Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Томский политехнический университет»

В.Г. Букреев, И.Ю. Краснов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Издательство ТПУ

Томск 2006

УДК 62-83: 621. 313.2: 681. 513. 68
Б 90

Букреев В.Г., Краснов И.Ю.
Б 90 Основы теории регулирования непрерывных систем: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – 119 с.

В учебном пособии рассматриваются вопросы исследования непрерывных систем управления (СУ). Приведены определения и необходимые условия управляемости и наблюдаемости непрерывных СУ. Излагаются критерии устойчивости непрерывных систем с использованием функций Ляпунова. Приведены необходимые методы для анализа и синтеза СУ на основе передаточных функций.

Учебное пособие подготовлено на кафедре электропривода и электрооборудования и предназначено для магистрантов направления 551311 «Электроприводы и системы управления электроприводов» и студентов специальности 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов».

УДК 62-83: 621. 313.2: 681. 513. 68

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета

Рецензенты

Кандидат технических наук, профессор Томского университета систем управления и радиоэлектроники
Зайцев А.И.

Кандидат технических наук, доцент кафедры электропривода и электрооборудования Томского политехнического университета
Митаенко А.Д.

Темплан 2006

ВВЕДЕНИЕ

Автоматическим регулированием называется изменение какой-либо физической величины по требуемому закону на основании контроля и измерения выходных параметров или параметров возмущений. Сравнивая определения управления и регулирования, следует отметить, что задача регулирования является частным случаем задач управления.

Автоматическое управление любым технологическим процессом можно представить в виде некоторой обобщенной схемы, содержащей объект управления и управляющее устройство. Состояние объекта управления характеризуется контролируемыми или неконтролируемыми переменными.

Величины, оказывающие целенаправленное управляющее влияние на объект, называются управляющими воздействиями. Величины, вырабатывающие воздействия от устройства управления, называются управляющими или в системе регулирования – регулирующими воздействиями.

Воздействия $v(t)$, не зависящие от системы управления, называются возмущениями. На вход управляющего устройства могут быть поданы задающие воздействия $y_{\text{çàä}}(t)$, определяющие желаемый эффект регулирования (рис.1).

Устройство управления, решающее задачу регулирования, называется регулятором. Объект регулирования и автоматический регулятор в совокупности образуют систему автоматического регулирования (САР).

Практически все регуляторы строятся на базе двух принципов регулирования: по отклонению и по возмущению.

Идея, положенная в основу принципа регулирования по отклонению, состоит в том, что замеряется значение регулируемой величины и сравнивается с заданным значением (рис. 2).

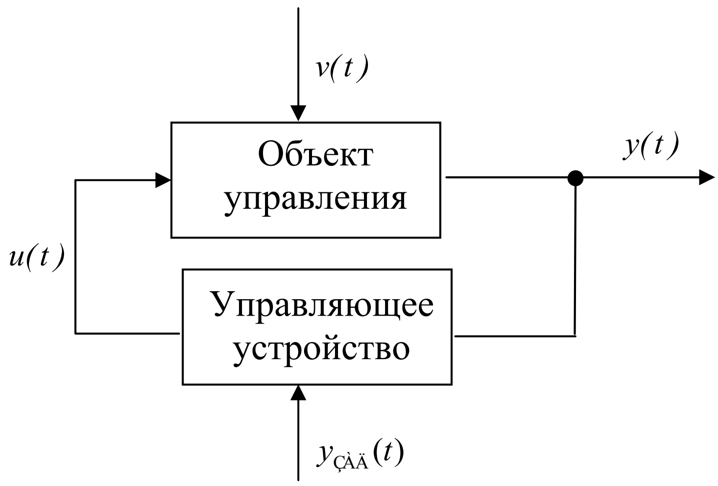


Рис. 1. Обобщенная структурная схема системы автоматического управления

Основное преимущество такой системы в том, что система управления образует замкнутую информационную цепь, организованную по принципу обратной связи.

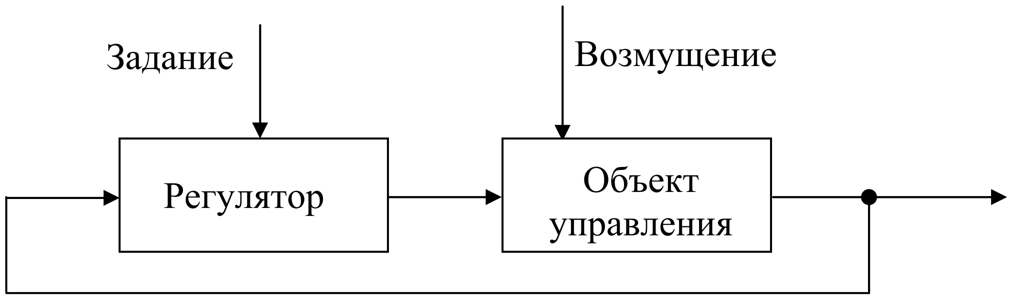


Рис. 2. Обобщенная структурная схема системы автоматического регулирования с обратной связью по отклонению

Принцип управления на основе обратной связи – это объективный закон управления, который используется или присутствует во многих технических, биологических и других системах.

Основной причиной, вызывающей отклонение регулируемой величины от заданного значения, являются возмущающие воздействия. Следовательно, контролируя возмущение, можно воздействовать на объект и обеспечить нужные параметры регулируемой величины (рис. 3).

Для технической реализации принципа регулирования по возмущению в состав регулятора должен входить измерительный орган, позволяющий измерить прямо или косвенно возмущающие воздействия, и исполнительные элементы, воздействующие на объект регулирования.

Однако для систем, работающих на принципе регулирования по возмущению, присущи следующие серьезные недостатки:

- для измерения выбирается одно или несколько основных возмущений. Наличие других неконтролируемых параметров приводит к тому, что регулируемая величина значительно отличается от требуемого закона его изменения;
- между возмущением и регулируемой величиной должно соблюдаться строгое соответствие, что не всегда удается обеспечить аппаратно или функционально.

Отмеченные недостатки САР, работающих по возмущению, вызваны тем, что истинное значение регулируемой величины не контролируется, т.е. система имеет разомкнутый цикл управления.

Рис. 3. Обобщенная структурная схема системы автоматического регулирования с обратной связью по возмущению

Из-за отмеченных недостатков разомкнутые системы управления самостоятельно почти не применяются и используются только в качестве составной части более сложных САР.

1. АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЯ

1.1. Управляемость и наблюдаемость линейных систем управления

Управляемость и наблюдаемость относятся к основным понятиям теории автоматического регулирования, которые позволяют оценить структуру системы на этапе анализа.

Если в системе управления формируется управляющее воздействие размерности m, превышающее число $\left(\frac{n}{2}\right)$ степени свободы объекта, описанного уравнением

$$\dot{x} = f(x, v, t),$$

то система является неуправляемой. В такой системе нельзя перевести объект из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в любое конечное состояние $x(t_p)$ под действием некоторого управляющего воздействия. Таким образом, систему называют полностью управляемой, если ее можно перевести в конечное состояние в течение фиксированного интервала времени.

Необходимое и достаточное условие полной управляемости для линейной стационарной системы, представленной уравнением:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где $x - n$-мерный вектор; $A - n \times n$-матрица; $B - n \times m$-матрица; $u - m$-мерный вектор, заключается в том, чтобы матрица управляемости

$$S = \left[B \mid AB \mid A^2 B \mid \ldots \mid A^{n-1} B\right]$$

должна иметь ранг n.

С понятием управляемости связано понятие наблюдаемости, которое позволяет установить начальное состояние системы по результатам измерений одного выходного сигнала.

Необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости для линейной стационарной системы, представленной уравнениями:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du,$$

где x – n-мерный вектор, $A - n \times n$-матрица, $B - n \times m$-матрица, $u - m$-мерный вектор, $y - r$-мерный вектор, $C - r \times n$-матрица, $D - r \times m$-мерная матрица, заключается в том, что матрица наблюдаемости

$$H = \left[C^* \mid A^* C^* \mid \left(A^*\right)^2 C^* \mid \ldots \mid \left(A^*\right)^{n-1} C^*\right]$$

должна иметь ранг n.

Матрицы A^* и C^* являются сопряженными матрицами по отношению к матрицам A и C. При действительных значениях элементов $A^* = A^T$ и $C^* = C^T$. При комплексных числах матрицы A^* и C^* равны соответствующим комплексно-сопряженным.

Для линейных стационарных систем матрица наблюдаемости записывается:

$$H = \left[C^T \mid A^T C^T \mid \left(A^T\right)^2 C^T \mid \ldots \mid \left(A^T\right)^{n-1} C^T \right]$$

или

$$H = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

При выполнении условия наблюдаемости возможно определение начального состояния x_0 по следующим данным:

а) по матрицам A и C;

б) по выходному сигналу $y(t)$ от начальных условий x_0 при $u(t) = 0$, заданному на конечном интервале времени $(t_0 = 0, T)$, где T – интервал функционирования системы регулирования.

Рассмотрим два типа систем автоматического регулирования.

Первый тип. Система имеет только один выходной сигнал

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t).$$

Для такой системы необходимым и достаточным условием полной наблюдаемости является отличие от нуля всех коэффициентов $c_i \neq 0$.

Второй тип. Система имеет несколько выходных сигналов

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} x_i(t), \ j = 1, 2, \ldots r.$$

Необходимым и достаточным условием полной наблюдаемости является то, что для каждого i-го произведения один из коэффициентов $c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ri}$ не должен равняться нулю.

Практический пример

Определить выполнение условий управляемости и наблюдаемости системы регулирования, представленной следующей структурной схемой (рис. 4).

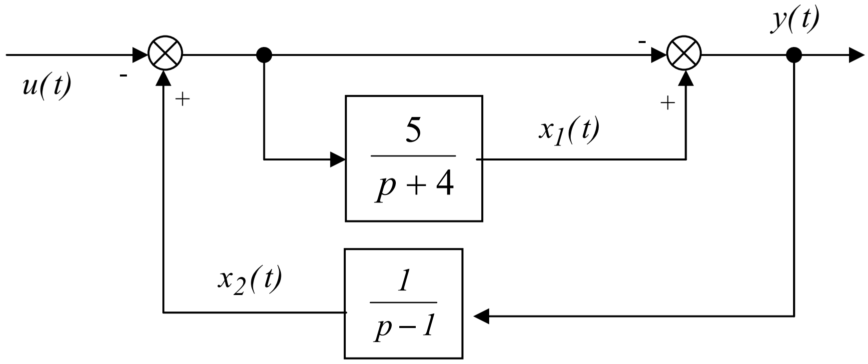


Рис. 4. Структурная схема системы регулирования

Запишем уравнения состояния системы, используя определение передаточной функции. Передаточные функции первого и второго звена записываются в виде:

$$W_1(p) = \frac{x_1(p)}{x_2(p) - u(p)} = \frac{5}{p+4},$$

$$W_2(p) = \frac{x_2(p)}{y(p)} = \frac{x_2(p)}{x_1(p) - (x_2(p) - u(p))} = \frac{1}{p-1}.$$

Данные уравнения позволяют записать:

$$\begin{cases} x_1(p)(p+4) = 5x_2(p) - 5u(p), \\ x_2(p)(p-1) = x_1(p) - x_2(p) + u(p), \\ y(p) = x_1(p) - (x_2(p) - u(p)). \end{cases}$$

После преобразований запишем:

$$\begin{cases} x_1(p)p = -4x_1(p) + 5x_2(p) - 5u(p), \\ x_2(p)p = x_2(p) + x_1(p) - x_2(p) + u(p), \\ y(p) = x_1(p) - x_2(p) + u(p). \end{cases}$$

Заменяем $p = \frac{d}{dt}$ и символ «p» в скобках переменных на символ «t»:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + 5x_2(t) - 5u(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t), \end{cases} \qquad (1)$$

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t) + u(t).$$

В векторно-матричной форме уравнения (1) имеют вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu\,,\ A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$y = C^T x + Du\,,\ C^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix},\ D = 1\,. \tag{3}$$

Матрица A имеет размерность 2×2 и ее ранг равен $r = 2$ (т.к. $|A| \neq 0$).

Запишем матрицу управляемости:

$$S = \begin{bmatrix} B : AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Определитель $|S| = 0$, что соответствует $r < 2$. Для полной управляемости системы ранг S должен быть равен 2. Поэтому рассматриваемая система является неуправляемой.

Для определения наблюдаемости системы запишем матрицу:

$$H = \begin{bmatrix} C^* : A^* C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},$$

где $C^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A^* = A^T = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Определитель $|H| = 0$, что соответствует рангу $r < 2$. Для полной наблюдаемости системы ранг матрицы H должен быть равен 2. Поэтому рассматриваемая система является ненаблюдаемой.

Для обеспечения наблюдаемости и управляемости необходимо изменить структуру системы или параметры передаточных функций. Представим передаточную функцию $W_2(p)$ в виде

$$W_2(p) = \frac{1}{p+1}.$$

В этом случае уравнения (2) и (3) записываются следующим образом

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} u\,,\ \ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 1u\,.$$

Матрица управляемости для данного случая

$$S = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Т.к. определитель матрицы отличен от нуля $|S| = -50 \neq 0$, то ранг матрицы равен $r = 2$. Система управляема.

Матрица наблюдаемости для данного случая

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Т.к. определитель матрицы отличен от нуля $|H| = 5 - 3 = 2 \neq 0$, то ранг матрицы равен $r = 2$. Система наблюдаема.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ

2.1. Устойчивость систем на основе функций Ляпунова

Автоматические системы при нормальной эксплуатации должны поддерживать определенный режим работы объекта регулирования при действии на него многих возмущающих факторов. Такое поведение может быть достигнуто лишь в системах, обладающих устойчивостью по отношению к возмущающим воздействиям. Устойчивость системы означает, что малые изменения входного сигнала, возмущений, начальных условий или параметров объекта не приведут к значительным отклонениям выходного сигнала (не приведут к появлению неустойчивых колебаний выходного сигнала).

Поскольку процессы в системах автоматического регулирования могут быть представлены дифференциальными уравнениями, то математический анализ устойчивости сводится к исследованию свойств решения таких уравнений.

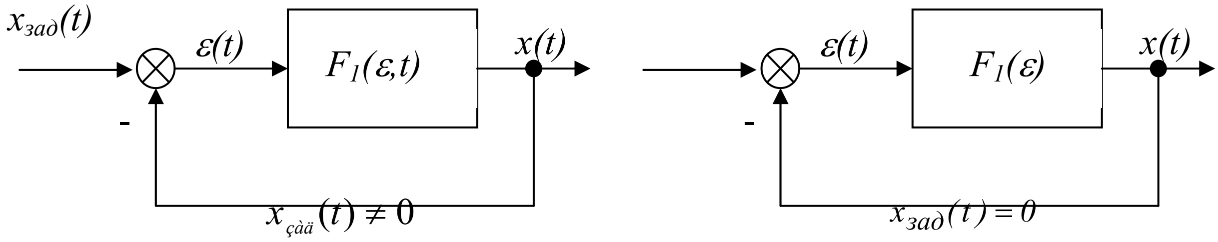
Решение уравнений можно представить как некоторую траекторию $x(t)$ в пространстве переменных $(x_1,...,x_n)$. Данная траектория удовлетворяет в общем случае системе нелинейных уравнений, которые в векторно-матричной форме имеют вид:

$$\dot{x} = F(x,t), \tag{4}$$

где $x^T = [x_1 \quad ... \quad x_n]$, $F^T = [f_1 \quad ... \quad f_n]$ – вектор-функция.

При этом предполагается, что вектор-функция $F(t)$ удовлетворяет теореме Коши о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

Представим варианты структурных схем систем регулирования с единичной обратной связью (рис. 5):



где $\varepsilon(t) = x_{зад}(t) - x(t)$,
$F_1(\varepsilon,t)$ – функция, явно зависящая от t

где $\varepsilon(t) = -x(t)$,
$F_1(\varepsilon)$ – функция, явно не зависящая от t

Рис. 5. Структурные схемы систем регулирования с единичной обратной связью

Рассмотрим свойства траекторий $x(t)$ движения системы (рис. 6), начинающихся в начальный момент времени t_0 из состояния x_0 вблизи $x_{зад}(t)$.

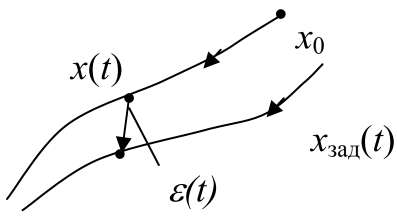


Рис. 6. Траектории движения системы в пространстве состояний

Если в процессе функционирования ошибка регулирования постоянна $\varepsilon(t) = const$ и ее значение не увеличивается, то можно заключить об устойчивости системы. В случае увеличения ошибки $\varepsilon(t)$ система может быть неустойчивой.

Задачу об устойчивости системы в пространстве $x(t)$ можно свести к задаче об устойчивости начала координат (начального состояния) в пространстве новых переменных.

Запишем ошибку регулирования

$$\varepsilon(t) = x_{зад}(t) - x(t). \qquad (5)$$

После преобразования (5) запишем

$$x(t) = x_{зад}(t) + \varepsilon(t).$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение (4) примет вид:

$$\dot{\varepsilon} = -F\left(\left(x_{зад}(t) - x(t)\right), t\right) - \dot{x}_{зад}(t).$$

В общей форме данное уравнение записывается:

$$\dot{\varepsilon} = F_1(\varepsilon, t).$$

В пространстве новой системы координат траектории $x_{зад}(t)$ соответствует точка $\varepsilon(t) = 0$. Данная точка является положением равновесия, т.к. $F_1(0, t) = 0$.

В случае, когда $x_{зад}(t) = 0$, функция F_1 не зависит явно от времени, и уравнения состояния принимают вид:

$$\dot{x} = F(x) \text{ и } \dot{\varepsilon} = F_1(\varepsilon).$$

Сформулируем математическое определение устойчивости, используя геометрическое представление.

Изобразим на плоскости сечение сферы, внутри которой выполняются условия существования и единственности решения дифференциальных уравнений системы. Тогда через каждую точку этой сферы проходит некоторая траектория $x(t)$. Положение равновесия системы совпадает с началом координат.

Рассмотрим сферы с радиусами *r, R, ρ,* которые характеризуются различными условиями функционирования системы (уравнениями с различными параметрами).

Положение равновесия асимптотически устойчиво, если траектория $x(t)$, начинаясь в точке x_0, стремится к началу координат.

Положение равновесия устойчиво, если траектория $x(t)$ не пересекает границу сферы с радиусом *R* (рис. 7).

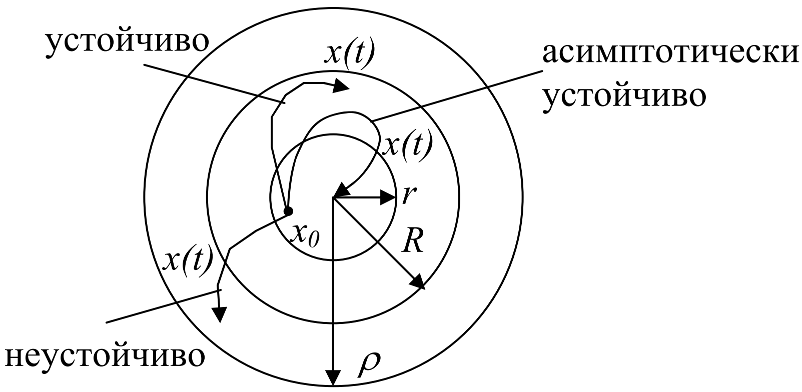


Рис. 7. Геометрическое представление условий устойчивости

Положение равновесия неустойчиво, если траектория $x(t)$ пересекает границу сферы с радиусом R и достигает границы сферы с радиусом ρ за конечное время.

Практические примеры

Пусть система регулирования описывается дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2; \qquad (6)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1.$$

Структурная схема системы (рис. 8), соответствующая данным уравнениям, имеет вид:

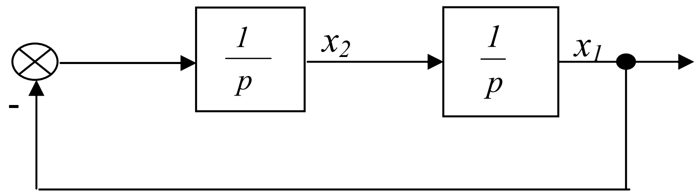


Рис. 8. Структурная схема системы, соответствующая уравнениям (6)

Положением равновесия системы является условие

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0.$$

При этом $x_1 = x_2 = 0$ и начало координат находится в точке (x_1, x_2) (рис. 9).

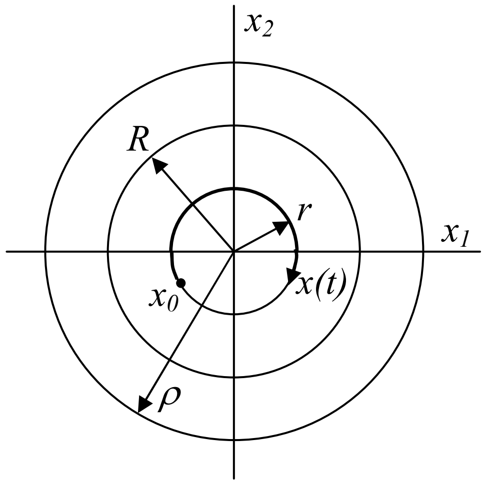


Рис. 9. Геометрическое представление условий устойчивости (6)

Траектории системы определяются следующим образом. Из исходных дифференциальных уравнений исключается dt путем деления первого уравнения на второе. В результате получим соотношение:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_1} \text{ или } x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0.$$

Интегрируя данное уравнение, получим

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2, \quad (c_1 + x_1^2 + c_2 + x_2^2 = 0).$$

Если взять $R < \rho$, то существует такое значение $r < R$, что траектория $x(t)$, которая начинается в точке x_0, описывает окружность радиуса *r*, т.е. имеет место устойчивость системы (рис. 9).

Пусть система регулирования описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ x_2 &= -x_1. \end{aligned} \quad \text{или} \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad (7)$$

Структурная схема системы, соответствующая уравнению (7) представлена на рис. 10.

Положением равновесия такой системы является точка начала координат $x_1 = 0, x_2 = 0$ (рис. 11).

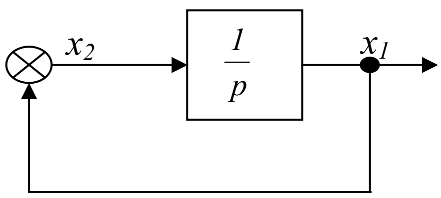


Рис. 10. Структурная схема системы,
соответствующая уравнению (7)

Исключая dt, получим уравнение:

$$1 = -\frac{x_1}{x_2}.$$

После преобразований запишем

$$x_1 + x_2 = 0, \text{ или } x_2 = -x_1.$$

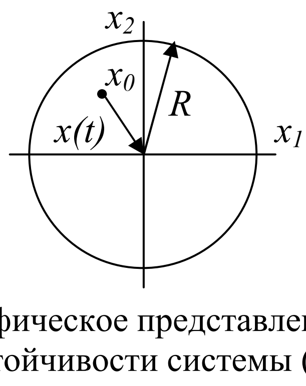


Рис. 11. Графическое представление условий
устойчивости системы (7)

Если взять точку x_0 в пределах окружности с радиусом *R*, то траектория $x(t)$ стремится к началу координат. Следовательно, система будет асимптотически устойчива.

Рассмотрим систему регулирования, представленную уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_1$$
$$x_1 = x_2 \tag{8}$$

Структурная схема системы изображена на рис. 12.

Положением равновесия системы является точка начала координат $x_1 = 0, x_2 = 0$.

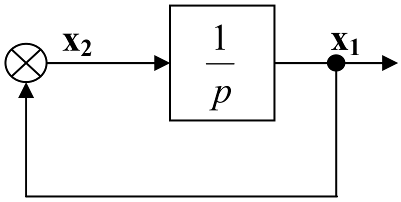


Рис. 12. Структурная схема системы, соответствующая уравнению (8)

При этом выполняется условие $x_1 = x_2 = 0$ и начало координат находится в точке (x_1, x_2) (рис. 13).

Исключая dt, получим уравнение:

$$1 = \frac{x_1}{x_2}.$$

После преобразования запишем

$$x_2 - x_1 = 0 \text{ или } x_2 = x_1.$$

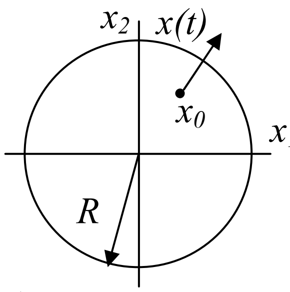


Рис. 13. Графическое представление условий устойчивости системы (8)

Траектория $x(t)$, начинающаяся в точке x_0, достигнет окружности радиусом R за конечное время. Следовательно, система неустойчива.

Важная заслуга русского ученого Ляпунова заключается в том, что он определил подход к оценке свойств устойчивости, не требующий нахождения решения дифференциальных уравнений. Этот подход основан на том факте, что в положении равновесия система имеет минимум потенциальной энергии. Тогда в любой окрестности положения равновесия потенциальная энергия будет положительна. Применение функций, которые положительны всюду, за исключением положение равновесия, является основой метода Ляпунова.

Рассмотрим систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Положим, что положением равновесия является начало координат, т.е.

$$F_1(0,0) = F_2(0,0) = 0 .$$

Допустим, что известна некоторая функция $V(x_1, x_2)$, которая положительна всюду, за исключением начала координат, где она равна нулю.

Вариант графического изображения $V(x_1, x_2)$ приведен на рис. 14:

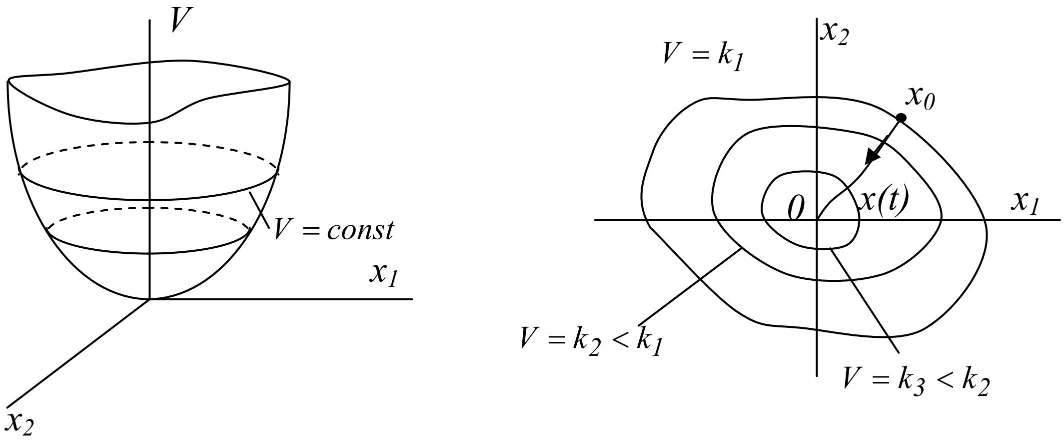


Рис. 14. Графическое изображение $V(x_1, x_2)$

Если для любой начальной точки функция $V(x_0)$ такова, что $V(x)\big|_{x=x_0} < 0$, то траектория направлена в сторону уменьшения V. Для этого случая траектория стремится к началу координат и система устойчива асимптотически. В случае, когда вблизи начала координат $\dot{V}(x) = 0$, то $V = const$, и, следовательно, система просто устойчива. Таким образом, устойчивость системы зависит от свойств производной функции V как функции времени.

Для системы регулирования, представленной уравнением (9) можно записать

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 .$$

Используя исходные уравнения системы, запишем:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x_1, x_2).$$

Поскольку функции $V(x)$ и $V(x)$ считаются известными, то для определения производной $\dot{V}(x)$ нет необходимости решать дифференциальные уравнения и отыскивать траектории движения системы.

Для системы n-го порядка значение производной будет равно:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x_1, ..., x_n).$$

Наибольшее распространение для анализа устойчивости систем получили функции Ляпунова квадратичной формы:

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i x_j, \ p_{ij} = p_{ji},$$

где $\mathrm{P} - n \times n$ - симметричная матрица.

2.2. Свойства функции Ляпунова квадратичной формы

Данная квадратичная форма имеет следующие свойства:

- положительно-определенная $x^T P x > 0$ во всей области, кроме начала координат, где $V(x = 0) = 0$;

- отрицательно-определенная $x^T P x < 0$ во всей области, кроме начала координат, где $V(x = 0) = 0$;

- знакоположительна $x^T P x \geq 0$ во всей области;

- знакоотрицательна $x^T P x \leq 0$ во всей области.

Признаки, по которым можно проверить наличие свойств квадратичной формы или соответствующей ей матрицы P.

Признаками являются собственные значения λ_i матрицы P, которые для симметрической матрицы все действительные числа:

1) для $V(x) > 0$ λ_i – все положительные числа;

2) для $V(x) < 0$ λ_i – все отрицательные числа;

3) для $V(x) \geq 0$ λ_i – все неотрицательные числа.

4) для $V(x) \leq 0$ λ_i – все неположительные числа.

Собственные значения λ_i матрицы P являются корнями характеристического уравнения:

$$|\lambda I - P| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (\lambda - p_{11}) & -p_{12} & \cdots & -p_{1n} \\ -p_{21} & (\lambda - p_{22}) & \cdots & -p_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{n1} & -p_{n2} & \cdots & (\lambda - p_{nn}) \end{vmatrix} = 0 .$$

Другим признаком определенной положительности $V(x)$ является положительность каждого из угловых миноров матрицы P. Данный признак называется критерием Сильвестра:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}, \ k = 1,2,...n .$$

Рассмотрим случай, когда система представляется векторно-матричным уравнением

$$\dot{x} = Ax . \qquad (10)$$

Для анализа устойчивости такой системы обычно используется функция Ляпунова в виде положительно-определенной квадратичной формы

$$V(x) = x^T Px$$

Условия устойчивости определяются в результате анализа производная функции Ляпунова с учетом уравнения (10)

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + \dot{x}Px^T = (Ax)^T Px + x^T PAx =$$
$$= x^T A^T Px + x^T PAx = x^T \left(A^T P + PA\right)x.$$

Практические примеры

Рассмотрим квадратичную форму функции Ляпунова, записанную для системы третьего порядка.

$$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 . \qquad (11)$$

Определить свойства $V(x)$ на траектории движения системы.

Уравнение (11) можно записать в виде векторно-матричного уравнения

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица P равна

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение записываем из определителя:

$$|\lambda I-P|=\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}=0;$$

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2-3\lambda+1\right)=0.$$

Собственные числа матрицы P равны

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Т.к. собственные числа матрицы P – положительные действительные значения, то матрица P и соответствующая ей квадратичная форма положительно определены.

Рассмотрим квадратичную форму

$$V(x)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2. \tag{12}$$

Определить свойства $V(x)$ на траектории движения системы.

Уравнение (12) можно записать в виде векторно-матричного уравнения $V(x)=x^T Px$,

где матрица $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Характеристическое уравнение записывается из определителя:

$$\begin{vmatrix} (\lambda-1) & -1 & 0 \\ -1 & (\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) \end{vmatrix}=0,$$

$$(\lambda-1)\lambda(\lambda-2)=0.$$

Из данного уравнения запишем

$$\lambda_1=1;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3=2.$$

Среди корней имеется один нулевой. Поэтому все корни неотрицательны и рассматриваемая функция $V(x)\geq 0$ является знакоположительной функцией.

Рассмотрим квадратичную форму

$$V(x)=x^T\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x.$$

Определить свойства $V(x)$, используя критерий Сильвестра.

Составим угловые миноры матрицы P:

$$\Delta_1=1;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Все миноры положительны, следовательно $V(x)>0$.

Задана квадратичная форма

$$V(x)=x^T\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x.$$

Угловые миноры матрицы P будут равны:

$$\Delta_1=1;\ \Delta_2=0;\ \Delta_3=0.$$

Т.к. среди значений угловых миноров присутствуют нули, то $V(x)$ не является положительно-определенной. Для уточнения свойства $V(x)$ необходимо определить собственные числа характеристического уравнения.

Введем обозначение:

$$A^T P+PA=-Q.$$

Очевидно, что если матрица Q положительно определена, то

$$\dot{V}=-x^T Qx<0$$

при условии $V=x^T Px>0$.

Таким образом, если одновременно выполняются неравенства $V>0$ и $\dot{V}<0\,(Q>0)$ в некоторой области пространства переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, включающей начало координат, то система асимптотически устойчива.

2.3. Условие Ляпунова об асимптотической устойчивости

Для того чтобы система регулирования, представленная линейными дифференциальными уравнениями, была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной положительно определенной матрицы $Q>0$ существовала положительно определенная матрица $P>0$, удовлетворяющая уравнению

$$A^T P + PA = -Q.$$

Следует отметить, что матрицы P и Q являются симметрическими. Если $P = P^T$, то выполняется равенство

$$Q^T = -\left(A^T P + PA\right)^T = -P^T A - A^T P^T = -\left(A^T P + PA\right) = Q,$$

т.е. $Q = Q^T$ и матрица Q – симметрическая.

Практический пример

Определение матрицы P при анализе устойчивости системы

Задана система, которой соответствует структурная схема (рис. 15)

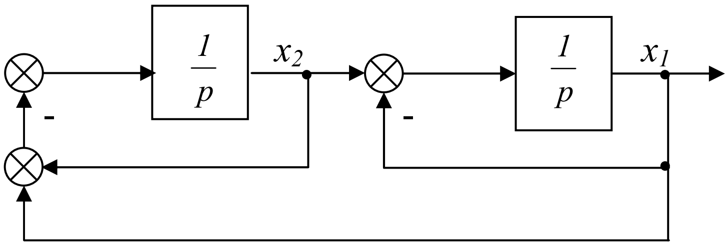


Рис. 15. Структурная схема системы регулирования

и дифференциальные уравнения.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2, \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{p}\left(x_2 - x_1\right), \\ x_2 = \dfrac{1}{p}\left(-x_1 - x_2\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} px_1 = -x_1 + x_2, \\ px_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

Выберем в качестве матрицы Q единичную матрицу. При этом выполняется условие $Q = Q^T$.

Тогда уравнение вида

$$A^T P + PA = -Q$$

можно записать

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Поскольку матрица Q – симметрическая, то P также будет симметричной, в которой $p_{12} = p_{21}$.

Из матричного уравнения (13) составляется три уравнения, из которых определяются p_{11}, p_{12}, p_{22}:

$$\begin{cases} 2p_{11} + 2p_{12} = 1 \\ p_{11} - 2p_{12} - p_{22} = 0. \\ -2p_{12} + 2p_{22} = 1 \end{cases}$$

В результате решения определяются:

$$p_{11} = 0{,}5,\ p_{12} = p_{21} = 0,\ p_{22} = 0{,}5.$$

Полученная матрица $P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ является положительно определенной. Следовательно, рассматриваемая система асимптотически устойчива.

2.4. Условия устойчивости линейных систем на основе анализа корней характеристического уравнения

Данное условие основано на определении корней характеристического уравнения, которое записывается из определителя:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12}\ldots & -a_{1n} \\ . & & \\ . & \ldots & \ldots \\ . & & \\ -a_{n1} & \ldots & (\lambda - a_{nn}) \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение n-го порядка имеет вид

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Корни характеристического уравнения могут быть вещественными, комплексными или чисто мнимыми. Здесь отметим, что переходная составляющая регулируемого процесса определяется только корнями характеристического уравнения:

$$y_n(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \ldots + c_n e^{p_n t},$$

где c_1, c_2, …, c_n – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий, p_1, p_2, …, p_n – корни характеристического уравнения.

Далее рассмотрим вид переходного процесса $y_n(t)$ для случая одного или двух корней характеристического уравнения:

а) вещественные корни характеристического уравнения p_1.

- $p_1 = -\lambda_1$, $y_п(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t}$.

Процесс будет затухать $y_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Система устойчива.

- $p_1 = \lambda_1$, $y_n(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$.

Процесс будет расходящимся $y_n(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Система неустойчива (рис. 16).

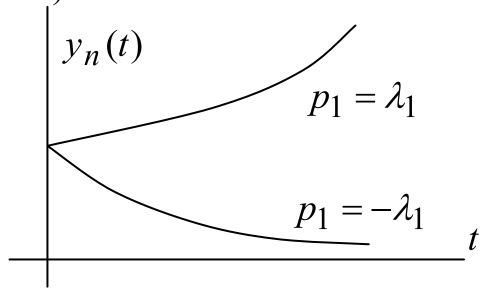


Рис. 16. Вид переходного процесса при разных знаках вещественных корней характеристического уравнения

б) комплексные корни характеристического уравнения. Данные корни обычно попарно сопряженные.

- $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$.

В этом случае переходный процесс будет определяться выражением

$$c_1 e^{-(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha - j\beta)t} = Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi),$$

где A, ψ – новые постоянные времени (рис. 17).

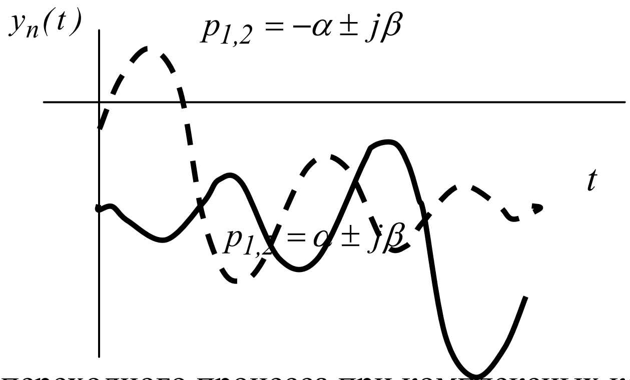


Рис. 17. Вид переходного процесса при комплексных корнях характеристического уравнения

Переходный процесс $y_n(t)$ будет затухающим с круговой частотой β и показателем затухания α. Система устойчива.

- $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$.

Переходный процесс $y_n(t)$ будет расходящимся. Система неустойчива.

в) Чисто мнимые корни характеристического уравнения.

- $p_{1,2} = \pm j\beta$,

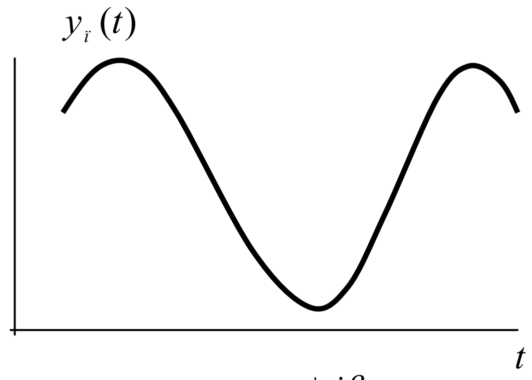
Переходный процесс определяется выражением (рис. 18)

$$y_n(t) = c_1 e^{j\beta t} + c_2 e^{-j\beta t} = A\sin(\beta t + \psi).$$

Процесс представляет незатухающие колебания. Система с точки зрения ее работоспособности может представляться устойчивой или неустойчивой.

Условия устойчивости системы записываются следующим образом:

- если корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то система асимптотически устойчива;
- если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то система неустойчива;
- если характеристическое уравнение не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеется часть корней с нулевой вещественной частью, то система будет устойчивой.



$p_{1,2} = \pm j\beta$

Рис. 18. Вид переходного процесса при мнимых корнях характеристического уравнения

Исходя из данных условий, мнимая ось представляет собой граничную линию в плоскости корней, за которую не должны переходить корни характеристического уравнения (рис. 19).

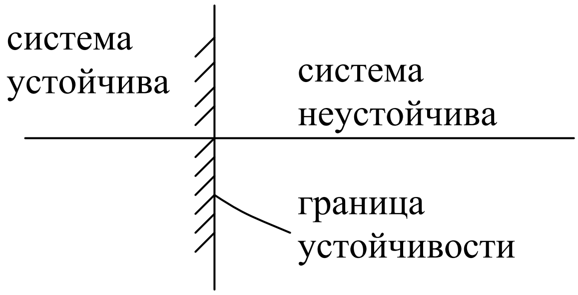


Рис. 19. Графическое распределение корней
характеристического уравнения

Система будет находиться на границе устойчивости при наличии:

1) нулевого корня;

2) пары чисто мнимых корней;

3) бесконечного корня.

Таким образом, вопрос об устойчивости системы, представленной линейным дифференциальным уравнением, сводится к исследованию корней характеристического уравнения. Однако использование данного подхода представляет значительные трудности для систем выше четвертого порядка, так как корни уравнений не выражаются аналитически через коэффициенты уравнений.

Особенности использования метода Ляпунова при исследовании устойчивости нелинейных систем, представленных линеаризованными уравнениями.

При разложении нелинейных функций, описывающих поведение нелинейной системы, в степенные ряды, которые сходятся в некоторой окрестности начала координат, возможно сделать заключение об устойчивости нелинейной системы по ее линеаризованному представлению.

Записывается уравнение

$$\dot{x} = A_1 x + R(x),$$

где $A_1 - n \times n$-матрица коэффициентов первого приближения; $R(x) - n$-мерный вектор остаточных членов.

Тогда для линеаризованной системы

$$\dot{x} = A_1 x$$

можно записать условия устойчивости, которые распространяются на исходную нелинейную систему:

1) если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны для системы первого приближения, то исходная нелинейная система асимптотически устойчива независимо от членов разложения выше первого порядка.

2) если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то исходная нелинейная система неустойчива независимо от членов разложения выше первого порядка.

3) если среди корней характеристического уравнения первого приближения есть нулевые, то для анализа устойчивости исходной нелинейной системы необходимо учитывать члены выше первого порядка.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

3.1. Критерий Гурвица

Применение алгебраических критериев позволяет исключить операцию вычисления собственных чисел характеристического уравнения системы.

Для того чтобы все собственные числа характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, т.е. система асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы матрица, составленная из коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0;$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix} \qquad (14)$$

являлась положительно определенной.

Матрица (14) составляется следующим образом. По главной диагонали от левого верхнего до нижнего угла выписываются коэффициенты от a_1 до a_n. Каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо, так чтобы чередовались строки с нечетными и четными индексами. В случае отсутствия данного коэффициента, а также если индекс его больше *n* на месте его пишется нуль. Начиная со второй строки перед коэффициентом с индексом «$_2$» пишется «$_1$», перед коэффициентом с индексом «$_1$» пишется «$_0$».

Критерий устойчивости сводится к тому, чтобы все определители Гурвица, получаемые из данной квадратной матрицы, были больше нуля. При этом все коэффициенты характеристического уравнения должны быть больше нуля.

Определители Гурвица составляются по следующему правилу:

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ и т.д.}$$

Рассмотрим частные случаи критерия устойчивости:

1) Для уравнения первого порядка, $p + a_1 = 0$

$$\Delta_1 = a_1 > 0.$$

2) Для уравнения второго порядка, $p^2 + a_1 p + a_2 = 0$.

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0,$$

т.к. $a_1 > 0, a_2 > 0$ условие будет выполняться

3) Для уравнения третьего порядка, $p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$.

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0,$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

Использование критерия Гурвица обычно ограничивается уравнениями четвертого порядка.

Практические примеры

Определить характер устойчивости линейной системы регулирования, представленной уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}, \tag{15}$$

В векторно-матричной форме уравнения (15) имеют вид

$$\dot{x} = Ax.$$

где матрица $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Характеристическое уравнение составляется из определителя:

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 1) & -1 \\ 1 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

и имеет вид

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \qquad (16)$$

На основании уравнения (16) матрица Гурвица:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

откуда $\Delta_1 = 2 > 0$; $\Delta_2 = 4 > 0$, т.е. система асимптотически устойчива.

Это подтверждается тем, что вещественные части двух комплексно-сопряженных корней отрицательны.

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm j .$$

Определить область устойчивости замкнутой систему регулирования, представленной следующей схемой

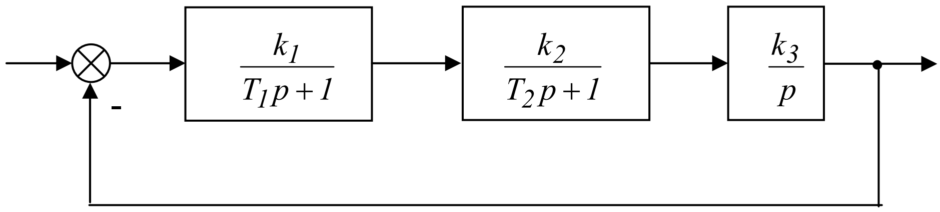


Рис. 20. Структурная схема системы регулирования системы

Передаточная функция разомкнутой системы записывается в виде:

$$W_p(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы с единичной обратной связью:

$$W_з(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}.$$

При анализе устойчивости исследуется свойство корней характеристического уравнения знаменателя $W_З(p)$. При этом оператор «p» заменяется на символ «λ».

$$1 + W_p(\lambda) = 0;$$

$$1 + W_p(\lambda) = T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2)\lambda^2 + \lambda + k_1 k_2 k_3 = 0.$$

Запишем данное уравнение в стандартной форме:

$$\lambda^3 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2}\lambda^2 + \frac{1}{T_1 \cdot T_2}\lambda + \frac{k_1 k_2 k_3}{T_1 \cdot T_2} = 0$$

или $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$.

Матрица Гурвица имеет вид:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Условия устойчивости записываются $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$.

$$\Delta_1 = a_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2} > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_3 = \frac{1}{T_1 \cdot T_2}\left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2} - k_1 k_2 k_3\right) > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \frac{k_1 k_2 k_3}{T_1^2 T_2^2} > 0.$$

Поскольку все параметры $T_1, T_2, k_1, k_2, k_3 > 0$, то условием устойчивости является

$$\left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2} - k_1 k_2 k_3\right) > 0 \text{ или } k_1 k_2 k_3 < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

4. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

4.1. Критерий устойчивости Михайлова

Частотные критерии устойчивости получили достаточно широкое практическое применение, т.к. позволяют определить устойчивость замкнутой системы по более простой передаточной функции разомкнутой системы. Кроме того, анализ устойчивости можно выполнить по экспериментально определенным частотным характеристикам.

Критерий устойчивости сформулирован в 1938 г. российским ученым Михайловым.

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

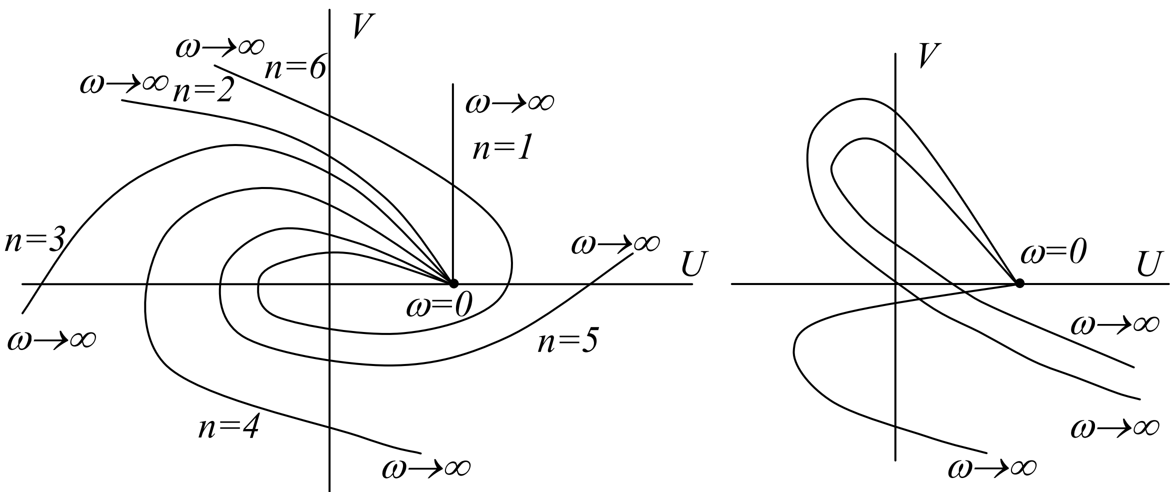
$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Путем подстановки $\lambda = j\omega$ данное уравнение записывается:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega)$, $V(\omega)$ – соответственно вещественная и мнимая части характеристического многочлена.

Критерий заключается в следующем (рис. 21): чтобы замкнутая система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы годограф характеристического многочлена замкнутой системы (годограф Михайлова) начинался на положительной части действительной оси и проходил последовательно в положительном направлении, исключая точку начала координат, ***n*** квадрантов комплексной плоскости (где ***n*** – порядок характеристического уравнения).



годографы для устойчивых систем при $n = 1 \div 6$

годографы для неустойчивых систем при $n = 4$

Рис. 21. Графическое изображение годографов Михайлова для устойчивых и неустойчивых систем

Практический пример

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы регулирования имеет вид:

$$\lambda^3 + 55\lambda^2 + 700\lambda + 11250 = 0 .$$

Проверить устойчивость системы путем построения годографа Михайлова. При $\lambda = j\omega$ данное уравнение записывается

$$U(\omega) + jV(\omega) = (11250 - 55\omega^2) + j\omega(700 - \omega^2) .$$

Зададимся различными значениями ω и вычислим $U(\omega)$ и $V(\omega)$.

Таблица 1

Данные вычислений вещественной и мнимой частей годографа Михайлова

ω	0	5	10	15	20	25	30
U(ω)	11250	9875	5750	0	-10750	-27250	-38250
V(ω)	0	3375	6000	17085	-6000	0	-6000

По данным табл. 1 построим годограф Михайлова.

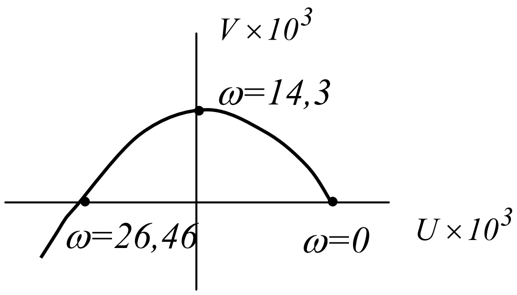


Рис. 22. Годограф Михайлова
для замкнутой системы

Годограф при $n = 3$ пересекает третий квадрант, следовательно, система регулирования устойчива.

4.2. Критерий устойчивости Михайлова-Найквиста

Данный критерий в отличие от алгебраических критериев и критерия Михайлова позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по поведению годографа разомкнутой системы вида

$$W_p(p) = \frac{M_p(j\omega)}{N_p(j\omega)},$$

где $N_p(j\omega)$ – характеристический многочлен разомкнутой системы.

Здесь предполагается, что степень m многочлена $M_p(j\omega)$ меньше степени многочлена $N_p(j\omega)$, равной n.

Критерий заключается в следующем: Замкнутая система регулирования будет устойчива, если годограф $W_p(j\omega)$ разомкнутой системы, имеющей m полюсов в правой части полуплоскости, при увеличении ω от *0* до ∞ охватит точку *(-1, j0)* $\frac{m}{2}$ раз в положительном направлении.

При этом полюс передаточной функции $W_p(j\omega)$ – корень характеристического уравнения знаменателя $W_p(j\omega)$; нуль передаточной функции $W_p(j\omega)$ – корень характеристического уравнения числителя $W_p(j\omega)$.

Практический пример

Для устойчивой системы годограф Михайлова-Найквиста при $m = 1$ имеет следующий вид.

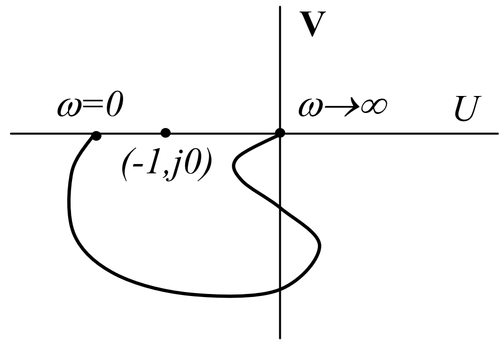


Рис. 23. Годограф Михайлова-Найквиста
для устойчивой системы при $m = 1$

Существуют также критерии устойчивости для одноконтурных и многоконтурных систем регулирования, основанные на логарифмических частотных характеристиках.

4.3. Построение областей устойчивости. D-разбиение

Для определения областей устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического уравнения (параметров системы) используется метод D-разбиения.

Обычно рассматривается построение областей устойчивости в плоскости двух параметров. Суть данного метода заключается в следующем. На основе известного характеристического уравнения системы управления или регулирования записывается полином $D(j\omega)$ в частотной области:

$$D(j\omega) = W(p)\big|_{p=j\omega} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Границы области устойчивости в пространстве двух параметров определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} U(\omega) = 0 \\ V(\omega) = 0 \end{cases}.$$

Обычно область устойчивости ограничивается внутренним пространством на плоскости, заключенным между осями координат, на которых откладываются значения зависимых параметров, и кривой D-разбиения. Для определения замкнутых границ области устойчивости изображение заштрихованной области устойчивости системы при изменении частоты ω от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$ вычисляется определитель Δ матрицы:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial U(\omega)}{\partial \Pi_1} & \dfrac{\partial U(\omega)}{\partial \Pi_2} \\ \dfrac{\partial V(\omega)}{\partial \Pi_1} & \dfrac{\partial V(\omega)}{\partial \Pi_2} \end{bmatrix}.$$

Если определитель Δ имеет положительное значение при изменении ω от $-\infty$ до 0, то необходимо штриховать область, лежащую слева от кривой. Если определитель Δ имеет отрицательное значение при изменении ω от 0 до $+\infty$, то необходимо штриховать область, лежащую справа от кривой.

Предположим, что два рассматриваемых параметра системы входят линейным образом в характеристическое уравнение. Построение области устойчивости рассмотрим на примере. Допустим, имеем характеристическое уравнение

$$T_y T_м p^3 + \left(T_y + T_м\right)p^2 + p + k = 0.$$

Положим, что значение $T_м$ является заданной величиной и требуется построить область устойчивости в плоскости двух параметров T_y и k. Заменяя $p = j\omega$, получим

$$D(j\omega) = k + j\omega - \left(T_y + T_м\right)\omega^2 - j\omega^3 T_y T_м.$$

Уравнения, определяющие границу области устойчивости, имеют вид:

$$U(\omega) = k - \omega^2\left(T_y + T_м\right) = 0, V(\omega) = \omega - \omega^3 T_y T_м = 0.$$

Решая данные уравнения совместно относительно параметров k и T_y, получим:

$$T_y = \frac{1}{T_м \omega^2};\ k = \frac{1}{T_м} + T_м \omega^2.$$

Далее осуществляется построение кривой D-разбиения в координатах T_y и k, задаваясь значениями ω от 0 до ∞.

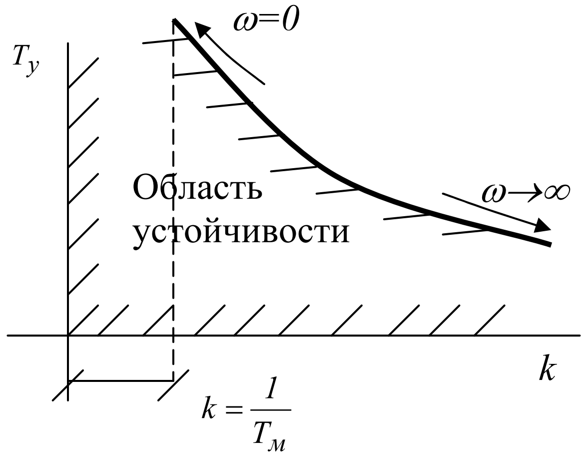


Рис. 23. Область *D*-разбиения в координатах $T_у$ и *k*

Для нанесения штриховки, которая однозначно ограничивает область устойчивости, необходимо определить знак следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial k} & \dfrac{\partial U}{\partial T_у} \\ \dfrac{\partial V}{\partial k} & \dfrac{\partial V}{\partial T_у} \end{vmatrix}.$$

Данный определитель получается равным

$$\begin{vmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & -\omega^3 T_м \end{vmatrix} = -\omega^3 T_м .$$

Для отрицательных частот, т.е. при изменении ω от $-\infty$ до *0*, полученный определитель будет положительным. Поэтому при движении по кривой снизу вверх (при ω от $-\infty$ до *0*) необходимо штриховать область, лежащую слева от кривой. Для положительных частот, т.е. при изменении ω от *0* до ∞, полученный определитель будет отрицательным. Поэтому при движении по кривой сверху вниз (при ω от *0* до ∞) необходимо штриховать область, лежащую справа от кривой. Снизу от полученной кривой получится двойная штриховка.

Т.к. параметры $T_у$ и *k* должны быть положительными, то область устойчивости системы будет ограничиваться полученной кривой и положительными направлениями осей $T_у$ и *k*.

Таким образом,

- при нулевом корне (из исходного уравнения $k = 0$) границей устойчивости будет ось ординат;
- при чисто мнимых корнях границей устойчивости системы будет являться полученная кривая;

- при корнях равных ∞ (из исходного уравнения $T_y \to \infty T$) границей устойчивости будет ось абсцисс.

5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

5.1. Основные показатели качества процесса регулирования

Устойчивость системы регулирования является необходимым, но не достаточным условием ее работоспособности. Устойчивость системы означает лишь то, что в системе происходит затухание переходного процесса под влиянием управляющего воздействия. Время затухания процесса, максимальное отклонение регулируемой величины и число колебаний при этом никак не определяется, однако данные величины являются важными показателями качества процесса регулирования.

Для определения показателей качества используют следующие методы:

- построение переходных процессов по заданным передаточным функциям замкнутых систем;
- определение показателей качества по расположению нулей и полюсов;
- интегральные оценки качества;
- частотные оценки качества;
- частотные методы построения переходных процессов.

Рассмотрим переходной процесс на выходе системы, который наблюдается при формировании на входе единичного воздействия $1(t)$.

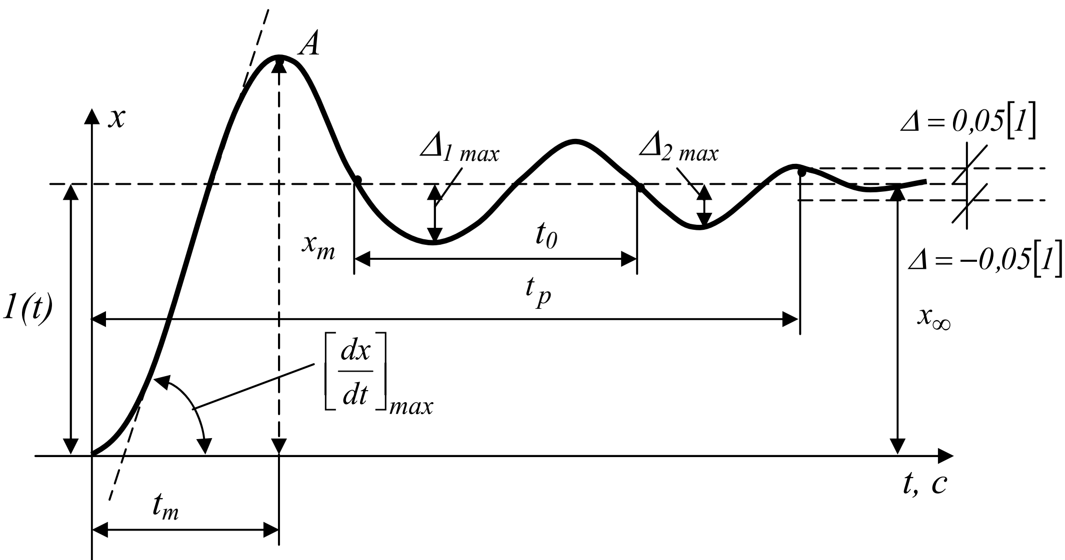


Рис. 24. Вид переходного процесса и его показатели качества

Одним из первых показателей качества понимают величину максимального перерегулирования

$$\sigma_{\max} = \frac{x_m - x_\infty}{x_\infty} \cdot 100\%,$$

где $x_\infty = x_{уст}$ – установившееся значение регулируемой величины.

Второй показатель – длительность t_p регулирования (протекания переходного процесса).

Третий показатель качества – число N_p колебаний регулируемой величины в течение времени t_p переходного процесса.

Дополнительные показатели качества:

- собственная частота колебаний системы $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0}$, t_0 – период собственных колебаний.

- логарифмический декремент затухания системы, характеризующий быстроту затухания переходного процесса.

$$d_c = \ln \frac{\Delta_{1\max}}{\Delta_{2\max}},$$

где $\Delta_{1\max}$, $\Delta_{2\max}$ – две амплитуды для рядом расположенных экстремумов кривой переходного процесса.

- максимальная скорость отработки регулируемой величины $\left[\frac{dx}{dt}\right]_{\max}$.

Все многообразие устойчивых переходных процессов можно разделить на четыре группы (рис. 25):

- колебательный процесс, характеризуемый несколькими перерегулированиями с амплитудой > 5% зоны (кривая 1);
- колебательный процесс, характеризуемый одним перерегулированием с амплитудой > 5% зоны (кривая 2);
- монотонный процесс, когда на интервале времени $0 \le t \le t_p$ $\frac{dx}{dt} \ge 0$ (кривая 3);
- процесс без перерегулирования, когда $x(t) < x(\infty)$ для всех t (кривая 4).

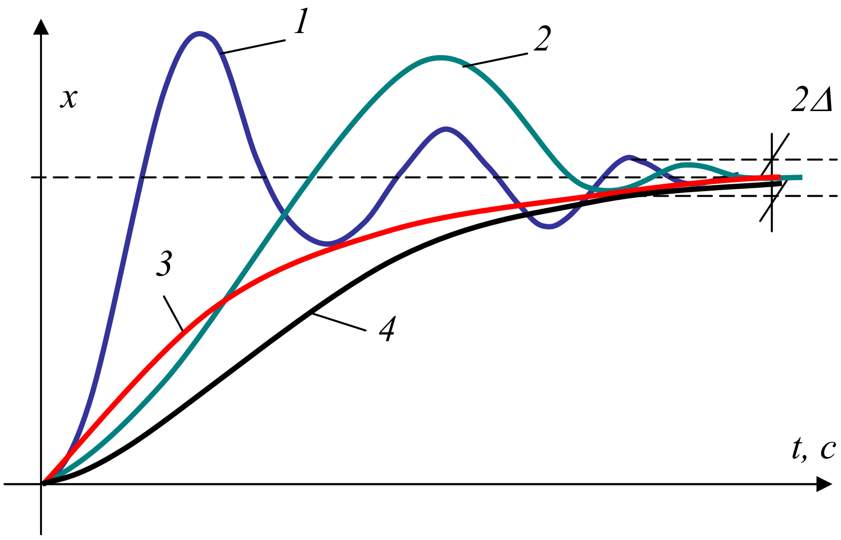


Рис. 25. Типы переходных процессов

6. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ЗАДАННЫМ ПЕРЕДАТОЧНЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ

6.1. Динамическая точность систем регулирования

Одной из важных характеристик в системе регулирования является ее динамическая точность или ошибка при подаче управляющих и возмущающих воздействий. При этом точность системы определяется значением ошибки в установившемся режиме:

$$\varepsilon(\infty) = \varepsilon(t)\big|_{t\to\infty}.$$

6.2. Коэффициенты ошибок

Определим коэффициенты ошибок с помощью выражения для ошибок:

$$\varepsilon(p) = \frac{y_з(p)}{1 + W_p},$$

где $y_з(p)$ – задающий сигнал; W_p – передаточная функция разомкнутой системы.

Представим, что W_p является отношением многочленов:

$$W_p = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n} =$$

$$= \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{\left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} p + ... + \frac{b_1}{b_m} p^{m-1} + \frac{b_0}{b_m} p^m\right)}{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} p + ... + \frac{a_1}{a_n} p^{n-1} + \frac{a_0}{a_n} p^n\right)} =$$

$$= \frac{k\left(1 + \beta_1 p + ... + \beta_{m-1} p^{m-1} + \beta_m p^m\right)}{\left(1 + \alpha_1 p + ... + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \alpha_n p^n\right)}.$$

При подстановке данного уравнения в уравнение $\varepsilon(p)$ и разложении в ряд Маклорена получим:

$$\varepsilon(p) = c_0 y_з(p) + \frac{c_1 y_з(p)}{1!} + \frac{c_2 p^2 y_з(p)}{2!} + ...$$

где $c_0, c_1, c_2 ....$ – коэффициенты ошибок статической системы.

$$c_0 = \frac{1}{1+k},\ c_1 = \frac{(\alpha_1 - \beta_1)k}{(1+k)^2} \text{ и т.д.}$$

Таким образом, ошибку системы во временной области можно представить в виде приближенного ряда:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{1+k} y_з(t) + \frac{1}{D_\omega} \frac{dy_з(t)}{dt} + \frac{1}{D_\varepsilon} \frac{d^2 y_з(t)}{dt^2} + \frac{1}{D_{\dot{\varepsilon}}} \frac{d^3 y_з(t)}{dt^3};$$

где $\frac{1}{1+k}$ – коэффициент статизма статической системы; D_o – коэффициент добротности статической системы по скорости; D_ε – коэффициент добротности статической системы по ускорению; $D_{\dot{\varepsilon}}$ – коэффициент добротности статической системы по первой производной ускорения.

$$c_0 = \frac{1}{1+k},\ D_\omega = \frac{1}{c_1},\ D_\varepsilon = \frac{2}{c_2},\ D_{\dot{\varepsilon}} = \frac{6}{c_3}.$$

6.3. Система регулирования с астатизмом первого порядка

Передаточная функция разомкнутой системы будет определяться выражением

$$W_p = \frac{k\left(1 + \beta_1 p + ... + \beta_m p^m\right)}{p\left(1 + \alpha_1 p + ... + \alpha_n p^n\right)}.$$

В результате ошибка $\varepsilon(p)$ имеет вид:

$$\varepsilon(p)=\frac{c_1 y_з(p)}{1!}+\frac{c_2 p^2 y_з(p)}{2!}+\ldots$$

После обратного преобразования Лапласа

$$\varepsilon(t)=c_1\frac{dy_з(t)}{dt}+\frac{c_2}{2!}\frac{d^2 y_з(t)}{dt^2}+\ldots,$$

где $c_0=0$, $c_1=\dfrac{1}{k}$, $\dfrac{c_2}{2}=\dfrac{\alpha_1-\beta_1}{k}-\dfrac{1}{k^2}$.

Ошибка во временной области приближенно представляется

$$\varepsilon(t)\cong\frac{1}{D_\omega}\frac{dy_з(t)}{dt}+\frac{1}{D_\varepsilon}\frac{d^2 y_з(t)}{dt^2}+\frac{1}{D_{\dot\varepsilon}}\frac{d^3 y_з(t)}{dt^3},$$

$$c_0=0,\ c_1=\frac{1}{D_\omega},\ \frac{c_2}{2}=\frac{1}{D_\varepsilon},\ \frac{c_3}{6}=\frac{1}{D_{\dot\varepsilon}}.$$

6.4. Система регулирования с астатизмом второго порядка

Передаточная функция разомкнутой системы будет определяться выражением

$$W_p=\frac{k\left(1+\beta_1 p+\ldots+\beta_m p^m\right)}{p^2\left(1+\alpha_1 p+\ldots+\alpha_n p^n\right)}.$$

После проведения соответствующих преобразований уравнение ошибки во временной области представляется двумя первыми слагаемыми ряда

$$\varepsilon(t)\cong\frac{c_2}{2}\frac{d^2 y_з(t)}{dt^2}+\frac{c_3}{6}\frac{d^3 y_з(t)}{dt^3}\cong\frac{1}{D_\varepsilon}\frac{d^2 y_з(t)}{dt^2}+\frac{1}{D_{\dot\varepsilon}}\frac{d^3 y_з(t)}{dt^3},$$

где $c_0=0$, $c_1=0$, $\dfrac{c_2}{2}=\dfrac{1}{k}$, $\dfrac{c_3}{6}=\dfrac{\alpha_1-\beta_1}{k}$, D_ε – коэффициент добротности по ускорению системы с астатизмом второго порядка; $D_{\dot\varepsilon}$ – коэффициент добротности по производной ускорения системы с астатизмом второго порядка.

$$\frac{1}{D_\varepsilon}=\frac{1}{k},\ \frac{1}{D_{\dot\varepsilon}}=6\cdot\frac{\alpha_1-\beta_1}{k}.$$

При сравнении точности статической и астатических систем используются обычно типовые сигналы. Например

$$y_з(t) = \frac{A}{2}t^2 \text{ или } y_з(t) = A\sin\omega_0 t,$$

где ω_0 – достаточно малая частота.

Рассмотрим сигнал

$$y_з(t) = \frac{A}{2}t^2.$$

Тогда значения ошибки $\varepsilon(t)$ записываются для статической системы:

$$\varepsilon(t) = \frac{c_0 A t^2}{2} + c_1 A t + \frac{c_2 A}{2},$$

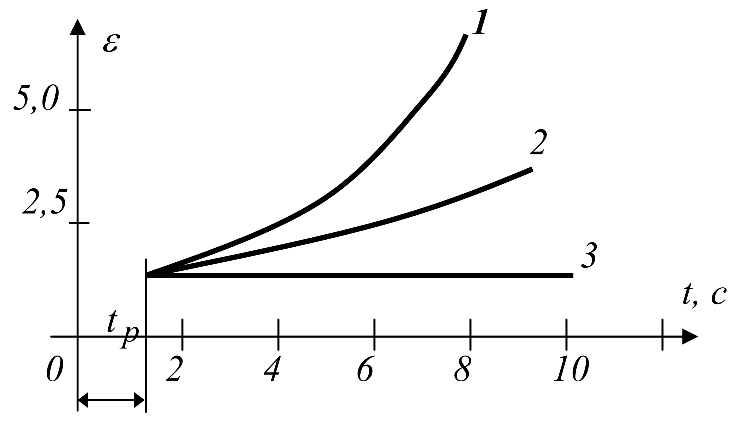
для астатической системы первого порядка:

$$\varepsilon(t) = c_1 A t + \frac{c_2 A}{2},$$

для астатической системы второго порядка:

$$\varepsilon(t) = \frac{c_2 A}{2}.$$

Принимая, например, $c_0 A = c_1 A = c_2 A = 0{,}1$, изобразим графически $\varepsilon(t)$ на рис. 26.



1 – статическая система; 2 – астатическая система первого порядка; 3 – система второго порядка; t_p – длительность переходного процесса (время регулирования)

Рис. 26. Ошибка регулирования для статических и астатических систем

Практические примеры

Пример №1.

Задана передаточная функция разомкнутой системы (астатизм первого порядка)

$$W_p = \frac{100(0{,}3p+1)}{p(p+1)(0{,}05p+1)(0{,}02p+1)}.$$

Определить коэффициенты ошибок и построить характеристику точности.

В качестве задающего сигнала используется

$$y_з(t) = 0{,}2t^2.$$

Запишем передаточную функцию в виде

$$W_p = \frac{100}{p}\frac{(0{,}3p+1)}{1+1{,}07p+0{,}071p^2+0{,}001p^3}.$$

Вычислим коэффициенты ошибок:

$$c_0 = 0,\ c_1 = \frac{1}{k} = 0{,}01c,$$

$$c_2 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{1{,}07-0{,}3}{100} - \frac{1}{100^2} = 0{,}0066c^2,$$

где $\alpha_1 = 1{,}07$, $\beta_1 = 0{,}3$.

Выражение ошибки равно:

$$\varepsilon(t) \cong 0{,}01 \cdot 0{,}4t + \frac{0{,}0066}{2} \cdot 0{,}4 = 0{,}00132 + 0{,}004t.$$

Пример №2.

Задана передаточная функция разомкнутой системы (астатизм второго порядка):

$$W_p = \frac{200(0{,}125p+1)}{p^2(0{,}01p+1)(0{,}005p+1)}.$$

Определить коэффициенты добротности и построить характеристики точности по ускорению задающего сигнала

$$y_з(t) = 0{,}2t^2.$$

Согласно уравнению $D_\varepsilon = k = 200$.

Точность по ускорению задающего сигнала определяется формулой:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{D_\varepsilon}\frac{d^2 y_з}{dt^2} = \frac{1}{200} \cdot 0{,}4 = 0{,}002\,рад.$$

7. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

7.1. Общие сведения

Качество функционирования системы определяется величиной ошибки, равной разности между требуемым и действительным значениями регулируемой величины:

1) в следящих системах $\varepsilon(t) = y_з(t) - y(t)$;

2) в системах стабилизации $\varepsilon(t) = -y(t)$.

Для определения качественных показателей при типовых воздействиях используются критерии качества.

Данные критерии разбиты на четыре группы:

- критерии точности систем регулирования;
- критерии, определяющие величину запаса устойчивости;
- критерии, определяющие быстродействие систем регулирования;
- комплексные критерии, интегрально учитывающие отмеченные выше критерии.

-

<u>Установившееся состояние</u>. В данном режиме $y_з(t) = y_0 = const$ и возмущения $V(t) = V_0 = const$. Ошибка $\varepsilon(t)$ называется статической ошибкой.

Установившееся значение статической ошибки $\varepsilon_{ст}(t)$ можно записать по известной формуле

$$\varepsilon_{cm}(t) = \left.\frac{y_0}{1+W_p}\right|_{p\to 0} - \left.\frac{\sum\limits_{k=1}^{r} W_{V_k} V_{k0}}{1+W_p}\right|_{p\to 0} = \varepsilon_{cm1} + \varepsilon_{cm2},$$

где W_{vk}, V_{k0} – соответственно, передаточная функция по k-му возмущению и действующее на систему k-ое возмущение; W_p – передаточная функция разомкнутой системы; r – число действующих на систему возмущений.

Значение $\varepsilon_{ст1}$ определяется задающим воздействием. Т.к. в статических системах передаточная функция $W_p(0) = k$ и представляет собой общий коэффициент усиления по разомкнутой цепи, то

$$\varepsilon_{cm1} = \frac{y_0}{1+W_p(0)} = \frac{y_0}{1+k}.$$

Возможно два режима функционирования системы регулирования:

- следящий $y_0 = const \neq 0$,

- стабилизации y_0 можно принять равным *0*. В этом случае передаточные функции системы записываются в отклонениях и $\varepsilon_{cm1} = 0$.

Значение $\varepsilon_{\text{ст}1}$ в следящих статических системах может быть сведено к нулю при использовании гибкой (неединичной) обратной связи. В следящих астатических системах $W_p(0) \to \infty$, поэтому в этих системах $\varepsilon_{cm} \to 0$.

Таким образом, значение $\varepsilon_{\text{ст}}$ практически во всех случаях равно нулю.

Второе слагаемое в уравнении $\varepsilon(t)$ никогда не равно нулю. Поскольку сравнивающий элемент представляет собой чувствительное устройство с большим коэффициентом передачи, то целесообразно учесть влияние возмущений на измерительно-преобразующие устройства. Значение $\varepsilon_{\text{ст}2}$ будет равно

$$\varepsilon_{cm2} = \varepsilon_{cm3} + \varepsilon_{cm4},$$

где $\varepsilon_{\text{ст}3}$ – ошибка, которая определяется непосредственно внешними возмущениями на объект регулирования; $\varepsilon_{\text{ст}4}$ – ошибка чувствительного элемента.

Рассмотрим случай, когда на объект управления воздействует одно возмущение $V_1(t)$. Для статической системы получим:

$$\varepsilon_{cm} = \frac{W_1(0)V_{10}}{1 + W_p(0)} = \frac{W_1(0)V_{10}}{1 + k},$$

где $W_1(0)$, $W_p(0)$ – передаточные функции по возмущению и разомкнутой системы при $p \to 0$.

Величина $(1 + k)$ отражает эффективность регулирования с точки зрения уменьшения установившейся ошибки.

В астатической системе $W_p(0) \to \infty$. Ошибка ε_{cm} может равняться нулю (при ограниченном значении $W_1(0)$) и может не равняться нулю (при $W_1(0) \to \infty$).

Практический пример

Структурная схема системы имеет вид:

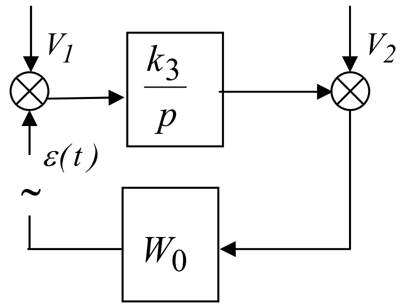


Рис. 27. Структурная схема системы

Имеется объект с передаточной функцией $W_0 = k_0$ и регулятор с передаточной функцией $W = \frac{k}{p}$.

В разомкнутой системе ошибка равна

$$\varepsilon(t) = W_0 \left[\frac{k}{p} V_1 + V_2 \right].$$

В замкнутой системе

$$\varepsilon(t) = \frac{W_0 \left[\frac{k}{p} V_1 + V_2 \right]}{1 + W_p},$$

где $W_p = W_0 \frac{k}{p}$ – передаточная функция разомкнутой системы.

Для определения установившейся ошибки ε_{cm2} положим

$$p = 0,\ V_1 = V_{10} = const,\ V_2 = V_{20} = const.$$

Тогда

$$\varepsilon_{cm2} = \left. \frac{W_0 \left[\frac{k}{p} V_{10} + V_{20} \right]}{1 + W_p} \right|_{p=0} =$$

$$= \left. \frac{p(k_0 k V_{10})}{p(p + k_0 k)} + \frac{p k_0 V_{20}}{(p + k_0 k)} \right|_{p=0} = V_{10} + 0 = V_{10},$$

Т.е. значение $V_{20} = 0$. Таким образом, установлено, что для устранения возмущения необходимо установить интегрирующее звено до места приложения данного возмущения (элемент сравнения при этом должен находиться на структурной схеме слева). Ошибка чувствительного элемента сравнения (возмущения в элементе сравнения) не устраняется введением интегрирующих элементов и повышением степени астатизма системы.

<u>Движение с постоянной скоростью</u>. В данном режиме задающим сигналом является

$$y_з(t) = v \cdot t,$$

где v – скорость изменения $y_з(t)$, $v = const$.

При этом возмущения $V_k(t)$ имеют постоянные значения $V_k(t) = V_{k0}$.

Данный режим используется в следящих системах и системах программного регулирования.

Операторное изображение такого сигнала равно

$$y_з(p) = \frac{v}{p}.$$

Установившееся значение ошибки $\varepsilon_{уст}(t)$ определяется выражением:

$$\varepsilon_{уст} = \left.\frac{\frac{v}{p}}{1+W_p}\right|_{p\to 0} - \left.\frac{\sum\limits_{k=1}^{r} W_{V_k} V_{k0}}{1+W_p}\right|_{p\to 0} = \varepsilon_{ск} + \varepsilon_{ст},$$

где $\varepsilon_{ск}$ – скоростная ошибка.

Первое слагаемое данного выражения будет иметь смысл только при астатизме первого порядка, когда передаточная функция W_p равна:

$$W_p = \frac{k_{ск} M_p(p)}{p N_p(p)},$$

где $k_{ск}$ – добротность системы по скорости, $M_p(p)$ – полином m-го порядка, $N_p(p)$ – полином n-го порядка, $m \le n$.

Тогда значение $\varepsilon_{уст}(t)$ будет равно:

$$\varepsilon_{уст} = \frac{v}{k_{ск}} + \varepsilon_{ст}.$$

Так как система может двигаться с различными скоростями, то ее качество целесообразно характеризовать не самой скоростной ошибкой, а значением добротности по скорости:

$$k_{ск} = \frac{v}{\varepsilon_{уст}}.$$

Замечание. В статических системах значение скоростной ошибки стремится к ∞, а при астатизме системы выше первого порядка значение $\varepsilon_{ск} = 0$. Режим движения с постоянной скоростью используется для оценки точности только систем с астатизмом первого порядка, в основном следящих систем.

Движение с постоянным ускорением. В данном режиме задающее воздействие:

$$y_з(t) = \frac{at^2}{2},$$

где a – ускорение, $a = const$.

Принимая возмущения постоянными, установившееся значение ошибки определяется по выражению

$$\varepsilon_{уст} = \left.\frac{\frac{a}{p^2}}{1+W_p}\right|_{p\to 0} + \left.\frac{\sum\limits_{k=1}^{r} W_{Vk} V_{k0}}{1+W_p}\right|_{p\to 0} = \varepsilon_{уск} + \varepsilon_{ст},$$

где $\varepsilon_{уск}$ – ошибка от постоянного ускорения. Второе слагаемое $\varepsilon_{ст}$ дает статическую ошибку.

Первое слагаемое имеет смысл только при астатизме второго порядка, когда передаточная функция W_p:

$$W_p = \frac{k_{уск} M_p(p)}{p^2 N_p(p)},$$

где $M_p(p)$, $N_p(p)$ – соответственно, многочлены числителя и знаменателя W_p.

В итоге значение ошибки равно:

$$\varepsilon_{уст} = \frac{a}{k_{уск}} + \varepsilon_{ст}.$$

Следовательно, качество системы может быть оценено величиной добротности по ускорению:

$$k_{уск} = \frac{a}{\varepsilon_{уст}}.$$

Данный режим используется только для следящих систем с астатизмом второго порядка.

<u>Движение по гармоническому закону</u>. Задающее воздействие изменяется по закону:

$$y_з(t) = y_{з\max} \sin \omega_k t,$$

где $\omega_к$ – $к$-ое значение частоты.

Рассмотрим случай, когда возмущения равны нулю.

В этом случае ошибка будет равна:

$$\varepsilon(t) = \frac{y_з(t)}{1+W_p}.$$

В линеаризованной системе при гармоническом воздействии ошибка $\varepsilon(t)$ будет также изменяться по гармоническому закону с частотой $\omega_к$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\max} \sin(\omega_k t + \varphi),$$

где φ – сдвиг фаз между входным и выходным сигналами.

Точность системы может быть оценена по выражению (при замене $p = j\omega$):

$$\varepsilon_{\max} = \frac{y_{з\max}}{\left|1+W_p(j\omega)\right|}.$$

Т.к. амплитуда ошибки $\varepsilon_{\max}$ значительно меньше амплитуды входного сигнала $\varepsilon_{\max} << y_{з\max}$, то данное выражение можно заменить на следующее

$$\varepsilon_{\max} \approx \frac{y_{з\max}}{\left|W_p(j\omega_k)\right|} = \frac{y_{з\max}}{A_p(\omega_k)},$$

где $A_p(\omega_к)$ – модуль частотной передаточной функции при $\omega = \omega_k$.

Данная формула позволяет достаточно просто вычислить амплитуду ошибки в установившемся режиме по известной передаточной функции разомкнутой системы, либо экспериментальной амплитудной или амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. В случае использования ЛАЧХ $L(\omega_k) = 20\lg A(\omega_k), дб$ (рис. 28).

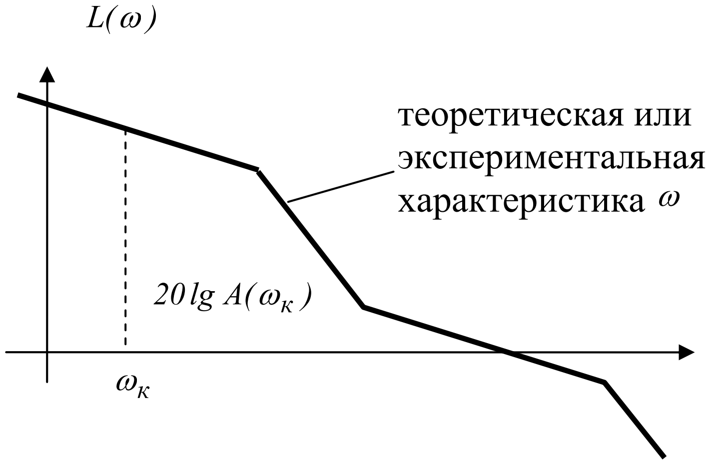


Рис. 28. Графическое изображение теоретической или экспериментальной логарифмической частотной характеристики

Достаточно просто также решить и обратную задачу: сформулировать требования к ЛАЧХ, которые необходимо выполнить, чтобы амплитуда ошибки в установившемся режиме была не больше заданной. Для этого необходимо по заданному значению амплитуды и допустимой ошибке вычислить требуемое значение модуля частотной передаточной функции в Дб:

$$L(\omega_k) = 20\lg A(\omega_k) = 20\lg \frac{y_{з\max}}{\varepsilon_{доп}}.$$

Таким образом, расчетная ЛАЧХ должна проходить не ниже точки с амплитудой $L_1(\omega_к)$. Если ЛАЧХ проходит через точку $L_1(\omega_к)$, то $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{доп}$, если пройдет ниже точки $L_1(\omega_к)$, то $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_{доп}$ (рис. 29).

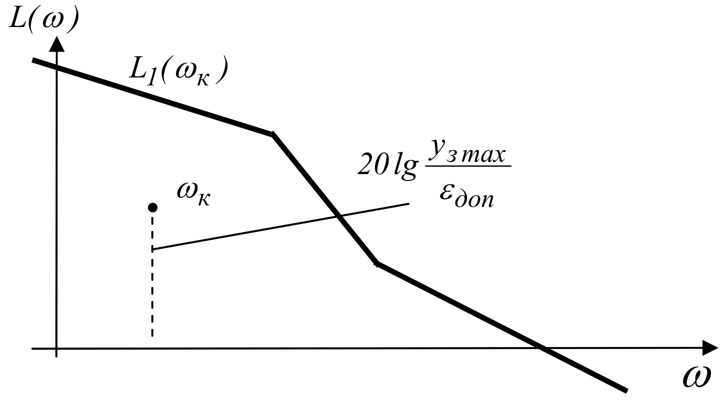


Рис. 29. Графическое изображение расчетной логарифмической частотной характеристики

7.2. Коэффициенты ошибок

Данный метод может использоваться для определения ошибки при произвольных формах задающего и возмущающего воздействий.

Рассмотрим случай, когда имеется только задающее воздействие имеющее конечное число *m* производных $\dot{y}_з(t), \dot{y}^{(2)}(t),..., \dot{y}^{(m)}(t)$.

Запишем изображение ошибки

$$\varepsilon(p) = W_з(p) y_з(p) = \frac{y_з(p)}{1 + W_p(p)},$$

где $W_з(p)$ – передаточная функция замкнутой системы по ошибке; $y_з(p)$ – изображение задающего сигнала.

Разложим передаточную функцию $W_з(p)$ по ошибке в ряд по возрастающим степеням *p*:

$$\varepsilon(p) = \left[c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \frac{c_3}{3!} p^3 + ... \right] y_з(p).$$

Переходя от изображений к оригиналу, получаем формулу для установившейся ошибки:

$$\varepsilon_{уст}(t) = c_0 y_з(t) + c_1 \dot{y}_з(t) + c_2 \dot{y}_з^{(2)}(t) + ...$$

Величины $c_0, c_1, c_2,....$ называются коэффициентами ошибок, которые определяются по формулам:

$$c_0 = W_з(p)\big|_{p=0};\ c_1 = \left.\frac{dW_з(p)}{dp}\right|_{p=0};\ c_2 = \left.\frac{d^2 W_з(p)}{dp^2}\right|_{p=0};\ ...$$

Т.к. передаточная функция представляет собой дробно-рациональную функцию $W_з(p) = \dfrac{M_з(p)}{N_з(p)}$, то коэффициенты ошибок можно получить делением числителя на знаменатель и сравнением полученного результата с выражением:

$$\varepsilon(p) = \left[c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \frac{c_3}{3!} p^3 + ... \right] y_з(p).$$

Коэффициент c_0 может быть отличным от нуля только в статических системах. В системах с астатизмом первого порядка $c_0 = 0$, а коэффициент $c_1 = \dfrac{1}{k_{ск}}$, где $k_{ск}$ – добротность по скорости.

В системах с астатизмом второго порядка

$$c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = \frac{2}{k_{уск}},$$

где $k_{уск}$ – добротность по ускорению.

Практический пример

Задана передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{k_{ск}}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Определить три коэффициента ошибки по задающему воздействию.

Передаточная функция по ошибке:

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1+W_p(p)} = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + k_{ск}}.$$

Разделим числитель на знаменатель

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{k_{ск}} p + \left(\frac{T_1+T_2}{k_{ск}} - \frac{1}{k_{ск}^2}\right)p^2 + \left(T_1 T_2 - 2\frac{T_1+T_2}{k_{ск}} + \frac{1}{k_{ск}^2}\right)p^3 + \ldots$$

Сравнивая полученное выражение с выражением

$$\varepsilon(p) = \left[c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!}p^2 + \frac{c_3}{3!}p^3 + \ldots\right] y_з(p).$$

Запишем:

$$c_0 = 0,\ c_1 = \frac{1}{k_{ск}},\ \frac{c_2}{2} = \frac{T_1+T_2}{k_{ск}} - \frac{1}{k_{ск}^2},$$

$$\frac{c_3}{6} = \frac{T_1+T_2}{k_{ск}} - 2\frac{T_1+T_2}{k_{ск}^2} + \frac{1}{k_{ск}^3}.$$

Так, например, если

$$y_з(t) = y_0 + vt + \frac{at^2}{2},$$

то установившаяся ошибка равна

$$\varepsilon_{уст} = \frac{v+at}{k_{ск}} + \frac{a}{k_{ск}}\left[(T_1+T_2)k_{ск} - 1\right].$$

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

8.1. Определение граничного коэффициента усиления

Часто возникает необходимость исследовать влияние на устойчивость САР тех или иных параметров. Обычно рассматривают влияние коэффициентов усиления и постоянных времени усилительно-преобразовательных элементов при фиксированных параметрах объекта регулирования. Для определения областей устойчивости используется метод D-разбиения. Данный метод заключается в разделении n-мерного пространства параметров на области, каждой из которых соответствует определенное число правых корней характеристического уравнения. Область, которой соответствует нуль правых корней, есть область устойчивости.

Данная процедура широко используется на практике. Известно, что с увеличением коэффициента усиления k повышается статическая точность системы регулирования, но необходимо знать до каких пределов возможно это увеличение.

В системах регулирования до четвертого порядка граничное значение $k_{гр}$ наиболее просто определить по критерию Гурвица. Неравенства, определяющие устойчивость САР, преобразуются в равенства относительно $k_{гр}$.

Практические примеры

Пример №1.

Определить граничное значение передаточного коэффициента разомкнутой САР с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)\left(T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1\right)},$$

где $T_1 = 0{,}1\,c$, $T_2 = 0{,}02\,c$, $\xi = 0{,}4$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$T_1 T_2^2 p^3 + T_2(T_2 + 2\xi T_1)p^2 + (T_1 + 2\xi T_2)p + (1 + k) = 0.$$

Условие устойчивости замкнутой САР на основе критерия Гурвица:

- коэффициенты уравнения положительны;
- необходимо и достаточно удовлетворить неравенство, которое для системы третьего порядка записывается:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \text{ или } a_1 a_2 > a_0 a_3,$$

где $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$.

$$a_0 = T_2^2,\ a_1 = T_2\left(T_2 + 2\xi T_1\right),\ a_2 = \left(T_1 + 2\xi T_2\right),\ a_3 = 1 + k.$$

$$T_2\left(T_2 + 2T_1\right)\left(T_1 + 2T_2\right) > T_2^2\left(1 + k\right).$$

Превратим это неравенство в равенство и определим $k_{гр}$:

$$k_{гр} = \frac{2\xi\left(T_1^2 + T_2^2 + 2\xi T_1 T_2\right)}{T_1 T_2} = 4{,}8.$$

Коэффициент k усиления САР всегда положительная величина. Если коэффициент k не входит в условие устойчивости, то граничное значение $k_{гр}$ условно равно ∞ и система устойчива при всех значениях $k > 0$.

Пример №2.

Выяснить, при каких значениях k будет устойчива САР, если передаточная функция разомкнутой цепи равна:

$$W_p(p) = \frac{k\left(\tau p + 1\right)}{\left(T_1 p + 1\right)\left(T_2 p + 1\right)\left(T_3 p - 1\right)},$$

где $T_1 = 0{,}2\ c$, $T_2 = 0{,}25\ c$, $T_3 = 0{,}5\ c$, $\tau = 0{,}1\ c$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы с отрицательной обратной связью определяется из передаточной функции:

$$W_з(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)},$$

$$T_1 T_2 T_3 p^3 + \left(T_1 T_3 + T_2 T_3 - T_1 T_2\right)p^2 +$$
$$+ \left(T_3 - T_1 - T_2 + k\tau\right)p + \left(k - 1\right) = 0,$$

$$0{,}025 p^3 + 0{,}175 p^2 + \left(0{,}05 + 0{,}1k\right)p + \left(k - 1\right) = 0.$$

По критерию Гурвица необходимо и достаточно удовлетворить два неравенства:

1) $k - 1 > 0$;

2) $0{,}175\left(0{,}1k + 0{,}05\right) > 0{,}025\left(k - 1\right)$.

Таким образом, требования к коэффициенту передачи записываются в виде двойного неравенства:

$$k > 1 \quad \text{и} \quad k < 4{,}5 \text{ или } 1 < k < 4{,}5.$$

8.2. D-разбиение плоскости одного параметра

Часто возникает необходимость определения области изменения параметра САР, не нарушая при этом устойчивости.

Предположим, что варьируемый параметр μ входит в характеристическое уравнение замкнутой системы линейно и характеристическое уравнение может быть приведено к виду:

$$\mu \cdot N_1(p) + N_2(p) = 0,$$

где $N_1(p)$, $N_2(p)$ – полиномы в функции оператора p.

При решении данного уравнения относительно μ получим:

$$\mu(p) = -\frac{N_2(p)}{N_1(p)}.$$

Это равенство определяет зависимость параметра μ от значения корней характеристического уравнения.

Для определения границ области устойчивости необходимо определить значения μ, которые соответствуют чисто мнимому корню $j\omega$. Сделаем подстановку $p = j\omega$ и построим на комплексной плоскости график функции:

$$\mu(j\omega) = -\frac{N_2(j\omega)}{N_1(j\omega)} = X(\omega) + Y(\omega),$$

где ω изменяется от $-\infty$ до ∞.

Обычно строится часть кривой от 0 до $+\infty$, другая ветвь кривой, соответствующая изменению ω от $-\infty$ до 0 представляет собой зеркальное отображение.

Полученную кривую называют кривой D-разбиения, и она представляет собой отображение мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения на плоскость параметра μ. Если, двигаясь по кривой от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$, наносить штриховку слева, то эта штриховка будет направлена в ту часть плоскости параметра μ, которая соответствует левой полуплоскости корней (рис. 30).

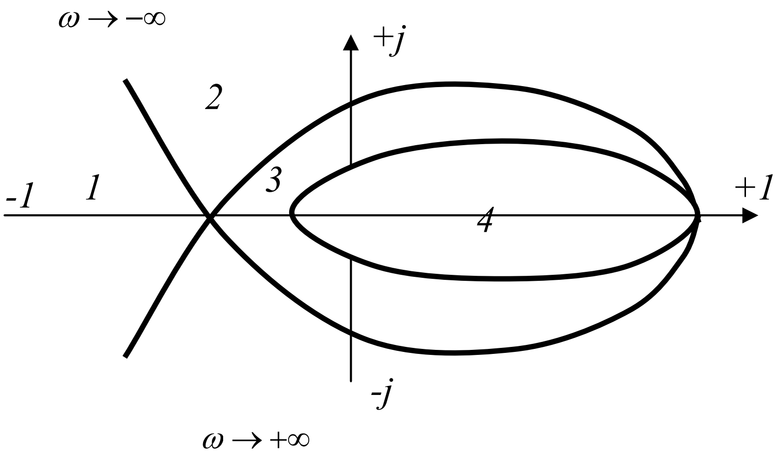


Рис. 30. Графическое изображение кривой D-разбиения

Обычно значения μ являются вещественными положительными числами, которые находятся на отрезке положительной полуоси абсцисс, лежащим внутри области устойчивости (область 4).

Практический пример

Передаточная функция разомкнутой САР

$$W_p(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где $T_1 = 0{,}4\,c$, $T_2 = 0{,}1\,c$, $k = 50$.

Выяснить влияние постоянной времени τ дифференцирующего звена на устойчивость системы.

Составим характеристическое уравнение замкнутой САР из передаточной функции:

$$W_з(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)},\; T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + (1 + k\tau)p + k = 0,$$

$$0{,}04p^3 + 0{,}5p^2 + (1 + 50\tau)p + 50 = 0.$$

Запишем данное уравнение относительно τ:

$$\tau(p) = -\frac{1}{50p}\left(0{,}04p^3 + 0{,}5p^2 + p + 50\right).$$

Подставим $p = j\omega$.

$$\tau(j\omega) = -\frac{1}{50j\omega}\left(-j0{,}04\omega^3 - 0{,}5\omega^2 + j\omega + 50\right) = X + jY,$$

$$X = 0{,}02\left(-1 + 0{,}04\omega^2\right),\; Y = \frac{1}{\omega}\left(1 - 0{,}01\omega^2\right).$$

Для построения кривой D-разбиения определяем следующие условия:

1) при $\omega = 0$ $X = -0{,}02$, $Y = +\infty$;

2) при $\omega = 5$ $X = 0$, $Y = 0{,}15$;

3) при $\omega = 10$ $X = 0{,}06$, $Y = 0$;

4) при $\omega = \infty$ $X = +\infty$, $Y = -\infty$.

Построим часть кривой на участке от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$ и ее зеркальное отображение, характеризующее зависимость от $\omega = -\infty$ до $\omega = 0$.

Двигаясь по кривой от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$, наносим штриховку слева. Областью устойчивости является область 3, т.к. штриховка направлена внутрь этой области.

Проверим правильность расчетов.

В исходное характеристическое уравнение замкнутой системы подставим значение $\tau = 0{,}1$. Имеем следующее уравнение:

$$\underset{a_0}{0{,}04p^3} + \underset{a_1}{0{,}5p^2} + \underset{a_2}{6p} + \underset{a_3}{50} = 0.$$

Критерий устойчивости по Гурвицу:

- положительность всех коэффициентов;

- $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ или $a_1 a_2 > a_0 a_3$ или $0{,}5 \cdot 6 > 0{,}04 \cdot 50$.

Таким образом, замкнутая САР устойчива при $\tau > 0{,}06$.

8.3. D-разбиение плоскости двух параметров

Предположим, что необходимо выяснить влияние на устойчивость САР двух параметров, которые линейно входят в характеристическое уравнение. Тогда данное характеристическое уравнение замкнутой САР запишется как

$$\mu N + \eta S + F = 0,$$

где N, S, F – полиномы от p.

После подстановки $p = j\omega$ можно записать:

$$N = N_1 + jN_2, \quad S = S_1 + jS_2, \quad F = F_1 + jF_2,$$

где N_1, N_2, S_1, S_2, F_1, F_2 – полиномы от ω и исходное уравнение распадается на 2 уравнения:

$$\begin{cases} \mu N_1 + \eta S_1 + F_1 = 0 \\ \mu N_2 + \eta S_2 + F_2 = 0 \end{cases}.$$

Решением системы уравнений является следующее:

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} -F_1 & S_1 \\ -F_2 & S_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \; \mu = \frac{\begin{vmatrix} N_1 & -F_1 \\ N_2 & -F_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \; \Delta = \begin{vmatrix} N_1 & S_1 \\ N_2 & S_2 \end{vmatrix}.$$

После подстановки $p = j\omega$ данные равенства определяют μ и η как функции от ω.

Следовательно, при значениях ω_i вычисляются значения μ_i и η_i, и наносится соответствующая точка на плоскость параметров μ и η (где μ_i откладывается по оси абсцисс, а η_i – по оси ординат). Геометрическое место этих точек при изменении ω от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$ является кривой *D*-разбиения плоскости (μ, η).

При движении по кривой *D*-разбиения в сторону возрастания ω от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$ штриховку наносят слева, если определитель $\Delta > 0$ положителен, и справа, если $\Delta < 0$ (отрицателен). Точка по кривой *D*-разбиения перемещается дважды: первый раз при изменении ω от $\omega = -\infty$ до $\omega = 0$ и второй раз – при изменении ω от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$. Однако при $\omega = 0$ изменяется знак определителя Δ, и поэтому кривая штрихуется с одной и той же стороны.

При некотором значении $\omega_i \neq 0$ определитель Δ может обратиться в нуль. Если при этом числители уравнений $\mu(\omega)$ и $\eta(\omega)$ не равны нулю, то точка (μ_i, η_i) уходит в бесконечность. Если же одновременно с Δ обращаются в нуль и числители уравнений $\mu(\omega)$ и $\eta(\omega)$, то данные уравнения оказываются линейно зависимыми, отличающимися одно от другого на постоянный множитель. В результате записывается уравнение прямой линии:

$$\mu N_1 + \eta S_1 + F_1 = 0.$$

Данную линию называют особой прямой, и всем ее точкам соответствует одно и то же значение ω. Особые кривые получаются также из уравнения $a_n = 0$ при $\omega = 0$ и из уравнения $a_0 = 0$ при $\omega = \infty$, если в данные коэффициенты линейно входит хотя бы один из параметров μ или η.

8.4. Правила штриховки особых прямых линий

1) Если особая прямая и кривая *D*-разбиения сближаются асимптотически, то штриховка на особой прямой наносится к заштрихованной стороне кривой *D*-разбиения (рис. 31).

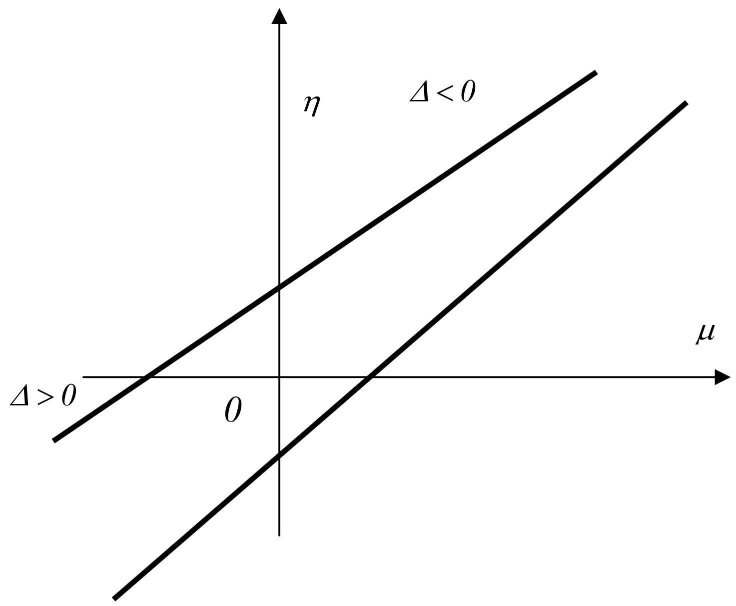


Рис. 31. Асимптотическое сближение особой прямой
и кривой D-разбиения

2) Если особая прямая имеет одну общую точку с кривой *D*-разбиения, то штриховка особой прямой однократная и около общей точки направлена к заштрихованной стороне кривой *D*-разбиения.

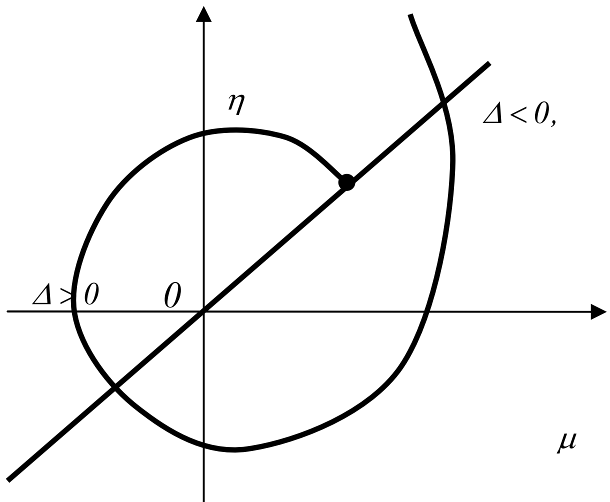


Рис. 32. Особая прямая и кривая D-разбиения
имеют одну общую точку

3) Если особая прямая пересекает кривую *D*-разбиения в двух точках, то штриховка особой прямой двойная и направлена к заштрихованной стороне кривой *D*-разбиения около той точки пересечения, в которой определитель Δ меняет знак, во второй точке определитель Δ не меняет знак и штриховку особой прямой не изменяют.

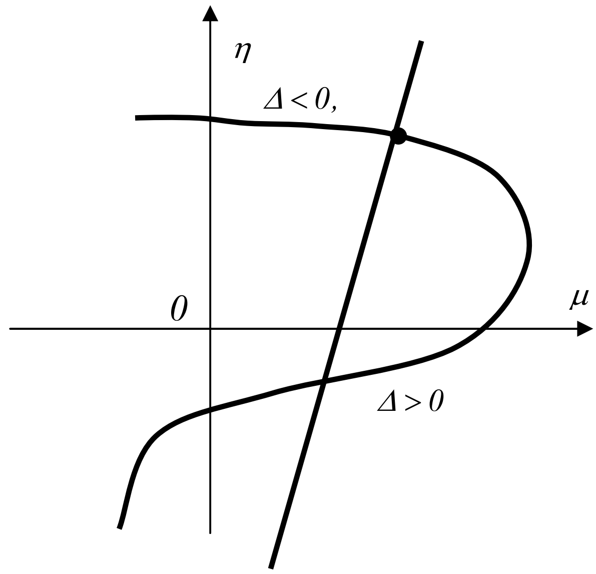


Рис. 33. Особая прямая пересекает кривую
D-разбиения в двух точках

4) Если особая прямая пересекает кривую D-разбиения, но определитель Δ не меняет знак в точке пересечения, то особая прямая не штрихуется.

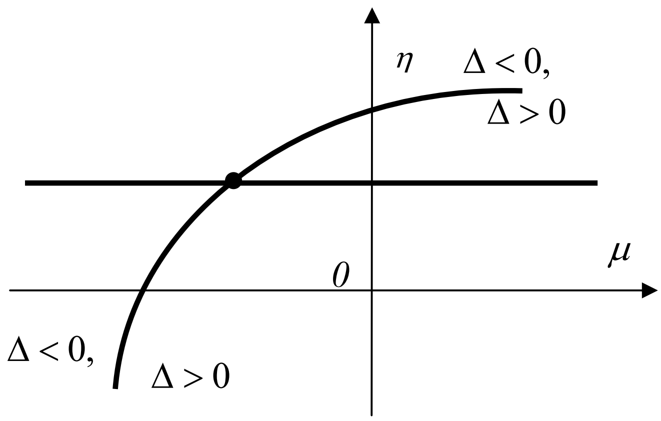


Рис. 34. Особая прямая пересекает кривую D-разбиения,
но определитель Δ не меняет знак в точке пересечения

После того, как кривая D-разбиения и особые прямые построены и на них нанесена штриховка, определяется область, внутрь которой направлена штриховка ее границ. Это область потенциальной устойчивости.

Практический пример

Выяснить зависимость устойчивости САР от постоянных времени T_2 и τ. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где $T_1 = 0{,}4\,c$, $k = 50$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы определяется из уравнения:

$$W_з(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)},\ T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + (1 + k\tau)p + k = 0,$$

$$0{,}4T_2 p^3 + (0{,}5 + T_2)p^2 + (1 + 50\tau)p + 50 = 0.$$

Приведем подобные составляющие:

$$T_2\left(0{,}4p^3 + p^2\right) + \tau 50p + 0{,}4^2 + p + 50 = 0.$$

Подставим $p = j\omega$ и запишем данное уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} T_2 N_1 + \tau S_1 + F_1 = 0, \\ T_2 N_2 + \tau S_2 + F_2 = 0, \end{cases}$$

где $N_1 = -\omega^2, N_2 = -0{,}4\omega^3, S_1 = 0, S_2 = 50\omega, F_1 = 50 - 0{,}4\omega^2, F_2 = \omega.$

Вычислим значение определителя системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 0 \\ -0{,}4\omega^3 & 50\omega \end{vmatrix} = -50\omega^3.$$

Составим уравнения для определения T_2 и τ:

$$T_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\left(50 - 0{,}4\omega^2\right) & 0 \\ -\omega & 50\omega \end{vmatrix}}{-50\omega^3} = \frac{50}{\omega^2} - 0{,}4,$$

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} -\omega^2 & -\left(50 - 0{,}4\omega^2\right) \\ -0{,}4\omega^3 & -\omega \end{vmatrix}}{-50\omega^3} = 0{,}02\left(19 - 0{,}16\omega^2\right).$$

Таблица 2

Данные вычислений T_2 и τ

ω	0	5	6	8	10	$\sqrt{19/0{,}16}$	$\sqrt{50/0{,}4}$	15	∞
T_2	∞	1,6	0,99	0,38	0,1	0,02	0	- 0,18	- 0,4
τ	0,38	0,3	0,27	0,18	0,06	0	- 0,02	- 0,34	- ∞

По результатам вычислений строим кривую D-разбиения.

При движении по кривой от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$ штриховку наносим справа, так как при $\omega > 0 \quad \Delta < 0$. Определитель $\Delta = 0$ только при $\omega = 0$. Коэффициент $a_n = 50$ характеристического уравнения не зависит от параметров T_2 и τ. Коэффициент $a_0 = 0{,}4T_2$ зависит от параметра T_2. Приравняв $0{,}4T_2 = 0$, получим уравнение особой прямой $T_2 = 0$, т.е. уравнением является ось ординат. При $\omega = \infty$ данная особая прямая асимптотически приближается к кривой *D*-разбиения. Нанесем штриховку на ось ординат со стороны, обращенной к заштрихованной стороне кривой *D*-разбиения. В результате имеем 4 области, из которых область 1 является областью потенциальной устойчивости, т.к. штриховка направлена внутрь области (рис. 35).

В ряде случаев уравнения относительно параметров μ и η оказываются нелинейными и после подстановки $p = j\omega$ имеют вид:

$$\varphi_1(\omega, \mu, \eta) = 0, \; \varphi_2(\omega, \mu, \eta) = 0$$

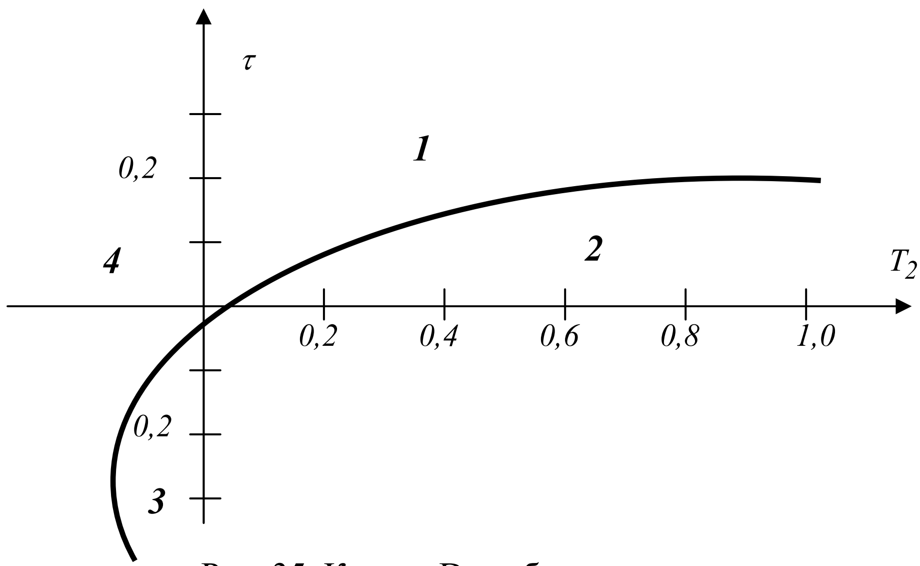


Рис. 35. Кривая D-разбиения

Кривая *D*-разбиения строится в результате численного решения данной системы. Штриховка кривой определяется знаком определителя, составляющийся из частных производных от функций φ_1 и φ_2 по переменным μ и η:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

При движении по кривой в сторону увеличения ω ее штрихуют слева при $\Delta_1 > 0$ и справа при $\Delta_1 < 0$.

8.5. Структурная неустойчивость систем регулирования

Систему называют структурно неустойчивой, если ее нельзя сделать устойчивой только изменением параметров (изменением их значений, но не знаков), а необходимо изменение структуры. Т.е. введение в САР новых звеньев и связей или изменение типа имеющихся звеньев и связей. Одноконтурная САР структурно неустойчива, если нарушается неравенство:

$$m \geq \nu + l - 1$$

и условия, приведенные в таблице 3.

Таблица 3

Условия структурной устойчивости систем регулирования

f	$m = 0$	$m > 0$, **m - четно**	$m > 0$, **m - нечетно**
Четно	$n + m > 4r$	$n + m > 4r - 1$	$n + m > 4r - 2$
Нечетно	$n + m > 4r$	$n + m > 4r$	$n + m > 4r + 1$

В указанных неравенствах приняты следующие обозначения:

m – степень полинома числителя $M(p)$ передаточной функции $W_p(p)$ разомкнутой САР;

n – степень полинома знаменателя $N(p)$ передаточной функции $W_p(p)$ разомкнутой САР;

ν – число нулевых корней полинома $N(p)$ (число полюсов);

l – число положительных вещественных корней полинома $N(p)$;

f – число комплексных корней полинома $N(p)$ с положительной или нулевой вещественной частью;

r – целая часть дроби f_2.

Обязательное условие для всех случаев – полином $M(p)$ числителя $W_p(p)$ не имеет правых корней.

Частные случаи условий структурной неустойчивости:

1) Если числитель $M(p)$ передаточной функции $W_p(p)$ равен k:

$$M(p) = k,$$

то система структурно неустойчива при нарушении одного из неравенств:

$$\nu + l \leq 1, \quad n > 4r.$$

2) Если

$$M(p) = k(1 + \tau p),$$

то САР структурно неустойчива при нарушении одного из следующих неравенств:

$$\nu + l \le 2, \quad n > 4r - 3 \text{ при четном } f,$$

$$\nu + l \le 2, \quad n > 4r \text{ при нечетном } f.$$

3) Если

$$M(p) = k\left(b_0 p^2 + b_1 p + 1\right),$$

то САР структурно неустойчива при нарушении одного из следующих неравенств:

$$\nu + l \le 3, \quad n > 4r - 2 \text{ при четном } f,$$

$$\nu + l \le 3, \quad n > 4r - 1 \text{ при нечетном } f.$$

Практический пример

Проверить устойчивость одноконтурной САР, состоящей из безинерционного, интегрирующего, апериодического и консервативного звеньев. Передаточная функция разомкнутой цепи:

$$W_p(p) = \frac{k}{p\left(T_1 p + 1\right)\left(T_2^2 p^2 + 1\right)}.$$

Здесь имеет место первый частный случай $M(p) = k$. Полином $N(p)$ четвертого порядка, один нулевой, один отрицательный вещественный, два чисто мнимых.

$$n = 4, \nu = 1, l = 0, f = 2.$$

Следовательно, $r = 1, n = 4r$.

Условия:

$$\nu + l = 1 + 0 \le 1, \quad n > 4r, \quad 4 = 4.$$

Второе условие не выполняется, поэтому САР структурно неустойчива.

Для проверки составим характеристическое уравнение замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью:

$$W_з(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}, \; 1 + W_p(p) = T_1 T_2^2 p^4 + T_2^2 p^3 + T_1 p^2 + p + k = 0.$$

Применим критерий Гурвица для определения устойчивости.

Для устойчивой замкнутой САР с характеристическим уравнением 4-го порядка необходимо выполнение условий:

- положительность всех коэффициентов уравнения;

- $a_1 a_2 a_3 > a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4$,

где $a_0 = T_1 T_2^2$, $a_1 = T_2^2$, $a_2 = T_1$, $a_3 = 1$, $a_4 = k$.

Данное неравенство имеет вид:

$$T_2^2 \cdot T_1 \cdot 1 > T_1 T_2^2 \cdot 1 + T_2^4 \cdot k,$$

т.е. $T_2^4 k < 0$.

Т.к. коэффициенты T_2 и k могут быть только положительными, то данное неравенство невыполнимо и замкнутая САР неустойчива.

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ И БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

9.1. Общие сведения

Определение запаса устойчивости и быстродействия:

1) по переходной характеристике. Оценка запаса устойчивости и быстродействия во временной области производится по переходной характеристике при типовом входном или возмущающем воздействии – единичном скачке. В этом случае переходная характеристика может строиться как для регулируемой $y(t)$ величины, так и для ошибки $\varepsilon(t)$.

Запас устойчивости характеризуется максимальным значением величины $y_{\max}$ или пере регулированием:

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \cdot 100\%,$$

где y_{∞} – установившееся значение $y(t)$ после завершения переходного процесса $y_{\infty} \neq 0$.

В большинстве случаев запас устойчивости считается достаточным при $\sigma \le 10 \div 30\%$.

Возможно также требование монотонности процесса – без перерегулирования.

Быстродействие системы характеризуется временем переходного процесса t_n, которое определяется с момента t_0 до момента, после которого имеет место неравенство:

$$\left| y(t) - y_{\infty} \right| \le \Delta \cdot y_{\infty} = \Delta_1,$$

где Δ_1 – допустимая ошибка; Δ - некоторая доля входного воздействия, составляющая $(1 \div 5\%)$ от величины скачка на входе.

Иногда дополнительно к величине σ назначается допустимое число колебаний. Область допустимых отклонений регулируемой величины в переходном процессе графически имеет вид:

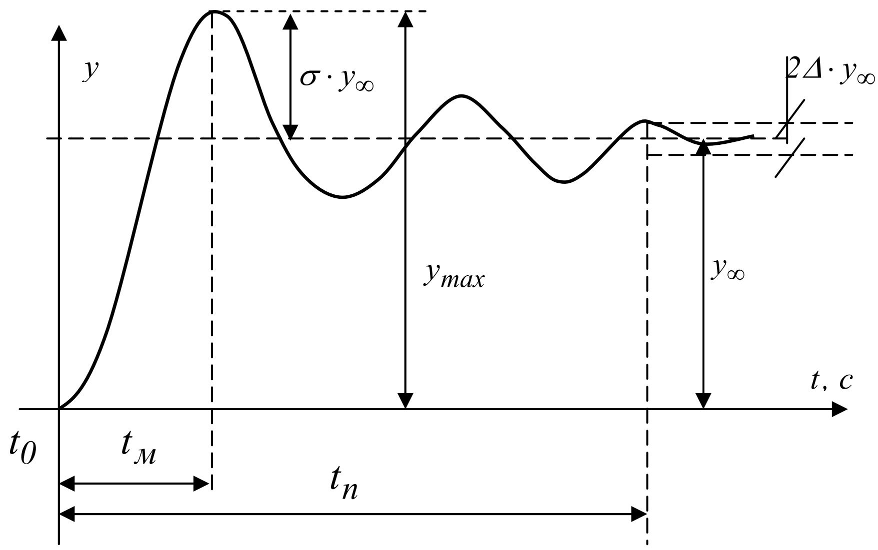


Рис. 36. Параметры переходной характеристики

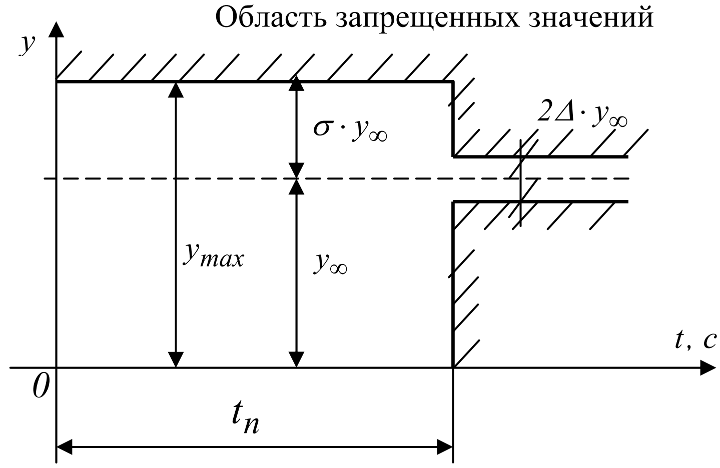


Рис. 37. Область допустимых значений переходного процесса
для систем стабилизации

Для следящих систем кроме t_n, y_{max}, σ вводятся дополнительные оценки качества и область допустимых значений имеет вид (для нормированных значений относительно y_∞):

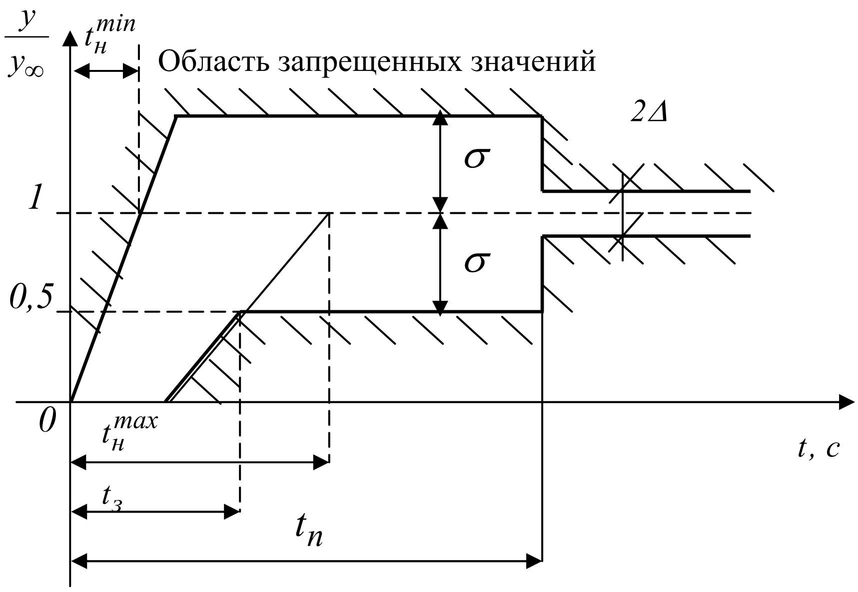


Рис. 38. Область допустимых значений переходного процесса для следящих систем

$t_з$ – время запаздывания; $t_н^{\min}$, $t_н^{\max}$ – минимальное и максимальное время нарастания.

2) на основе корневых методов. Вид корней определяет характер переходных процессов в системе регулирования. Поэтому можно сформулировать требования к переходным процессам не рассматривая непосредственно переходные процессы, а накладывая ограничения на корни характеристического уравнения.

Пусть характеристическое уравнение записывается в виде:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

где p – комплексное число.

Введем понятие среднегеометрического корня

$$\gamma_0 = \sqrt[n]{|p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n|} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}},$$

где $p_1, p_2, .., p_n$ – корни характеристического уравнения. Используя замену оператора p на произведение двух сомножителей:

$$p = \gamma_0 \cdot q,$$

где q – комплексная переменная.

Исходное характеристическое уравнение записывается в виде:

$$q^n + A_1 q^{n-1} + ... + A_{n-1} q + 1 = 0,$$

где коэффициенты A_i определяются выражением:

$$A_i = \frac{a_i \gamma_0^{n-i}}{a_0},$$

корни преобразованного уравнения вычисляются следующим образом:

$$q_1 = \frac{p_1}{\gamma_0},\ q_2 = \frac{p_2}{\gamma_0} \text{ и т.д.}$$

В результате исходное уравнение с учетом введения обозначений:

$$p^n + A_1 \gamma_0 p^{n-1} + \ldots + A_i \gamma_0^{n-i} p^{n-i} + \ldots + \gamma_0^n = 0.$$

Таким образом, среднегеометрический корень γ_0 может служить мерой быстроты протекания переходных процессов. Для увеличения величины γ_0 необходимо увеличивать свободный член a_n в характеристическом уравнении. Напомним, что в статических системах $a_n = 1 + k$ и в астатических $a_n = k$. следовательно, повышение быстродействия может осуществляться за счет увеличения общего коэффициента усиления k.

9.2. Степень устойчивости

Под степенью устойчивости η понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня.

Корни характеристического уравнения, расположенные ближе всего к мнимой оси дают в переходном процессе составляющие, которые затухают наиболее медленно. В большинстве случаях переходный процесс в системе заканчивается, если уменьшается до нуля составляющая, определяемая ближайшим к мнимой оси корнем.

Случай расположения вещественного корня на оси η.

В этом случае составляющая в переходном процессе определяться:

$$x_\eta(t) = c_\eta e^{-\eta t},$$

где c_η - постоянная.

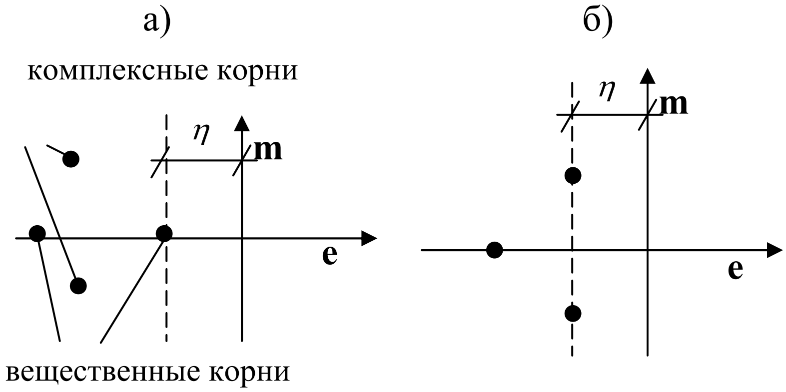


Рис. 39. Распределение корней характеристического уравнения
а) – случай расположения вещественного корня на оси η;
б) – случай расположения комплексных корней на оси η

Положим, что в конце переходного процесса выполняется равенство:

$$x_\eta(t_n) = \Delta \cdot c_\eta,$$

где $\Delta = 0{,}01 \div 0{,}05$ – точность в установившемся состоянии; t_n – время переходного процесса.

Тогда можно записать

$$\Delta \cdot c_\eta \cong c_\eta e^{-\eta t_n} \text{ или } t_n \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}.$$

Так, если принять $\Delta = 0{,}05$, то время переходного процесса составит

$$t_n \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0{,}05} \approx \frac{3}{\eta}.$$

Случай расположения комплексных корней на оси η.

Если на оси η появляется пара комплексных корней равных $p_{1,2} = -\eta \pm j\beta$, то составляющая в переходном процессе, определяемая этими корнями, будет равна:

$$x_\eta(t) = c_\eta e^{-\eta t} \sin(\beta t + \varphi).$$

Определить время t_n из данного уравнения в общем виде нельзя. Однако верхнюю границу переходного процесса можно определить. При равенстве $\sin(\beta t + \varphi) = 1$ и $x_\eta(t) = \Delta c_\eta$ можно записать

$$t_n \le \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}.$$

Более строго связь между видом переходного процесса и величиной степени устойчивости может быть определена, когда исходное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right)x(t) = f(t).$$

Тогда для переходной функции $h(t)$ системы справедливо неравенство:

$$\left[1 + \nu(\eta, t)\right] > h(t) > \left[1 - \nu(\eta, t)\right],$$

где $\left[1 + \nu(\eta, t)\right]$ – функция, ограничивающая $h(t)$ сверху (мажоранта); $\left[1 - \nu(\eta, t)\right]$ – функция, ограничивающая $h(t)$ снизу (миноранта).

Вспомогательная функция $\nu(t)$ определяется степенным рядом:

$$\nu(\eta, t) = e^{-\eta t}\left[1 + \eta t + \frac{1}{2!}(\eta t)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}(\eta t)^{n-1}\right].$$

Миноранта совпадает с переходной функцией, если характеристическое уравнение имеет корень $p_1 = -\eta$ кратности n, т.е. исходное уравнение может быть записано:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) = a_0 (p + \eta)^n = 0.$$

В этом случае n-кратный корень совпадает со среднегеометрическим корнем:

$$\eta = \gamma_0 = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}.$$

Таким образом, при заданном значении среднеквадратического корня $\gamma_0 = const$ и всех вещественных корнях наименьшее время переходного процесса будет при кратных корнях.

Важным обстоятельством является то, что степень устойчивости можно определить без вычисления значений корней характеристического уравнения. Для этого исходном уравнении оператор p заменяется на переменную $z = p + \eta$. Подставляя вместо p значение $p = z - \eta$, получим так называемое смещенное уравнение

$$a_0 (z - \eta)^n + a_1 (z - \eta)^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Раскрывая скобки и группируя члены с одинаковыми степенями, получим:

$$a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1z} + A_n = 0.$$

Это уравнение соответствует смещению осей на плоскости корней влево на величину η. В результате один (вещественный) или два (комплексно-сопряженных) корня попадают на мнимую ось, что соответствует границе устойчивости. Для вычисления степени устойчивости системы необходимо применить к смещенному характеристическому уравнению любой критерий устойчивости и определить при каком значении η получается граница устойчивости.

Апериодической устойчивости соответствует равенство нулю свободного члена характеристического уравнения:

$$A_n = a_n - a_{n-1}\eta + a_{n-2}\eta^2 - a_{n-3}\eta^3 + ... = 0.$$

Колебательной границе соответствует прохождение кривой Михайлова через начало координат и прохождение АФЧХ разомкнутой системы через точку $(-1, j0)$.

9.3. Колебательность системы

Склонность системы к колебаниям будет наблюдаться в системе при комплексных корнях $(-\alpha \pm j\beta)$.

Отношение мнимой части корня (угловой частоты колебаний) к вещественной (коэффициенту затухания) - называется коэффициентом колебательности:

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Коэффициент колебательности связан с затуханием переходного процесса. Для данных корней переходный процесс имеет вид

$$x(t) = ce^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi).$$

Определим затухание синусоидальных колебаний за один период

$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Вычислим значения амплитуд колебаний с момента времени и через интервал T.

Для $t = t_1$:

$$c_1 = ce^{-\alpha t}.$$

Через интервал T:

$$c_2 = ce^{-\alpha\left(t_1 + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = c_1 e^{-2\pi\frac{\alpha}{\beta}} = c_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

Затуханием за период T называется величина

$$\xi = \frac{c_1 - c_2}{c_1} = 1 - \frac{c_2}{c_1}.$$

Подставляя значение c_2, получим $\xi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$ или коэффициент колебательности будет определяться через ξ уравнением

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \dfrac{1}{1-\xi}}.$$

Обычно в системах регулирования допускается затухание не менее *90-98%* за один период T. Если $\xi = 98\%$, то коэффициент колебательности при этом составит

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln 50} \cong \frac{\pi}{2} = 1{,}57.$$

При $\xi = 90\%$ $\mu \cong 2{,}72$.

При задании определенной колебательности область расположения корней на плоскости ограничивается двумя зеркальными лучами относительно вещественной оси. Данные лучи составляют с вещественной осью угол

$$\psi = arctg\frac{\beta}{\alpha} = arctg\mu.$$

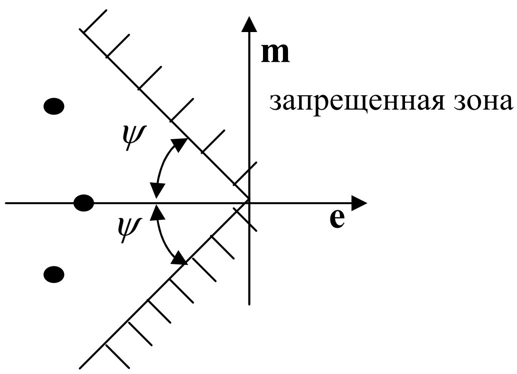


Рис. 40. Принцип распределения корней характеристического уравнения при заданной колебательности

При одновременном задании допустимых значений колебательности и степени устойчивости область расположения корней должна ограничиваться также вертикальной прямой, проходящей параллельно мнимой оси на расстоянии η.

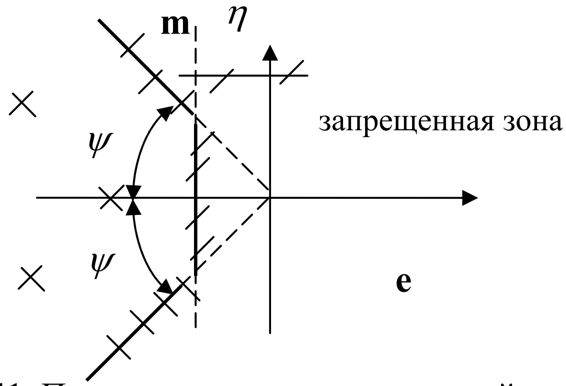


Рис. 41. Принцип распределения корней характеристического уравнения при заданной колебательности и степени устойчивости

Расположение корней в этой области соответствует обеспечению требуемого запаса устойчивости, определяемого величиной колебательности μ или затуханием и требуемой степенью устойчивости η, характеризующей быстродействие системы.

Использование корней характеристического уравнения для оценки качества регулирования является не полным, т.к. вид переходного процесса определяется не только левой, но и правой частью дифференциального уравнения. Для того, чтобы учесть это обстоятельство передаточную функцию замкнутой системы запишем в виде соотношения полиномов (дробно-рациональной функцией):

$$W_з = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n}.$$

Раскладывая числитель и знаменатель на множители, получим:

$$W_з = \frac{b_0 \left(p - p_1^0\right)\left(p - p_2^0\right)...\left(p - p_m^0\right)}{a_0 \left(p - p_1\right)\left(p - p_2\right)...\left(p - p_n\right)}.$$

Корни числителя $p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0$ называются нулями передаточной функции, т.к. передаточная функция в точке обращается в нуль, корни знаменателя $p_1, p_2, ..., p_n$ являются корнями характеристического уравнения и называются полюсами передаточной функции. В полюсе, т.е. при $p = p_i$ передаточная функция обращается в бесконечность. Таким образом, полюсы $W_з$ характеризуют левую часть дифференциального уравнения, нули $W_з$ – правую часть дифференциального уравнения. В частном случае отсутствия нулей передаточная функция замкнутой системы

$$W_з = \frac{b_m}{a_0(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}$$

и вид переходного процесса определяется только расположением полюсов.

Общие рекомендации при выборе расположения нулей и полюсов передаточных функций:

1) нули желательно располагать вблизи области расположения полюсов. Удаление нулей от области полюсов приводит к увеличению амплитуд собственных колебаний в переходном процессе;

2) для уменьшения отклонений в переходном процессе целесообразно удалять полюсы друг от друга;

3) в случае, когда полюсы расположены далеко от мнимой оси, возможно приближение полюсов друг к другу.

9.4. Интегральные оценки

Интегральные оценки позволяют получить общую оценку быстроты затухания и величины отклонения регулируемой величины в совокупности.

Простейшей интегральной оценкой служит величина

$$J = \int_0^\infty \varepsilon(t)dt \text{ или } J = \lim_{p\to 0} \varepsilon(p),$$

где $\varepsilon(t)$ – отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения, которое она будет иметь после завершения переходного процесса (рис. 42). В устойчивой системе значение интегральной оценки имеет конечную величину. Геометрически это площадь под кривой переходного процесса, построенного для отклонения.

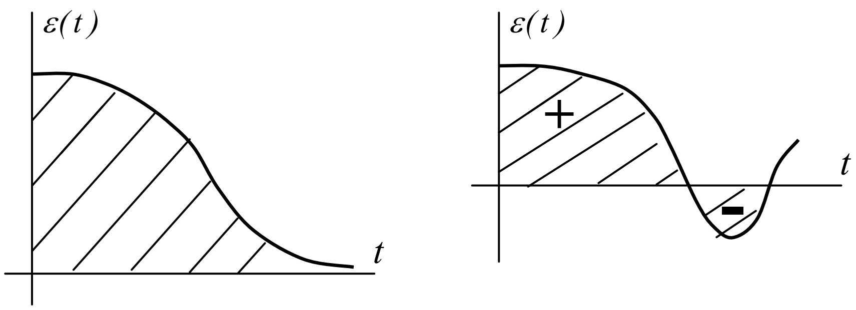


Рис. 42. Вид ошибки регулирования для апериодического и колебательного процессов

Для колебательного процесса используется другая интегральная оценка:

$$J = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt .$$

Обычно используется квадратичная интегральная оценка:

$$J = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \ \ (\varepsilon \to 0 \text{ при } t \to \infty),$$

которая не зависит от знаков отклонений и вида переходного процесса.

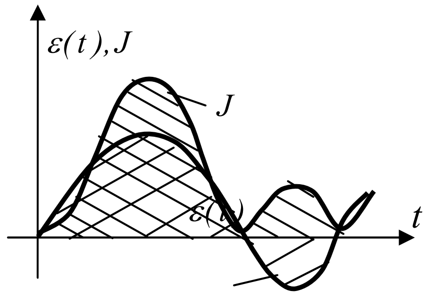


Рис. 43. Вид квадратичной интегральной оценки для колебательного процесса

Чем меньше величина J, тем лучше переходный процесс приближается к идеальному скачку регулируемой величины вслед за скачком задающего или возмущающего воздействий.

Квадратичную оценку можно вычислить по следующей формуле:

$$J = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|W_з(0) - W_з(j\omega)|^2}{\omega^2} d\omega ,$$

где $W_з(j\omega)$ – частотная передаточная функция замкнутой системы.

В астатических системах и статических системах с неединичной обратной связью установившееся значение регулируемой величины $y(\infty) = 1$ и $W_з(0) = 1$.

Тогда значение квадратичной оценки вычисляется по формуле:

$$J = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|1 - W_з(j\omega)|^2}{\omega^2} d\omega .$$

Недостатком отмеченных интегральных оценок является то, что здесь ничем не ограничивается форма кривой переходного процесса. Например, для трех разных по форме процесса имеется одно значение J (рис. 44).

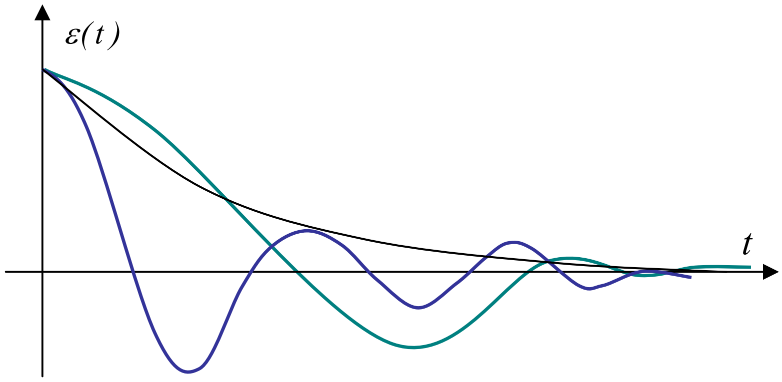


Рис. 44. Типы переходных процессов с одним значением квадратичной интегральной оценки

Это объясняется тем, что квадратичная оценка учитывает только величину отклонения и быстроту затухания, но не учитывает близость системы к колебательной границе устойчивости. Для учета данного эффекта вычисляется улучшенная квадратичная интегральная оценка, включающая слагаемое со скоростью отклонения $\dot{\varepsilon}(t)$:

$$J^* = \int_0^\infty \left(\varepsilon^2 + T^2 \dot{\varepsilon}^2\right) dt,$$

где T – постоянная времени.

Выясним, какой вид переходного процесса будет иметь место при выборе параметров системы по минимуму J^*.

Данный функционал запишем в виде:

$$J^* = \int_0^\infty (\varepsilon + T\dot{\varepsilon})^2 dt - \int_0^\infty 2T\varepsilon\dot{\varepsilon} dt = \int_0^\infty (\varepsilon + T\dot{\varepsilon})^2 dt - T\varepsilon^2\Big|_{\varepsilon_0}^0 = \int_0^\infty (\varepsilon + T\dot{\varepsilon})^2 dt + T\varepsilon_0^2$$ где ε_0 – начальное отклонение в переходном процессе.

Наименьшее значение J^* будет при выполнении условия:

$$T\dot{\varepsilon} + \varepsilon = (Tp + 1)\varepsilon = 0.$$

Для вычисления J^* используется следующий подход.

Записывается $J^* = \int_0^\infty \varepsilon^2 dt + T^2 \int_0^\infty \dot{\varepsilon}^2 dt = J + T^2 J_1$.

Значение J вычисляется по выше упомянутым формулам.

Значение J_1 определяется следующим выражением:

$$J_1 = \int_0^\infty w^2(t) dt,$$

где $w(t)$ – весовая функция по задающему воздействию.

Удобство интегральных оценок состоит в том, что они дают единый числовой критерий качества. Недостатком является то, что одному и тому же значению интегральной оценки могут соответствовать разные формы переходного процесса.

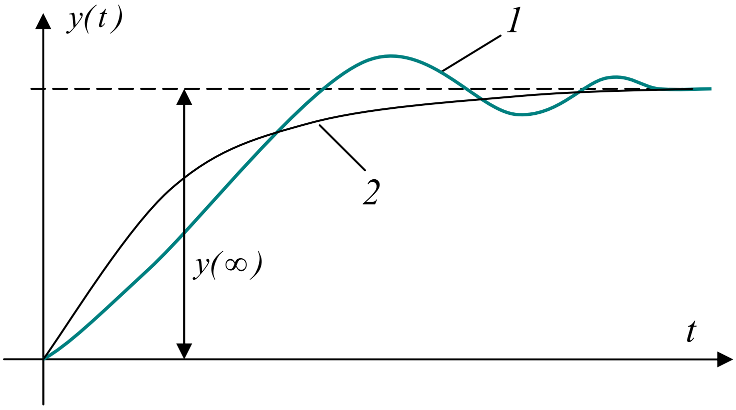


Рис. 45. Типы переходных процессов с одним значением квадратичной интегральной оценки

9.5. Повышение точности систем регулирования

К числу общих методов повышения точности относятся:

1) увеличение коэффициента усиления разомкнутой цепи;

2) повышение степени астатизма;

3) использование регулирования по производным от ошибки.

Первый метод является наиболее универсальным и эффективным методом и позволяет уменьшить ошибку регулирования практически во всех режимах, т.к. коэффициент усиления разомкнутой цепи входит в качестве делителя во все коэффициенты ошибок. Метод технически реализуется просто – введением усилителей. Однако увеличение коэффициента усиления ограничивается устойчивостью системы.

Второй метод используется для устранения установившихся ошибок в различных типовых режимах. Формально это сводится к тому, чтобы сделать равными нулю первые коэффициенты ошибки системы, например, $c_0 = 0$ при астатизме первого порядка, $c_0 = c_1 = 0$ при астатизме второго порядка и т.д.

Технически повышение астатизма осуществляется за счет введения в канал регулирования интегрирующих звеньев. В результате передаточная функция разомкнутой системы будет иметь дополнительный множитель в знаменателе. Однако повышение порядка астатизма может привести к неустойчивости замкнутой системы, в частности к структурной неустойчивости.

Допустим, имеем передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_p = \frac{k}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Поскольку имеется множитель p в знаменателе, то система обладает астатизмом первого порядка.

После определения передаточной функции по ошибке

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1+W_p}$$

вычислим коэффициенты ошибок.

Коэффициенты ошибок равны:

$$c_0 = 0,\ c_1 = \frac{1}{k},\ \frac{c_2}{2} = \frac{T_1+T_2}{k} - \frac{1}{k^2}.$$

Добротность системы по скорости будет равна

$$k_v = k.$$

Введем в систему интегрирующее звено с передаточной функцией

$$W_u = \frac{k_u}{p},$$

где $k_н$ – коэффициент передачи интегрирующего звена.

Передаточная функция разомкнутой системы будет равна:

$$W_p^* = \frac{k_u k}{p^2(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

В результате имеем систему с астатизмом второго порядка и добротностью по ускорению

$$k_a = k_u k.$$

Передаточная функция по ошибке имеет вид

$$W_\varepsilon^* = \frac{1}{1+W_p^*} = \frac{p^2(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{p^2(1+T_1 p)(1+T_2 p)+k_a}.$$

В итоге получим следующие коэффициенты для ошибок:

$$c_0 = c_1 = 0,\ \frac{c_2}{2} = \frac{1}{k_a}.$$

Следовательно, скоростная ошибка в преобразованной системе по сравнению с исходной системой равна нулю.

Проверим преобразованную систему на устойчивость. Характеристическое уравнение замкнутой системы равно

$$T_1 T_2 p^4 + (T_1+T_2)p^3 + p^2 + k_a = 0.$$

Отсутствие слагаемого с оператором p первой степени соответствует неустойчивой системе (структурной неустойчивости).

9.6. Применение изодромных устройств

Использование данных устройств позволяет повысить порядок астатизма системы регулирования без снижения ее запаса устойчивости.

Передаточная функция изодромного устройства:

$$W_{из} = 1 + \frac{k_u}{p} = \frac{k_u\left(1 + T_u p\right)}{p},$$

где $k_н, T_н$ – соответственно, коэффициент передачи и постоянная времени изодромного устройства $T_u = \frac{1}{k_u}$.

Рассмотрим предыдущий пример системы регулирования с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W_p = \frac{k}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

После введения изодромного звена

$$W_p^* = \frac{k}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)} \cdot \frac{k_u\left(1+T_u p\right)}{p}.$$

Записывая передаточную функцию по ошибке

$$W_\varepsilon^* = \frac{1}{1 + W_p^*},$$

вычисляются коэффициенты ошибок

$$c_0 = c_1 = 0, \ \frac{c_2}{2} = \frac{1}{k_a},$$

где $k_a = k_u k$ – добротность системы по ускорению.

Проверим условие устойчивости замкнутой системы. Характеристическое уравнение замкнутой системы равно:

$$T_1 T_2 p^4 + \left(T_1 + T_2\right)p^3 + p^2 + k_a T_u p + k_a = 0.$$

Следовательно, система регулирования будет устойчива при выполнении условия

$$k_a < \frac{T_u\left(T_1 + T_2\right) - \left(T_1 + T_2\right)^2}{T_1 T_2 T_u^2}.$$

Запишем данное неравенство в другом виде:

$$k = T_{и} k_a < \frac{(T_1 + T_2) - \dfrac{(T_1 + T_2)^2}{T_{и}}}{T_1 T_2}.$$

Анализ данного неравенства показывает, что при достаточно больших $T_{и} \to \infty$ (малых коэффициентах передачи $k_{н}$) условие устойчивости системы с изодромным звеном мало отличается от условий устойчивости исходной системы без изодромного звена:

$$k < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Таким образом, введение изодромного звена с относительно большой постоянной времени $T_{н}$ дает повышение порядка астатизма на единицу при сохранении условий устойчивости в преобразованной системе. Однако динамические качества системы с изодромным звеном сохраняются прежними только в низкочастотной области и с увеличением частоты задающего воздействия уменьшаются. При этом коэффициент ошибки, следующий за последним нулевым коэффициентом, увеличивается. Так, в рассматриваемом примере, коэффициент ошибки по ускорению задающего сигнала

$$\frac{c_2}{2} = \frac{1}{k_a} = \frac{1}{k_{и} k} = \frac{T_{и}}{k}$$

увеличивается при увеличении $T_{н}$ (уменьшении $k_{н}$) при прежнем значении k системы. Для дальнейшего повышения порядка астатизма системы используется последовательное включение нескольких изодромных устройств.

Рассмотрим структурную схему системы, включающая три изодромных звена (рис. 46).

В данном случае для коэффициентов ошибок будем иметь равенство:

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

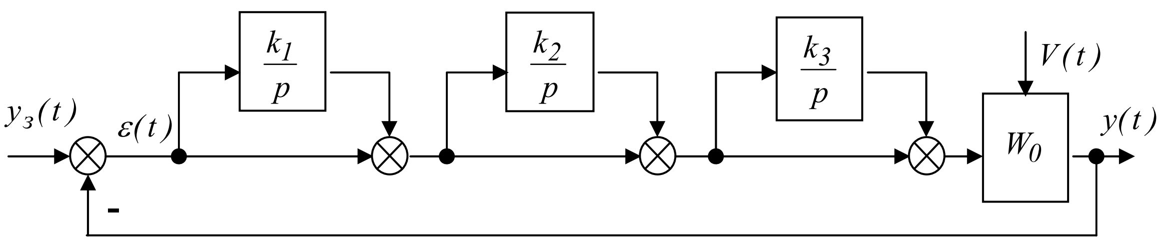


Рис. 46. Структурная схема системы, включающая три изодромных звена

При соответствующем выборе постоянных времени

$$T_{u1} = \frac{1}{k_1},\ T_{u2} = \frac{1}{k_2},\ T_{u3} = \frac{1}{k_3}$$

изодромных устройств можно обеспечить те же условия устойчивости, что и в исходной системе регулирования.

9.7. Регулирование по производным от ошибки

При регулировании по производным система начинает чувствовать не только наличие ошибки, но и тенденцию к изменению ее величины. В результате система более быстро реагирует на появление задающих и, особенно возмущающих воздействий, что снижает ошибку регулирования. При этом повышается также запас устойчивости замкнутой системы.

Структурная схема системы с дифференцирующим элементом может быть представлена в следующем виде

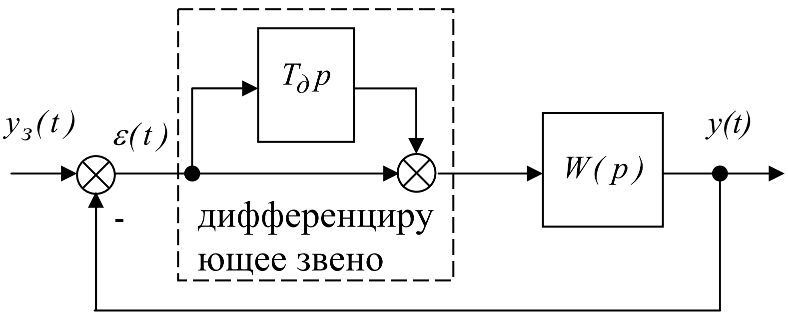


Рис. 47. Структурная схема системы, включающая дифференцирующее звено

Передаточная функция дифференцирующего элемента равна:

$$W_\partial(p) = 1 + T_\partial p,$$

где T_∂ – постоянная времени дифференцирующей цепи.

Рассмотрим систему регулирования с передаточной функцией разомкнутой системы:

$$W_p = \frac{k}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы с дифференцирующим элементом имеет вид

$$W_p^* = \frac{k(1+T_\partial p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Передаточная функция системы по ошибке записывается выражением

$$W_\varepsilon = \frac{1}{1+W_p^*} = \frac{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)+k(1+T_\partial p)}.$$

Осуществляя операцию деления числителя на знаменатель (раскладывая функцию $W_\varepsilon(p)$ в ряд), получаем соотношения для коэффициентов ошибок:

$$c_0 = 0,\ c_1 = \frac{1}{k},\ \frac{c_2}{2} = \frac{T_1+T_2}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{T_\partial}{k},$$

где $k_a = k_u k$ – добротность системы по ускорению.

Проверим условие устойчивости замкнутой системы. Характеристическое уравнение замкнутой системы равно:

$$T_1 T_2 p^4 + (T_1+T_2)p^3 + p^2 + k_a T_u p + k_a = 0.$$

По сравнению с введением интегрирующего звена (повышение порядка астатизма) коэффициент c_2 уменьшается при введении регулирования по первой производной от ошибки. При соответствующем выборе величины T_∂ можно добиться условия $c_2 = 0$. Т.е. создать такую систему, в которой не будет установившейся ошибки, пропорциональной ускорению. Аналогичным образом, используя два последовательно соединенных дифференцирующих звена, можно получить равенство нулю одновременно двух коэффициентов, например, $c_2 = 0$ и $c_3 = 0$. Следовательно, в отличие от случая введения изодромного устройства, когда обращается в нуль первый, ранее отличный от нуля коэффициент ошибки, введение дифференцирующего элемента не влияет на этот коэффициент ошибки, а уменьшает последующие элементы. В связи с этим заключением наиболее эффективное уменьшение ошибки системы регулирования может быть достигнуто при одновременном использовании изодромных устройств и дифференцирующих элементов.

Рекомендации по количеству изодромных и дифференцирующих устройств:

- число изодромных устройств – не более 3. При большем числе резко усложняется реализация системы;
- число дифференцирующих устройств – не более 2. При большем числе возрастает влияние высокочастотных помех.

9.8. Комбинированное управление

Введем понятие инвариантное управление, позволяющее получить высокую точность в системах регулирования.

Система называется инвариантной по отношению к возмущающему воздействию, если после завершения переходного процесса, регулируемая величина и ошибка системы не зависят от этого воздействия.

Система называется инвариантной по отношению к задающему воздействию, если после завершения переходного процесса, ошибка системы не зависит от этого воздействия.

Под комбинированным управлением или регулированием понимается такой метод построения замкнутой системы, который предполагает организацию контура регулирования по отклонению или ошибке и контура регулирования по задающему или возмущающему воздействию.

Рассмотрим случай, когда используется регулирование по отклонению $\varepsilon(t)$ и задающему воздействию.

Структурная схема такой системы имеет следующий вид

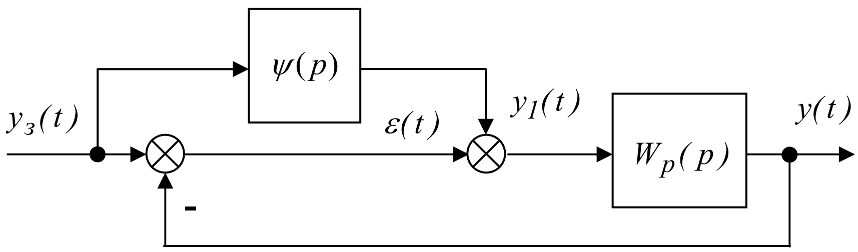


Рис. 48. Структурная схема системы с комбинированным управлением

В случае отсутствия регулирования по задающему воздействию $\psi(p)=0$ и регулируемая переменная $y(t)$ определяется выражением

$$y(t)=W_з(p)y_з(t)=\frac{W_p(p)}{1+W_p(p)}y_з(t),$$

где $W_p(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы.

При введении регулирования по задающему воздействию регулируемая величина определяется из уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = y_з \cdot \psi, \\ y = (y_1 + y_з - y)\cdot W_p, \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{W_p}{1+W_p}\left[1+\psi(p)\right]\cdot y_з(t).$$

Тогда эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом регулирования по задающему воздействию:

$$W_э = \frac{W_p\left[1+\psi\right]}{1+W_p}.$$

Из данного выражения видно, что введение регулирования по задающему воздействию не меняет характеристического уравнения системы, работающей по отклонению, т.к. знаменатель передаточной функции одинаков. Это означает, что введение инвариантного регулирования не изменяет условий устойчивости, сохраняются оценки качества переходного процесса, базирующиеся на использовании корней характеристического уравнения.

Эквивалентная передаточная функция по ошибке будет равна

$$W_{э\varepsilon} = 1 - W_э = \frac{1-\psi\cdot W_p}{1+W_p}.$$

Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы соответствует уравнению

$$W_{эр} = \frac{W_э}{1-W_э} = \frac{W_p\left[1+\psi\right]}{1-\psi W_p}.$$

Исходную двухконтурную структурную схему системы можно представить одноконтурной схемой:

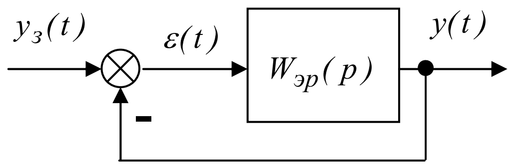


Рис. 49. Одноконтурная эквивалентная структурная схема

Анализ передаточной функции по ошибке $W_{э\varepsilon}$ позволяет заключить, что условием полной инвариантности является равенство:

$$1-\psi W_p = 0 \text{ или } \psi = \frac{1}{W_p},$$

обеспечивающее $W_{э\varepsilon} = 0$.

Для того чтобы определить вид сигнала

$$y_1(t) = \psi y_з(t),$$

где $y_з(t)$ – задающее воздействие, необходимо определить вид функции $\psi(p)$.

Разложим $\psi(p)$ в ряд по степеням оператора p:

$$\psi(p) = \tau_0 + \tau_1 p + \tau_2 p^2 + ...,$$

где τ_0 – безразмерное число.

Коэффициент τ_0 в астатических и большинстве статических системах равен нулю. Однако в системах инвариантных по возмущающему воздействию $\tau_0 \neq 0$. При технической реализации систем регулирования обеспечивается не полная, а частичная инвариантность вследствие ограничения числа слагаемых $\psi(p)$.

В некоторых случаях сигнал по задающему воздействию вводится не на вход системы, а в некоторую точку внутри канала регулирования.

Структурная схема системы может иметь следующий вид:

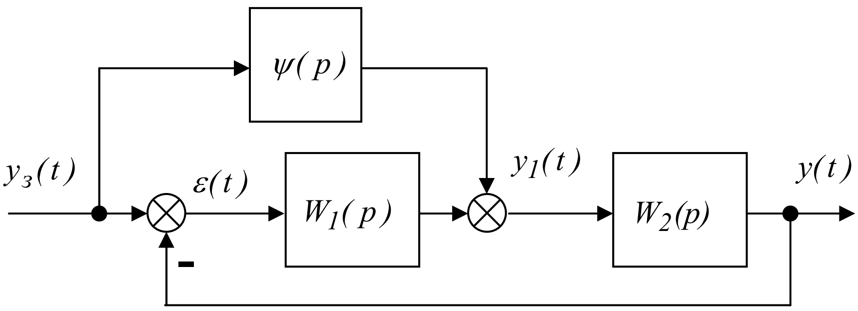


Рис. 50. Структурная схема системы с комбинированным управлением по задающему сигналу

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы записывается выражением

$$W_э = \frac{W_p\left[1 + \dfrac{\psi}{W_1}\right]}{1 + W_p},$$

где $W_p = W_1 W_2$.

Эквивалентная передаточная функция по ошибке равна

$$W_{э\varepsilon} = \frac{1 - \psi W_2}{1 + W_p}$$

и эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{эр} = \frac{W_p\left[1 + \frac{\psi}{W_1}\right]}{1 - \psi W_2}.$$

Условие полной инвариантности:

$$\psi = \frac{1}{W_2}.$$

Комбинированное управление также используется для снижения ошибки от возмущающего воздействия.

Структурную схему системы можно представить в следующем виде:

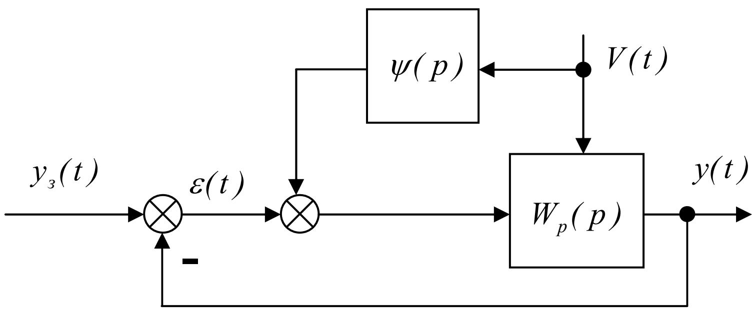


Рис. 51. Структурная схема системы с комбинированным управлением по возмущению

Эквивалентная передаточная функция системы по возмущению соответствует выражению

$$W_{эV} = \frac{W_V - \psi W_p}{1 + W_p},$$

где W_V – передаточная функция по данному возмущению в разомкнутой системе.

Условие полной инвариантности возможно при равенстве $W_{эV} = 0$, которое позволяет получить (при равенстве числителя нулю):

$$\psi = \frac{W_V}{W_p}.$$

Функция ψ может быть представлена в виде ряда

$$\psi = k_V\left(\tau_0 + \tau_1 p + \tau_2 p^2 + \ldots\right),$$

где τ_0 – безразмерное число (1 или 0); k_V – коэффициент, размерность которого совпадает с размерностью функции W_V.

9.9. Неединичные обратные связи

Данные обратные связи используются для уменьшения ошибки, вызванной задающим воздействием в замкнутой системе регулирования. При этом рассматриваются, в основном, главные обратные связи.

Структурная схема системы имеет вид

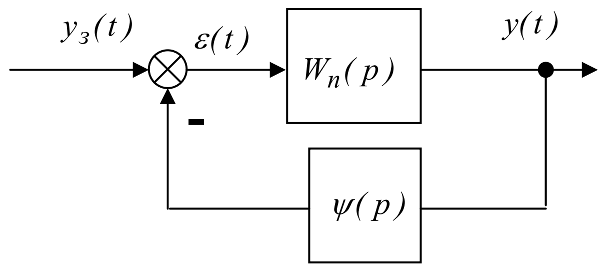


Рис. 52. Структурная схема системы с неединичной обратной связью

Регулируемая величина определяется выражением

$$y(t) = \frac{W_n}{1+\psi W_n} y_з(t) = W_э y_з(t),$$

где $W_п$ – передаточная функция прямой цепи системы регулирования.

Для получения полной инвариантности необходимо выполнить условие $W_э = 1$.

При выполнении равенства

$$\frac{W_n}{1+\psi W_n} = 1$$

требуемая передаточная функция главной обратной связи равна

$$\psi = \frac{W_n - 1}{W_n} = 1 - \frac{1}{W_n}.$$

При разложении данного выражения в ряд по степеням оператора p запишем:

$$\psi = \tau_0 - \left(\tau_1 p + \tau_2 p^2 + ...\right).$$

Для получения полной инвариантности необходимо использовать главную обратную связь с коэффициентом передачи отличным от единицы (в астатических системах $\tau_0 = 1$). Кроме того, необходимо ввести положительные обратные связи по производным от регулируемой величины.

Реализация полной инвариантности в системе с неединичной обратной связью практически не возможна. Это связано с тем, что при выполнении условия $\psi = 1 - \dfrac{1}{W_n}$ замкнутая система будет находиться на границе устойчивости. Также невозможно учесть все составляющие ряда функции ψ.

Наиболее эффективным действие неединичной обратной связи оказывается в статической системе. В такой системе изменением коэффициента передачи жесткой главной обратной связи можно получить астатизм относительно задающего воздействия.

Запишем эквивалентную передаточную функцию разомкнутой системы из следующего равенства:

$$\frac{W_n}{1+\psi\psi_n} = \frac{W_{эр}}{1+W_{эр}},\ W_{эр} = \frac{W_n}{1-[1-\psi]W_n}.$$

Рассмотрим передаточную функцию W_n статической системы

$$W_n = \frac{M_n(p)}{N_n(p)} = \frac{k\left(1+b_{m-1}p+...+b_0p^m\right)}{\left(1+a_{n-1}p+...+a_0p^n\right)},\ m<n.$$

При жесткой обратной связи (безинерционная обратная связь) с $\psi = \tau_0$ эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_{эр} = \frac{W_n}{1-[1-\psi]W_n} = \frac{M_n(p)N_n(p)}{N_n(p)\left[N_n(p)-(1-\psi)M_n(p)\right]} = \frac{M_n(p)}{N_n(p)-[1-\psi]M_n(p)} =$$

$$= \frac{k\left(1+b_{m-1}p+...+b_0p^m\right)}{\left(1+a_{n-1}p+...+a_0p^n\right)-[1-\tau_0]k\left(1+b_{m-1}p+...+b_0p^m\right)}$$

Очевидно, что при условии

$$\left(1-\tau_0\right)k = 1 \text{ или } \tau_0 = 1-\frac{1}{k}$$

в знаменателе исчезает слагаемое с оператором p в нулевой степени. Эквивалентная передаточная функция примет вид

$$W_{эр} = \frac{k\left(1+b_{m-1}p+...+b_0p^m\right)}{p\left[\left(a_{n-1}-b_{m-1}\right)+\left(a_{n-2}-b_{m-2}\right)p+...+a_0p^{n-1}\right]}.$$

Таким образом, данная система будет обладать астатизмом первого порядка. Значение добротности по скорости будет равно:

$$k_v = \frac{k}{a_{n-1} - b_{m-1}}.$$

В результате уменьшения коэффициента передачи главной обратной связи на незначительную величину по сравнению с единицей обеспечивается равенство нулю коэффициента ошибки $c_0 = 0$ и отсутствие статической ошибки.

Рассмотрим другой способ уменьшения статической ошибки от задающего воздействия. Этот способ заключается в подключении на входе и выходе системы с единичной обратной связью масштабирующего устройства с коэффициентом передачи

$$k_м = \frac{k+1}{k}.$$

Структурная схема имеет вид

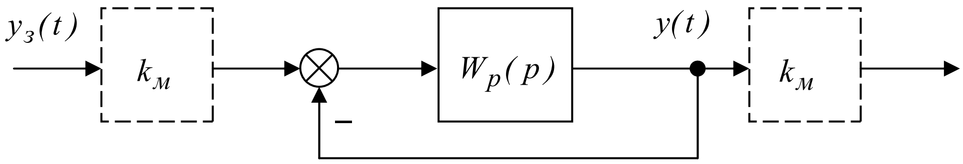


Рис. 53. Структурная схема с уменьшением статической ошибки от задающего воздействия

Регулируемая переменная записывается

$$y(t) = \frac{W_p}{1+W_p}\frac{k+1}{k} y_з(t).$$

В установившемся режиме при статическом регулировании

$$W_p(0) = k,\ y_{уст} = \frac{k}{k+1}\frac{k+1}{k} y_{з0} = y_{з0}.$$

Это равенство позволяет заключить об отсутствии статической ошибки. Такое масштабирование выполняется практически во всех статических системах регулирования.

При нестабильном коэффициенте k усиления появляется статическая ошибка

$$y_{уст} = \frac{\Delta k}{k}\frac{y_{з0}}{k},$$

где $\frac{\Delta k}{k}$ – относительное изменение коэффициента усиления. Первый коэффициент ошибки в этом случае будет равен

$$c_0 = \frac{\Delta k}{k^2}.$$

10. УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ

10.1. Общие сведения

Под улучшением качества процесса регулирования понимается изменение динамических свойств системы с целью получения необходимого запаса устойчивости и быстродействия. Заметим также, что проблема получения в системе регулирования требуемых качественных показателей – точности в типовых режимах, запаса устойчивости и быстродействия, является единой и нельзя рассматривать решение отдельных вопросов в отрыве от других.

Одним из вариантов изменения параметров и структуры системы регулирования для обеспечения качественных показателей регулируемого процесса является введение корректирующих звеньев (рис. 53).

Различаются корректирующие звенья последовательного типа, параллельного типа и корректирующее звено в виде местной обратной связи.

Корректирующее звено последовательного типа вводится последовательно с частью элементов системы регулирования или всей системой.

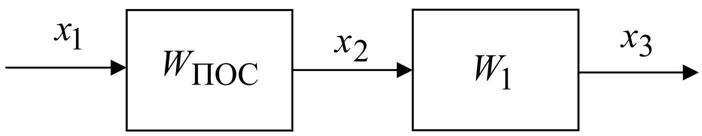


Рис. 53. Структурная схема системы регулирования с последовательным корректирующим звеном

где $W_{ПОС}$, W_1 – соответственно передаточные функции корректирующего звена и части системы регулирования.

Результирующая передаточная функция равна

$$W_{ПОС1} = W_{ПОС} \cdot W_1.$$

Корректирующее звено параллельного типа вводится параллельно с частью элементов системы регулирования или всей системой (рис. 54).

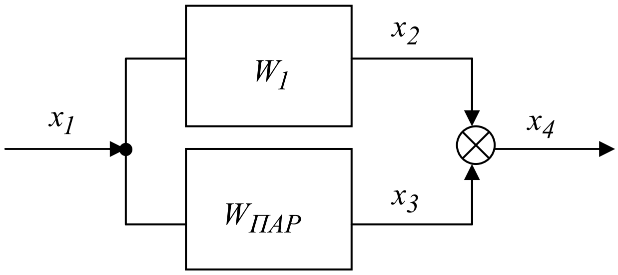


Рис. 54. Структурная схема системы регулирования с параллельным корректирующим звеном

Результирующая передаточная функция равна

$$W_{ПАР1} = W_{ПАР} + W_1.$$

Корректирующее звено в виде местной обратной связи вводится в цепь обратных связей контуров, содержащих в прямой цепи часть элементов системы или всю систему (рис. 55).

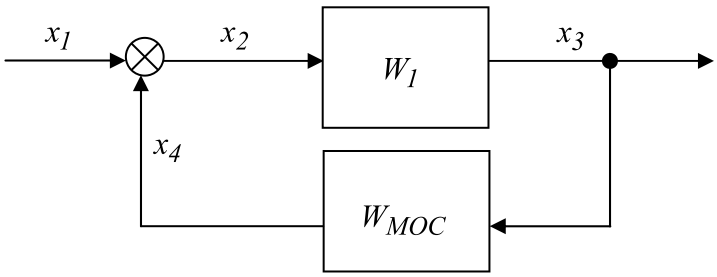


Рис. 55. Структурная схема системы регулирования с местной обратной связью

Местная обратная связь может быть отрицательной, положительной, жесткой, гибкой.

Результирующая передаточная функция равна

$$W_{МОС1} = \frac{W_1}{1 \mp W_{МОС} \cdot W_1}.$$

Использование того или иного типа корректирующих устройств определяется возможностью их реализации. Поэтому после выполнения этапа расчета системы с той или иной обратной связью требуется реализовать другой тип корректирующего звена. Для получения формул перехода от одного типа корректирующего звена к другому необходимо приравнять результирующие передаточные функции систем

$W_{ПОС1} = W_{ПАР1} = W_{МОС1}$ или $W_{ПОС} \cdot W_1 = W_{ПАР} + W_1 = \dfrac{W}{1 \mp W_{МОС} \cdot W_1}$.

В итоге можно получить шесть формул перехода от одного типа корректирующих звеньев к другому.

Особенности применения корректирующих звеньев. Звенья последовательного типа применяются в тех случаях, когда в электрической системе регулирования используется сигнал в виде напряжения постоянного тока, связанный с сигналом ошибки $U = f(\varepsilon)$. Корректирующее звено при этом технически просто выполняется на *RLC*-элементах. Для сигналов с переменной частотой техническая реализация данных звеньев значительно усложняется. Звенья могут также выполняться на элементах с другой физической природой: гидравлических, механических и т.д.

Звенья параллельного типа удобно применять в тех случаях, когда необходимо осуществить сложный закон регулирования с введением интеграла и производных от сигнала ошибки. Примером может служить использование изодромных устройств.

Обратные связи широко используются для уменьшения влияния нелинейностей (обратная связь охватывает участок канала регулирования, содержащего нелинейность), снижения ошибки регулирования, возникшей вследствие координатных и параметрических возмущений.

10.2. Методы повышения запаса устойчивости

Повышение запаса устойчивости – демпфирование системы регулирования сводится к перераспределению полюсов (корней характеристического уравнения знаменателя передаточной функции) и нулей (корней характеристического уравнения передаточной функции) замкнутой системы для задающего и возмущающего воздействия.

Поскольку передаточная функция замкнутой системы определяется на основе передаточной функции разомкнутой системы, то при демпфировании возникает задача перераспределения полюсов и нулей данных функций на основании условий устойчивости и критериев качества.

Рассмотрим амплитудо-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы с астатизмом первого порядка. Поскольку данная характеристика охватывает точку $(-1, j0)$, то в замкнутом состоянии система будет неустойчивой (рис. 56).

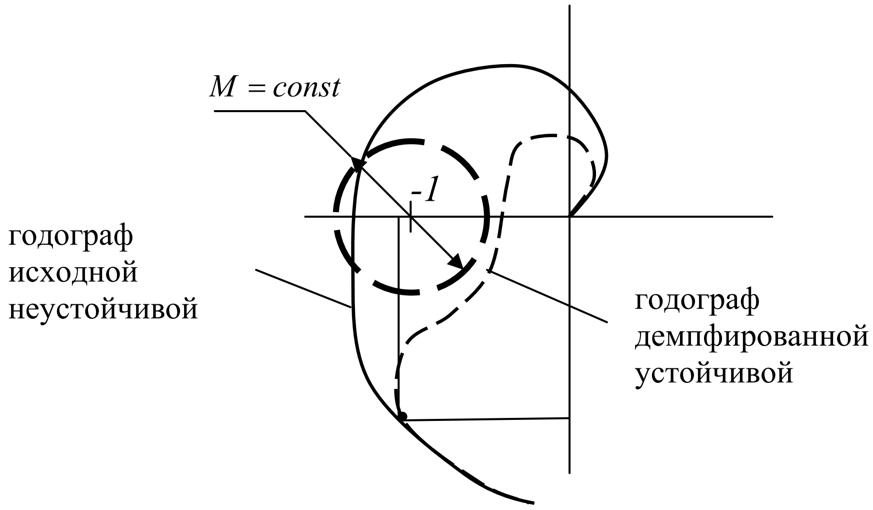


Рис. 56. Амплитудо-фазовая частотная характеристика
разомкнутой системы с астатизмом первого порядка

Задачей демпфирования является такая деформация АФЧХ, траектория которой не охватывает точку $(-1, j0)$ и удалена от этой точки на расстояние, соответствующее показателю колебательности M.

Деформация АФЧХ может производиться с использованием корректирующих звеньев различного типа. Приведем четыре основных метода демпфирования системы регулирования.

10.3. Демпфирование с подавлением высоких частот

Данный способ предполагает подавление разомкнутой системой всех частот, превышающих частоту ω_A, соответствующую некоторой точке A.

В результате демпфированной характеристике будет соответствовать замкнутая система, которая будет иметь необходимый запас устойчивости.

Подавление высоких частот в статических системах наиболее просто осуществляется введением последовательно корректирующего апериодического звена первого порядка с относительно большой постоянной времени и коэффициентом передачи

$$k = 1,\ W_к(p) = \frac{1}{T_к p + 1},\ T_к \geq (10 \div 1000) T_{i\max},$$

где $T_{i\,\max}$ – максимальное значение постоянной времени i-го звена неустойчивой разомкнутой системы. Тогда передаточная функция разомкнутой системы левее частоты среза может быть представлена

$$W_p(p) = \frac{k}{T_к p + 1},$$

с постоянной времени T_k и коэффициентом усиления разомкнутой системы.

Все остальные постоянные времени не могут нарушить устойчивость системы, т.к. они являются малыми по сравнению с T_k. Запас устойчивости в системе не будет нарушаться при одновременном изменении k и T_k согласно условия $\dfrac{k}{T_к} = const$.

В астатических системах первого порядка желаемый запас устойчивости может быть получен при введении интегрирующего звена вида

$$W_к(p) = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p},\ (T_1 > T_2).$$

Демпфирование в системе обеспечивается за счет достаточно больших T_1 и T_2 по сравнению с постоянными времени других звеньев, в результате чего передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p = \frac{k(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)}.$$

В астатических системах второго порядка данный метод используется редко ввиду сложности выполнения корректирующего звена.

Недостатком демпфирования систем с подавлением высоких частот является снижение быстродействия, т.к. корректирующее звено представляет фильтр низкого порядка.

10.4. Демпфирование с поднятием высоких частот

Выведение АФЧХ разомкнутой системы из запретной зоны может быть произведено поворотом ее высокочастотной части против часовой стрелки (положительный фазовый сдвиг).

Положительный фазовый сдвиг (фазовое упреждение) может быть получен включением параллельно части основного канала регулирования дифференцирующего звена с передаточной функцией (рис. 57)

$$W_p = 1 + T_1 p .$$

Дополнительный положительный фазовый сдвиг равен $\varphi = arctg\omega T_1$.

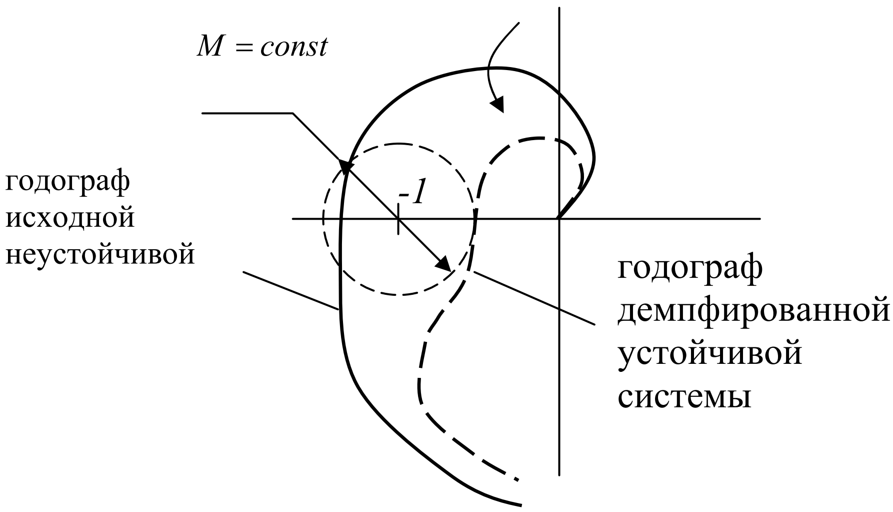


Рис. 57. Амплитудо-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы с поднятием высоких частот

В области высоких частот значение $\varphi_K \approx 90^\circ$, что и вызывает «закручивание» АФЧХ. Одновременно корректирующее звено увеличивает пропускание высоких частот, т.к. модуль АФЧХ

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}$$

будет тем больше, чем выше частота.

В тех случаях, когда одного корректирующего звена является недостаточным для выведения АФЧХ разомкнутой системы из запретной зоны, то используется два последовательно включенных дифференцирующих звена. Это соответствует введению первой и второй производных.

Передаточная функция будет иметь вид:

$$W_p = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p) = T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1 .$$

Дополнительный фазовый сдвиг равен

$$\varphi = arctg\omega T_1 + arctg\omega T_2 .$$

В этом случае будет наблюдаться увеличение пропускания высоких частот, т.к. модуль АФЧХ уменьшается

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \,.$$

Демпфирование системы посредством поднятия высоких частот позволяет получить необходимый запас устойчивости практически при любых передаточных функциях.

Данный метод имеет ограниченную сферу применения, которая обусловлена влиянием на систему высокочастотных помех из-за поднятия верхних частот (расширение полосы пропускания).

Обычно данное корректирующее звено включается с одновременным включением узко- или широкополосных фильтров, что усложняет задачу увеличения запаса устойчивости.

10.5. Демпфирование с подавлением средних частот

Выведение АФЧХ из запретной зоны может быть произведено на основе подавления усиления в области частот, соответствующей отрезку характеристики между точками A и B.

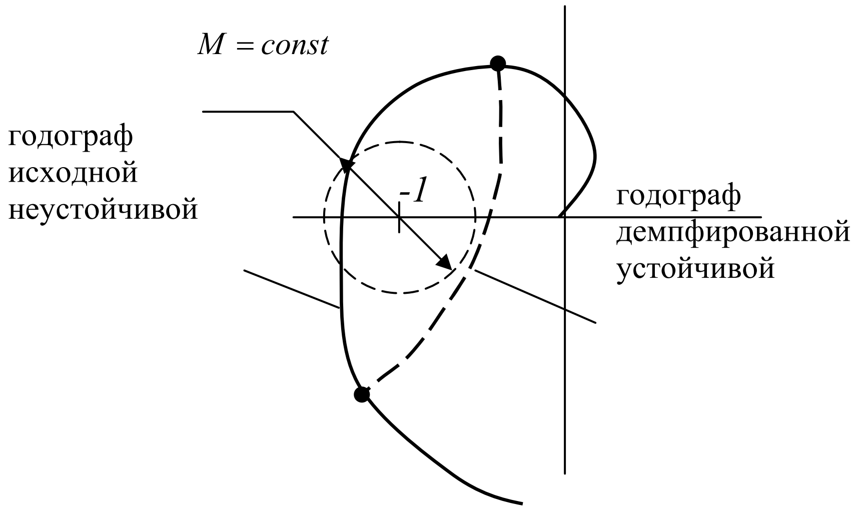


Рис. 58. Амплитудо-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы с подавлением средних частот

Подавление средних частот обычно осуществляется путем включения в цепь регулирования последовательного интегро-диффенцирующего звена. По своим свойствам данное демпфирование занимает промежуточное место между двумя предыдущими способами и является наиболее распространенным. Здесь сохраняется требуемое быстродействие и полоса пропускания.

10.6. Демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов

Данное демпфирование осуществляется с использованием последовательных корректирующих звеньев фазосдвигающего типа. Обычно этот метод является эффективным в случае наличия в канале разомкнутой системы консервативных и колебательных звеньев со слабым демпфированием.

По своим свойствам этот метод демпфирования сходен со случаем подавления средних частот, т.к. фазосдвигающие звенья обычно не вносят изменений в АФЧХ и модуль их передаточной функции $A(\omega)=1$. В результате сохраняется быстродействие системы и ее полоса пропускания.

11. МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

11.1. Общие сведения

Под синтезом системы регулирования понимается направленный расчет, имеющий целью определение структуры системы и оптимальных параметров ее звеньев. Рассмотрим инженерные задачи синтеза систем регулирования. В этом случае необходимо обеспечить:

1) требуемую точность;

2) характер переходных процессов.

Решение первой задачи сводится к определению общего коэффициента усиления и, при необходимости, вида корректирующих устройств, повышающих точность системы. Эта задача решается при помощи определения ошибок в типовых режимах на основе определенных критериев точности.

Решение данной задачи не сопряжено с трудностями вычислительного характера, т.к. критерии точности достаточно просты для их практического использования. Решение оказывается простым вследствие необходимости установления значений относительно небольшого числа параметров.

Решение второй задачи – обеспечение требуемых переходных процессов является более трудной, т.к. резко возрастает количество варьируемых параметров и появляется многозначность решения задачи демпфирования системы. Данные факторы обуславливают обязательное использование вычислительной техники при моделировании переходных процессов. Однако моделирование на ЭВМ не может заменить этап формирования математической модели системы регулирования и этап исследования ее свойств в общем виде для определения оптимального решения.

11.2. Корневой метод

Данный метод разработан Т.Н.Соколовым и является наиболее простым при определении параметров системы регулирования с фиксированной структурой.

Пусть имеется характеристическое уравнение системы регулирования:

$$p^n + A_1 p^{n-1} + \ldots + A_n = 0 .$$

С точки зрения скорейшего затухания переходного процесса необходимо, чтобы вещественные части всех корней данного уравнения были вещественными. Сумма вещественных частей всех корней численно равна первому коэффициенту A_1 уравнения. Поэтому при заданной величине этого коэффициента наиболее быстрое затухание переходного процесса получается при равенстве вещественных частей всех корней. Из вычисленных корней можно выделить два или три корня с меньшей по абсолютному значению вещественной частью, которые и определяют протекание переходного процесса. Остальные же корни характеризуют быстро затухающие составляющие, которые оказывают влияние только на начальной стадии переходного процесса.

Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(p^{n-2} + C_1 p^{n-3} + \ldots + C_{n-2}\right)\left(p^2 + B_1 p + B_2\right) = 0 .$$

Второй сомножитель этого уравнения будет определять основной характер процесса. Для уменьшения погрешностей проектируемой системы важно, чтобы коэффициент B_2 был как можно больше. Однако слишком большое увеличение B_2 приводит к колебательному характеру переходного процесса.

Оптимальное соотношение между коэффициентами B_1 и B_2 определяется из условия получения затухания за один период равным $\xi = 98\%$.

С учетом того, что имеем комплексные корни $p = -\alpha \pm j\beta$ из выражения колебательности

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\pi}{\ln \dfrac{1}{1-\xi}}$$

запишем

$$2\pi\frac{\alpha}{\beta}=\ln\frac{1}{1-\xi}=\ln\frac{1}{0{,}02}=4\,.$$

При этом соотношение между α и β имеет вид:

$$\beta=\frac{2\pi\alpha}{4}\,.$$

Корни уравнения (второго сомножителя) определяются:

$$p=-\frac{B_1}{2}\pm\sqrt{B_2-\frac{B_1^2}{4}}\,,$$

т.е.

$$\alpha=\frac{B_1}{2},\ \beta=\sqrt{B_2-\frac{B_1^2}{4}}\,.$$

Тогда взаимная связь между B_1 и B_2 записывается:

$$B_2=\frac{\pi^2+4}{16}\cdot B_1^2=k_n B_1^2\,,$$

где k_n – множитель, который является критерием переходного режима, зависящим от выбранного значения ξ затухания. Данное соотношение показывает желаемую взаимосвязь корней характеристического уравнения, которую необходимо выполнять при проектировании системы. Обычно, для систем с фиксированной структурой это обеспечивается корректирующими звеньями.

Требуемое соотношение между мнимой и вещественной частями комплексных корней – колебательность (при затухании $\xi=98\%$) равно

$$\mu=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{2}=1{,}57\,.$$

Описание переходного процесса уравнением третьего порядка:

$$p^3+B_1p^2+B_2p+B_3=0\,.$$

Данное уравнение можно представить в виде

$$(p+c_{11})(p^2+b_{11}p+b_{21})=0\,.$$

Связь между коэффициентами уравнения записывается

$$B_1=c_{11}+b_{11},\ B_2=c_{11}b_{11}+b_{21},\ B_3=c_{11}b_{21}\,.$$

Положим, что во втором сомножителе выполняется равенство:

$$b_{21}=\frac{\pi^2+4}{16}b_{11}^2\,.$$

Тогда корни характеристического уравнения равны:

$$p_1 = -c_{11},$$

$$p_{2,3} = -\frac{b_{11}}{2} \pm \sqrt{b_{21} - \frac{b_{11}^2}{4}} = -\frac{b_{11}}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{16} b_{11}^2 - \frac{b_{11}^2}{4}} =$$

$$= -\frac{b_{11}}{2} \pm b_{11}\sqrt{\frac{\pi^2 + 4 - 4}{16}} = -\frac{b_{11}}{2} \pm jb_{11}\frac{\pi}{4} = -\frac{b_{11}}{2} \pm j\frac{b_{11}}{2}\frac{\pi}{2}.$$

Т.к. вещественная часть корней должна быть как можно больше (с точки зрения быстроты затухания переходного процесса), то зададим $c_{11} = \frac{b_{11}}{2}$, тогда запишем:

$$b_{11} = \frac{2}{3}B_1,\ c_{11} = \frac{1}{3}B_1,\ b_{21} = \frac{\pi^2 + 4}{36}B_1^2.$$

Полагая, что B_1 в исходном уравнении задано, запишем соотношения между коэффициентами основного уравнения:

$$p_1 = -\frac{1}{3}B_1,\ p_{2,3} = -\frac{1}{3}B_1 \pm j\frac{\pi}{6}B_1.$$

Взаимосвязь между основной и дополнительной составляющей переходного процесса для заданного затухания ξ.

Для установления такой взаимосвязи характеристическое уравнение записывается в виде

$$p^n + A_1\gamma_0 p^{n-1} + A_2\gamma_0^2 p^{n-2} + \ldots + \gamma_0^n = 0,$$

где γ_0 – среднегеометрический корень, $A_1,\ldots,A_{n-1}$ – безразмерные коэффициенты.

Далее рассмотрим уравнение третьей степени

$$p^3 + A_1\gamma_0 p^2 + A_2\gamma_0^2 p + \gamma_0^3 = 0.$$

Представляя данное уравнение в виде множителей, запишем

$$(p + C_1)(p^2 + B_1 p + B_2) = 0.$$

При этом соотношения для коэффициентов исходного уравнения определяется выражениями:

$$A_1\gamma_0 = C_1 + B_1,\ A_2\gamma_0^2 = B_2 + C_1B_1,\ \gamma_0^3 = C_1B_2.$$

Введем нормирующий множитель a, который позволяет записать уравнение:

$$B_1 = aA_1\gamma_0.$$

Тогда коэффициенты C_1 и B_2 уравнения будут равны

$$C_1 = (1-a)A_1\gamma_0,\ B_2 = k_n B_1^2 = k_n a^2 A_1^2 \gamma_0^2.$$

Подставляя полученные выражения в соотношения коэффициентов, запишем:

$$A_2\gamma_0^2 = [1 - a(1-k_n)]aA_1^2\gamma_0^2,\ \gamma_0^3 = k_n(1-a)a^2 A_1^3\gamma_0^3.$$

Из данных уравнений определяем безразмерные коэффициенты:

$$A_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{k_n(1-a)a^2}},\ A_2 = [1 - a(1-k_n)]aA_1^2.$$

Таким образом, коэффициенты A_1 и A_2 являются функциями критерия k_n переходного процесса, зависящего от желаемой степени затухания и коэффициента разложения a, определяющего соотношение постоянных времени затухания отдельных составляющих.

Практический пример

Пусть $a = \frac{2}{3}$, тогда будем иметь отношение

$$\frac{C_1}{B_1} = \frac{1-a}{a} = \frac{1}{2} \text{ или } C_1 = 2B_1.$$

Рассматривая отношения постоянных времени

$$T_1 = \frac{1}{C_1} \text{ и } T_2 = \frac{B_1}{2}$$

получим

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{B_1}{2C_1} = 1.$$

Вывод: обе составляющие переходного процесса затухают с одинаковой скоростью.

Аналогично можно получить выражения для коэффициентов характеристического уравнения четвертой и более высоких степеней.

Синтез системы регулирования данным методом выполняется в несколько этапов:

1) для выбранной структурной схемы системы регулирования и введенных корректирующих звеньев определяется характеристическое уравнение;

2) для назначенных критериев k_n, а определяются коэффициенты характеристического уравнения. При необходимости перенастраиваются параметры основного канала регулирования и корректирующих звеньев.

Данный метод эффективен в случае невысоких степеней характеристического уравнения – до четвертого порядка. Недостатком метода – необходимость задания типа корректирующего звена (его структура и передаточная функция). Поэтому получаемое решение будет зависеть во многом от опытности исследователя.

11.3. Метод стандартных переходных характеристик

Для получения требуемых коэффициентов передаточной функции разомкнутой системы можно использовать стандартные переходные характеристики. Данные характеристики нормируются в относительном времени

$$\tau = \gamma_0 t,$$

где γ_0 – среднегеометрический корень характеристического уравнения, который определяет быстродействие системы.

Для построения стандартных переходных характеристик нужно задаться определенным распределением корней характеристического уравнения. В справочной литературе достаточно полно приведены стандартные переходные характеристики с соответствующими передаточными функциями разомкнутых систем. Например, для систем с астатизмом первого порядка и вещественными корнями характеристического уравнения стандартные передаточные функции разомкнутой системы приведены в таблице 4.

Таблица 4

Стандартные передаточные функции разомкнутой системы с астатизмом первого порядка

Порядок характеристического уравнения, n	Перерегулирование, σ, %	Добротность по скорости, k_V	Стандартная передаточная функция разомкнутой системы, $W_p(p)$
2	5	$\frac{\gamma_0}{1,4}$	$\frac{\gamma_0^2}{p^2 + 1,4\gamma_0 p}$
3	8	$\frac{\gamma_0}{2}$	$\frac{\gamma_0^3}{p^3 + 2\gamma_0 p^2 + 2\gamma_0^2 p}$
4	10	$\frac{\gamma_0}{2,6}$	$\frac{\gamma_0^4}{p^4 - 2,6\gamma_0 p^3 + 3,4\gamma_0^2 p^2 + 2,6\gamma_0^3 p}$

Для данной таблицы, нормированные переходные характеристики приведены на рис. 59. Для систем с астатизмом второго порядка и вещественными корнями стандартные передаточные функции разомкнутой системы для различного порядка характеристического уравнения приведены в таблице 5.

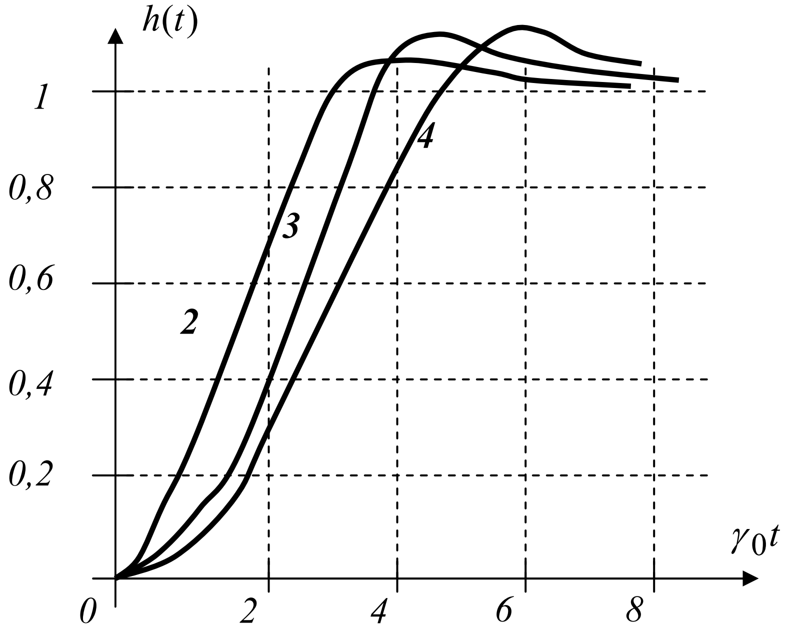


Рис. 59. Нормированные переходные характеристики для данных таблицы 4

Таблица 5

Стандартные передаточные функции разомкнутой системы с астатизмом второго порядка

Порядок характеристического уравнения, n	Перерегулирование, σ, %	Добротность по скорости, k_V	Стандартная передаточная функция разомкнутой системы, $W_p(p)$
2	*10*	γ_0^2	$\dfrac{2{,}5\gamma_0 p + \gamma_0^2}{p^2}$
3	*10*	$\dfrac{\gamma_0^2}{5{,}1}$	$\dfrac{6{,}3\gamma_0^2 p + \gamma_0^3}{p^3 + 5{,}1\gamma_0 p^2}$
4	*10*	$\dfrac{\gamma_0^2}{16}$	$\dfrac{12\gamma_0^3 p + \gamma_0^4}{p^4 + 7{,}2\gamma_0 p^3 + 16\gamma_0^2 p^2}$

Для данной таблицы, нормированные переходные характеристики приведены на рисунке 60.

Этапы данного метода синтеза заключаются в следующем:

1) выбирается структурная схема системы (порядок характеристического уравнения);

2) для выбранной схемы определяется желаемый вид переходного процесса по стандартным характеристикам;

3) устанавливается необходимое значение γ_0 из уравнения: $\gamma_0 = \frac{\tau}{t}$,

где τ, t – соответственно относительное и текущее время;

4) по таблице определяются коэффициенты желаемой передаточной функции системы;

5) введением различных корректирующих звеньев необходимо добиться, чтобы коэффициенты реальной передаточной функции были максимально приближены к коэффициентам желаемой передаточной функции.

Этот метод применяется также для проектирования системы, когда необходимо обеспечить точность регулирования, которая задана коэффициентами ошибок. Тогда на первом этапе синтеза при заданных коэффициентах ошибок определяется требуемое значение добротности по скорости k_V или ускорению k_a, а по ним – величина γ_0. Далее расчет осуществляется аналогичным образом.

Выше рассмотренные стандартные характеристики были построены для разных вещественных корней характеристического уравнения.

Стандартные переходные характеристики достаточно просто построить для комплексных корней.

Пусть характеристическое уравнение записано в виде

$$p^n + A_1\gamma_0 p^{n-1} + A_2\gamma_0^2 p^{n-2} + \ldots + \gamma_0^n = 0, \qquad (17)$$

где γ_0 – среднеквадратический корень.

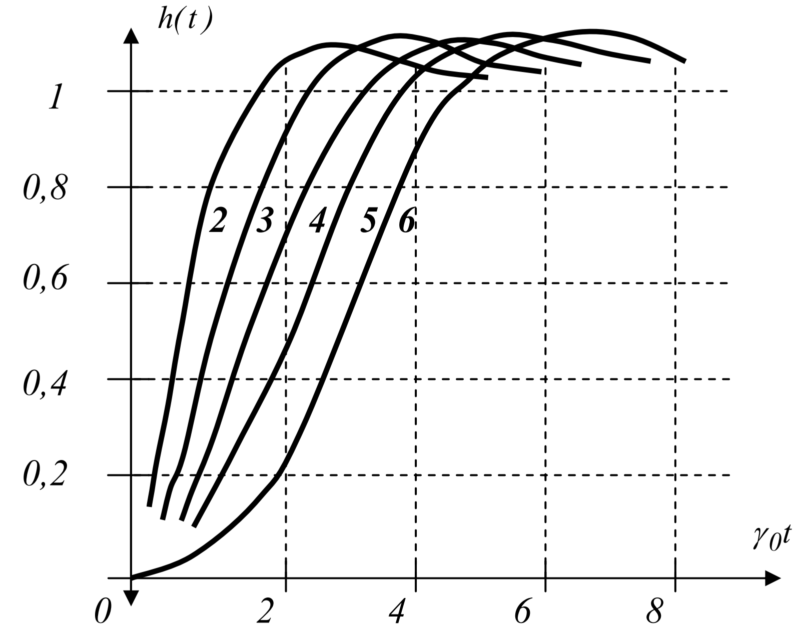


Рис. 60. Нормированные переходные характеристики для данных таблицы 5

Для равных и вещественных корней характеристическое уравнение примет вид

$$(p+\gamma_0)^n = 0.$$

Коэффициенты $A_1, ..., A_{n-1}$ будут являться коэффициентами бинома Ньютона. Установлено, что переходный процесс оканчивается значительно быстрее, если характеристическое уравнение имеет вид при четных значениях n:

$$\left(p^2 + 2\xi\gamma_0 p + \gamma_0^2\right)^{\frac{n}{2}} = 0;$$

при нечетном n:

$$(p+\gamma_0)\left(p^2 + 2\xi\gamma_0 p + \gamma_0^2\right)^{\frac{n-1}{2}} = 0.$$

При этом коэффициент затухания $\xi = 0{,}7 \div 0{,}8$.

Принимая $A_0 = 1$, $A_n = 1$ коэффициенты $A_1, ..., A_{n-1}$ для $\xi = 0{,}75$ и порядка $n = 2 \div 4$ характеристического уравнения, приведены в таблице 6:

Таблица 6

Коэффициенты характеристического уравнения (17) для кратных комплексных корней

Порядок характеристического уравнения n	Коэффициенты характеристического уравнения для кратных комплексных корней		
	A_1	A_2	A_3
2	1,5		
3	2,5	2,5	
4	3	4,25	3

Для данной таблицы 6 нормированные переходные характеристики приведены ниже на рисунке 61.

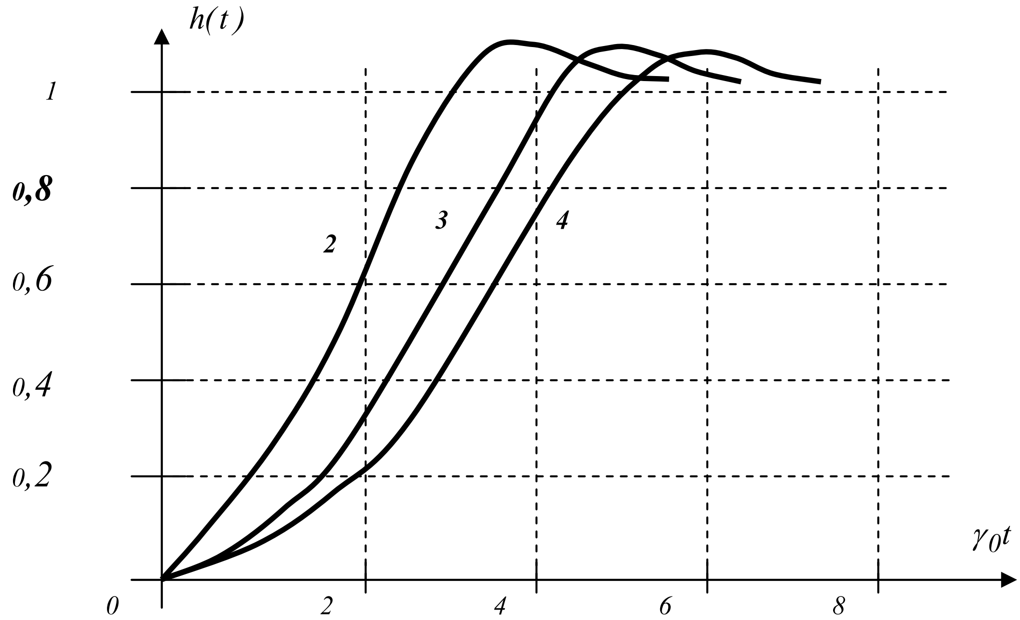


Рис. 61. Нормированные переходные характеристики для данных таблицы 6

Переходный процесс будет затухать еще быстрее, если имеется некратное распределение комплексных корней. В этом случае все корни имеют одинаковую вещественную часть η. Для каждой степени характеристического уравнения существует некоторое оптимальное отношение $\dfrac{\beta_i}{\eta}$, где β_i – мнимые части корней, которое обеспечивает наибольшее быстродействие. Безразмерные коэффициенты характеристического уравнения для $n = 4$ и $\xi = 0{,}75$ приведены в таблице 7.

Таблица 7

Коэффициенты характеристического уравнения (17) для некратных комплексных корней

Порядок характеристического уравнения *n*	Коэффициенты характеристического уравнения для некратных комплексных корней		
	A_1	A_2	A_3
2	1,38		
3	2,05	2,39	
4	2,6	3,8	2,8

Для данной таблицы 7 нормированные переходные характеристики приведены на рисунке 62.

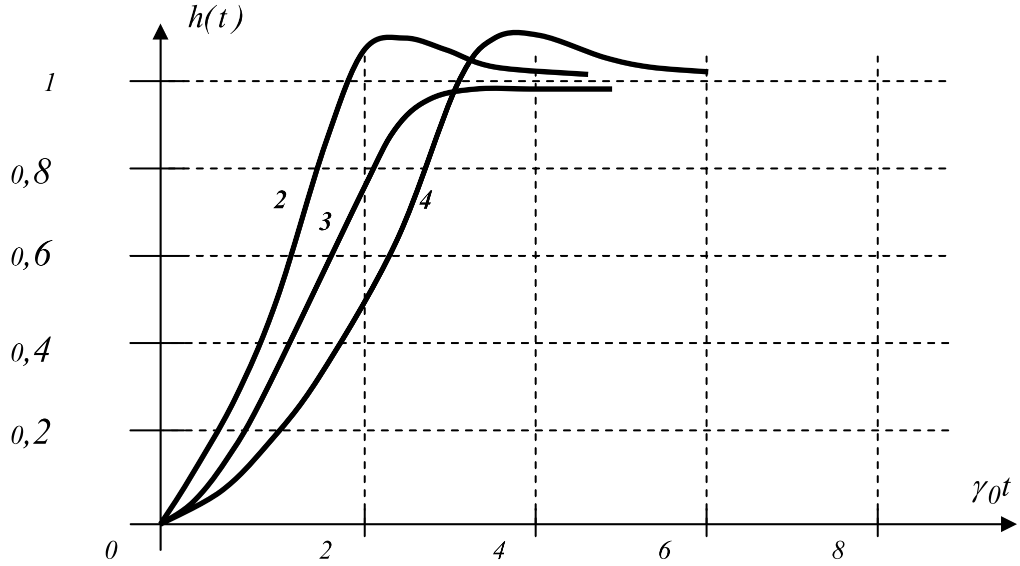


Рис. 62. Нормированные переходные характеристики для данных таблицы 7

11.4. Законы регулирования

Под законом регулирования (управления) понимается алгоритм или функциональная зависимость, в соответствии с которыми регулятор системы формирует управляющее воздействие $U(t)$ для объекта. Данная зависимость может быть представлена в виде

$$U(t) = F(\varepsilon, y_{зад}, v) = F_1(\varepsilon) + F_2(y_{зад}) + F_3(v),$$

где $F_1(\varepsilon)$ – функция от ошибки ε; $F_2(y_{зад})$ – функция от задающего воздействия $y_{зад}$; $F_3(v)$ – функция от возмущающего воздействия v.

Первое слагаемое соответствует регулированию по отклонению (принцип Ползунова-Уатта), второе и третье слагаемые – регулирование по внешнему воздействию (принцип Понселе).

Рассмотрим далее только линейные законы, когда величина $U(t)$ является функцией ошибки ε в соответствии с линейной формой

$$U(t) = k_1\varepsilon + k_2\int \varepsilon\, dt + k_3\iint \varepsilon\, dt^2 + \ldots + k_4\dot{\varepsilon} + k_5\ddot{\varepsilon} + \ldots$$

или на основе операторной записи

$$U(t) = k_1\varepsilon + \frac{k_2}{p}\varepsilon + \frac{k_3}{p^2}\varepsilon + \ldots + k_4 p\varepsilon + k_5 p^2\varepsilon + \ldots$$

Положим, что регулируемый объект представляет собой звено статического типа. Это означает, что в установившемся состоянии между регулируемой величиной и управляющим воздействием существует пропорциональная зависимость, вытекающая из уравнения

$$y(t) = W_0 U(t) + W_V V(t),$$

где $y(t)$ – регулируемая величина, $W_0 W_V$ – соответственно, передаточная функция объекта регулирования и передаточная функция объекта регулирования по возмущающему воздействию.

Полагая $V(t) = 0$, в установившемся режиме

$$y_{уст} = k_0 U_{уст},$$

где $k_0 = W_0(0)$ – коэффициент передачи объекта $W_0(0) = W_0(p)\big|_{p=0}$.

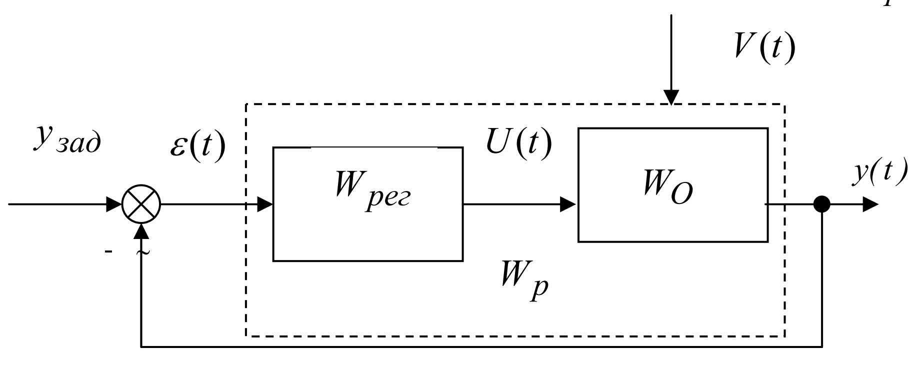


Рис. 63. Структурная схема системы с отрицательной обратной связью

где $W_{рег}$, W_O, W_p – соответственно, передаточные функции регулятора, объекта, разомкнутой системы; $y_{зад}$, $y(t)$ – задающее воздействие и регулируемая переменная; $\varepsilon(t)$ – ошибка (отклонение) регулирования; $U(t)$ – управляющее воздействие; $V(t)$ – возмущающее воздействие.

Пропорциональное регулирование. Передаточная функция регулятора имеет совокупность безинерционных звеньев. Управляющее воздействие $U(t)$ равно:

$$U(t) = W_{рег}\varepsilon(t) = k_1\varepsilon(t).$$

Регулятор может иметь более сложную передаточную функцию:

$$W_{рег} = k_1 \frac{A(p)}{B(p)},$$

где $A(p)$, $B(p)$ – некоторые полиномы оператора *p*. Поскольку регулятор – звено статического типа, то при $p \to 0$, передаточная функция $W_{рег}(p) \to k_1$ (по крайней мере, для медленных изменений ε).

Таким образом, передаточная функция разомкнутой системы равна:

$$W_p = W_{рег}W_0 = k_1 W_0.$$

В установившемся состоянии стремится к значению

$$\lim_{p\to 0} W_p = k_1 k_0 = k.$$

Данная величина называется общим коэффициентом усиления разомкнутой системы. Коэффициент усиления *k*, также как и передаточная функция разомкнутой системы является безразмерной величиной. Коэффициент усиления разомкнутой цепи физически представляет собой отношение установившегося значения регулируемой величины $y_{уст}$ к постоянному значению ошибки $\varepsilon = \varepsilon_0$ (если цепь регулирования рассматривать как некоторый усилитель):

$$k = \frac{y_{уст}}{\varepsilon_0}.$$

Для установившегося состояния из уравнения

$$\varepsilon = \frac{y_{зад}}{1+W_p} - \frac{W_V}{1+W_p}V$$

при постоянном задающем воздействии $y_{зад} = y_{зад0}$ записывается следующее соотношение:

$$\varepsilon_{уст} = \frac{y_{зад0}}{1+k} - \frac{\varepsilon_{V\,уст.}}{1+k} = \varepsilon_{уст1} + \varepsilon_{уст2},$$

где $\varepsilon_{уст}$ – установившаяся статическая ошибка; $\varepsilon_{V\text{уст}}$ – установившееся значение ошибки от возмущающих воздействий в объекте без регулирования.

Таким образом, пропорциональное регулирование позволяет уменьшить ошибки в $(1+k)$ раз. Регулирование является статическим, так как при любом значении коэффициента усиления цепи установившееся значение ошибки будет отлично от нуля. Если передаточная функция разомкнутой системы (объект и регулятор) записывается в виде соотношения полиномов

$$W_p = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m + a_{m-1}p + ... + a_0 p^m}{b_n + b_{n-1}p + ... + b_0 p^n}, \ m < n$$

то, выделяя коэффициент усиления *k*, функция W_p может быть представлена в виде

$$W_p = \frac{k\left(1 + B_{m-1}p + ... + B_0 p^m\right)}{1 + C_{n-1}p + ... + C_0 p^n},$$

где $k = \dfrac{b_m}{c_n}$ (определяется из W_p при равенстве $p = 0$)

Коэффициент *k* включает коэффициент k_1 регулятора.

<u>Интегральное регулирование</u>. При интегральном регулировании управляющее воздействие формируется пропорционально интегралу от ошибки:

$$U(t) = k_2 \int \varepsilon \, dt .$$

В операторной форме уравнение запишется:

$$U(t) = \frac{k_2}{p}\varepsilon = W_{рег}\varepsilon .$$

Интегральное регулирование осуществляется при помощи интегрирующих звеньев.

Передаточная функция цепи регулирования может иметь сложный вид:

$$W_{рег} = \frac{k_2}{p}\frac{A(p)}{B(p)} .$$

Однако, обязательным для данного регулятора является наличие интегрирующего звена. Во многих случаях для медленно изменяющихся значений ε регулятор системы можно аппроксимировать передаточной функцией

$$W_{рег} \cong \frac{k_2}{p} .$$

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p = W_{рег} W_0 = \frac{k_2}{p} W_0 .$$

В установившемся состоянии $(p = 0)$ $W_p \to \infty$.

В результате первая составляющая ошибки:

$$\varepsilon_{уст1} = \frac{y_{зад}}{1 + W_p} .$$

Вторая составляющая ошибки:

$$\varepsilon_{уст2} = -\frac{W_V}{1 + W_p} V ,$$

определяемая наличием возмущающих воздействий, может не обращаться в нуль. Это объясняется вероятностью $W_V V \to \infty$. Для практического применения формулы $\varepsilon_{уст2}$ необходимо определить предел этой ошибки при

$$V = V_0 = const ,\ \varepsilon_{уст2} = -\lim_{p \to 0} \frac{W_V V_0}{1 + W_p} .$$

Очевидно, предел $\varepsilon_{уст2}$ может быть равным 0 или отличным от нуля.

Таким образом, при интегральном регулировании система будет астатической по отношению к задающему воздействию. Одновременно система может быть статической или астатической по отношению к возмущающим воздействиям.

В том случае, когда в цепи регулирования имеются, кроме интегратора, другие звенья, передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p = \frac{k_V \left(1 + B_{m-1} p + ... + B_0 p^m\right)}{p\left(1 + C_{n-2} p + ... + C_0 p^{n-1}\right)},$$

где k_V – коэффициент усиления разомкнутой системы.

Физически данный коэффициент представляет собой отношение установившейся скорости изменения регулируемой величины к постоянной по величине ошибке ε_0 в разомкнутой системе:

$$k_V = \frac{\dot{y}(t)_{уст}}{\varepsilon_0} .$$

Цепь регулирования с объектом представляется в виде некоторого усилителя с входной величиной ε и выходной y. Коэффициент k_V называется добротностью по скорости.

При рассмотрении вопросов точности в системе регулирования коэффициент k_V равен отношению постоянной скорости изменения задающего сигнала к установившейся ошибке:

$$k_V = \frac{\dot{y}_{зад}(t)}{\varepsilon_{уст}} = \frac{V_{зад}}{\varepsilon_{уст}}.$$

Это определило название коэффициента.

Регулирование может осуществляться также по второму интегралу от ошибки:

$$U(t) = k_2 \iint \varepsilon \, dt \text{ или } \frac{d^2 U}{dt^2} = k_2 \varepsilon.$$

Передаточная функция регулятора в этом случае равна:

$$W_{рег} = \frac{k_2}{p^2}.$$

В этом случае передаточная функция разомкнутой системы будет иметь вид:

$$W_p = \frac{k_\varepsilon \left(1 + B_{m-1} p + \ldots + B_0 p^m\right)}{p^2 \left(1 + C_{n-3} p + \ldots + C_0 p^{n-2}\right)}, \; m < n,$$

где k_ε – коэффициент усиления разомкнутой системы, представляющий отношение установившегося ускорения изменения регулируемой величины $y(t)$ к постоянной ошибке ε_0 в разомкнутой системе:

$$k_\varepsilon = \frac{\ddot{y}(t)_{уст}}{\varepsilon_0}.$$

В этом случае установившееся значение (при $p = 0$) передаточной функции разомкнутой системы $W_p(p) \to \infty$. Система будет обладать астатизмом второго порядка. В такой системе ошибка будет равна нулю не только при $y_{зад} = const$, но и при $\dot{y}_{зад} = const$.

Аналогичным образом можно получить астатизм третьего и высших порядков, осуществляя регулирование по закону:

$$U(t) = W_{рег} \varepsilon = \frac{k_2}{p^r} \varepsilon,$$

где r – порядок астатизма.

Случай пропорционального регулирования можно рассматривать как частный случай астатизма $r = 0$.

Повышение порядка астатизма приводит к уменьшению установившейся ошибки, но одновременно снижает быстродействие и ухудшает устойчивость.

Рассмотрим на примере, каким образом введение интегрального регулирования снижает быстродействие.

Предположим, что ошибка в системе возрастает по линейному закону:

$$\varepsilon = bt .$$

В системе с пропорциональным регулятором управляющее воздействие равно:

$$U(t) = k_1 bt .$$

В системе с интегральным регулятором:

$$U(t) = k_2 \int \varepsilon \, dt = \frac{k_2 bt}{2} .$$

При $t = 0$ управляющее воздействие в том и в другом случае равно нулю.

Из уравнений $U(t)$ очевидным образом можно заключить, что темп нарастания $U(t)$ при интегральном регулировании на начальном этапе $t_{нач}$ значительно меньше, чем при пропорциональном регулировании (рис.64).

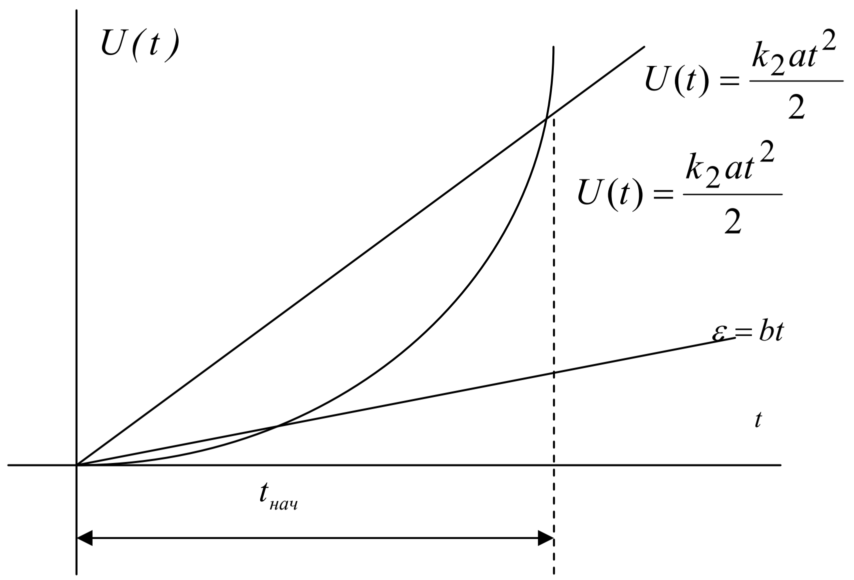


Рис. 64.– Характер управляющего воздействия с интегральным регулятором

В случае, когда повышается порядок астатизма регулятора, быстродействие будет еще более снижаться.

<u>Изодромное регулирование</u>. Данный регулятор организован таким образом, что управляющее воздействие формируется по пропорциональному и интегральному законам:

$$U(t) = k_1\varepsilon + \frac{k_2}{p}\varepsilon = \frac{k_1 p + k_2}{p}\varepsilon .$$

В этом случае при $p = 0$ и $W_p \to \infty$ регулирование оказывается астатическим относительно задающего воздействия.

Изодромное регулирование может осуществляться путем использования двух параллельных ветвей в цепи регулирования или установкой изодромных звеньев. Данное регулирование сочетает высокую точность интегрального регулирования с большим быстродействием пропорционального регулирования. Т.е. в первый момент времени при появлении ошибки значение управляющего воздействия определяется первым слагаемым, а с течением времени преобладающее значение будет иметь второе слагаемое.

<u>Регулирование по производным</u>. При регулировании по первой производной от ошибки осуществляется зависимость:

$$U(t) = k_3\dot{\varepsilon} = k_3 p\varepsilon .$$

Передаточная функция такого регулятора

$$W_{рег} = k_3 p .$$

В таком виде регулирование используется достаточно редко, т.к. в установившемся состоянии: $\dot{\varepsilon}_{уст} = 0$ и $U(t) = 0$, т.е. регулирование прекращается.

При регулировании по закону

$$U(t) = k_1\varepsilon + k_3 p\varepsilon$$

в системе образуется управляющее воздействие даже в том случае, если $\varepsilon = 0$, но $\dot{\varepsilon} \neq 0$. Так например, при $\varepsilon = bt$

$$U(t) = k_1 bt + k_3 b .$$

Следовательно, при $t = 0$ $U(t) = k_3 b$ и повышается быстродействие системы. Результатом введения производной от ошибки является повышение быстродействия и снижение ошибок в динамике.

В закон регулирования $U(t)$ могут вводиться производные более высоких порядков, однако техническая реализация таких регуляторов значительно затруднена.

В общем случае используется изодромное регулирование с введением первой производной:

$$U(t) = \left(k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3 p \right) \varepsilon .$$

В этом случае передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде:

$$W_p = \frac{k_r \left(1 + B_{m-1} p + ... + B_0 p^m\right)}{p^r \left(1 + C_{n-r-1} p + ... + C_0 p^{n-r}\right)}, \; m < n ,$$

где k_r – коэффициент усиления разомкнутой системы; r – степень астатизма.

Для анализа и синтеза систем регулирования удобно представлять передаточную функцию W_p в виде произведения сомножителей $(1 + Tp)$ (в случае вещественных корней):

$$W_p = \frac{k_r \prod\limits_{j=1}^{m} \left(1 + T_j p\right)}{p^r \prod\limits_{i=1}^{n-r} \left(1 + T_i p\right)}, \; m < n ,$$

где Π – символ произведения.

Если знаменатель или числитель содержит комплексные корни, то появятся сомножители вида:

$$1 + ap + bp^2 = 1 + 2\xi Tp + T^2 p^2 .$$

Данное уравнение соответствует звеньям колебательного типа. Представление W_p в виде произведения сомножителей передаточных функций стандартных звеньев удобно при использовании логарифмических частотных характеристик. В этом случае значения T_j^{-1} и T_i^{-1} соответствуют частотам среза асимптотической ЛАЧХ, которая может быть построена без использования ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Корытин А.М., Денисенко Ю.Н., Синтиченко В.М. Расчет на ЭВМ промышленных электроприводов. – Киев: Техника, 1983. – 183 с.
2 Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем управления с помощью функции Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
3 Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М. Высша школа, 1998. – 320 с.
4 Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. – М.: Энергия, 1980. – 312 с.
5 Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1976. – 768 с.
6 Башарин А.В., Постников Ю.В. Примеры расчета автоматизированного электропривода на ЭВМ. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 512 с.
7 Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. Учебн. пособие для электротехн. специальностей вузов. М.: Высшая школа, 1973. – 528 с.
8 Демидович Б.П. и др. Численные методы анализа. – М.: Физматгиз, 1963. –
9 Беллман Р. Введение в теорию матриц – М.: Наука, 1969г. –
10 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с американского / Под ред. И.Г. Арамановича. – М.:Наука, 1984. –

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ 8
1.1. Управляемость и наблюдаемость линейных систем управления 8
2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ 12
2.1. Устойчивость систем на основе функций Ляпунова 12
2.2. Свойства функции Ляпунова квадратичной формы 19
2.3. Условие Ляпунова об асимптотической устойчивости 22
2.4. Условия устойчивости линейных систем на основе анализа корней характеристического уравнения 24
3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ 28
3.1. Критерий Гурвица 28
4. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ 31
4.1. Критерий устойчивости Михайлова 31
4.2. Критерий устойчивости Михайлова-Найквиста 33
4.3. Построение областей устойчивости. D-разбиение 34
5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ 37
5.1. Основные показатели качества процесса регулирования 37
6. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ЗАДАННЫМ ПЕРЕДАТОЧНЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ 39
6.1. Динамическая точность систем регулирования 39
6.2. Коэффициенты ошибок 39
6.3. Система регулирования с астатизмом первого порядка 40
6.4. Система регулирования с астатизмом второго порядка 41
7. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ 44
7.1. Общие сведения 44
7.2. Коэффициенты ошибок 51
8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ 53
8.1. Определение граничного коэффициента усиления 53
8.2. D-разбиение плоскости одного параметра 55
8.3. D-разбиение плоскости двух параметров 57
8.4. Правила штриховки особых прямых линий 58
8.5. Структурная неустойчивость систем регулирования 63
9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ И БЫСТРОДЕЙСТВИЯ 65
9.1. Общие сведения 65
9.2. Степень устойчивости 68
9.3. Колебательность системы 71
9.4. Интегральные оценки 74
9.5. Повышение точности систем регулирования 77
9.6. Применение изодромных устройств 79
9.7. Регулирование по производным от ошибки 81
9.8. Комбинированное управление 83
9.9. Неединичные обратные связи 87

10. УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ 90
10.1. Общие сведения 90
10.2. Методы повышения запаса устойчивости 92
10.3. Демпфирование с подавлением высоких частот 93
10.4. Демпфирование с поднятием высоких частот 94
10.5. Демпфирование с подавлением средних частот 96
10.6. Демпфирование с введением отрицательных фазовых сдвигов 97
11. МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ 97
11.1. Общие сведения 97
11.2. Корневой метод 98
11.3. Метод стандартных переходных характеристик 102
11.4. Законы регулирования 107
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 116

Виктор Григорьевич Букреев
Иван Юрьевич Краснов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор технических наук, профессор В.Г. Букреев

Отпечатано с оригинала - макета авторов

Подписано к печати 09.03.2005
Формат 60х84/16. Бумага ксероксная.
Печать RISO. Усл. печ. л. 6,63. Уч.-изд. л. 6,0.
Тираж экз. Заказ . Цена договорная.
Издательство ТПУ. 634050, Томск, пр. Ленина, 30.