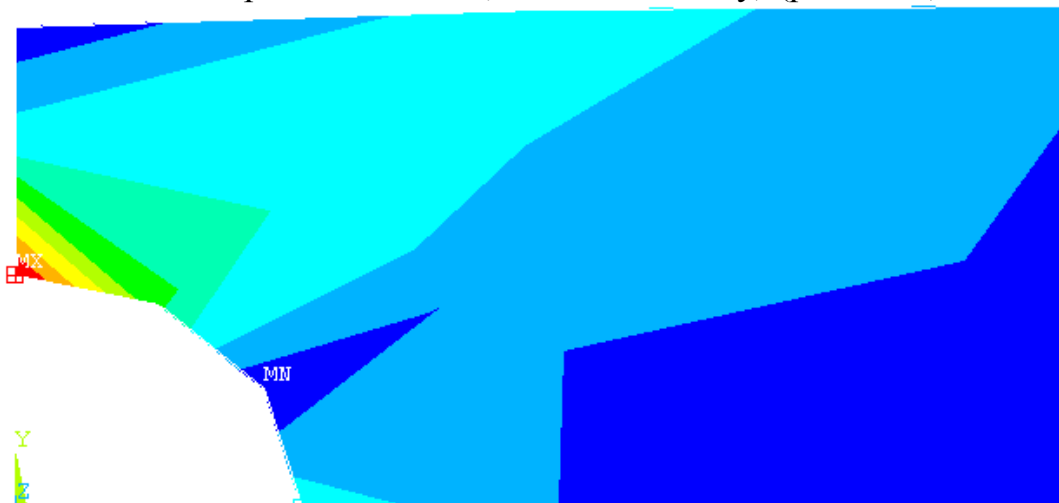


Рис. 2.21. Изображение напряжений **Sx**

19. Получение образа графического окна (**Capture Image**).

Данная операция применяется, когда необходимо сохранить одно или несколько полученных изображений в файле формата BMP для последующего или немедленного вывода на печать и сопоставления результатов.

U_M: PlotCtrls→ Capture Image

19.1. Выбрать **File→Save as** в окне Image1

19.2. Набрать имя *Plate.bmp* в строке **Write image to**

19.3. **OK**

19.4. **File→Close** в окне Image1

20. Анализ эквивалентных по Мизесу напряжений.

M_M: General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu

20.1. Выбрать **Stress** в левом окне

20.2. Скроллингом найти **von Mises Stress** в правом окошке

20.3. **OK** (просматриваем картину эквивалентных напряжений в графическом окне) (рис. 2.22).

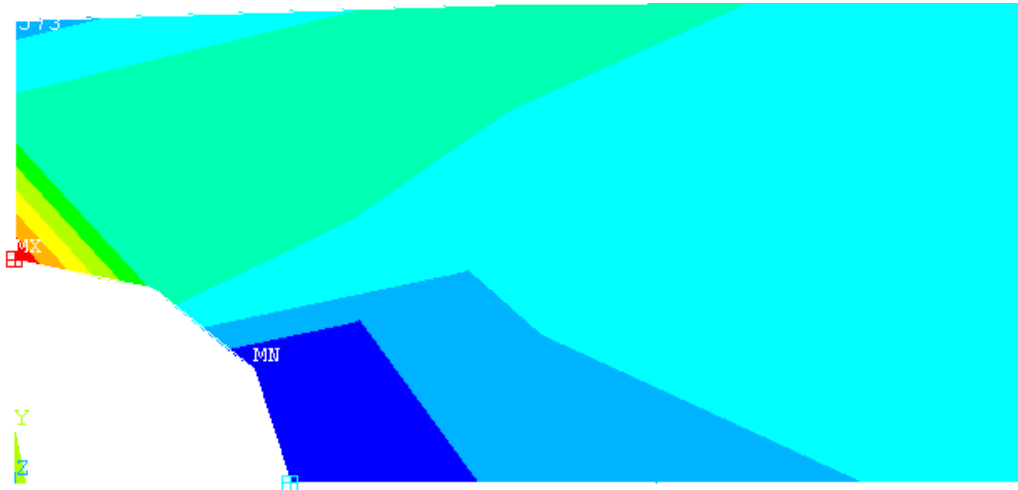


Рис. 2.22. Анализ эквивалентных по Мизесу напряжений

21. Сгущение локальной сетки внутри р-элементов до 4 отрезков на стороне.

Измельчение сетки узлов для отображения результатов в графической форме повышает детализацию выводимой картинке.

M_M: General Postproc→Options for Outp

21.1. Выбрать **4 facets/edge** для опции **[/EFACET]** (рис. 2.23)

21.2. **OK**

U_M: Plot→Replot (перерисовать картинку с новыми параметрами)
(рис. 2.24)

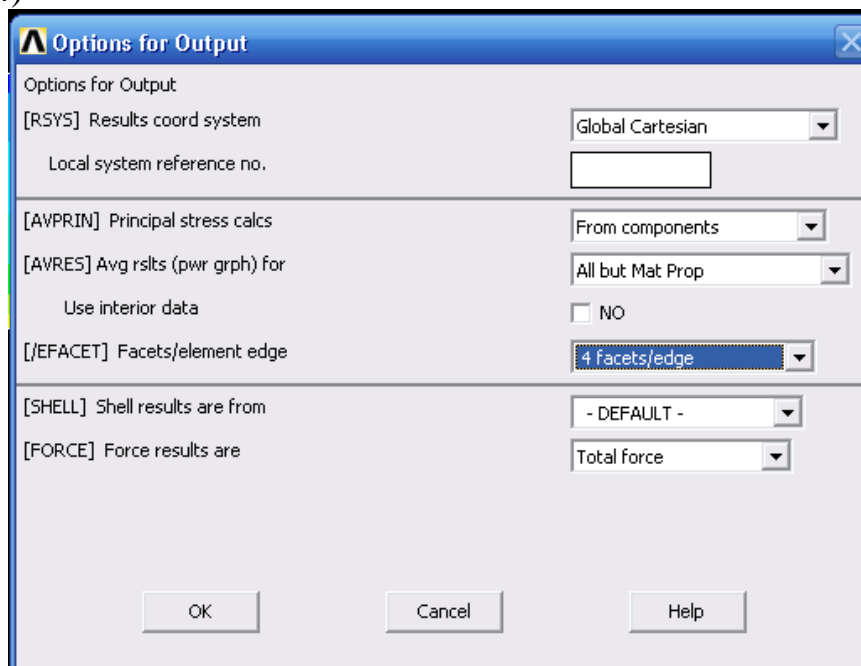


Рис. 2.23. Сгущение локальной сетки внутри р-элементов до 4 отрезков

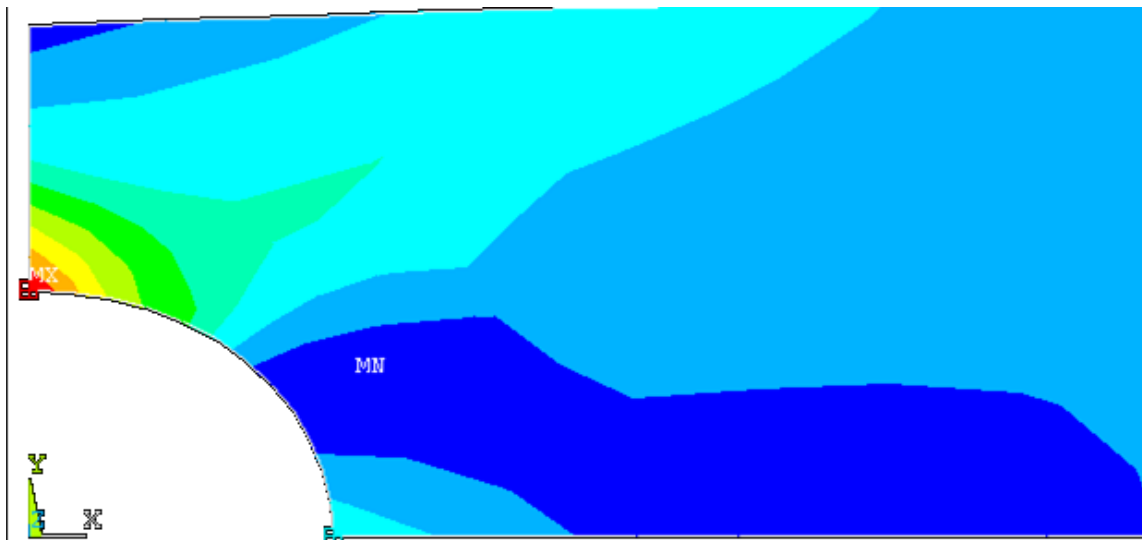


Рис. 2.24. Картинка с новыми параметрами

22. Отображение напряжений S_x и сравнение с полученным ранее образом (captured image).

В п. 19 сохранен образ изолиний напряжений S_x с разрешением 2 отрезка на сторону. Сравним его с изображением, имеющим большую детализацию (п. 21)

M_M: General Postproc→**Plot Results**→**Contour Plot**→**Nodal Solu**

22.1. Скроллингом найти и выбрать **S_x** в правом окошке

22.2. **OK** (просматриваем картину эквивалентных напряжений)

U_M: PlotCtrls→**Restore Image** (загрузить образ)

22.3. Выбрать в правом окошке файл *plate.bmp*

22.4. **OK**

22.5. После просмотра и анализа закрыть окно образа, выбрав **File**→**Close**

23. Выход из ANSYS-программы

При выполнении процедуры выхода можно сохранить данные в различном объеме: геометрия, граничные условия (**Save Geom+Loads**); геометрия, граничные условия, параметры расчета (**Save Geom+Loads+Solu**); геометрия, граничные условия, параметры расчета, результаты (**Save Everything**); ничего не сохранять (**No Save!**):

Toolbar (Toolbar - окно наиболее общих функций ANSYS, из которых необходима функция SAVE_DB - сохранение базы данных и, возможно, восстановление базы данных RESUM_DB - восстановление базы данных): **Quit**

23.1. Выбрать **Save Everything** (сохранить все) (рис. 2.25).

23.2. **OK**

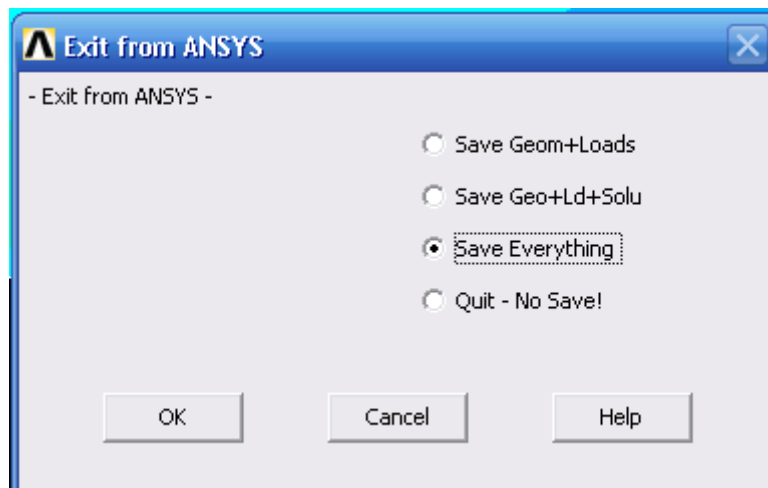


Рис. 2.25. Выход из ANSYS-программы

2.3. Исследование напряженно-деформированного состояния трубы под давлением (Задача №2)

Постановка задачи.

Пространственная задача – толстостенная труба под внутренним давлением. Определение напряженно-деформированного состояния длинной толстостенной стальной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Продольное сечение трубы и система координат показаны на рис. 2.26 (размеры в мм). Учитывая симметрию задачи, рассматриваем лишь четверть трубы высотой 1 см.

Конечно-элементную модель строим посредством поворота на угол 90° прямоугольника указанных размеров вокруг продольной оси y , задачу решаем в системе СИ.

Размеры конструкции показаны на рисунке 2.26.

Материал – сталь AISI C1020 с модулем Юнга $30 \cdot 10^6 \text{ lb/in}^2$ ($2,1 \cdot 10^{11} \text{ lb/in}^2$) (in – дюймы) (и коэффициентом Пуассона 0,29.

Внутреннее давление: $P=10^6 \text{ Па}$ (10 атм).

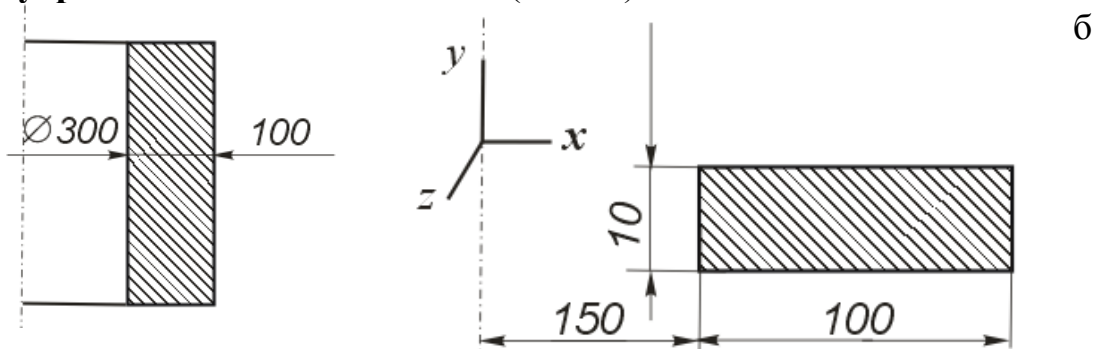


Рис. 2.26

Подготовка модели.

1. Заголовок задачи.

U_M: File → Change Title

1.1. Наберите заголовок «*Cylinder under pressure*»

ОК

2. Установка фильтров.

M_M: Preferences.

2.1. Выберите класс задач **Structural**

2.2. **ОК** (выбрали задачу механики деформируемого твердого тела)

3. Выбор типа и параметров элементов (трехмерный тетрагональный элемент с 10 узлами SOLID92).

M_M: Preprocessor→**Element Type**→**Add/Edit/Delete**.

3.1. **Add** (добавьте новый тип элемента)

3.2. Выберите в библиотеке элементов (левое окно) **Solid (Selection-10node 92)** (рис. 2.27).

3.3. **OK**

3.4. **Close**

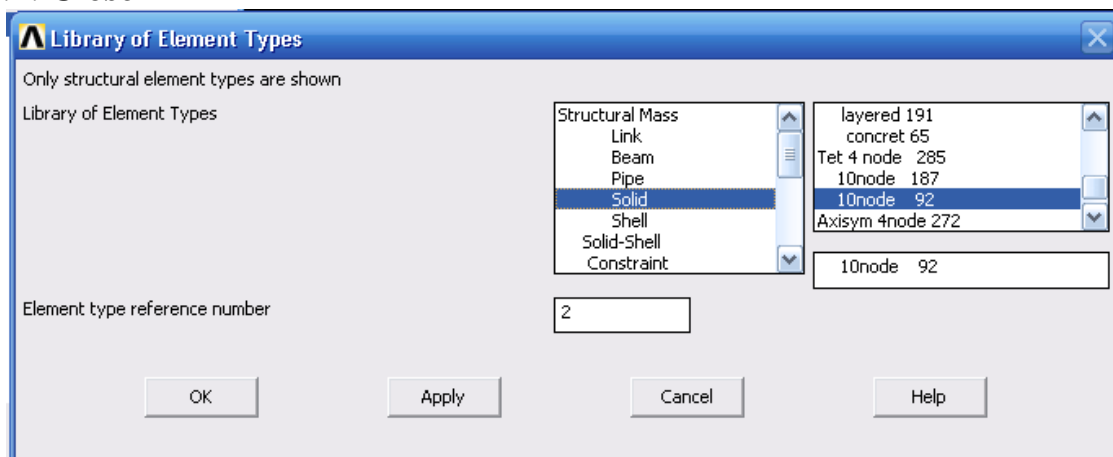


Рис. 2.27. Выбор типа и параметров элементов

4. Свойства материала

В данном примере задается изотропный материал с постоянными свойствами

M_M: Preprocessor→**Material Props**→**Material Models** →**Structural**→**Linear** →**Elastic**→**Isotropic**

4.1. материал с номером 1

4.2. Введите $3030.023e6$ для E_X (модуль Юнга)

4.3. В поле $PRXY$ (коэф. Пуассона) задайте 0.29 . (рис. 2.28)

4.4. **OK**

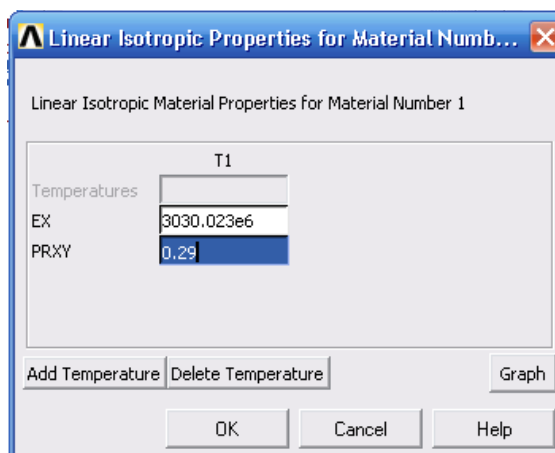


Рис. 2.28. Задание свойств материала

5. Построение прямоугольной области.

M_M: Preprocessor→Modeling→Create→Areas→Rectangle→ By 2 Corners

5.1. Задайте координаты левого нижнего угла и размеры прямоугольника: $WPX=0.15$, $WPY=0$, $WIDTH=0.1$, $HEIGHT=0.1$ (рис. 2.29).

5.2. **OK**

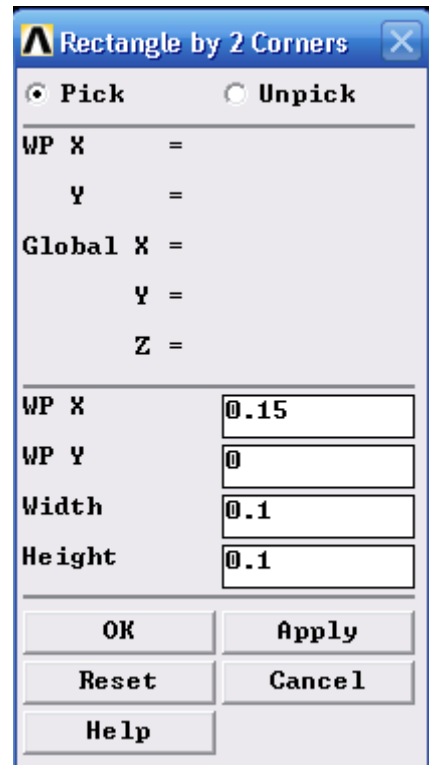


Рис. 2.29. Построение прямоугольной области

6. Вращение прямоугольника, образование цилиндра.

Для установления оси вращения создайте две ключевые точки на оси Y. Так как ключевые точки с номерами 1, 2, 3 и 4 уже существуют (они были созданы при построении прямоугольника), то новым ключевым точкам присвойте номера (с запасом): 10 и 11. Ключевые точки создайте с помощью команды K, записывая ее в поле **Pick a menu item or enter an ANSYS command**:

K, 10, 0., 0., 0. Нажмите **Enter**. Определили ключевую точку номер 10 (0, 0, 0);

K, 11, 0., 0.2, 0. Нажмите **Enter**. Определили ключевую точку номер 11 (0, 0.2, 0) (рис. 2.30).

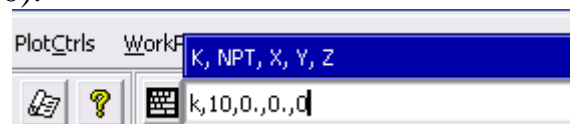


Рис. 2.30. Ввод ключевых точек с командной строки

M_M: Preprocessor→Modeling→Operate→Extrude→Areas→About Axis

6.1. Указателем мыши отметьте прямоугольник

6.2. **OK**

6.3. Отметьте курсором ключевые точки 10 и 11, определяющие ось вращения в появившемся окне (Диапазон вращения площади вокруг оси) введите 90° – угол вращения прямоугольника (рис. 2.31).

6.4. **OK**



Рис. 2.31. Диапазон вращения

Используя инструмент  поверните модель как указано на рис 2.32.

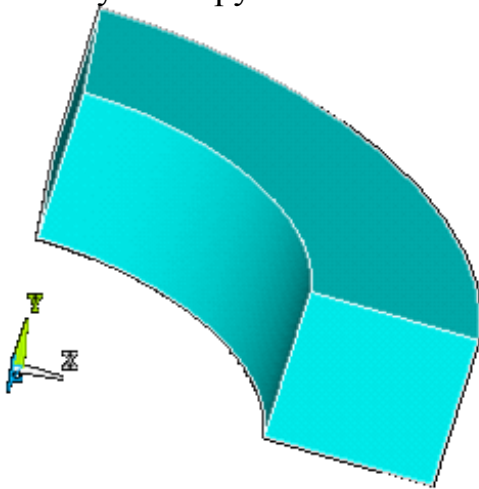


Рис. 2.32. Результат моделирования

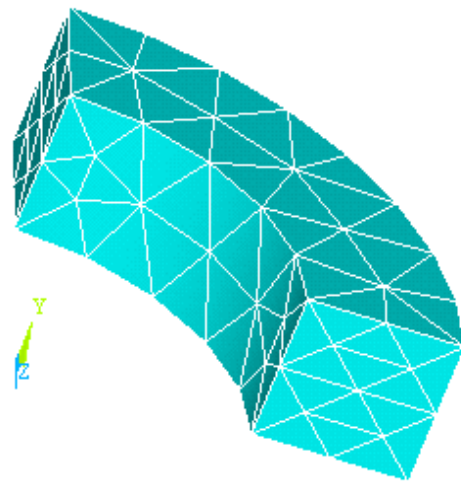


Рис. 2.33. Создание сетки МКЭ

7. Разбиение области на элементы стандартного размера.

При создании сетки конечных элементов используется тетрагональный элемент Solid92 с установками по умолчанию:

M_M: Preprocessor → **Meshing-Mesh** → **Volumes** → **Free**

7.1. Нажмите **Pick All** (выделить все) (рис. 2.33).

8. Граничные условия в перемещениях.

Задайте перемещения вдоль оси z точек радиальных сечений, параллельных плоскости $ux, Uz = 0$:

8.1 M_M: Preprocessor → **Loads** → **Loads-Apply** → **Structural** → **Displacement** → **On Areas**

Укажите на плоскость модели, перпендикулярную оси Z (рис. 2.34,а)

OK

8.2. Выберите **UZ** для **Lab2** (задается перемещение Uz)

8.3. Введите 0 в **VALUE** (его значение) (рис. 2.35).

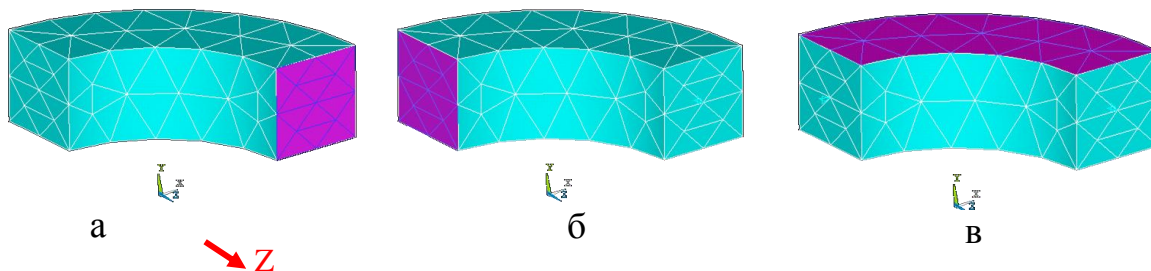


Рис. 2.34. Задание перемещений вдоль осей: а) $-z$; б) $-y$; в) $-x$.

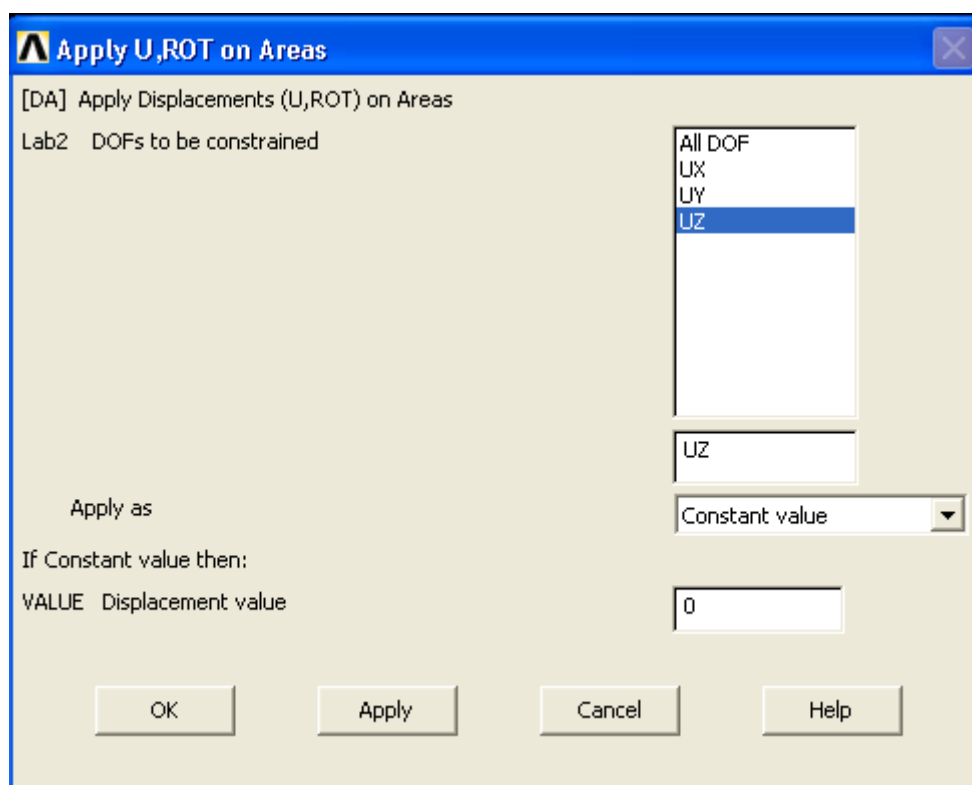


Рис. 2.35. Перемещения вдоль оси Z

8.4. **M_M: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Areas**

Укажите на плоскость модели, перпендикулярную оси X (рис. 2.34,б)
OK

8.5. Выберите **UX** для **Lab2** (задается перемещение U_x)

8.6. Введите 0 в **VALUE** (его значение)

Задайте перемещение вдоль оси y точек на одном из торцов кольца:

8.7. **M_M: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Areas**

Укажите на плоскость модели, перпендикулярную оси Y (рис. 2.34,в)

OK

8.8. Выберите **UY** для **Lab2** (задается перемещение Uy)

8.9. Введите **0** в **VALUE** (его значение).

Задайте давление на внутренней поверхности

8.10. **M_M:Preprocessor** → **Loads** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Displacement** → **Pressure** → **On Areas**. Отметьте курсором внутреннюю поверхность цилиндра и нажмите **Apply**

8.11. Введите **10.e6** в **VALUE** (его значение) (рис. 2.37).

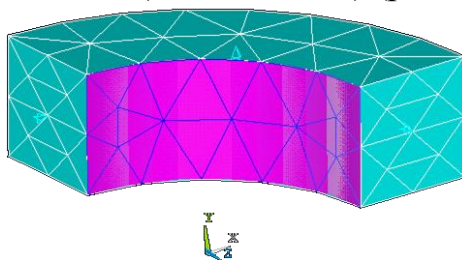


Рис. 2.36. Задание внутреннего давления

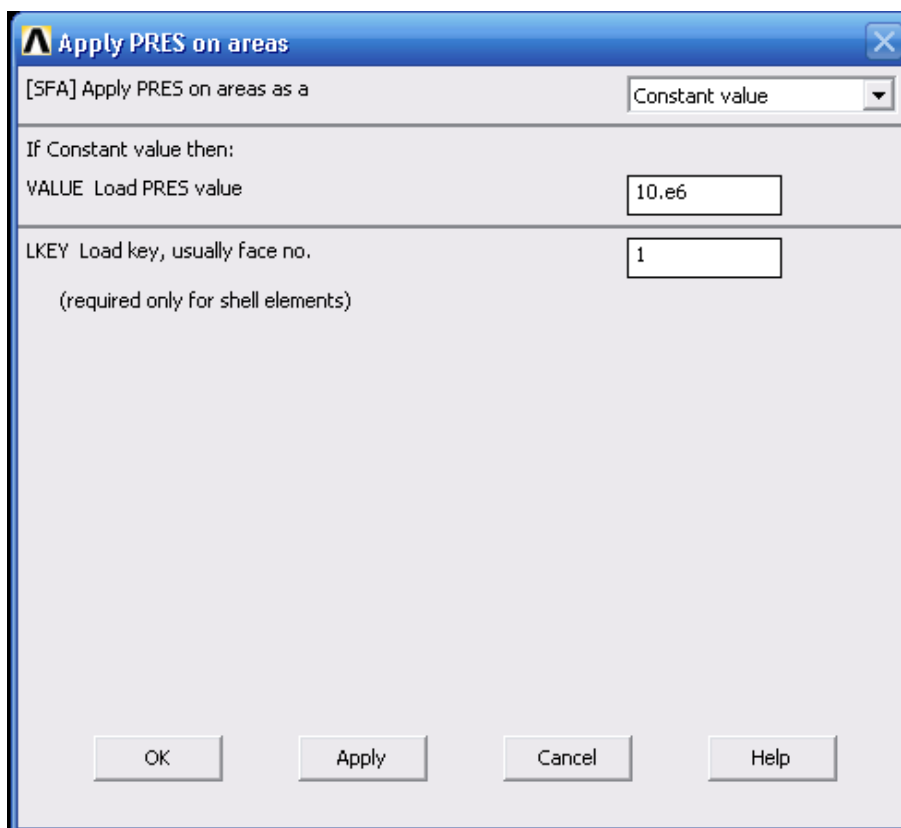


Рис. 2.36. Приложение внутреннего давления

9. Сохранение модели и сетки

Toolbar→**SAVE_DB** (сохранение данных в файле *Cylinder.db*)

Расчет.

Часто при решении трехмерных задач для повышения точности результатов полезно использовать при решении уравнений *Preconditioned Conjugate Gradient* метод:

9. Решение

9.1. **M_M: Solutions**→**Analysis Type**→**Sol'n Control**. В открывшемся окне **Solution Control** выбрать: **Sol'n Options**→**Pre-Conditions**→**OK**

9.2. **M_M: Solutions**→**Solve**→**Current LS** → **OK**

9.3. При запуске решения выводится окно статуса с сообщением краткой характеристики задачи. Закройте окно **File** →**Close**; Нажмите **OK** для запуска программы на счет (текущий шаг нагружения).

9.4. После завершения решения появляется сообщение в желтом окне: **Solution is done!** (расчет окончен!).

9.5. Нажмите **Close**.

Результаты расчета данного шага нагружения сохраняются в базе данных (файл *cylinder.db*) и в файле результатов (файл *Cylinder.rst*).

Анализ результатов (postprocessing)

На данном этапе строятся изолинии напряжений и перемещений, а также исследуются напряжения в точках.

10. Загрузка постпроцессора и чтение из файла результатов счета.

M_M: General Postproc→**-Read Results-First Set**

11. Изображение деформированного сегмента

M_M: General Postproc→**-Plot Results**→**Deformed Shape**

11.1. Отметить **Def+Undeformed** (отображать исходную и деформированную формы модели одновременно) (рис. 2.37).

11.2. **OK**

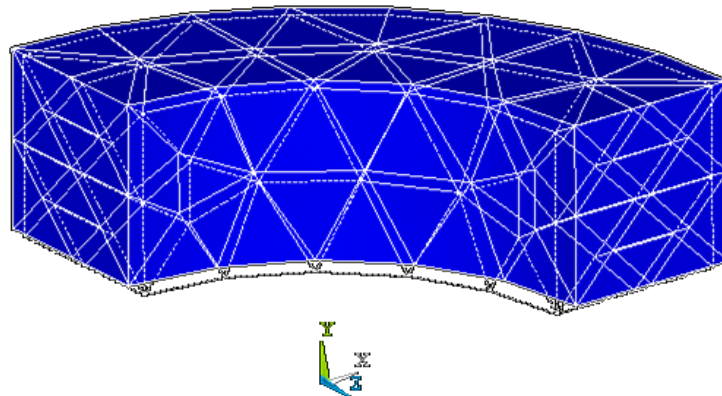


Рис. 2.37. Изображение деформированного сегмента

12. Изображение напряжений σ_x .

M_M: General Postproc→**Plot Results**→**Contour Plot**→**Element Solu**
(построение изолиний)

12.1. Выбрать **Stress**

12.2. Выбрать **X-Component of Stress**

12.3. **ОК** (в графическом окне – картина изолиний напряжения σ_x , уровни выделены разным цветом; легенда – снизу) (рис. 2.38).

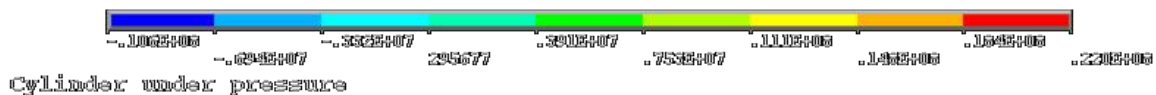
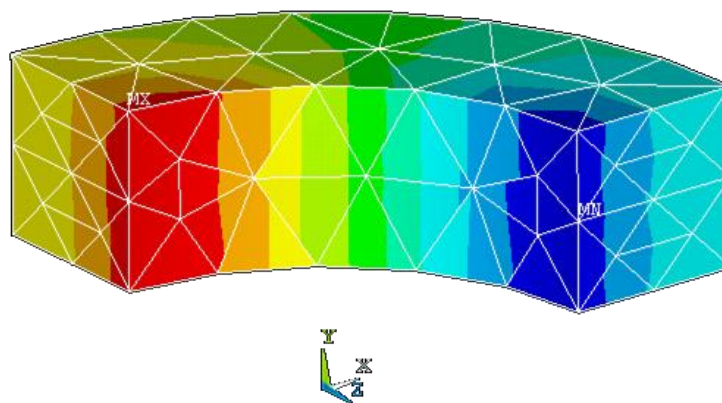


Рис. 2.38. Изображение напряжений σ_x

Как следует из данных на приведенном выше рисунке максимальное значение напряжений SX в сечении, перпендикулярном плоскости ZY, а

минимальное значение этих напряжений на внутренней поверхности цилиндра.

13. Анализ эквивалентных по Мизесу напряжений.

M_M: General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu

13.1. Выбрать **Stress**

13.2. Скроллингом найти **von Mises Stress**

13.3. **ОК** (просматриваем картину эквивалентных напряжений в графическом окне) (рис. 2.39).

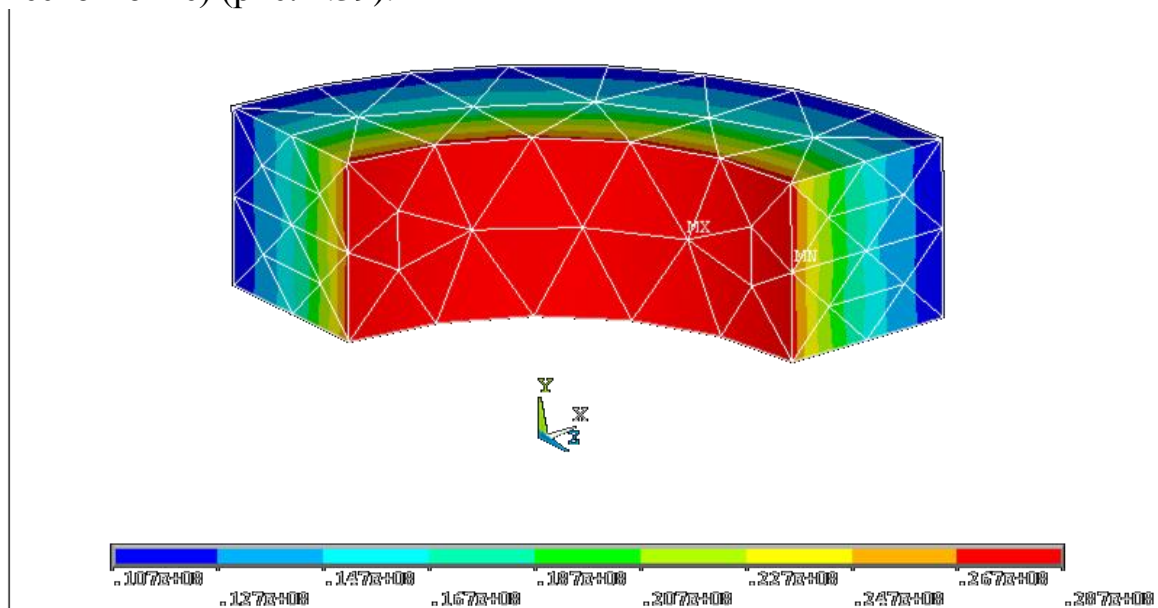


Рис. 2.38. Изображение эквивалентных напряжений

14. Выход из ANSYS-программы

При выполнении процедуры выхода можно сохранить данные в различном объеме: геометрия, граничные условия (**Save Geom+Loads**); геометрия, граничные условия, параметры расчета (**Save Geom+Loads+Solu**); геометрия, граничные условия, параметры расчета, результаты (**Save Everything**); ничего не сохранять (**No Save!**):

Toolbar (Toolbar - окно наиболее общих функций ANSYS, из которых необходима функция **SAVE_DB** - сохранение базы данных и, возможно, восстановление базы данных **RESUM_DB** - восстановление базы данных): **Quit**

14.1. Выбрать **Save Everything** (сохранить все)

14.2. **ОК**

2.4. Исследование напряженно-деформированного состояния болтового соединения с затяжкой (Задача №3)

Постановка задачи

Пример нелинейного анализа напряженно-деформированного состояния болтового соединения с затяжкой болта

Тип анализа: нелинейная статика.

Цель анализа: создание и использование специализированных элементов PRETS179 для моделирования затяжки крепежных элементов, решение контактной задачи.

Применяемая модель поведения: мультилинейная кинематическая аппроксимация нагружения.

Описание задачи: демонстрация методики создания напряжения затяжки в конструктивных соединительных элементах, моделируемых элементами твердого деформируемого тела (тип SOLID), поэтому как геометрическая модель, так и к.э. разбиение максимально упрощены. Модель состоит из 180° части двух кольцевых пластин и болта, скомпонованной с отводами. Материал болта – углеродистая сталь, материал пластин – алюминий.

Используем операцию **PSMESH** для разделения элементов болта на две не связанных части, скрепленных вместе элементами растяжения PRETS179. Затем выводим (рисуем) элементы и узлы области растяжения.

Подготовка модели

1. Заголовок задачи

1.1. Выберите **Utility Menu=> File=> Change Title**

1.2. Введите текст, «*Sample Application of PSMESH*» и нажмите на **OK** (рис. 2.39).

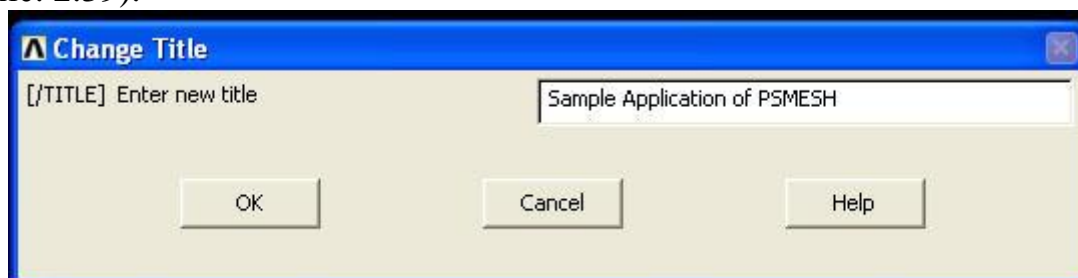


Рис. 2.39. Заголовок задачи

2. Задание типа элемента SOLID92.

- 2.1. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> Element Type=> Add/Edit/Delete**. Появляется диалоговое окно Element Types
- 2.2. Нажмите **Add**. Появляется диалоговое окно Library of Elements.
- 2.3. В прокручиваемом списке слева, выберите **Structural, Solid**.
- 2.4. Выберите **Tet 10 node 92** в прокручиваемом списке справа и нажмите на **OK** (рис. 2.40).
- 2.5. Нажмите **Close** в диалоговом окне Element Types.

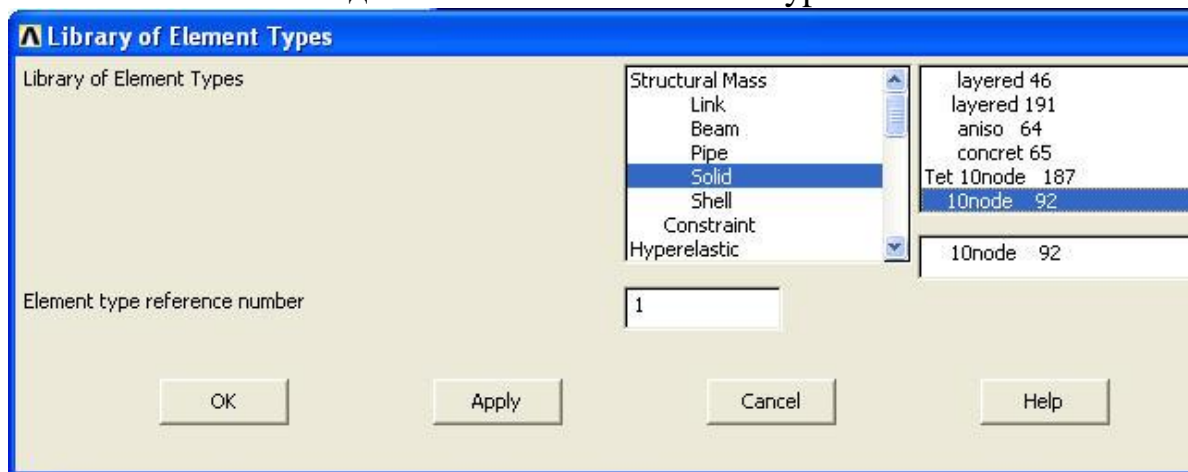


Рис. 2.40. Задание типа элемента

3. Задание свойств материала

- 3.1. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> Material Props=> Material Models**. Появляется диалоговое окно Define Material Model Behavior
- 3.2. В окне Material Models Available дважды кликните на Structural, Linear, Elastic, и Isotropic. Появляется диалоговое окно.
- 3.3. Введите **1E7** для **EX**, **0.3** для **PRXY** и нажмите **OK**. Linear Isotropic появляется ниже **Material Model Number1** в окне Material Models Defined
- 3.4. В Structural в окне Material Models Available, дважды нажмите на Thermal Expansion Secant Coef, Isotropic. Появляется диалоговое окно.
- 3.5. Введите **1.3E-5** для **ALPX** и нажмите **OK**. Thermal Expansion (iso) появляется ниже **Material Model Number 1** в окне Material Models Defined.
- 3.6. Выберите **Material=> New Model**, затем введите **2** в качестве нового ID материала и нажмите на **OK**. Появляется **Material Model 2** слева в окне Material Models Defined.

- 3.7. Дважды нажмите на Isotropic в Structural, Linear, Elastic в окне Material Models Available. Появляется диалоговое окно.
- 3.8. Введите **3E7** для **EX**, **0.3** для **PRXY** и нажмите **OK**. Linear Isotropic появляется в **Material Model Number 2** в окне Material Models Defined (рис. 2.41).
- 3.9. Дважды нажмите на Isotropic в Structural, Thermal Expansion Coef в окне Material Models Available. Появляется диалоговое окно.
- 3.10. Введите **8.4E-6** для **ALPX** и нажмите **OK**. Thermal Expansion (iso) появляется в **Material Model Number 2** в окне Material Models Defined.
- 3.11. Выберите **Material=> Exit** для закрытия диалогового окна Define Material Behavior.

Общая температура по умолчанию равна исходной температуре 70°F.

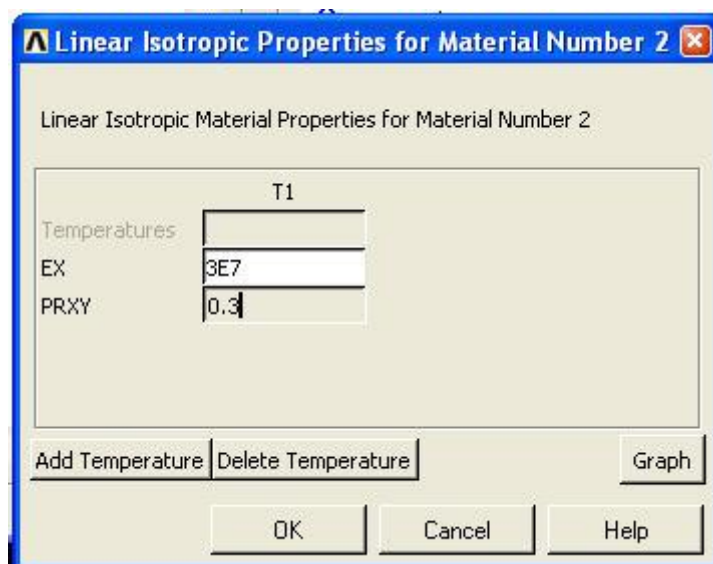


Рис. 2.41. Задание свойств материала

4. Установка исходной температуры

- 4.1. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> Loads=> Define Loads=> Settings=> Reference Temp.**
- 4.2. Введите 70 в качестве исходной температуры и нажмите OK.

5. Установка опций просмотра

- 5.1. Выберите **Utility Menu=> PlotCtrls=> View Settings=> Focus Point**. Появляется диалоговое окно **Focus Point 2**.
- 5.2. Выберите **User Specified**.

- 5.3. Введите **-0.09**, **.34**, и **.42** и нажмите на **ОК**.
- 5.4. Выберите **Utility Menu=> PlotCtrls=> View Settings=> Magnification**. Появляется диалоговое окно Magnification.
- 5.5. Выберите **User Specified**.
- 5.6. Выберите **.99** нажмите на **ОК**.
- 5.7. Выберите **Utility Menu=> PlotCtrls=> View Settings=> Angle of Rotation**. Появляется диалоговое окно **Angle of Rotation**.
- 5.8. Введите **-55.8** и нажмите **ОК**.
- 5.9. Выберите **Utility Menu=> PlotCtrls=> View Settings=> Viewing Direction**. Появляется диалоговое окно Viewing Direction.
- 5.10. Введите **.39**, **-.87**, и **.31** соответственно для **XV**, **YV**, и **ZV** и нажмите **ОК**.
- 5.11. Выберите **Utility Menu=> PlotCtrls=> Numbering**. Включите нумерацию объемов (**Volume numbers**).
- 5.12. Выберите Numbering shown with **Colors only** и нажмите **ОК**.

6. Создание геометрии

- 6.1. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> Modeling=> Create=> Volumes=> By Dimensions**. Появляется диалоговое окно Create Cylinder by Dimensions.
- 6.2. Введите следующие значения: (рис. 2.42)
Outer radius (RAD1): 0.5
Z-coordinates (Z1, Z2): -0.25, 0
Ending angle (THETA2): 180

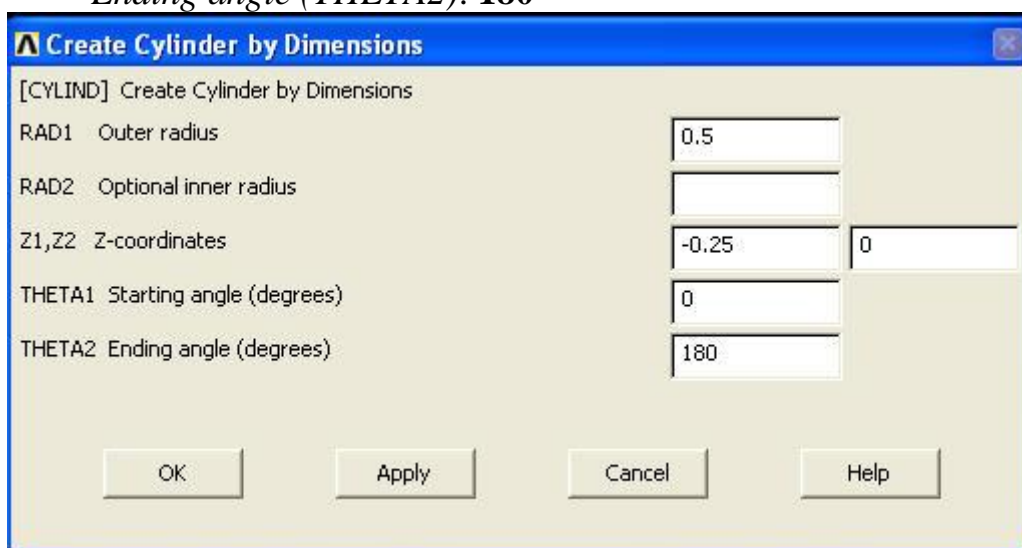


Рис. 2.42. Создание геометрии

- 6.3. Нажмите **Apply** для создания цилиндра.

- 6.4. Введите следующие значения:
Outer radius (RAD1): 0.5
Z-coordinates (Z1, Z2): 1, 1.25
Ending angle (THETA2): 180
- 6.5. Нажмите **Apply** для создания цилиндра.
- 6.6. Введите следующие значения:
Outer radius (RAD1): 0.25
Z-coordinates (Z1, Z2): 0, 1
Ending angle (THETA2): 180
- 6.7. Нажмите **OK** для создания цилиндра и закрытия диалогового окна **Create Cylinder by Dimensions**. (рис. 2.43).

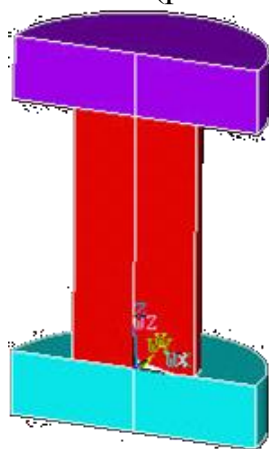


Рис. 2.43. Создание болта

- 6.8. Выберите **Utility Menu=> WorkPlane=> Offset WP by increments**
- 6.9. Введите **0.05** в **X, Y, Z Offset**, нажмите на **Enter**, нажмите на **OK**.
 Это смещает рабочую плоскость на **0.05** единиц.
- 6.10. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> Modeling=> Create=> Volumes=> Cylinder=> By Dimensions**. Появляется диалоговое окно **Create Cylinder by Dimensions**.
- 6.11. Введите следующие значения:
Outer radius (RAD1): 1
Optional inner radius (RAD2): 0.35
Z-coordinates (Z1, Z2): 0, 0.75
Ending angle (THETA2): 180
- 6.12. Нажмите **OK** для создания цилиндра.
- 6.13. Выберите **Utility Menu=> WorkPlane=> Offset WP by increments**.
- 6.14. Введите **-0.10** в **X, Y, Z Offset**, нажмите **Enter**, и нажмите **OK**. Эта операция смещает рабочую плоскость на **-0.10** единиц в осевых направлениях.

- 6.15. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> Modeling=> Create=> Volumes=> Cylinder=> By Dimensions**. Появляется диалоговое окно **Create Cylinder by Dimensions**.
- 6.16. Введите следующие значения:
Outer radius (RAD1): 1
Optional inner radius (RAD2): 0.35
Z-coordinates (Z1, Z2): 0.75, 1
Ending angle (THETA2): 180
- 6.17. Нажмите **ОК** для создания цилиндра.
- 6.18. Выберите **Utility Menu=> WorkPlane=> Display Working Plane** (toggle off– снимите выделение).
- 6.19. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> Modeling=> Operate=> Booleans=> Glue=> Volumes**.
- 6.20. Выберите все (**Pick all**).
- 6.21. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> NumberingCtrls=> Compress Numbers**.
- 6.22. Выберите **All** в **Item to be compressed** и нажмите **ОК**.
- 6.23. Выберите **Utility Menu=> Plot=> Volumes** (рис. 2.44).

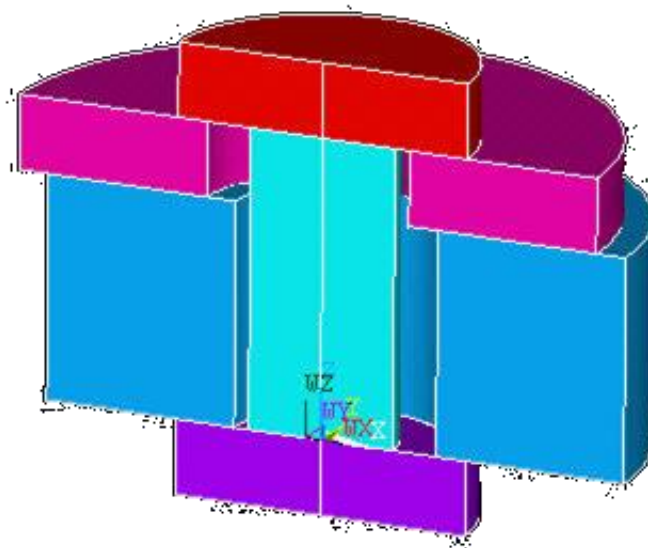


Рис. 2.44. Добавление пластин в конструкцию

7. Наложение конечно элементной сетки

- 7.1. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> Meshing=> Meshtool**.
- 7.2. В **Element Attributes**, выберите **Global** и нажмите **Set**.
- 7.3. Установите в **Material number 1** и нажмите **ОК**.
- 7.4. Убедитесь в том, что **smart sizing** отключен (off) и нажмите **Mesh**.
- 7.5. Выберите объемы **4** и **5** (две круглых пластины) и нажмите **ОК** в меню выбора.

- 7.6. Выберите **Utility Menu=> Plot=> Volumes**.
- 7.7. В диалоговом окне Mesh Tool выберите Global и нажмите **Set** в Element Attributes.
- 7.8. Установите в Material number **2** и нажмите **ОК**.
- 7.9. Нажмите **Mesh**.
- 7.10. Выберите объемы **1, 2, и 3** и нажмите **ОК** в меню выбора.
(рис.2.45).

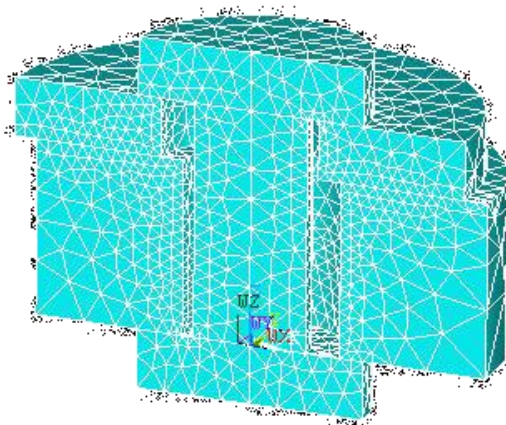


Рис. 2.45. Наложение конечно элементной сетки

- 7.11. Закройте диалоговое окно Mesh Tool.
- 7.12. Выберите **Utility Menu=> PlotCtrls=> Numbering**.
- 7.13. Выберите **Material numbers** для Elem/Attrib numbering и нажмите **ОК**.
- 7.14. Выберите **Utility Menu=> Plot=> Elements**.
- 7.15. Выберите **Main Menu=> Preprocessor=> Sections=> Pretension=> Pretensn Mesh=> With Options=> Divide at Valu=> Elements in Volu**.
- 7.16. Выберите объем **3** (центральную часть) и нажмите **ОК**.
- 7.17. Введите следующую информацию в диалоговое окно и нажмите **ОК**:
- NAME*: **Example**
KCN: **Global Cartesian**
KDIR: **Z-axis**
VALUE: **0.5**
ECOMP: **elems**
- 7.18. Выберите **Utility Menu=> Select=> Comp/Assembly=> Create Component**.
- 7.19. Введите **Line** в качестве имени компонента (**Cname**).

- 7.20. Выберите **Line** в качестве **Entity** и нажмите **OK**.
- 7.21. Выберите **Utility Menu=> PlotCtrls=> View Settings=> Magnification**.
- 7.22. Выберите **User Specified**.
- 7.23. Введите **1.1** в качестве User specified distance и нажмите **OK**.
- 7.24. Выберите **Utility Menu=> Plot=> Components=> Selected Components** (рис. 2.46).

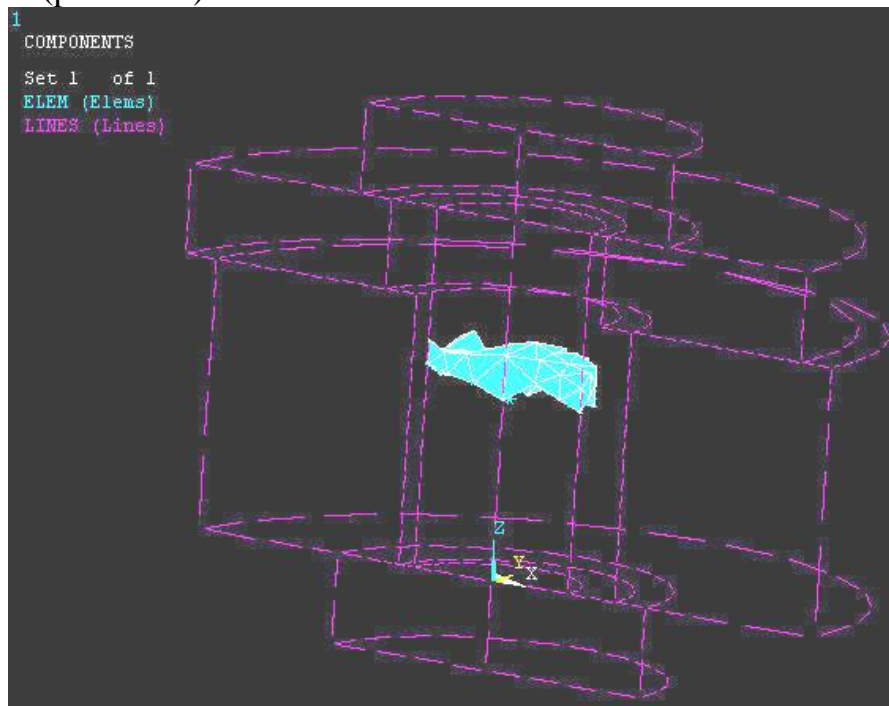


Рис. 2.46. Разделение элементов болта на две не связанных части

8. Решение: задание предварительного натяжения

- 8.1. Выберите **Main Menu=> Solution=> Analysis Types=> Sol'n Controls**.
- 8.2. Нажмите на закладку **Sol'n Options**.
- 8.3. Выберите **Pre-Condition CG** в Equation Solvers и нажмите **OK**.
- 8.4. Выберите **Utility Menu=> Select=> Entities**.
- 8.5. Выберите **Areas, By Location, и Y-coordinates** и нажмите **OK**.
- 8.6. Выберите **Main Menu=> Solution=> Define Loads=> Apply=> Structural=> Displacement=> Symmetry B.C.=> On Areas**.
- 8.7. Нажмите **Pick All**. (Устанавливаем условие симметрии)
- 8.8. Выберите **Utility Menu=> Select=> Entities**.
- 8.9. Убедитесь в том, что Areas выбраны и нажмите на **Sele All**.
- 8.10. Нажмите **OK**.

8.11. Выберите **Main Menu=> Solution=> Define Loads=> Apply=> Structural=> Displacement=> On Keypoints**.

Задаем половину нагрузки (это половина модели) на узел растяжения, созданный **PSMESH**, решаем, и выводим нормальные напряжения в осевом направлении.

8.12. Выберите среднюю ключевую точку в нижней части болта (**KeyP No. = 1**) и нажмите на **OK** в меню выбора (рис. 2.47).

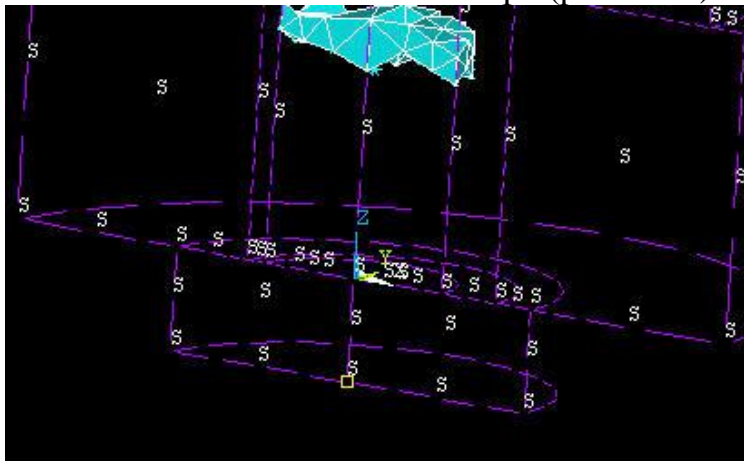


Рис. 2.47. Задание предварительного натяжения

8.13. Выберите **UX** и **UZ** в качестве DOFs (степеней свободы) выбранных для ограничения (Lab2) и нажмите **Apply** для сохранения выбора и возврата в меню выбора.

8.14. Выберите среднюю ключевую точку в верхней части болта (**KeyP No. = 12**) и нажмите **OK** в меню выбора (рис. 2.48).

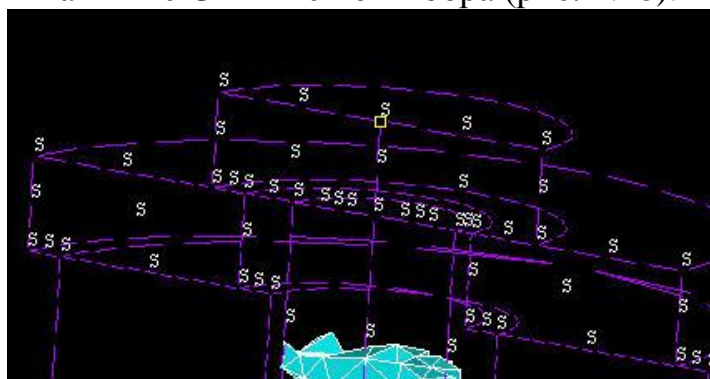


Рис. 2.48. Выбор средней ключевой точки в верхней части болта

8.15. Выберите **UX** в качестве ограничиваемой степени свободы (Lab2) и нажмите **OK**.

8.16. Выберите **Main Menu=> Solution=> Define Loads=> Apply=> Structural=> Pretensn Sectn**.

8.17. Выберите **1 Example** в Pretension Sections.

- 8.18. Введите **100** для Force (в Pretension Load) и нажмите **ОК**.
- 8.19. Выберите **Utility Menu=> File=> Change Title**.
- 8.20. Измените заголовок **Sample Application of PSMESH - Preload Only** нажмите на **ОК**.
- 8.21. Выберите **Main Menu=> Solution=> Solve=> Current LS**.
- 8.22. Просмотрите информацию в появившемся окне и нажмите на **ОК** для запуска решения.
- 8.23. Нажмите **Close** после появления сообщения Solution is Done.

9. Постобработка: Результаты предварительного растяжения

- 9.1. Выберите **Main Menu=> General Postproc=> Plot Results=> Contour Plot=> Nodal Solu**. Появляется диалоговое окно Contour Nodal Solution Data.
- 9.2. Выберите **Stress** в прокручиваемом списке слева и **Z-direction (SZ)** в прокручиваемом списке справа и нажмите на **ОК**. Как и следует ожидать осевые напряжения растягивают болт.

10. Решение: Задание температурного градиента

Решим следующую задачу. Узнать предварительную нагрузку и поле напряжений болта после увеличения температуры сборки до 150F.

- 10.1. Выберите **Main Menu=> Solution=> Analysis Type=> Restart**. Закройте любое появившееся предупреждающее сообщение.
- 10.2. Выберите **Main Menu=> Solution=> Define Loads= Settings=> Uniform Temp**.
- 10.3. Введите значение общей температуры равное **150** и нажмите на **ОК**.
- 10.4. Выберите **Utility Menu=> File=> Change Title**.
- 10.5. Измените заголовок **Sample Application of PSMESH - Uniform 150 deg** и нажмите **ОК**.
- 10.6. Выберите **Main Menu=> Solution=> Solve=> Current LS**.

11. Постобработка: Тепловые результаты и результаты предварительного натяжения.

- 11.1. Выберите **Main Menu=> General Postproc=> Plot Results=> Contour Plot=> Nodal Solu**. Появляется диалоговое окно Contour Nodal Solution Data.

11.2. Выберите **Stress** в прокручиваемом окне слева и **Z-direction (SZ)** в прокручиваемом окне справа, нажмите на **ОК**.

Как предварительная нагрузка, так и напряжения увеличиваются вследствие увеличения общей температуры; тепловое расширение алюминиевых пластин больше теплового расширения стального болта. Любой метод задания предварительной нагрузки, который не позволяет изменяться нагрузке не сможет предсказать этот результат.

12. Выход из ANSYS

12.1. Нажмите кнопку **QUIT** на панели инструментов ANSYS.

12.2. Выберите **Quit - No Save!** (если работа оценена)

12.3. Нажмите **ОК**.

2.5. Исследование напряженно-деформированного состояния корпуса задвижки жестко закрепленного по отверстиям магистральных фланцев (Задача №4)

Постановка задачи

Корпус задвижки жестко закреплен по отверстиям магистральных фланцев. Внутренние полости корпуса нагружены давлением 21 МПа. Для расчета используется геометрическая модель, созданная в INVENTOR. Геометрическая модель представлена на рис. 2.49, физико-механические свойства материала корпуса: Модуль упругости – $2.1e5$ МПа; Коэффициент Пуассона – 0,3.

Геометрическая модель представляет собой четверть корпуса задвижки, поскольку он симметричен относительно плоскостей XY и YZ.



Рис. 2.49. Геометрическая модель корпуса

1. Импорт геометрической модели

1.1. Utility Menu => File => Import => SAT...

В открывшемся диалоговом окне (рис. 2.50) в списке **Drivers** выберите логический диск, а в списке **Directories** путь к каталогу в котором находится файл с геометрией. В поле **File Name** введите имя файла -**valve.SAT** или выберите его в списке. Нажмите **OK**.

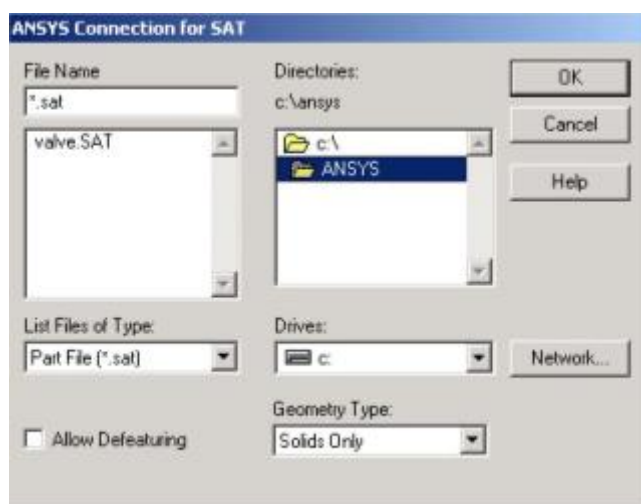


Рис. 2.50. Импорт геометрической модели

2. Построение конечно-элементной модели

2.1. Определение типа элемента

Main Menu => Preprocessor => Element Type => Add/Edit/Delete

В открывшемся окне **Element Type** нажмите **Add...** и в появившейся библиотеке элементов выберите **Structural => Solid => Tet 10node 92** (рис. 2.51). Нажмите **ОК**.

Закройте окно **Element Type** нажав **Close**.

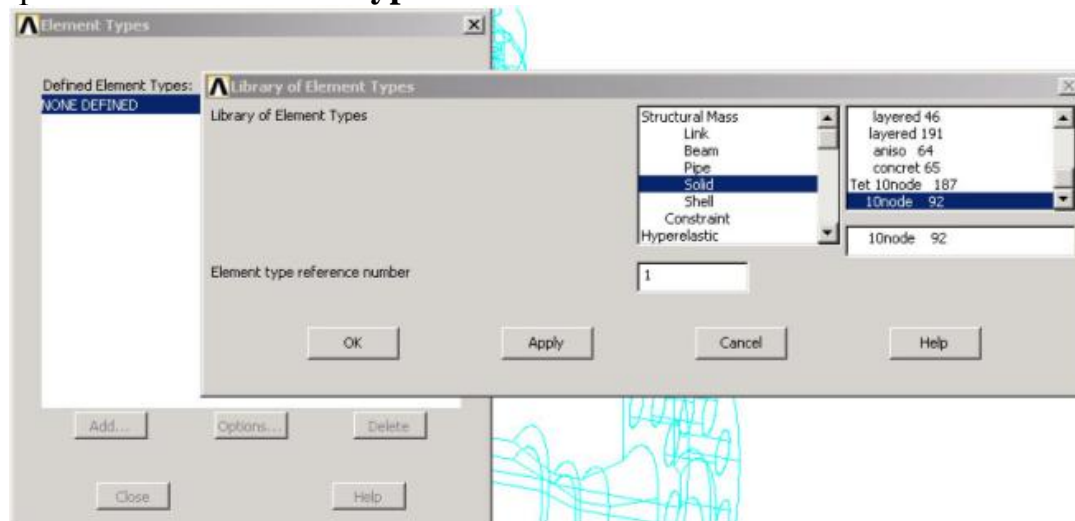


Рис. 2.51. Построение конечно-элементной модели

3. Задание свойств материала

Main Menu => Preprocessor => Materials Props => Material Models

В окне **Define Material Model Behavior** выберите **Structural => Linear => Elastic => Isotropic** и в открывшемся диалоговом окне (рис. 2.52) введите свойства материала: Модуль упругости – 2.1×10^5 МПа; коэффициент Пуассона – 0,3. Нажмите **ОК**. После этого окно **Define Material Model Behavior** можно закрыть.

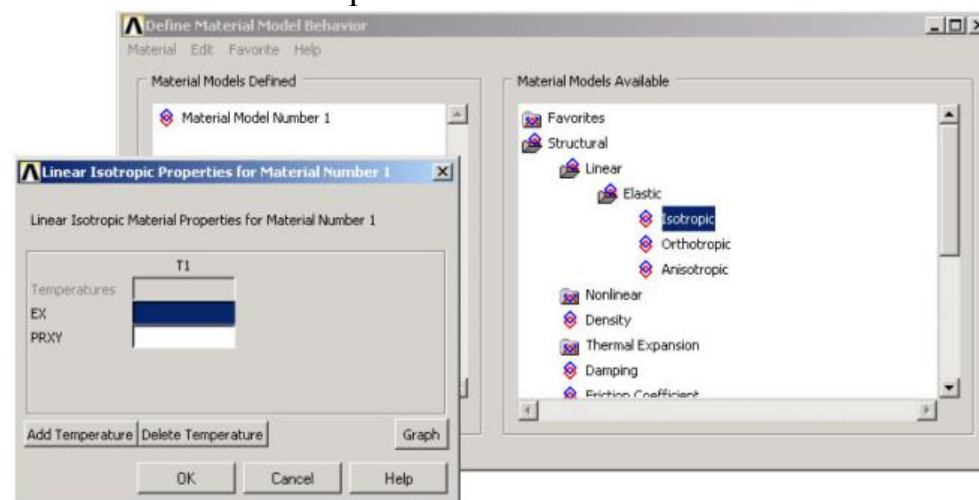


Рис. 2.52. Задание свойств материала

4. Дискретизация модели

Задание параметров автоматической генерации конечно элементной сетки

4.1. Main Menu => Preprocessor => Meshing => Size Cntrls => Smart-Size => Basic

В диалоговом окне выберите уровень дискретизации (по степени точности): **6 (default)** (рис. 2.53). Нажмите **OK**.

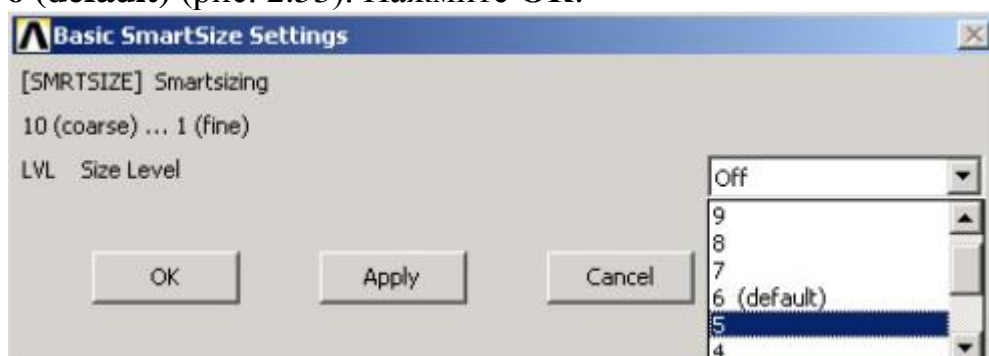


Рис. 2.53. Дискретизация модели

4.2. Генерация конечно-элементной сетки

Main Menu => Preprocessor => Meshing => Mesh => Volumes => Free

Укажите мышкой импортированный объем или введите его номер (объем 1) в окне выбора, показанном на рис. 2.54, после чего нажмите **OK**. Результат построения конечно-элементной сетки представлен на рисунке 2.55.

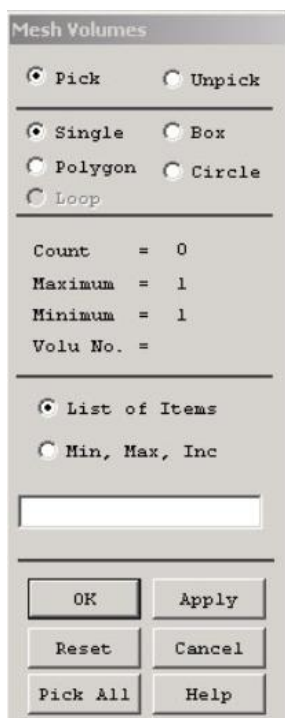


Рис. 2.54.

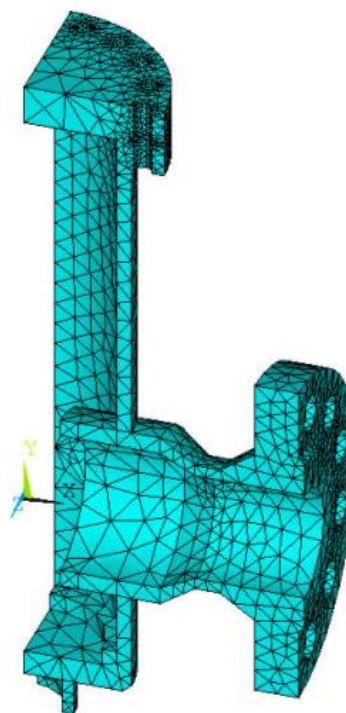


Рис. 2.55.

5. Приложение нагрузок к геометрической модели

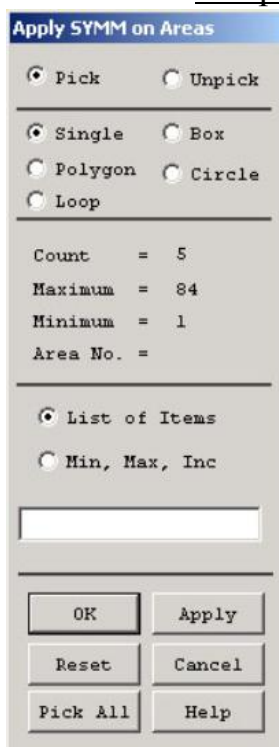


Рис. 2.56.

5.1. Задание условий симметрии на плоскостях **XY** и **YZ**

Main Menu => Solution => Define Loads => Apply => Structural => Displacement => Symmetry B.C. => On Areas

Укажите мышкой поверхности, лежащие на плоскостях **XY** и **YZ**, или введите их номера (поверхности 6, 7, 26, 68 и 77) в окне выбора, показанном на рис. 2.56, после чего нажмите **OK**.

Задание условий симметрии на поверхности равносильно запрещению перемещений по нормали к ней.

5.2. Задание перемещений

Main Menu => Solution => Define Loads => Apply => Structural => Displacement => On Areas

Укажите мышкой внутренние поверхности отверстий в магистральном фланце или введите их номера (поверхности 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61 и 62) в окне выбора, после чего нажмите **OK**. В открывшемся окне (рис. 2.57) выберите **ALL DOF** и нажмите

OK.

5.3. Приложение давления

Main Menu => Solution => Define Loads => Apply => Structural => Pressure => On Areas

Укажите мышкой внутренние поверхности корпуса или введите их номера (поверхности 2, 5, 8, 10, 11, 14, 16, 25, 29, 33, 36, 37, 40, 43, 45, 48 и 75) в окне выбора, после чего нажмите **OK**. В открывшемся окне (рис. 2.58) введите в поле **VALUE Load PRES value** значение давления 21 МПа и нажмите **OK**, оставив остальные поля без изменений.

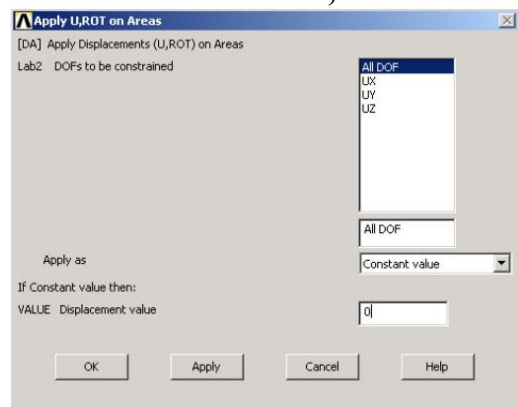


Рис. 2.57.

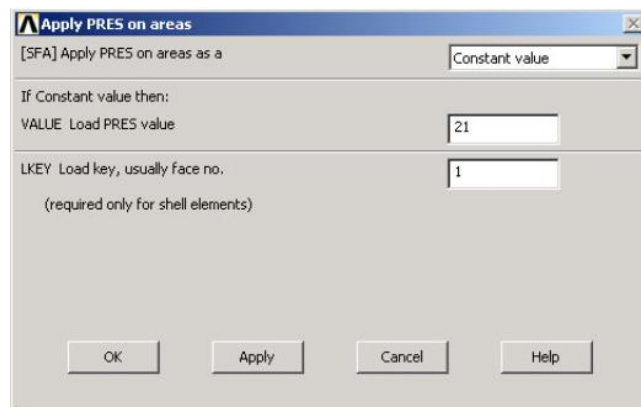


Рис. 2.58

6. Запуск решения

Main Menu > Solution > Solve > Current LS

При запуске решения ANSYS выдает окно статуса, в котором приводит краткую характеристику задачи. Также выводится диалоговое окно (рис. 2.59) для подтверждения запуска решения. Нажмите **ОК**.

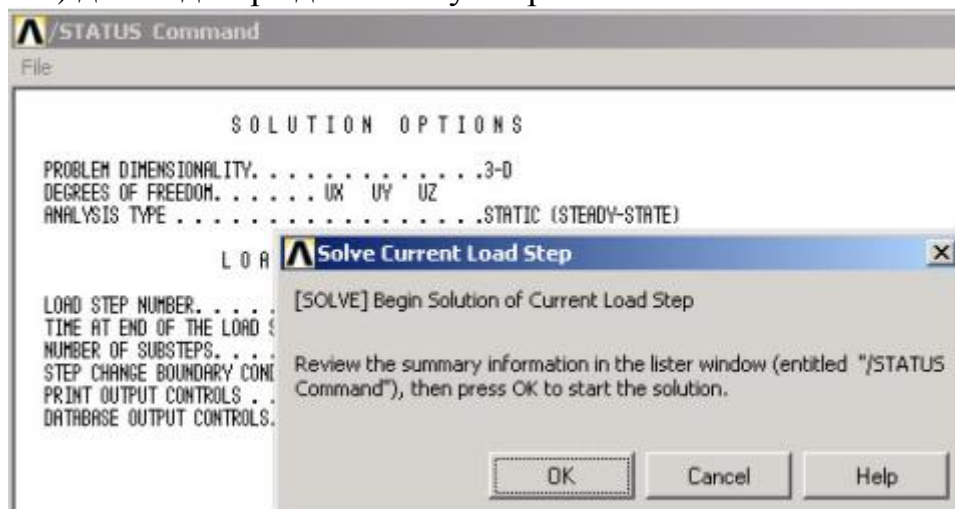


Рис. 2.59.

После завершения решения будет выведено окно с сообщением Solution is done!. Нажмите Close. Закройте окно статуса.

7. Просмотр результатов

7.1. Задание симметричного расширения модели

Utility Menu => PlotCtrls => Styles => Symmetry Expansion => Periodic/Cyclic Symmetry

В открывшемся диалоговом окне выберите расширение геометрии - **Reflect about YZ** для получения модели половины корпуса. Нажмите **ОК**.

Для отмены расширения геометрии выберите пункт **No Expansion**

7.2. Просмотр напряжений

Main Menu => General Postproc => Plot Results => Contour Plot => Nodal Solu

В открывшемся диалоговом окне выберите тип результата – **Stress** и его обозначение – **von Mises Stress** (эквивалентные напряжения по Мизесу). Нажмите **ОК**.

Результат отображения поля эквивалентных напряжений в корпусе задвижки с расширением модели относительно плоскости симметрии YZ представлен на рисунке 2.60.

Примечания: Группа переключателей **KUND items to be plotted** управляет способом отображения результата: **Def shape only** только деформированное состояние модели; **Def + undeformed** - деформированное и

недеформированное состояние модели; **Def + undef edge** - деформированное состояние модели и недеформированный контур.

Группа переключателей **/EFACET Interpolation Nodes** управляет способом интерполяции решения.

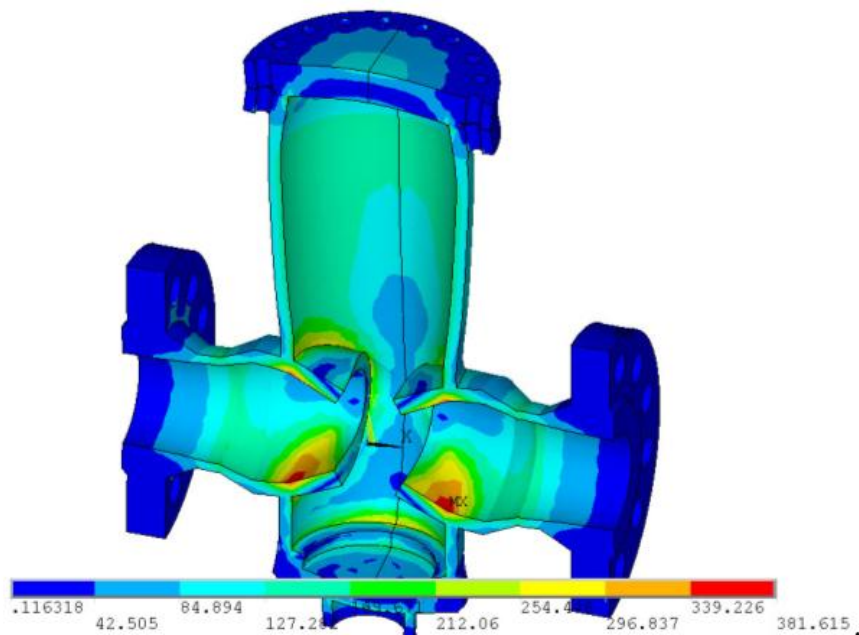


Рис. 2.60.

8. Сохранение данных

Utility Menu => File => Save as

В открывшемся диалоговом окне в списке **Drivers** выберите логический диск, а в списке **Directories** путь к каталогу, в котором вы хотите сохранить данные. В поле **Save Database To** введите имя файла -- **example_4.db**. Нажмите **OK**.

9. Выход из ANSYS

Utility Menu => File => Exit

В открывшемся диалоговом окне установите переключатель на позицию **Quit - No Save!** (выход без сохранения данных, если работа оценена) и нажмите **OK**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басов К.А. ANSYS в примерах и задачах/ Под общ. Ред. Д.Г. Красковского.- М.: КомпьютерПресс, 2002.-224с. :ил.
2. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 272 с.
3. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров: Справ, пособие. М.: Машиностроение-1, 2004. 512 с.
4. CAE: Компьютерный анализ: Электронный ресурс <http://cae.tgngu.tyumen.ru>.

Учебное издание

БУРКОВ Пётр Владимирович
БУРКОВА Светлана Петровна

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНО- ЛОГИЙ В НЕФТЕГАЗОВОМ ДЕЛЕ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

*Научный редактор, кандидат технических наук
доцент А.В. Воробьёв
Дизайн обложки*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати .2012. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл. печ. л. . Уч. -изд. л. .

Заказ . Тираж _____ экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  **ТПУ**. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел/факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru