

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального
образования
«Томский политехнический университет»

В.Г. Букреев, И.Ю. Краснов, А.А. Старых

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Учебное пособие

Издательство ТПУ

Томск 2006

УДК 621.3.011.1: 658.011.56
Б 90

Букреев В.Г., Краснов И.Ю., Старых А.А.

Математическое моделирование элементов
электротехники: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ,
2006. – 179 с.

В учебном пособии приведены необходимые сведения для математического описания элементов электротехники на основе передаточных функций и метода пространства состояний. Рассматриваются вопросы применения матричной алгебры для моделирования многомерных непрерывных процессов, протекающих в электротехнических системах. Приведены методы линеаризации дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные процессы в электромеханических объектах. Изложение теоретического материала сопровождается иллюстративными примерами.

Учебное пособие подготовлено на кафедре электропривода и электрооборудования ТПУ и предназначено для магистрантов направления 551311 «Электроприводы и системы управления электроприводов» и студентов специальности 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов».

УДК 621.3.011.1: 658.011.56

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским
советом Томского политехнического университета

Рецензенты

Зайцев А.П. - кандидат технических наук, профессор
Томского университета систем управления и
радиоэлектроники

Сипайлова Н.Ю. - кандидат технических наук, доцент
кафедры электрических машин и аппаратов Томского
политехнического университета

Темплан 2006

© Томский политехнический университет, 2006

© Оформление. Издательство ТПУ, 2006

ВВЕДЕНИЕ

Технические специалисты, связанные с применением математики, ясно представляют, что математическое моделирование – это в некоторой степени искусство применения математики и системного анализа. Очевидно, что в полной мере искусством построения моделей можно овладеть только в результате собственной практики.

Большинство специалистов считает, что приложение математики к решению технических задач сводится к набору формул, подстановке в них некоторых чисел, в результате чего получается ответ. При этом упускается из виду один важный момент, без которого «приложение» математики превращается в демонстрацию известных математических приемов. Упущенный момент заключается в описании так называемого «реального мира» языком математики, что позволяет получить более точное представление его наиболее существенных свойств и предсказать будущие события. Это обстоятельство и отражает термин «математическое моделирование».

На практике исходным пунктом процесса моделирования является некоторая эмпирическая ситуация, выдвигающая перед исследователем задачу, на которую следует найти ответ. Ввиду сложности взаимодействия с окружающей средой точное математическое описание ситуации является затруднительным. Поэтому процесс математического анализа задачи чаще всего бывает продолжительным и требует владения многими навыками, в том числе, не имеющими отношения к математике. Например, обсуждения с коллегами - не математиками, работающими в данной области знаний, и изучение всевозможной литературы, имеющей отношение к делу. Обычно параллельно с постановкой задачи идет процесс выявления основных или существенных особенностей явления. Для физических явлений идеализация играет решающую роль, поскольку в реальном явлении участвуют множество процессов. Причем некоторые черты явления представляются важными, другие – несущественными. Следующий этап после выявления существенных факторов состоит в переводе этих факторов на язык математических понятий и величин, а также определения соотношений между величинами. Как правило, данный этап является самым трудным этапом процесса моделирования. После построения модели явления ее следует проверить на адекватность реальным процессам. Уравнения и другие математические соотношения сопоставляются с исходной ситуацией. Например, сравниваются размерности величин, входящих в уравнение. Далее, математическая основа модели должна быть непротиворечивой и подчиняться законам

математической логики. Кроме того, справедливость модели зависит от ее способности достаточно точно описывать исходную ситуацию. Модель можно заставить отражать действительность, однако она не есть сама действительность.

Таким образом, решение одной и той же задачи зависит от критериев, выдвинутых автором модели, в такой же степени, как и от установления физических, экономических и любых других характеристик исходной ситуации. Можно потратить много времени на улучшение решения для модели, которое неоправданно самой постановкой задачи, например, определение степени точности опытных данных. Так, если имеющиеся исходные данные известны с точностью 5%, то нет смысла предлагать решения, обеспечивающие точность 1%. Во многих случаях приближенный ответ, который получается быстрее, может оказаться более эффективным, чем точный ответ, на получение которого уходит больше времени. Это часто свидетельствует в пользу непосредственного численного приближенного решения, позволяющего избежать затрат времени на поиски точного аналитического решения. Напомним, что главное назначение модели – это необходимость предсказывать новые результаты или новые свойства явления. Эти предсказания могут быть связаны с распространением уже существующих результатов или иметь более принципиальный характер в будущем. С другой стороны, предсказания могут относиться к событиям, непосредственное экспериментальное исследование которых неосуществимо (например, прогноз процессов в сложных технических системах с неконтролируемыми переменными). Математическая модель может также представлять собой упрощение реальной ситуации.

В результате исходная, чаще всего сложная, задача сводится к идеализированной задаче, решение которой значительно упрощается. Именно при таком подходе в классической прикладной математике возникли блоки без трения, невязкие жидкости и многое другое. Это одна сторона упрощения.

Другая сторона связана со сравнением порядка различных величин, фигурирующих в модели. Например, изменение некоторой переменной x описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$ax'' + bx' + cx = 0.$$

В случае, когда второе слагаемое bx' много больше по величине, чем значения cx , исходное уравнение принимает вид:

$$ax'' + bx' \approx 0.$$

Следовательно, можно сократить время вычислений, не учитывая слагаемое sx . Решение исходного уравнения получится быстрее, и при этом оно будет достаточно точно отражать ситуацию. Таким образом, первым шагом является построение простых моделей нескольких наиболее характерных особенностей явления. Затем эти модели обобщаются, чтобы охватить другие факторы, пока не будет найдено «приемлемое» решение.

Процесс построения моделей можно разбить на следующие этапы:

1) логико-лингвистическое описание объекта или явления. Помимо сведений общего характера о природе объекта и целях его исследования данный этап должен содержать некоторые предположения (линейность характеристик и т.д.);

2) идеализация процессов в объекте. Отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для его поведения. Например, при составлении уравнения передачи энергии через трансформатор во многих случаях не учитываются потоки рассеяния. Идеализирующие предположения по возможности записываются в математической форме, с тем, чтобы их справедливость поддавалась количественному контролю;

3) выбор или формулировка закона управления (регулирования), которому подчиняется объект, и запись законов в математической форме. Следует иметь в виду, что даже для простых объектов выбор соответствующего закона является не тривиальной задачей;

4) задание сведений о начальном состоянии объекта или иных характеристик, без знания которых невозможно определить поведение объекта. На этом же этапе формулируется цель исследования модели;

5) изучение построенной модели всеми методами, которые доступны исследователю. Здесь возможна взаимная проверка различных подходов. Необходимо учитывать, что большинство моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, и поэтому необходимо использовать вычислительные методы. Это особенно важно при изучении нелинейных объектов, так как их качественное поведение, как правило, заранее неизвестно;

6) анализ достижения цели исследования модели, определение её адекватности объекту и сформулированным предположениям. Адекватность устанавливается сравнением с экспериментальными исследованиями, сопоставлением с другими подходами. Неадекватная модель может дать результат, существенно отличающийся от истинного состояния объекта. В этом случае данная модель должна быть отброшена или соответствующим образом модифицирована.

В данном учебном пособии последовательно приводятся необходимые сведения о матричных преобразованиях, методах решения линейных алгебраических и дифференциальных уравнений, описание элементов электромеханических систем передаточными функциями и в пространстве состояний.

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^n C_{ik} y_j}{|A|}, \text{ где } k = 1, 2, \dots, n$$

или

$$x = \frac{AdjA}{|A|} y = A^{-1} y.$$

Таким образом числитель выражения (1.4) представляет собой определитель матрицы A , k -ый столбец которого заменен столбцом, стоящим в правой части уравнения (1.1). Правило Крамера для построения решения при помощи определителей формулируется следующим образом: система n линейных уравнений с n неизвестными имеет решение, если матрица A неособенная. Значение искомой переменной равно частному от деления двух определителей: знаменатель равен определителю матрицы коэффициентов системы уравнений, а числитель – определителю матрицы коэффициентов, k -ый столбец в которой заменен столбцом, содержащим члены из правой части системы уравнений.

Решение однородной системы уравнений

При равенстве нулю правой части уравнений (1.1) система уравнений называется однородной. Следовательно, если определитель $|A|$ отличен от нуля, то система имеет тривиальное решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Если определитель $|A|$ равен нулю, то две или более строк или столбцов A линейно зависимы. Тогда можно получить q -параметрическое семейство решений, где q – дефект матрицы A . Этапы решения такой системы:

1) Исключаются $q = n - r$ уравнений так, чтобы определитель матрицы коэффициентов относительно r неизвестных отличался от нуля.

2) Образуются r уравнений с r неизвестными в левой части уравнения и оставшимися $q = n - r$ неизвестными в правой. На основе правила Крамера r неизвестных выражаются через $q = n - r$ неизвестных.

В результате можно получить q независимых решений.

$$2) y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1}y = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

2) Задано:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы коэффициентов равен 4.

Вычисляем ненулевые дополнения C_{4j} :

$$C_{41} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{aligned} C_{42} &= -10 \\ C_{43} &= -4 \\ C_{44} &= 14 \end{aligned}$$

Разделим C_{4j} на общий множитель 2 и получим решение:

$$\begin{aligned} x_1 &= -k, \\ x_2 &= -5k, \\ x_3 &= -2k, \\ x_4 &= 7k, \end{aligned}$$

где k – произвольный коэффициент.

3) Задано:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 10. \end{aligned}$$

Матрица A коэффициентов и расширенная матрица B имеют ранг равный 3.

При устранении одного из столбцов слева запишем такую квадратную матрицу, которая будет иметь отличный от нуля определитель. Переносим в правую часть третий столбец.

Система уравнений запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 4x_4 &= 6 + 3x_3, \\x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 4 - x_3, \\2x_1 + 5x_2 - 5x_4 &= 10 + 2x_3.\end{aligned}$$

Определитель новой матрицы A_1 коэффициентов равен 1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad |A_1| = 1.$$

Запишем решения:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} (6 + 3x_3) & 2 & -4 \\ (4 - x_3) & 3 & -2 \\ (10 + 2x_3) & 5 & -5 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 10 + 11x_3,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & (6 + 3x_3) & -4 \\ 1 & (4 - x_3) & -2 \\ 2 & (10 + 2x_3) & -5 \end{vmatrix}}{|A_2|} = -2 - 4x_3, \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & (6 + 3x_3) \\ 1 & 3 & (4 - x_3) \\ 2 & 5 & (10 + 2x_3) \end{vmatrix}}{|A_1|} = 0.$$

Так как x_3 является произвольной величиной, запишем:

$$\begin{aligned}x_3 &= C, \\x_1 &= 10 + 11C, \\x_2 &= -2 - 4C, \\x_4 &= 0.\end{aligned}$$

2. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка

$$\dot{y} = f(x, y). \quad (2.1)$$

Основная задача – это задача Коши: определить решение уравнения (2.1).

$$y = y(x), \quad (2.2)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.3)$$

То есть требуется определить интегральную кривую (2.1) проходящую через заданную точку с координатами (x_0, y_0) .

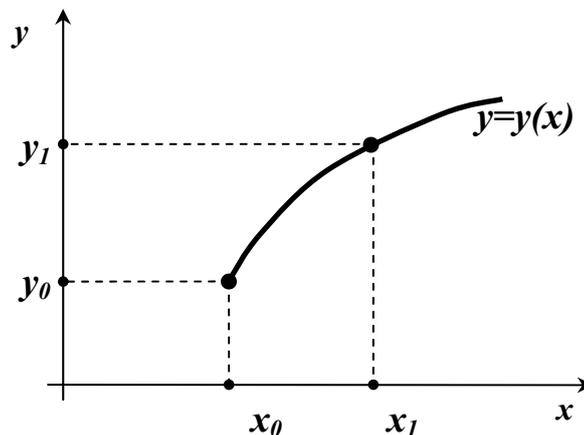


Рис. 2.1. График функции $y = y(x)$, удовлетворяющей начальным условиям

При описании электромеханических объектов часто встречаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанные в форме:

необходимы дополнительные условия. В простейшем случае задаются начальные условия

$$Y(x_0) = Y_0,$$

что приводит к задаче Коши.

Нахождение решения, отвечающего заданным условиям, вообще невыполнимо с использованием конечного числа математических операций. Поэтому применяются различные методы приближенного решения дифференциальных уравнений, которые разделяются на три группы:

1) Аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения.

2) Графические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде графика.

3) Численные методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде таблицы.

Данный подход широко используется при определении значений искомой функции в нескольких точках.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n -го порядка.

$$\dot{y}^{(n)} = f(x, \dot{y}^{(1)}, \dot{y}^{(2)}, \dots, \dot{y}^{(n-1)}), \quad (2.5)$$

при начальных условиях:

$$y(x_0) = y_0, \dot{y}^{(1)}(x_0) = \dot{y}_0^{(1)}, \dots, \dot{y}^{(n-1)}(x_0) = \dot{y}_0^{(n-1)}. \quad (2.6)$$

Предположим, что правая часть уравнения (2.6) является аналитической функцией в начальной точке:

$$x_0, y_0, \dot{y}_0^{(1)}, \dots, \dot{y}_0^{(n-1)}, \quad (2.7)$$

т.е. в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд вида:

$$f(x, \dot{y}^{(1)}, \dot{y}^{(2)}, \dots, \dot{y}^{(n-1)}) = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} C_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} (x - x_0)^{\alpha_0} (y - y_0)^{\alpha_1} \dots (\dot{y}^{(n-1)} - \dot{y}_0^{(n-1)})^{\alpha_n}, \quad (2.8)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ – целые неотрицательные числа и $C_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}$ – некоторые постоянные коэффициенты.

Известно, что интеграл $y = y(x)$, отвечающий начальным условиям (2.8), является аналитическим в точке x_0 и, пользуясь рядом Тейлора, можно записать

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\dot{y}^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!} \quad (2.9)$$

при $|x - x_0| < r$, где r – радиус сходимости.

Первые $(n + 1)$ коэффициентов ряда (2.9) определяются непосредственно из начальных условий (2.6) и дифференциального уравнения (2.5).

Для нахождения следующего $(n + 2)$ -го коэффициента $\left(\frac{y^{(n+1)}(x_0)}{n+1}\right)!$ продифференцируем (2.9) по правилу дифференцирования сложной функции. В результате получим:

$$\dot{y}^{(n+1)}(x_0) = [\dot{f}_x]_0 + \sum_{k=0}^{n-1} [\dot{f}_y^{(k)}]_0 \cdot \dot{y}^{(k+1)}(x_0),$$

где символ «0» означает, что значения производных берутся в точке $(x_0, y_0, \dot{y}_0^{(1)}, \dots, \dot{y}_0^{(n-1)})$. Повторяя этот прием, шаг за шагом определяются и следующие производные

$$\dot{y}^{(n+2)}(x_0), \dot{y}^{(n+3)}(x_0), \dots$$

2.2. Метод последовательных приближений

Рассмотрим уравнение первого порядка (2.1) с начальными условиями (2.3). Будем определять решения при условии $x > x_0$ (для условия $x < x_0$ алгоритм решения аналогичен). Интегрируя правую и левую части уравнения (2.3) в пределах от x_0 до x , получим

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx,$$

или, в силу начального условия, запишем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (2.10)$$

Так как искомая функция находится под знаком интеграла, то данное уравнение является интегральным. Для нахождения решения используем метод последовательных приближений. Заменяя в равенстве (2.10) неизвестную функцию y значением y_0 , получим первое приближение

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx.$$

Далее, подставив в равенство (2.1) вместо неизвестной функции y значение y_1 получим второе приближение. Далее все приближения строятся по формуле

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \text{ где } n = 1, 2, \dots$$

Геометрически последовательные приближения представляют собой кривые $y_n = y_0(x)$, $n = 1, 2, \dots$, проходящие через общую точку с координатами (x_0, y_0) .

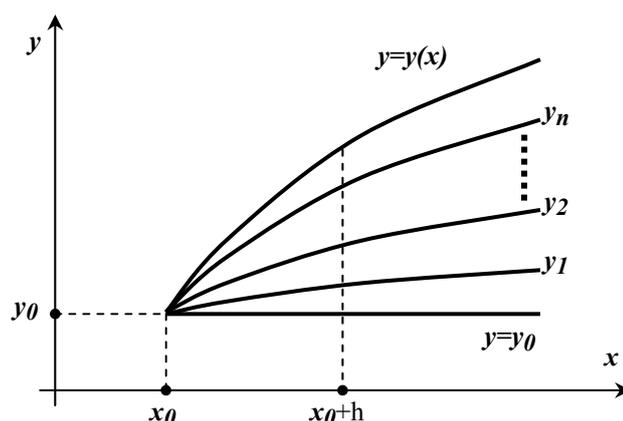


Рис. 2.2. Функции последовательного приближения

Для решения системы дифференциальных уравнений последовательные приближения определяются по аналогичной формуле. При этом интеграл вектор-функции записывается через интегралы от соответствующих функций – компонент вектора.

Замечание. В качестве начального приближения y_0 можно выбирать любую функцию достаточно близкую к точному решению y . При этом аналитическая форма записи правой части дифференциального уравнения необязательна и его применяют, когда разложение решения в степенной ряд невозможно.

Практический пример.

Метод последовательных приближений.

Определить приближённое решение дифференциального уравнения:

$$\dot{y} = x - y,$$

удовлетворяющего начальному условию:

$$y(0) = 1.$$

Решение. В качестве начального приближения принимаем

$$y_0(x) = 1.$$

Так как:

$$y = 1 + \int_0^x (x - y) dx,$$

ТО МОЖНО ЗАПИСАТЬ

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x - 1) dx = 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

Аналогичным образом:

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(x - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right) dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}; \quad y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24};$$

$$y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}.$$

2.3. Метод численного интегрирования

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида (2.1) с начальным условием (2.3). Запишем равноотстоящие значения аргумента x с некоторым шагом h

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (2.11)$$

и вычислим дискретные значения

$$y_i = y(x_i), \quad \dot{y}_i = f(y_i, x_i). \quad (2.12)$$

На основании уравнений (2.11) и (2.12) запишем

$$y_i - y_0 = \int_{x_0}^{x_i} \dot{y} dx = h \int_0^i \dot{y} dq, \quad (2.13)$$

где $q = (x - x_0)/h$.

Заменяя интеграл (2.13), на конечную сумму приближенно получим

$$y_i - y_0 = h \sum_{j=0}^m A_j^{(i)} \dot{y}_j. \quad (2.14)$$

Коэффициенты $A_j^{(i)}$ определяются из условия, чтобы формула (2.14) была точной для всех целых полиномов степени не выше $(m+1)$. Для этого достаточно, чтобы эта формула была справедливой для функций

$$y = x, x^2, \dots, x^m, x^{m+1},$$

при выборе точек $x_0 = 0, h, \dots, (m-1)h, mh$.

Подставляя данные значения в формулу (2.14), получим для определения $(m+1)$ неизвестных $A_j^{(i)}$, $j = 0, 1, \dots, m$, при каждом фиксированном i , $i = 1, 2, \dots$, систему $(m+1)$ уравнений

$$i^k = k \sum_{j=1}^m A_j^{(i)} j^{(k-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, m+1. \quad (2.15)$$

При этом необходимо выполнение равенства $\sum_{j=1}^m A_j^{(i)} = i$.

2.4. Метод Эйлера

Данный метод является простейшим методом численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Для дифференциального уравнения вида (2.1) с начальным условием (2.3) и при достаточно малом шаге h определяется система равноотстоящих точек (2.11). Искомая интегральная кривая $y = y(x)$, заменяется на ломанную кривую с прямолинейными участками между $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$, которые имеют наклон

$$f(x_i, y_i) = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h}. \quad (2.16)$$

Из формулы (2.16) значения y_i могут быть определены по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

где $\Delta y_i = hf(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots$

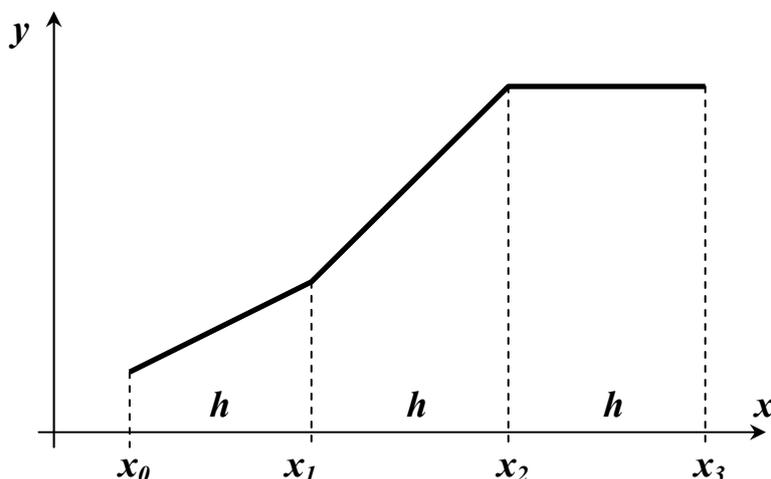


Рис. 2.3. Графическое представление метода Эйлера

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений.

Данный метод имеет определенные недостатки:

- малая точность;
- систематическое накопление ошибок.

Это объясняется тем, что интеграл дифференциального уравнения на участке (x_i, x_{i+1}) представляется двумя членами ряда Тейлора

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Практический пример.

Используя метод Эйлера, составить на отрезке $[0;1]$ таблицу значений интеграла дифференциального уравнения

$$\dot{y} = \frac{xy}{2},$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$, выбрав шаг $h = 0,1$. Результаты сведем в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Результаты расчетов по методу Эйлера

$\Delta y = 0,1 f(x, y)$	i	x	y	$f(x, y) = \frac{xy}{2}$	Точное значение $y = \exp\left(\frac{x^2}{4}\right)$
0	0	0	1	0	1
0,005	1	0,1	1	0,05	1,0025
.	2	0,2	1,005	0,1005	1,01
.	3	0,3	1,0151	0,1523	1,0227
.	4	0,4	1,0303	0,2067	1,0408
.	5	0,5	1,0509	0,2627	1,0645
.	6	0,6	1,0772	0,3232	1,0942
.	7	0,7	1,1095	0,3883	1,1303
.	8	0,8	1,1483	0,4593	1,1735
.	9	0,9	1,1942	0,5374	1,2244
.	10	1,0	1,2479		1,2840

Абсолютная погрешность вычислений составляет 0,0361.

Относительная погрешность $\varepsilon = 3\%$.

2.5. Модификации метода Эйлера

Более точным методом, по сравнению с рассмотренным подходом является *метод ломаных прямых*, при котором первоначально вычисляют промежуточные значения

$$\tilde{x}_i = x_i + h/2$$

$$\tilde{y}_i = y_i + f(x_i, y_i)h/2.$$

Затем определяется значение направления интегральных кривых в средней точке $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$

$$\tilde{f}_i = f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i),$$

и вычисляется дискретное значение функции

$$y_{i+1} = y_i + h\tilde{f}_i.$$

На рисунке приведена графическая иллюстрация метода.

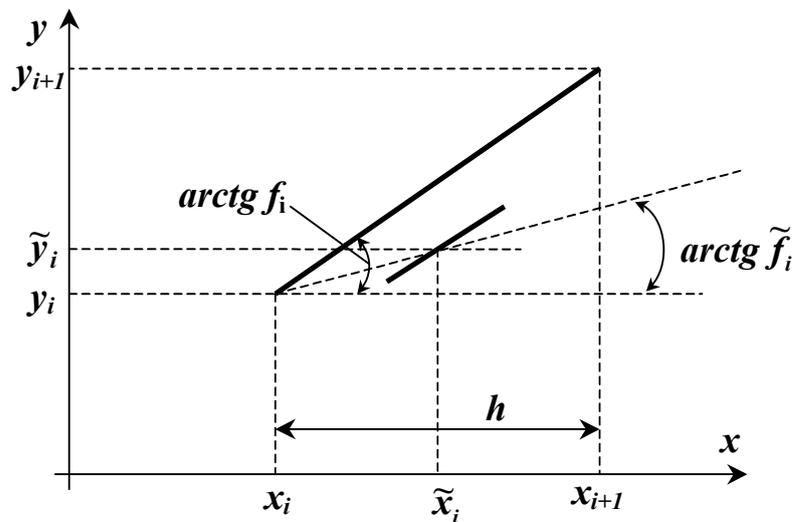


Рис. 2.4. Графическая иллюстрация метода ломаных прямых

Другой модификацией метода Эйлера является усовершенствованный метод Эйлера-Коши, на первом этапе которого определяется «грубое приближение» решения

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + hf_i, \quad f_i = f(x_i, y_i),$$

исходя из которого находится направление интегральных кривых

$$\hat{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}).$$

Затем приближенно определяем

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \frac{h}{2}.$$

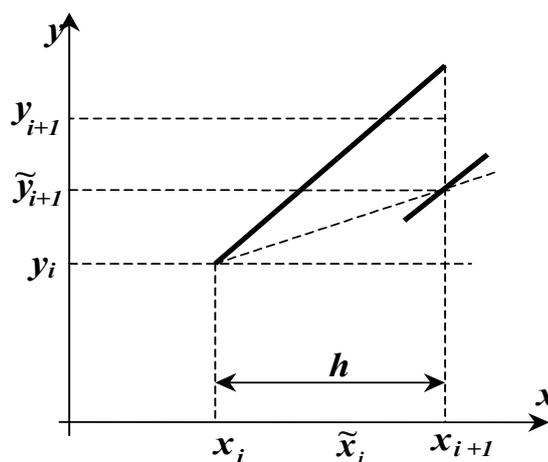


Рис. 2.5. Графическая иллюстрация усовершенствованного метода

Метод Эйлера и его модификации позволяют получить достаточно простые конечно-разностные алгоритмы для приближенного решения дифференциальных уравнений. Схема вычислений удобна для реализации на ЭВМ.

Практические примеры модификации метода Эйлера.

Первым и вторым методами Эйлера проинтегрировать уравнение

$$\dot{y} = y - \frac{2x}{y}; \quad y(0) = 1 \quad (2.17)$$

на отрезке $[0;1]$.

Решение: рассмотрим метод ломаных прямых.

Уравнение (2.17) запишем в виде функции $f(x, y) = y - 2xy^{-1}$. Вычисления будем производить с шагом $h = 0,2$. Приближённые значения искомого решения $y = y(x)$, определённые с помощью усовершенствованного метода отрезков прямых, приведём в таблице 2.2. Выражения, используемые для расчетов, имеют вид

$$\tilde{x}_i = x_i + 0.5h; \quad \tilde{y}_i = y_i + 0.5hf(x_i, y_i); \quad \Delta y_i = hf(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$$

Таблица 2.2

Сводные данные расчетов

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	\tilde{x}_i	\tilde{y}_i	$\Delta y = h \cdot f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ метод ломаных прямых
0	0	1	0,1	0,1	1,1	0,1836
1	0,2	1,1836	0,0846	0,3	1,2682	0,1590
2	0,4	1,3426	0,0747	0,5	1,4173	0,1424
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	0,1302
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	0,1210
5	1,0	1,7362				

Усовершенствованный метод Эйлера-Коши

$$f_i = f(x_i, y_i); \quad \hat{f}_{i+1} = f\left(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}\right); \quad y_{i+1} = y_i + hf_i. \quad (2.18)$$

Расчетные данные приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Сводные данные расчетов

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f_i$	x_{i+1}	\hat{y}_{i+1}	$\frac{h}{2} \hat{f}_{i+1}$	$\Delta y_i = \frac{h}{2} (f_i + \hat{f}_{i+1})$
0	0	1	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867
1	0,2	1,1867	0,085	0,4	1,3566	0,0767	0,1617
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454
3	0,6	1,4938	0,069	0,8	1,618	0,0651	0,1341
4	0,8	1,6279	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263
5	1,0	1,7542					

Точное решение уравнения (2.17) равно $y = \sqrt{2x+1}$; и значение этой функции в точке $y(1) = \sqrt{3} = 1.73205$.

2.6. Метод Рунге-Кутты

Пусть дано дифференциальное уравнение вида (2.1) и начальное условие (2.3). Выберем шаг h и для краткости дальнейшего изложения введем обозначения

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Для вычисления дискретных значений функции будем использовать коэффициенты

$$\begin{aligned} k_1^i &= hf(x_i, y_i), & k_3^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}\right), \\ k_2^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right), & k_4^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_3^i}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Последовательные значения искомой функции определяются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

где

$$\Delta y_i = \frac{(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i)}{6}.$$

Для вычисления по данной формуле удобно пользоваться алгоритмом, приведенным в таблице 2.4.

Таблица 2.4

Сводные данные расчетов

I	x_i	y_i	$k_i^i = hf(x_i, y_i)$	Δy_i
0	x_0	y_0	k_0^1	Δy_0
	$x_0 + h/2$	$y_0 + k_1^0 / 2$	k_0^2	
	$x_0 + h/2$	$y_0 + k_2^0 / 2$	k_0^3	
	$x_0 + h/2$	$y_0 + k_3^0$	k_0^4	
1	x_1	y_1

Для определения правильности выбора шага h на практике используют следующий прием. Исходя из текущего правильного значения $y(x_i)$, вычисляют величину $y(x_i + 2h)$ двумя способами – один раз с шагом h , а другой раз с двойным шагом $H = 2h$. Если расхождение полученных значений не превышает допустимой погрешности, то шаг h для данного этапа выбран правильно и, полученное значение функции можно принять равным $y(x_i + 2h)$. В противном случае шаг уменьшают в два раза. Метод Рунге-Кутты обладает значительной точностью и его преимущество заключается в возможности использовании “переменного шага”.

Практический пример метода Рунге-Кутты.

Вычислить интеграл уравнения $\dot{y} = x + y$; $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 0.5]$ с шагом $h = 0.1$.

Вычисление первого значения функции y_1 .

Используя соотношения (2.19) определяем значения коэффициентов

$$k_1^0 = (0 + 1) \cdot 0.1 + 0.1$$

$$k_2^0 = 0.05 + (1 + 0.05) \cdot 0.1 = 0.11$$

$$k_3^0 = 0.05 + (1 + 0.055) \cdot 0.1 = 0.1105$$

$$k_4^0 = 0.1 + (1 + 0.1105) \cdot 0.1 = 0.12105.$$

Вычисляем приращение функции в начальной точке

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= \frac{1}{6}(k_1^0 + 2k_2^0 + 2k_3^0 + k_4^0) = \\ &= \frac{1}{6}(0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105 + 0,12105) = 0,1103.\end{aligned}$$

В результате запишем $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,1103$.

Данные для вычисления дискретных значений приведем в таблице 2.5.

Таблица 2.5

Сводные данные расчетов

i	x	y	$k = 0,1(x + y)$	Δy
0	0	1	0,1	$\frac{1}{6} \cdot 0,6620 = 0,1103$
	0,05	1,05	0,11	
	0,05	1,055	0,1105	
	0,1	1,1105	0,121	
1	0,1	1,1103	0,121	$\frac{1}{6} \cdot 0,7947 = 0,1324$
	0,15	1,1708	0,1321	
	0,15	1,1763	0,1326	
	0,2	1,2429	0,1443	
2	0,2	1,2427	0,1443	$\frac{1}{6} \cdot 0,9415 = 0,1569$
	0,25	1,3149	0,1565	
	0,25	1,3209	0,1571	
	0,3	1,3998	0,17	
3	0,3	1,3996	0,17	$\frac{1}{6} \cdot 1,1034 = 0,1840$
	0,35	1,4846	0,1835	
	0,35	1,4904	0,184	
	0,4	1,5836	0,1984	
4	0,4	1,5836	0,1984	$\frac{1}{6} \cdot 1,2828 = 0,2138$
	0,45	1,6828	0,2133	
	0,45	1,6902	0,214	
	0,5	1,7976	0,2298	

2.7. Метод Адамса

Пусть имеем дифференциальное уравнение первого порядка (2.1) с начальным условием (2.3). Разобьем интервал x на ряд равноотстоящих значений x_i с шагом h и $y_i = y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Очевидно, можем записать:

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx.$$

Используя вторую интерполяционную формулу Ньютона с точность до разностей четвертого порядка, запишем:

$$\dot{y} = \dot{y}_i + q\Delta\dot{y}_{i-1} + \frac{(q(q+1)\Delta^2\dot{y}_{i-2})}{2!} + \frac{(q(q+1)(q+2)\Delta^3\dot{y}_{i-3})}{3!}, \quad (2.20)$$

где

$$q = \frac{(x - x_i)}{h}.$$

$$\begin{aligned} \Delta^1 \dot{y}_{i-1} &= 10^{-1}(\dot{y}_i - \dot{y}_{i-1}) \\ \Delta^2 \dot{y}_{i-2} &= 10^{-2}(\dot{y}_i - 2\dot{y}_{i-1} + \dot{y}_{i-2}) \\ \Delta^3 \dot{y}_{i-3} &= 10^{-3}(\dot{y}_i - 3\dot{y}_{i-1} + 3\dot{y}_{i-2} - \dot{y}_{i-3}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставляя выражение (2.20) в формулу (2.21) и учитывая, что $dx = h dq$ будем иметь:

$$\Delta y_i = h \int_0^1 \left[\dot{y}_i + q\Delta\dot{y}_{i-1} + \frac{(q^2 + q)\Delta^2\dot{y}_{i-2}}{2} + \frac{(q^3 + 3q^2 + 2q)\Delta^3\dot{y}_{i-3}}{6} \right] dq.$$

Из последнего выражения получаем экстраполяционную формулу Адамса

$$\Delta y_i = h\dot{y}_i + \frac{\Delta(h\dot{y}_{i-1})}{2} + \frac{5\Delta^2(h\dot{y}_{i-2})}{12} + \frac{3\Delta^3(h\dot{y}_{i-3})}{8}.$$

Для вычислительного процесса нужны четыре начальных значения y_0, y_1, y_2, y_3 , которые определяются исходя из начального условия (2.3), каким-либо численным методом, например разложением в ряд Тейлора

$$y_i = y(x_0 + ih) = y_0 + \dot{y}_0(ih) + \frac{\dot{y}_0^{(2)}(ih)^2}{2} + \dots, \quad i = 1, 2, \dots$$

Зная данные значения, из уравнения (2.1) можно найти значения производных $\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3$ и составить таблицу разностей из значений:

$$\Delta(h\dot{y}_0), \Delta(h\dot{y}_1), \Delta(h\dot{y}_2), \Delta^2(h\dot{y}_0), \Delta^2(h\dot{y}_1), \Delta^2(h\dot{y}_2). \quad (2.22)$$

Дальнейшие значения y_i , $i = 4, 5, \dots$, искомого решения можно шаг за шагом вычислять по формуле Адамса, заполняя при этом таблицу разностей (2.22). Учитывая (2.18), после приведения подобных членов окончательно запишем

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h(55 \dot{y}_i - 59 \dot{y}_{i-1} + 37 \dot{y}_{i-2} - 9 \dot{y}_{i-3})}{24},$$

причем $x_{i+1} = x_i + h$.

Практический пример метода Адамса.

Определить интеграл уравнения $\dot{y} = x + y$; $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 1]$.

Решение.

Для организации вычислений принимаем шаг $h = 0.1$.

Используем начальные значения из предыдущего примера:

$$y_0 = 1; \quad y_1 = 1.1103; \quad y_2 = 1.2427; \quad y_3 = 1.3996.$$

Результаты вычислений оформляются в виде таблицы 2.6 и таблицы 2.7.

Таблица 2.6

Сводные данные расчетов (основные расчеты)

i	x_i	y_i	Δy_i	$h\dot{y}_i$	$\Delta(h\dot{y}_i)$	$\Delta^2(h\dot{y}_i)$	$\Delta^3(h\dot{y}_i)$	Точное решение
0	0	1		0,1			1	1
1	0,1	1,1103		0,121	210	23	2	1,1103
2	0,2	1,2427		0,1443	333	24	5	1,2428
3	0,3	1,3996	0,1838	0,17	257	26	2	1,3997
4	0,4	1,5834	0,2137	0,1983	283	31	3	1,5836
5	0,5	1,7971	0,2469	0,2297	314	33	5	1,7974
6	0,6	2,0440	0,2833	0,2644	347	36	3	2,0442
7	0,7	2,3273	0,3235	0,3027	383	41		2,3275
8	0,8	2,6508	0,3682	0,3451	424	44		2,6511
9	0,9	3,0190	0,4172	0,3919	468			3,0192
10	1	3,4362						3,4366

Таблица 2.7

Сводные данные расчетов (вспомогательные расчеты)

i	3	4	5	6	7	8	9
$h\dot{y}_i$	0.1700	0.1983	0.2297	0.2644	0.3027	0.3451	0.3919
$\frac{1}{2}\Delta(h\dot{y}_{i-1})$	128	142	157	174	192	212	234
$\frac{5}{12}\Delta^2(h\dot{y}_{i-2})$	10	11	13	14	15	17	18
$\frac{3}{8}\Delta^3(h\dot{y}_{i-3})$	0	1	2	1	1	2	1
$\Delta y_i = \Sigma$	0.1838	0.2137	0.2469	0.2833	0.3235	0.3682	0.4172

В последнем столбце таблицы 2.7 приведены точные значения решения функции

$$y = 2e^x - x - 1.$$

3. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Методы линеаризации нелинейных элементов и систем

Прежде чем рассматривать методы линеаризации, приведем формализованную блок-схему системы управления электромеханическим объектом. Данная блок-схема позволяет представить связи между основными элементами системы и записать в аналитической форме множество переменных состояния, управляющие и возмущающие воздействия в виде определенных функций.

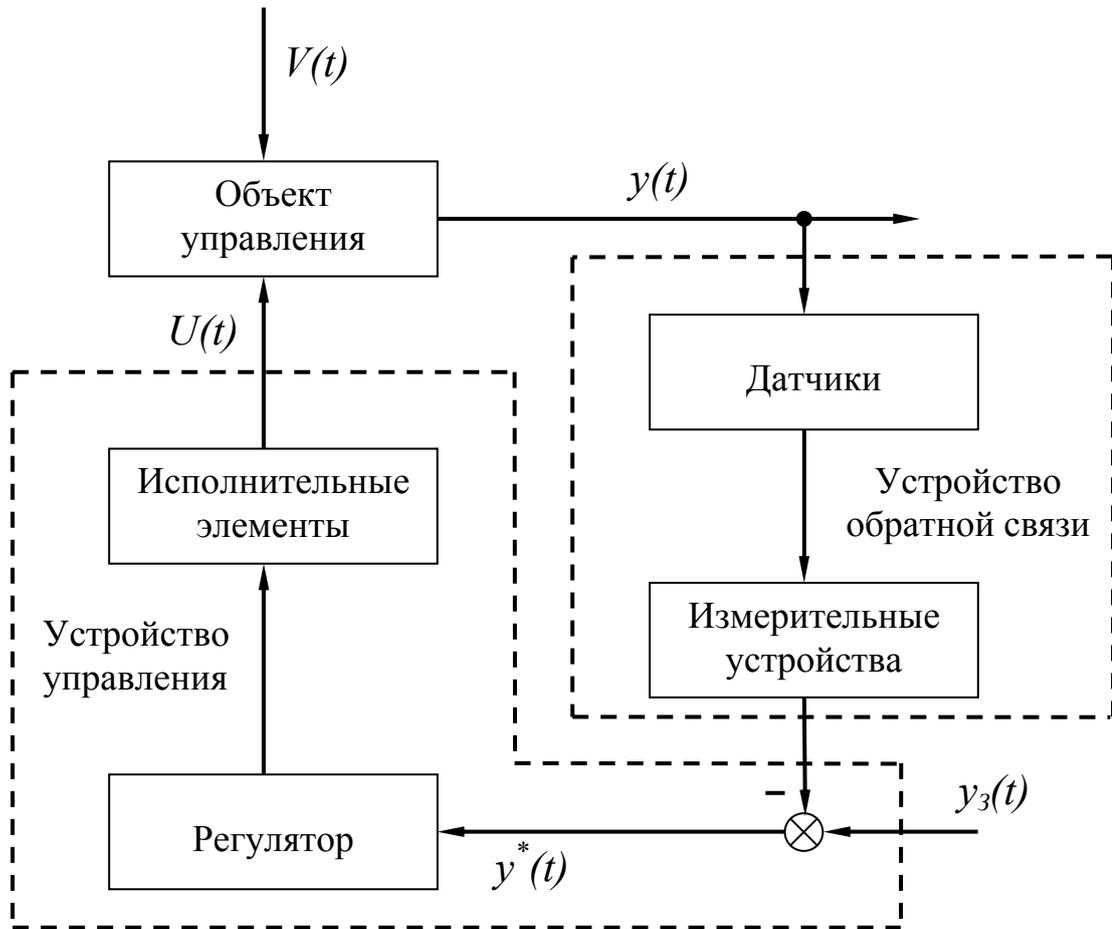


Рис. 3.1. Блок-схема системы управления электроприводов

Существует ряд методов линеаризации нелинейных систем, описываемых непрерывными уравнениями. Рассмотрим четыре метода, которые наиболее часто применяются на практике.

Первый метод.

Пусть объект управления описывается уравнениями

$$\dot{x} = f(x, U, t), \quad (3.1)$$

с контролируемыми или измеряемыми выходами

$$y = \psi(x, U, t), \quad (3.2)$$

где f, x – n -мерные, U – m -мерный, y, ψ – r -мерные векторы.

$$x^T = [x_1, \dots, x_n], \quad U^T = [U_1, \dots, U_m], \quad f^T = [f_1, \dots, f_n],$$

$$y^T = [y_1, \dots, y_r], \quad \psi^T = [\psi_1, \dots, \psi_r]$$

Здесь предполагается, что нелинейные функции f и ψ , которые являются аналитическими в рабочей области, можно разложить в ряд Тейлора.

Линеаризуем уравнение (3.1) при условии малости приращений $\Delta x, \Delta \dot{x}, \Delta U$ относительно положения равновесия $f(x_0, U_0) = 0$ и $\psi(x_0, U_0) = 0$, где x_0 – вектор состояния положения равновесия при фиксированном управлении U_0 и малых ΔU на интервале $t \in [t_0, T]$. При этом можно записать линейное уравнение

$$\Delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial U} \Delta U,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ U=U_0}}; \quad \frac{\partial f}{\partial U} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial U_m} \\ \frac{\partial f_n}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial U_m} \end{vmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ U=U_0}}.$$

На основе уравнения (3.2) записываем также линейное уравнение в отклонениях:

$$\Delta y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial U} \Delta U, \quad (3.3)$$

со следующими матрицами частных производных:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ U=U_0}}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial U} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial U_m} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial U_m} \end{vmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ U=U_0}}.$$

Предположение малости отклонений в точке равновесного состояния относится, в основном, к системам стабилизации.

Для случая, когда уравнения (3.1) и (3.2) записываются в стандартной векторно-матричной форме, линеаризованные уравнения для систем стабилизации имеют вид:

$$\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta U,$$

$$\Delta y = C \cdot \Delta x + D \cdot \Delta U,$$

где $A - (n \times n)$, $B - (n \times m)$, $C - (r \times n)$, $D - (r \times m)$ – стационарные матрицы.

Для следящих систем, когда переменные состояния $x_{II}(t), y_{II}(t), U_{II}(t)$, изменяются по определенной программе, линеаризация осуществляется относительно опорной траектории программного движения. В этом случае соответствующие частные производные будут являться функциями времени. Линеаризованные уравнения следящих систем записываются в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t) \cdot x + B(t) \cdot U, \\ y &= C(t) \cdot x + D(t) \cdot U,\end{aligned}$$

где матрицы коэффициентов уравнений являются нестационарными функциями времени.

Если система имеет один входной и один выходной сигналы, то уравнения для режима стабилизации записываются в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bU, \\ y &= c^T x,\end{aligned}$$

и для следящего режима

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t) \cdot x + b(t) \cdot U, \\ y &= c^T(t) \cdot x,\end{aligned}$$

где b, c – векторы соответствующей размерности; U, y – скалярные переменные.

Практический пример.

Допустим, движение электромеханического объекта описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -J_1 \omega_2 \omega_3 + k_1 U_1(t), \\ \dot{\omega}_2 = -J_2 \omega_1 \omega_3 + k_2 U_2(t), \\ \dot{\omega}_3 = -J_3 \omega_1 \omega_2 + k_3 U_3(t), \end{cases} \quad (3.4)$$

где J_1, J_2, J_3 – моменты инерции исполнительных двигателей, k_1, k_2, k_3 , – коэффициенты передачи соответствующих усилителей.

Обозначим переменные этого уравнения в терминах уравнений (3.1)-(3.2):

$$y = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 \omega_2 \omega_3 + k_1 U_1(t) \\ -J_2 \omega_1 \omega_3 + k_2 U_2(t) \\ -J_3 \omega_1 \omega_2 + k_3 U_3(t) \end{bmatrix}.$$

Составим соответствующие матрицы Якоби:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & -J_1 \omega_3 & -J_1 \omega_2 \\ -J_2 \omega_3 & 0 & -J_2 \omega_1 \\ -J_3 \omega_2 & -J_3 \omega_1 & 0 \end{bmatrix}_{\substack{\omega_{10} \\ \omega_{20} \\ \omega_{30}}}; \quad \frac{\partial f}{\partial U} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}.$$

Запишем (3.4) в отклонениях относительно равновесного состояния

$$\Delta \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial U} \Delta U.$$

В результате линеаризованное уравнение будет иметь вид

$$\Delta \dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & -J_1 \omega_3 & -J_1 \omega_2 \\ -J_2 \omega_3 & 0 & -J_2 \omega_1 \\ -J_3 \omega_2 & -J_3 \omega_1 & 0 \end{bmatrix}_{\substack{\omega_{10} \\ \omega_{20} \\ \omega_{30}}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \omega_1 \\ \Delta \omega_2 \\ \Delta \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{bmatrix}.$$

Второй метод.

В некоторых случаях нелинейные характеристики систем и объектов задаются в графическом виде. Например:

$$y = f(x).$$

Линеаризацию таких характеристик проводят графическим образом. В рабочей точке T_0 с координатами (x_0, y_0) кривая заменяется касательной. Вместо частных производных определяются частные разности $\Delta x_0, \Delta y_0$. Тогда в пределах интервала Δx_0 можно записать равенство:

$$\Delta y = \left(\frac{\Delta f_0}{\Delta x_0} \right) \Big|_{T_0} \cdot \Delta x.$$

Обозначая $\left(\frac{\Delta f_0}{\Delta x_0}\right) = k_0$, запишем линеаризованное уравнение:

$$\Delta y = k_0 \Delta x.$$

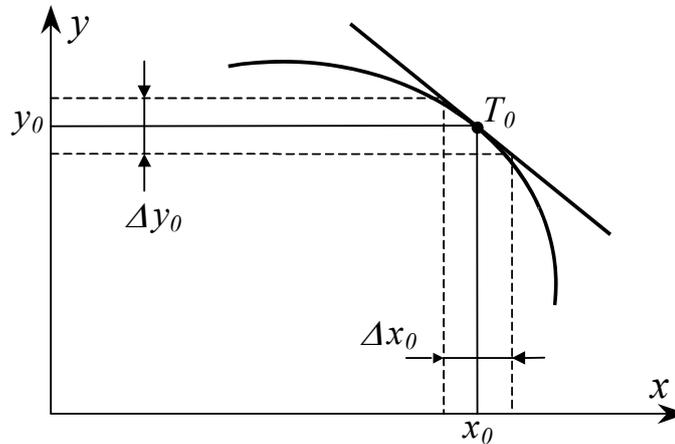


Рис. 3.2. Графическая линеаризация нелинейной кривой

Практический пример.

Динамика вращения ротора трехфазного двигателя определяется нелинейным уравнением:

$$J_\partial \dot{\omega}_\partial = M_\partial(t) - M_c(t). \quad (3.5)$$

Момент $M_\partial(t)$ зависит от напряжения питания статора U , угловой скорости ω_∂ , и характеризуется зависимостью $M_\partial(\omega_\partial, U)$ (кривые 1-3). Момент сопротивления $M_c(t)$ зависит от скорости ω_∂ и определяется зависимостью $M_c(\omega_\partial)$ (кривые 4,5).

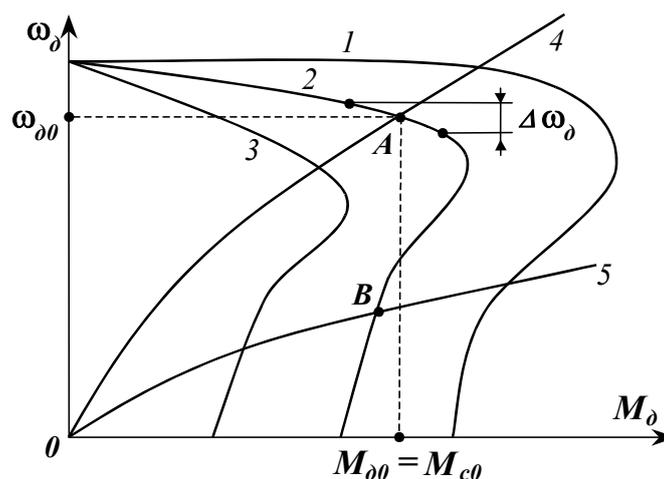


Рис. 3.3. Графическая линеаризация нелинейной характеристики асинхронного двигателя

Учитывая значительную нелинейность характеристик $M_\delta(t)$ и $M_c(t)$, линеаризуем их в относительно небольшом диапазоне изменения угловой скорости $\Delta\omega_\delta$. В точке “А” на кривой 2 имеем установившиеся значения $M_{\delta 0} = M_{c 0}$ при $\omega_{\delta 0}$ и U_0 .

Функциональные зависимости $M_\delta(t)$ и $M_c(t)$ в окрестности точки “А” можно представить в виде ряда Тейлора:

$$M_\delta(t) = M_{\delta 0} + \left(\frac{\partial M_\delta}{\partial \omega_\delta} \right)_{\omega_{\delta 0}, U_0} \cdot \Delta\omega_\delta + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 M_\delta}{\partial \omega_\delta^2} \right)_{\omega_{\delta 0}, U_0} \cdot \Delta\omega_\delta^2 + \dots +$$

$$+ \left(\frac{\partial M_\delta}{\partial U} \right)_{\omega_{\delta 0}, U_0} \cdot \Delta U + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 M_\delta}{\partial U^2} \right)_{\omega_{\delta 0}, U_0} \cdot \Delta U^2 + \dots$$

$$M_{\delta 0} = (M_\delta(t))_{\omega_\delta = \omega_{\delta 0}, U = U_0};$$

$$M_c(t) = M_{c 0} + \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega_\delta} \right)_{\omega_{\delta 0}, U_0} \cdot \Delta\omega_\delta + \left(\frac{\partial^2 M_c}{\partial \omega_\delta^2} \right)_{\omega_{\delta 0}, U_0} \cdot \Delta\omega_\delta^2 + \dots$$

$$M_{c 0} = (M_c(t))_{\omega_\delta = \omega_{\delta 0}, U = U_0}.$$

Подставим два первых члена ряда (рассматривается только линейная часть характеристики) в исходное уравнение (3.5), записанное в отклонениях с учетом $M_{\delta 0} = M_{c 0}$:

$$J\Delta\dot{\omega}_\delta + \left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega_\delta} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_\delta}{\partial \omega_\delta} \right)_0 \right] \cdot \Delta\omega_\delta = \left(\frac{\partial M_\delta}{\partial U} \right)_0 \Delta U.$$

В относительных единицах данное уравнение имеет вид:

$$J \cdot \frac{d\Delta\omega_\delta}{dt} + \left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega_\delta} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_\delta}{\partial \omega_\delta} \right)_0 \right] \cdot \frac{\Delta\omega_\delta}{\omega_{\delta 0}} = \frac{U_0}{\omega_{\delta 0}} \left(\frac{\partial M_\delta}{\partial U} \right)_0 \frac{\Delta U}{U_0}. \quad (3.6)$$

В компактной форме (3.6) записывается дифференциальным уравнением

$$T_{\partial} \frac{d\mu}{dt} + \mu(t) = k\rho(t),$$

где

$$T_{\partial} = \frac{J}{\left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega_{\partial}} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_{\partial}}{\partial \omega_{\partial}} \right)_0 \right]}; \quad \mu = \frac{\Delta \omega_{\partial}}{\omega_{\partial 0}}; \quad \rho = \frac{\Delta U}{U_0};$$

$$k = \frac{\frac{U_0}{\omega_{\partial 0}} \left(\frac{\partial M_{\partial}}{\partial U} \right)}{\left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega_{\partial}} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_{\partial}}{\partial \omega_{\partial}} \right)_0 \right]}.$$

Используя преобразования Лапласа, определим передаточную функцию асинхронного двигателя по скорости:

$$W_{\omega}(p) = \frac{\mu(p)}{\rho(p)} = \frac{k}{T_{\partial} p + 1}. \quad (3.7)$$

Передаточная функция асинхронного двигателя по углу поворота вала определяется:

$$W_{\alpha}(p) = \frac{\alpha(p)}{\rho(p)} = \frac{k}{p(T_{\partial} p + 1)}. \quad (3.8)$$

В выбранной точке «А» на кривой 2 (рис. 3.3) наклон характеристик 2 и 4 соответствует неравенству

$$\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega_{\partial}} \right)_0 > \left(\frac{\partial M_{\partial}}{\partial \omega_{\partial}} \right)_0,$$

поэтому звено $\left(\frac{1}{T_{\partial} p + 1} \right)$ является устойчивым.

В точке «В» для характеристик 2 и 5 будет наблюдаться обратное соотношение и передаточные функции (3.7) и (3.8) принимают следующий вид:

$$W_{\omega}(p) = \frac{k}{T_{\partial} p - 1}; \quad W_{\alpha}(p) = \frac{k}{p(T_{\partial} p - 1)},$$

и аperiodическое звено $\left(\frac{1}{T_{\partial} p - 1}\right)$ становится неустойчивым.

Третий метод линеаризации.

Вместо непосредственного определения частных производных по первому методу переменные x, y, U в (3.1), (3.2) записываются в виде:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \Delta x, \\y &= y_0 + \Delta y, \\U &= U_0 + \Delta U.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Следует помнить, что приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta U$ всегда зависят от времени. Тогда, все слагаемые в правых частях уравнений (3.9) разбиваются на три группы:

- не содержащие приращения Δx и ΔU ;
- содержащие приращения Δx и ΔU в виде простых сомножителей;
- содержащие произведения или степени приращений Δx и ΔU .

Полагая приращения Δx и ΔU малыми по сравнению с координатами опорной траектории (x_0, U_0) , то можно считать слагаемые третьей группы практически равными нулю. Слагаемые первой группы определяют движение системы по опорной траектории (x_0, U_0) . Слагаемые второй группы определяют движение в отклонениях $(\Delta x, \Delta U)$ от опорной траектории (x_0, U_0) .

Четвертый метод линеаризации.

Данный метод основан на методе наименьших квадратов. Рассмотрим случай, когда имеем функцию одной переменной

$$y = f(x).$$

Линеаризованное уравнение в приращениях записывается

$$\Delta y = a \Delta x,$$

где a – коэффициент линеаризации.

При табличной форме записи функции коэффициент линеаризации определяются выражением:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}.$$

В случае, когда нелинейная зависимость выражается аналитически, то соответствующие суммы заменяются интегралами:

$$a = \frac{\int_{-\Delta x_0}^{\Delta x_0} \Delta f(\Delta x) \Delta x \cdot d(\Delta x)}{\int_{-\Delta x_0}^{\Delta x_0} \Delta x^2 \cdot d(\Delta x)}.$$

Если функция зависит от двух и более переменных, то для ее линейризации используются более сложные методы, например метод разделения движения.

3.2. Формы записи линеаризованных моделей

При моделировании систем принято записывать дифференциальные уравнения в двух стандартных формах.

Первая форма дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения записываются таким образом, чтобы выходная величина и ее производные находились в левой части, а входная величина, управление и возмущения – в правой части уравнения. При этом выходная переменная обычно имеет множитель равный единице. Например, для обобщенной структурной схемы системы или объекта (рисунок 3.4), имеющие входные и возмущающие воздействия, рассмотрим алгоритм линеаризации нелинейного дифференциального уравнения:

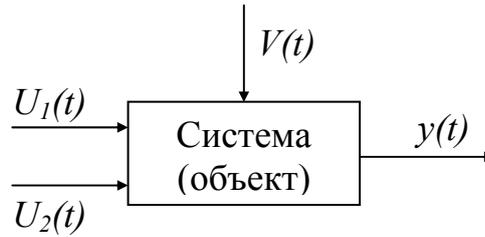


Рис. 3.4. Обобщенная структурная схема системы (объекта):
 $U_1(t), U_2(t)$ – входные воздействия; $V(t)$ – возмущающее воздействие;
 $y(t)$ – выходная переменная.

Пусть уравнение системы (объекта) имеет вид:

$$F(U_1, U_2, \dot{U}_2, y, \dot{y}, \ddot{y}) = \varphi(V, \dot{V}).$$

Запишем переменные как сумму установившихся значений с индексом $\{0\}$ и соответствующих отклонений:

$$U_1 = U_{10} + \Delta U_1; \quad U_2 = U_{20} + \Delta U_2; \quad y = y_0 + \Delta y;$$

$$\dot{U}_2 = \Delta \dot{U}_2; \quad \dot{y} = \Delta \dot{y}; \quad \ddot{y} = \Delta \ddot{y}.$$

Возмущающие воздействия обычно не зависят от работы системы и поэтому функцию $\varphi(V, \dot{V})$ не включают в процедуру линеаризации. Для установившегося состояния функцию $\varphi(V, \dot{V})$ можно представить в виде $\varphi(V_0, 0)$. Таким образом, в установившемся режиме записываем

$$F(U_{10}, U_{20}, U, y_0, 0, 0) = \varphi(V_0, 0).$$

Представим функцию F рядом по степеням отклонений переменных:

$$F(U_{10}, U_{20}, 0, y_0, 0, 0) = \left(\frac{\partial F}{\partial U_1} \right)_0 \Delta U_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial U_2} \right)_0 \Delta U_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{U}_2} \right)_0 \Delta \dot{U}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \Delta y; \quad (3.10)$$

$$\Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_0} \right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} \right)_0 \Delta \ddot{y} = \varphi(V, \dot{V}). \quad (3.11)$$

Вычитая из уравнения (3.10) уравнение (3.11) установившегося состояния и после перегруппировки слагаемых запишем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} \right)_0 \Delta \ddot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \Delta y = \\ & = - \left(\frac{\partial F}{\partial U_1} \right)_0 \Delta U_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial U_2} \right)_0 \Delta U_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{U}_2} \right)_0 \Delta \dot{U}_2 + \varphi_1(t), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\varphi_1(t) = \varphi(V, \dot{V}) - \varphi(V_0, 0)$.

Разделим все слагаемые уравнения (3.12) на коэффициент $\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0$.

В результате преобразований запишем:

$$T_2 \Delta \ddot{y} + T_1 \Delta \dot{y} + \Delta y = k_1 \Delta U_1 + k_2 \Delta U_2 + k_3 \Delta \dot{U}_2 + k_4 \varphi_1(t), \quad (3.13)$$

где T_2, T_1 – постоянные времени; $k_1 - k_4$ – коэффициенты передачи.

С учетом обозначения $p = \frac{d}{dt}$ в символической форме уравнение (3.13) записывается в виде:

$$(T_2 p + T_1 p + 1) \Delta y = k_1 \Delta U_1 + (k_2 + k_2 p) \Delta U_2 + k_4 \varphi_1(t). \quad (3.14)$$

Данное уравнение является одной из форм записи динамического движения системы или объекта.

Вторая форма записи дифференциальных уравнений.

Вторая форма записи основана на использовании передаточных функций.

Запишем уравнение (3.14) в следующем виде:

$$\Delta y = \left[\frac{k_1}{(T_2 p^2 + T_1 p + 1)} \right] \Delta U_1 + \left[\frac{(k_2 + k_3 p)}{(T_2 p^2 + T_1 p + 1)} \right] \Delta U_2 + \left[\frac{k_4}{(T_2 p^2 + T_1 p + 1)} \right] \varphi_1(t). \quad (3.15)$$

Обозначая символами передаточных функций множители при переменных уравнения (3.15), запишем

$$W_1(p) = \left[\frac{k_1}{(T_2 p^2 + T_1 p + 1)} \right]; \quad W_2(p) = \left[\frac{(k_2 + k_3 p)}{(T_2 p^2 + T_1 p + 1)} \right];$$

$$W_\varphi(p) = \left[\frac{k_4}{(T_2 p^2 + T_1 p + 1)} \right].$$

Уравнение (3.15) с использованием передаточных функций примет вид:

$$\Delta y = W_1(p) \Delta U_1 + W_2(p) \Delta U_2 + W_\varphi(p) \varphi_1(t).$$

Строгое математическое определение передаточной функции системы, объекта или элемента требует записи в виде отношения изображений выходной и входной переменных:

$$W_1(p) = \frac{\Delta y(p)}{\Delta U_1(p)}; \quad W_2(p) = \frac{\Delta y(p)}{\Delta U_2(p)}; \quad W_\varphi(p) = \frac{\Delta y(p)}{\varphi_1(p)},$$

где p – символ преобразования Лапласа и соответствующие переменные в операторной форме вычисляются по формулам:

$$\Delta y(p) = \int_0^{\infty} \Delta y(t) e^{-pt} dt; \quad \Delta U_1(p) = \int_0^{\infty} \Delta U_1(t) e^{-pt} dt;$$

$$\Delta U_2(p) = \int_0^{\infty} \Delta U_2(t) e^{-pt} dt; \quad \varphi_1(p) = \int_0^{\infty} \varphi_1(t) e^{-pt} dt.$$

Причем функции времени равны нулю при условии $t < 0$.

4. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Классическая теория автоматического регулирования базируется на представлении элементов и систем в виде передаточных функций. В данной главе рассматриваются модели различных элементов электротехники в операторном пространстве и частотной области.

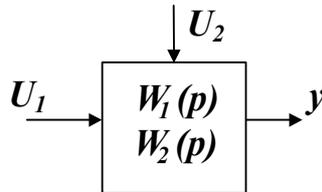
4.1. Элементы структурных схем

Передаточные функции удобно использовать при исследовании систем, объектов, элементов на основании структурных схем. Изображение системы (объекта) в виде совокупности динамических звеньев с указанием связей между ними называется структурной схемой. Графическое изображение основных звеньев приведено на рис. 4.1.

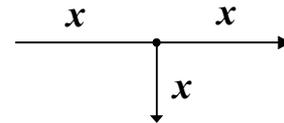
Звено с одним входом:



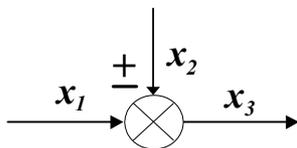
Звено с двумя входами:



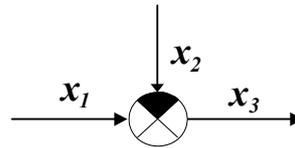
Узел:



Сумматор (элемент сравнения):



$$x_3 = x_1 \pm x_2$$



$$x_3 = x_1 - x_2$$

Рис. 4.1. Графическое изображение основных звеньев

4.2. Преобразование структурных схем

Для упрощения структурных схем, получения передаточных функций замкнутой электромеханической системы по ошибкам и выходному сигналу применяют структурные преобразования. Данные преобразования основаны на принципе суперпозиции. Цель структурных преобразований – привести многоконтурную схему к одноконтурной расчетной схеме.

Преобразование последовательно соединенных звеньев.

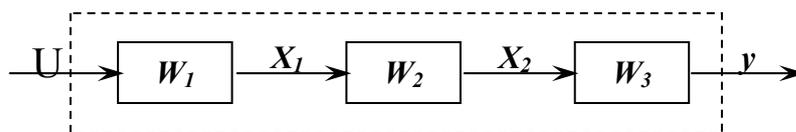


Рис. 4.2. Структурная схема последовательно соединенных звеньев

Передаточные функции можно записать в виде соотношений:

$$W_1 = \frac{X_1(p)}{U(p)}; \quad W_2 = \frac{X_2(p)}{U(p)}; \quad W_3 = \frac{X_3(p)}{U(p)}.$$

Так как $U(p)$ – является входной переменной, а $y(p)$ – выходной переменной, то исключая промежуточные переменные, запишем

$$y(p) = W_3 \cdot X_2(p) = W_3 \cdot W_2 \cdot X_1(p) = W_3 \cdot W_2 \cdot W_1 \cdot U(p).$$

Эквивалентная передаточная функция

$$W_{\text{э}} = \frac{y(p)}{U(p)} = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3.$$

Преобразование параллельно соединенных звеньев.

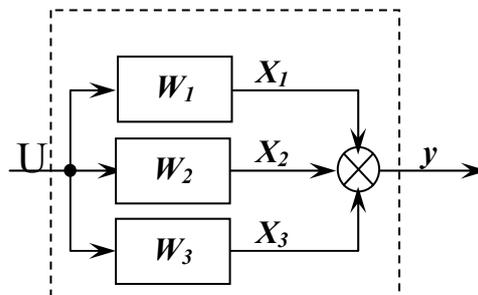


Рис. 4.3. Структурная схема параллельно соединенных звеньев

Передаточные функции записываются уравнениями

$$W_1 = \frac{X_1(p)}{U(p)}; \quad W_2 = \frac{X_2(p)}{U(p)}; \quad W_3 = \frac{X_3(p)}{U(p)}.$$

Уравнение сумматора имеет вид:

$$y(p) = x_1(p) + x_2(p) + x_3(p).$$

Так как $U(p)$ – является входной переменной, а $y(p)$ – выходной переменной, то исключая промежуточные переменные, запишем

$$y(p) = W_1 \cdot U(p) + W_2 \cdot U(p) + W_3 \cdot U(p) = (W_1 + W_2 + W_3) \cdot U(p).$$

Эквивалентная передаточная функция схемы равна

$$W_{\Sigma} = \frac{y(p)}{U(p)} = W_1 + W_2 + W_3.$$

Преобразование структурных схем с обратной связью.

Обратная связь, выходная переменная которой вычитается из переменной в прямой цепи контура структурной схемы, называется отрицательной обратной связью. В противном случае – положительной обратной связью.

Обратная связь с передаточной функцией равной «1» называется жесткой обратной связью. В противном случае – гибкая обратная связь. Существуют главная и второстепенные обратные связи.

Рассмотрим пример структурной схемы с контуром, содержащим единичную отрицательную или положительную обратные связи.

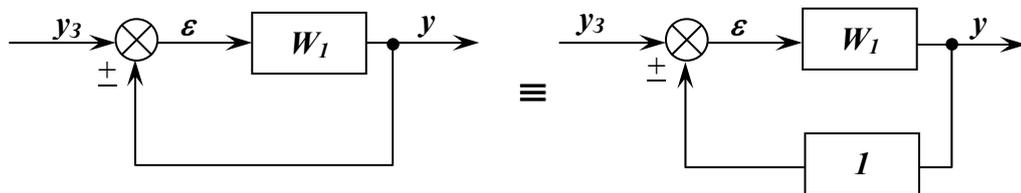


Рис. 4.4. Структурные схемы с единичной обратной связью

Запишем уравнения структурных схем

$$\begin{cases} \varepsilon(p) = y_3(p) \pm y(p), \\ y(p) = W_1 \cdot \varepsilon(p). \end{cases}$$

Исключая из уравнения $\varepsilon(p)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{y(p)}{W_1(p)} = y_3(p) \pm y(p) &\rightarrow y(p) = W_1 \cdot y_3(p) \pm W_1 \cdot y(p) \rightarrow \\ &\rightarrow (1 \pm W_1) \cdot y(p) = W_1 \cdot y_3(p). \end{aligned}$$

В итоге эквивалентная передаточная функция равна

$$\begin{aligned} W_{\pm} = \frac{y(p)}{U(p)} = \frac{W_1}{1 \mp W_1}; \quad W_{\pm_{o.o.c.}} = \frac{y(p)}{U(p)} = \frac{W_1}{1 \pm W_1}; \\ W_{\pm_{п.o.c.}} = \frac{y(p)}{U(p)} = \frac{W_1}{1 - W_1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим преобразование структурных схем с контуром, содержащим в цепи обратной связи передаточную функцию $W_{o.c.}$.

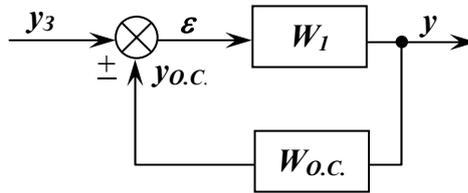


Рис. 4.5. Структурная схема с неединичной обратной связью

Запишем уравнения структурных схем

$$\begin{cases} \varepsilon(p) = y_3(p) \pm y_{o.c.}(p), \\ y(p) = W_1 \cdot \varepsilon(p), \\ y_{o.c.} = W_{o.c.} \cdot y(p). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{y(p)}{W_1(p)} = y_3(p) \pm W_{o.c.} \cdot y(p) &\rightarrow y(p) = W_1 \cdot W_{o.c.} \cdot y_3(p) \pm W_1 \cdot y(p) \rightarrow \\ &\rightarrow (1 \mp W_1 \cdot W_{o.c.}) \cdot y(p) = W_1 \cdot y_3(p). \end{aligned}$$

Эквивалентные передаточные функции равны

$$W_{\varepsilon} = \frac{y(p)}{U(p)} = \frac{W_1}{1 \mp W_1 \cdot W_{o.c.}}; \quad W_{\varepsilon_{o.o.c.}} = \frac{y(p)}{U(p)} = \frac{W_1}{1 + W_1 \cdot W_{o.c.}};$$

$$W_{\varepsilon_{п.o.c.}} = \frac{y(p)}{U(p)} = \frac{W_1}{1 - W_1 \cdot W_{o.c.}}.$$

4.3. Передаточные функции систем регулирования

Большинство структурных схем систем регулирования с помощью преобразований можно привести к 2-м вариантам:

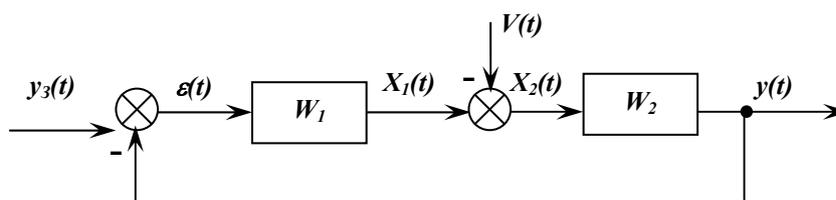


Рис. 4.6. Структурная схема с отрицательной обратной связью и внутренним возмущением (вариант 1)

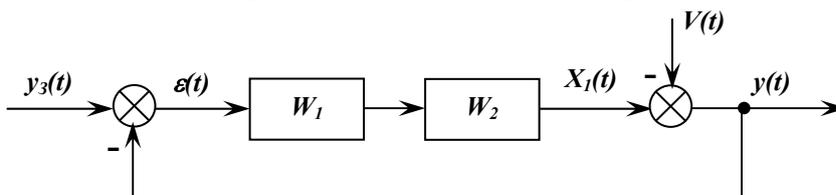


Рис. 4.7. Структурная схема с отрицательной обратной связью и внешним возмущением (вариант 2)

где $y_3(t)$, $y(t)$ – соответственно, управляющая (задающая) и выходная переменные; $\varepsilon(t)$ – ошибка регулирования; $V(t)$ – возмущение.

Определим передаточные функции замкнутой системы по структурной схеме рис. 4.6 (вариант 1). Запишем следующие уравнения

$$\begin{cases} \varepsilon(p) = y_3(p) - y(p), & \begin{cases} X_1(p) = W_1(p) \cdot \varepsilon(p), \\ X_2(p) = X_1 - V(p), \end{cases} \\ X_2(p) = X_1 - V(p), & \begin{cases} y(p) = W_2 \cdot X_2(p). \end{cases} \end{cases}$$

Используя соответствующие подстановки, уравнение $X_2(p) = X_1(p) - V(p)$ можно записать в виде:

$$\frac{y(p)}{W_2(p)} = W_1 \cdot [y_3(p) - y(p)] - V(p).$$

Из данного уравнения получим

$$y(p) = \frac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_1 \cdot W_2} \cdot y_3(p) - \frac{V(p)}{1 + W_1 \cdot W_2}. \quad (4.1)$$

Обозначим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_p = W_1 \cdot W_2. \quad (4.2)$$

Подставляя уравнение (4.1) в уравнение (4.2), получим

$$y(p) = \frac{W_p}{1 + W_p} \cdot y_3(p) - \frac{V(p)}{1 + W_p}.$$

Введем обозначения:

$W_{y.} = \frac{y(p)}{y_3(p)}$ – передаточная функция замкнутой системы по управляющему (задающему) воздействию;

$W_V = \frac{y(p)}{V(p)}$ – передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию.

Используя передаточную функцию разомкнутой системы, запишем

$$W_{y.} = \frac{W_p}{1 + W_p}; \quad W_V = \frac{W_2}{1 + W_p}.$$

Передаточные функции относительно ошибки получим на основе выражений

$$\frac{y_3(p) - \varepsilon(p)}{W_2} = W_1 - V(p).$$

Из данного уравнения запишем

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_1 \cdot W_2} \cdot y_3(p) + \frac{W_2}{1 + W_1 \cdot W_2} \cdot V(p) = \frac{1}{1 + W_p} \cdot y_3(p) + \frac{W_2}{1 + W_p} \cdot V(p).$$

Введем обозначения:

$$W_\varepsilon = \frac{\varepsilon(p)}{y_3(p)} \quad - \quad \text{передаточная функция замкнутой системы}$$

относительно ошибки по управляющему (задающему) воздействию.

$$W_V^* = \frac{\varepsilon(p)}{V(p)} \quad - \quad \text{передаточная функция замкнутой системы}$$

относительно ошибки по возмущающему воздействию.

Тогда можно записать:

$$W_\varepsilon = \frac{1}{1 + W_p}; \quad W_V^* = \frac{W_2}{1 + W_p}.$$

Для структурной схемы, изображенной на рис. 4.6 (вариант 1), запишем:

$$W_V = W_V^*.$$

По передаточным функциям W_ε и W_V^* определяются характеристики точности замкнутых систем регулирования.

Определим передаточные функции замкнутой системы по структурной схеме рис. 4.7 (вариант 2).

Запишем следующие уравнения:

$$\begin{cases} y(p) = X_1(p) - V(p), \\ \varepsilon(p) = y_3(p) - y(p), \\ X_1(p) = W_1 \cdot W_2 \cdot \varepsilon(p). \end{cases}$$

Исключая переменные $x_1(p)$ и $\varepsilon(p)$ получим:

$$y(p) = \frac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_1 \cdot W_2} \cdot y_3(p) - \frac{1}{1 + W_1 \cdot W_2} \cdot V(p) = \frac{W_p}{1 + W_p} \cdot y_3(p) - \frac{1}{1 + W_p} \cdot V(p).$$

Передаточные функции $W_y(p)$ и $W_V(p)$ равны

$$W_y = \frac{W_p}{1 + W_p}; \quad W_V = \frac{1}{1 + W_p}.$$

Если из исходных уравнений для структурной схемы рис. 4.7 (вариант 2) исключить переменные $x_1(p)$ и $y(p)$, то можно записать

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_1 \cdot W_2} \cdot y(p) + \frac{1}{1 + W_1 \cdot W_2} \cdot V(p) = \frac{1}{1 + W_p} \cdot y(p) + \frac{1}{1 + W_p} \cdot V(p).$$

Передаточные функции $W_\varepsilon(p)$ и $W_V^*(p)$ равны

$$W_\varepsilon = \frac{1}{1 + W_p}; \quad W_V^* = \frac{1}{1 + W_p}.$$

Таким образом, передаточные функции по ошибке и возмущению для такой схемы равны друг другу

$$W_\varepsilon = W_V^*.$$

Практический пример.

Преобразование структурных схем.

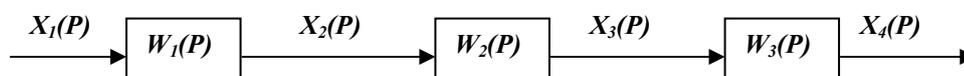


Рис. 4.8. Структурная схема последовательно соединенных звеньев

Эквивалентная передаточная функция равна

$$W_\varepsilon = \frac{x_2(P)}{x_1(P)} \cdot \frac{x_3(P)}{x_2(P)} \cdot \frac{x_4(P)}{x_3(P)} = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3.$$

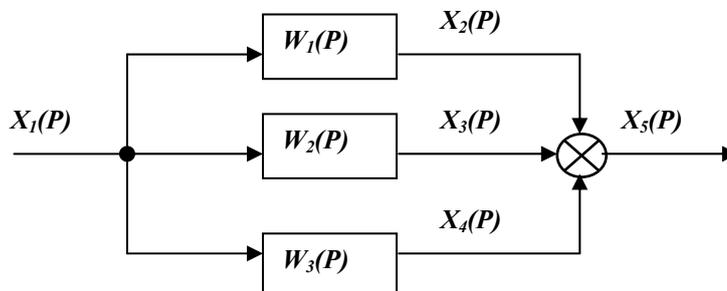


Рис. 4.9. Структурная схема параллельно соединенных звеньев

Эквивалентная передаточная функция равна

$$W_{\ominus} = \frac{x_2(P)}{x_1(P)} + \frac{x_3(P)}{x_1(P)} + \frac{x_4(P)}{x_1(P)} = W_1 + W_2 + W_3.$$

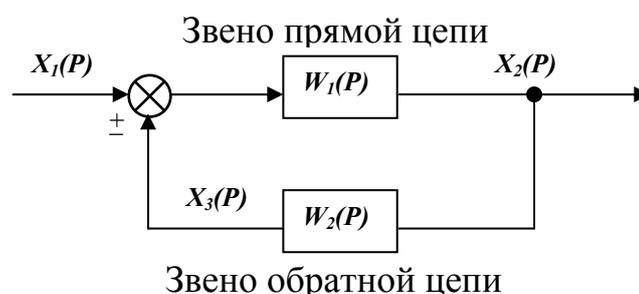


Рис. 4.10. Структурная схема звеньев с обратной связью:
 (+) – положительная обратная связь; (-) – отрицательная обратная связь.

Обратная связь может быть положительной, когда сигнал с выхода звена обратной связи суммируется с сигналом в прямой цепи.

Обратная связь может быть отрицательной, когда сигнал с выхода звена обратной связи вычитается из сигнала прямой цепи.

Эквивалентная передаточная функция определяется из следующих уравнений

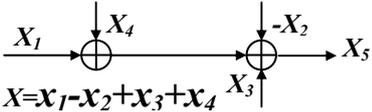
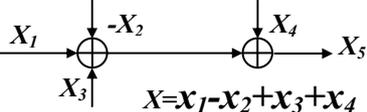
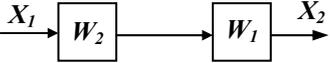
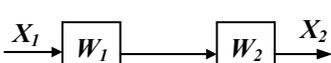
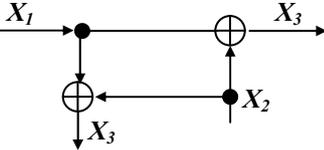
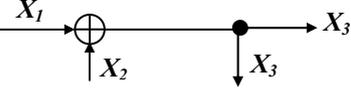
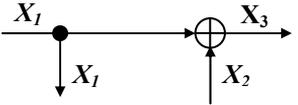
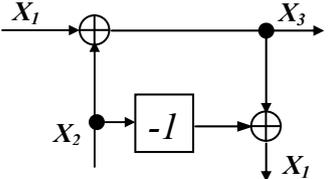
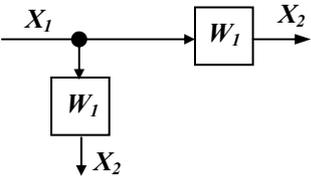
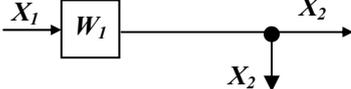
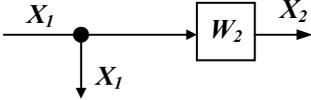
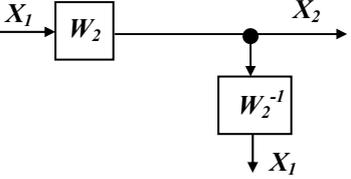
$$x_2 = W_1 \pm (x_1 \pm x_3) = W_1 \cdot (x_1 \pm W_2 \cdot x_2),$$

$$W_{\ominus} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{W_1}{1 \pm W_1 \cdot W_2}.$$

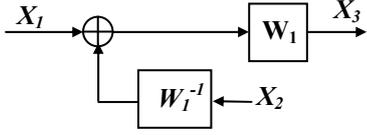
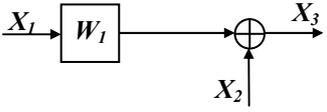
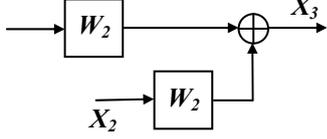
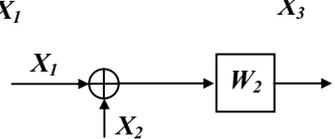
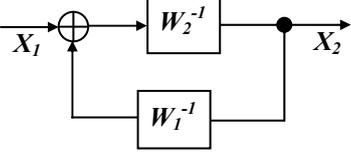
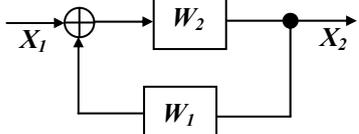
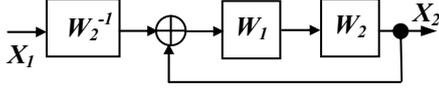
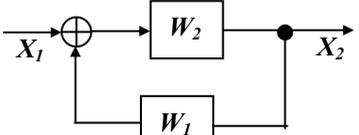
Правила преобразования структурных схем приведены в таблице 4.1

Таблица 4.1

Правила преобразования структурных схем линейных систем

Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перестановка сумматоров или элементов сравнения	 <p style="text-align: center;">$X = x_1 - x_2 + x_3 + x_4$</p>	 <p style="text-align: center;">$X = x_1 - x_2 + x_3 + x_4$</p>
Перестановка звеньев		
Перенос узла с выхода на вход сумматора		
Перенос узла с входа на выход сумматора		
Перенос узла с выхода на вход звена		
Перенос узла с входа на выход звена		

Окончание табл. 4.1

Перенос сумматора с выхода на вход звена		
Перенос сумматора с вход на выход звена		
Замена звеньев прямой и обратной цепей		
Переход к единичной обратной связи		

Практический пример.

Допустим, структурная схема системы представлена в виде:

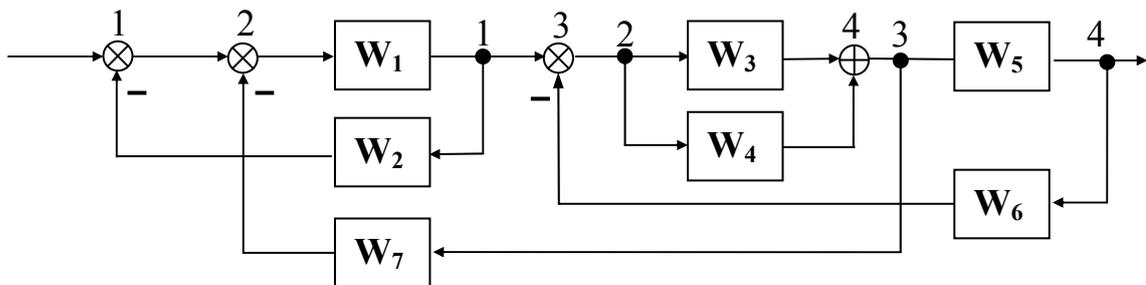


Рис. 4.11. Исходная структурная схема

Используя правила преобразования схем, записать эквивалентную передаточную функцию.

Данную структурную схему преобразуем к следующему виду.

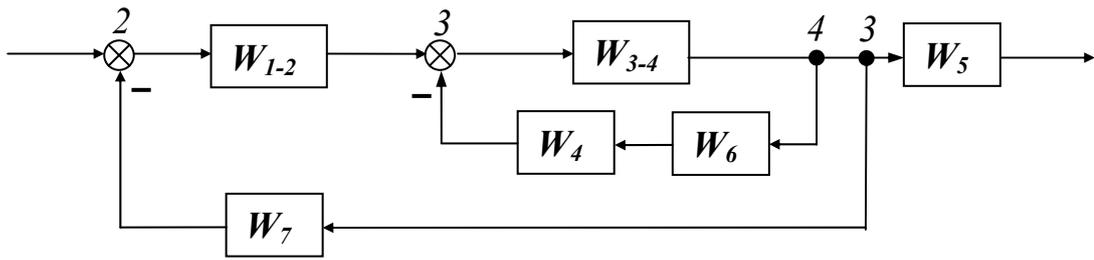


Рис. 4.12. Преобразованная структурная схема. Преобразование 1

В процессе преобразования определяются следующие передаточные функции

$$W_{1-2} = \frac{W_1}{1 + W_1 \cdot W_2}; \quad W_{3-4} = W_3 + W_4.$$

Осуществляем дальнейшие преобразования и получаем структурную схему с одним контуром.

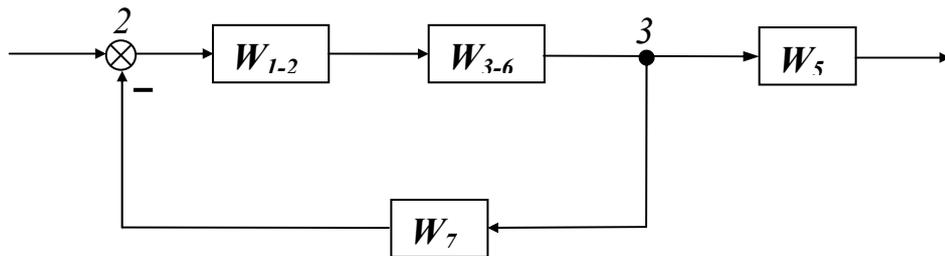


Рис. 4.13. Преобразованная структурная схема. Преобразование 2

Определяем передаточную функцию

$$W_{3-6} = \frac{W_3 + W_4}{1 + (W_3 + W_4) \cdot W_5 \cdot W_6}.$$

В результате всех преобразований получаем последовательное соединение звеньев



Рис. 4.14. Преобразованная структурная схема. Преобразование 3

Передаточная функция W_3 определяется следующим выражением

$$W_{\mathcal{D}} = \frac{W_{1-2} \cdot W_{3-4}}{1 + W_{1-2} \cdot W_{3-4} \cdot W_7}.$$

Окончательно, результирующая передаточная функция равна

$$W_{PE3.} = W_{\mathcal{D}} \cdot W_5.$$

При исследовании систем на основе передаточных функций используются структурные схемы с разомкнутыми и замкнутыми обратными связями. Соответственно имеются понятия: разомкнутая и замкнутая система регулирования. В случае разомкнутой системы можем получить простую цепь последовательно включенных звеньев.

Практический пример.

Допустим, имеем структурную схему системы с одним замкнутым контуром.

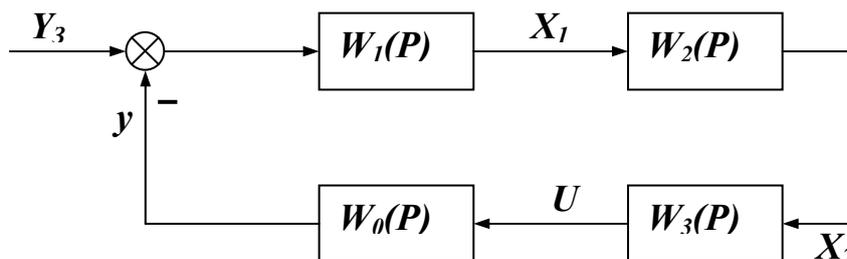


Рис. 4.15. Структурная схема системы с одним замкнутым контуром

Передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением:

$$W_P(P) = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_0.$$

Для определения передаточной функции разомкнутой системы можно разомкнуть связи замкнутой системы в произвольном месте. Обычно размыкается главная обратная связь. Главная обратная связь – это связь, обеспечивающая непосредственное поступление на один из входов сравнивающего элемента переменной (выходного сигнала объекта) для сравнения с заданным значением регулируемой переменной.

Практический пример.

Допустим, структурная схема системы имеет следующий вид

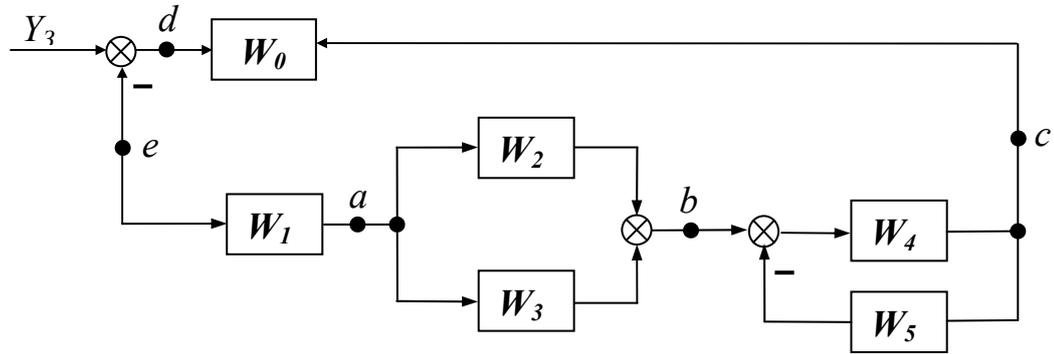


Рис. 4.16. Структурная схема системы с главной обратной связью

Для определения передаточной функции разомкнутой системы необходимо разомкнуть связь в схеме. Разомкнуть схему можно в точках a, b, c, d, e .

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_P = W_1 \cdot [W_2 + W_3] \cdot \frac{W_4}{1 + W_4 \cdot W_5} \cdot W_0.$$

Практический пример

Рассмотрим задачу преобразования многоконтурной схемы системы регулирования к одноконтурной схеме с единичной обратной связью. Данное преобразование можно осуществить двумя способами:

- переносом линий связи;
- преобразованием внутренних контуров.

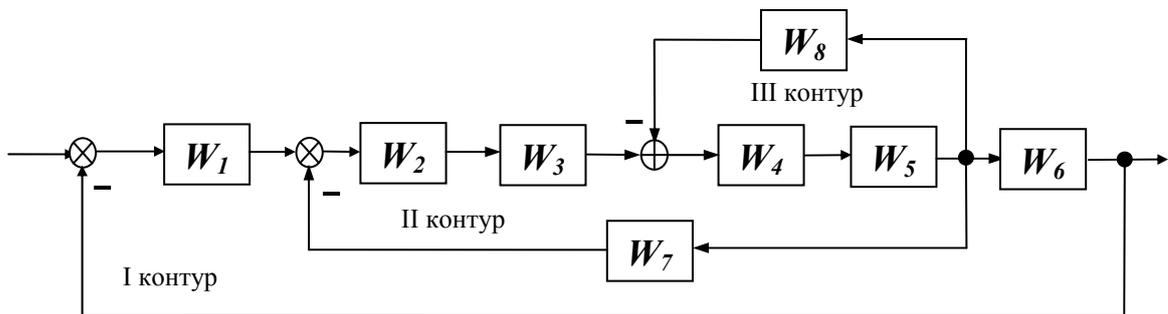


Рис. 4.17. Заданная структурная схема

Первое преобразование структурной схемы позволяет получить:

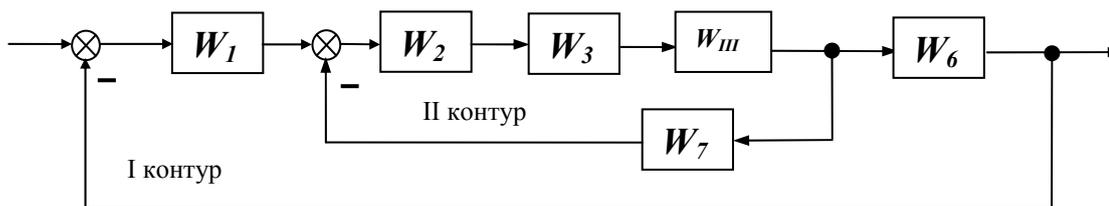


Рис. 4.18. Преобразованная структурная схема. Преобразование 1

Передаточная функция внутреннего III контура равна

$$W_{III} = \frac{W_4 \cdot W_5}{1 + W_4 \cdot W_5 \cdot W_6}.$$

Второе преобразование структурной схемы позволяет получить:

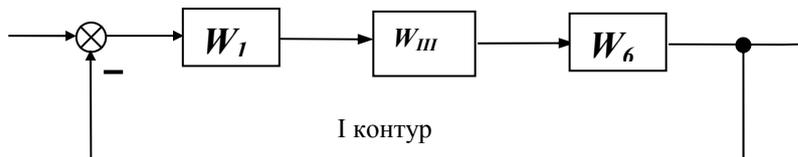


Рис. 4.18. Преобразованная структурная схема. Преобразование 2

Передаточная функция внутреннего II контура равна

$$W_{II} = \frac{W_4 \cdot W_5 \cdot W_{III}}{1 + W_2 \cdot W_3 \cdot W_{III} \cdot W_7}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением:

$$W_p = W_1 \cdot W_{II} \cdot W_6.$$

В результате передаточная функция замкнутой системы будет равна:

$$W_3 = \frac{W_p}{1 + W_p}.$$

4.4. Динамические звенья и их характеристики

4.4.1. Типовые звенья

При исследовании электромеханических систем обычно используется процедура разбиения ее структуры на типовые динамические звенья. Под типовыми динамическими звеньями понимают устройство любого физического вида и конструктивного исполнения, но описываемое определенными дифференциальными уравнениями или передаточными функциями. В соответствии с этим утверждением одним и тем же уравнением могут описываться разнообразные устройства:

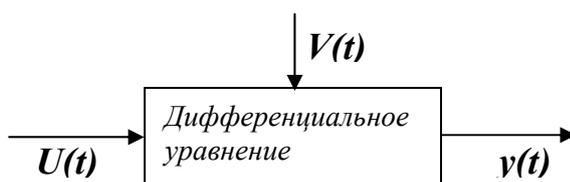


Рис. 4.19. Обобщенная схема динамического звена во временном пространстве
 $V(t)$ - возмущающее воздействие; $U(t)$ - входное воздействие;
 $y(t)$ - выходной сигнал

электрические, механические, гидравлические и т.д. Обобщенная схема динамического звена приведена на рис. 4.19.

В установившемся режиме (переходный процесс закончился) временные характеристики простейших звеньев записываются в виде:

$$y(t) = k \cdot U(t) \text{ – звено статического типа;}$$

$$y(t) = k \cdot \int U(t) dt \text{ – интегрирующее звено;}$$

$$y(t) = k \cdot \frac{dU(t)}{dt} \text{ – дифференцирующее звено,}$$

где k – коэффициент передачи; $U(t)$, $y(t)$ – входные и выходные сигналы.

Для определения характеристик системы используются типовые звенья с заранее определенными передаточными функциями. Передаточные функции некоторых звеньев приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Передаточные функции типовых звеньев

Тип звена	Передаточная функция
Безинерционное	$W = k$
Апериодическое первого порядка	$W = \frac{k}{(1 + Tp)}$
Апериодическое второго порядка	$W = \frac{k}{(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}$; $W = \frac{k}{(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)}$; $T_3, T_4 = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$; $T_1 > 2T_2$
Колебательное	$W = \frac{k}{(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)}$
Консервативное	$W = \frac{k}{(T^2 p^2 + 1)}$
Идеальное интегрирующее	$W = \frac{k}{p}$
Интегрирующее с замедлением	$W = \frac{k}{p}(Tp + 1)$
Изодромное	$W = k_1 + \frac{k}{p}$
Идеальное дифференцирующее	$W = kp$
Дифференцирующее с замедлением	$W = \frac{kp}{(Tp + 1)}$

4.4.2. Переходная и весовая функции

Определение свойств системы или ее элементов может производиться по переходным или весовым функциям при формировании на входе специальных воздействий.

Переходная функция $h(t)$ представляет переходной процесс на выходе системы или элемента, возникающий при подаче на вход единичного воздействия $1(t)$.

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Пример графического изображения единичной $1(t)$ и переходной $h(t)$ функций приведен на рисунке 4.20.

При умножении постоянного коэффициента $N \cdot 1(t)$ выполняется произведение $N \cdot h(t)$. При этом выполняется также:

$$x(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ x(t) & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

где $x(t)$ – любая функция.

Весовая функция $w(t)$ – это реакция элемента на импульсную функцию $\delta(t)$. Данная функция определяется следующим выражением

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}; \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t > 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

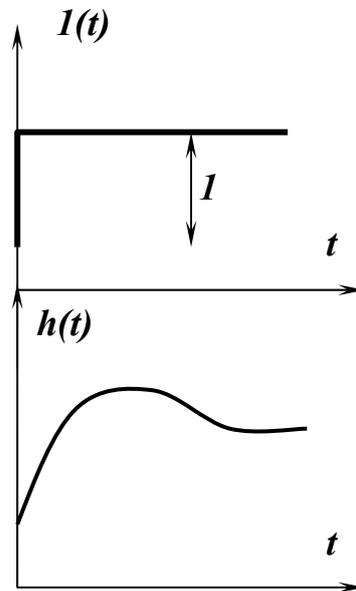


Рис. 4.20. Графическое изображение единичной $1(t)$ и переходной $h(t)$ функций

Пример графического изображения импульсной $\delta(t)$ и переходной $w(t)$ функций для устойчивого процесса приведен на рисунке 4.21.

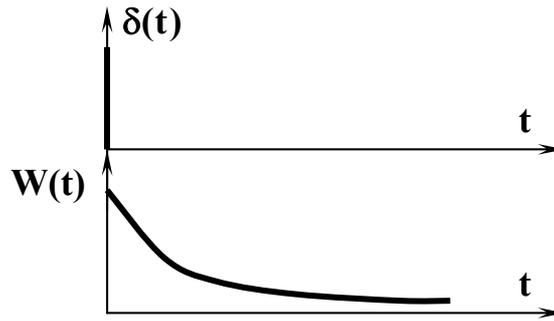


Рис. 4.21. Графическое изображение единичной $\delta(t)$ и переходной $w(t)$ функций

Весовая функция связана с передаточной функцией преобразованием Лапласа следующим интегральным выражением:

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt.$$

Переходная функция связана с передаточной функцией преобразованием Карсона:

$$W(p) = p \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt.$$

Для входного воздействия произвольного типа, прикладываемого в момент $t=0$, переходной процесс при нулевых начальных условиях определяется по переходной функции:

$$y(t) = U(0)h(t) + \int_0^t U(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

или по весовой функции:

$$y(t) = \int_0^t U(\tau)w(t-\tau)d\tau.$$

4.4.3. Частотная передаточная функция и частотные характеристики

Для получения частотных передаточных функций (ЧПФ) используется входное гармоническое воздействие:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t),$$

где U_m – амплитуда, ω – частота.

На выходе системы будет также гармоническая функция, но сдвинутая на угол φ :

$$y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Используя формулу Эйлера:

$$u(t) = \frac{U_m (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})}{2} = U_1 + U_2;$$
$$y(t) = \frac{y_m (e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)})}{2} = y_1 + y_2.$$

В линейной системе на основании принципа суперпозиции рассматривается отдельное прохождение составляющих U_1 и U_2 . На основании равенства соотношений между парами входо-выходных сигналов $\{U_1, y_1\}$ и $\{U_2, y_2\}$ используем далее только одну сокращенную символическую запись

$$U_1 = U_m e^{j\omega t},$$
$$y_1 = y_m e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Определим частотную передаточную функцию на следующем примере.

Пусть система описывается дифференциальным уравнением:

$$T_2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = k_1 U + k_2 \dot{U}.$$

С учетом подстановки в уравнение равенств

$$\begin{aligned}\dot{U} &= j\omega \cdot U_m e^{j\omega t}, \\ \dot{y} &= j\omega \cdot y_m e^{j(\omega t + \varphi)}, \\ \ddot{y} &= (j\omega)^2 \cdot y_m e^{j(\omega t + \varphi)},\end{aligned}$$

и сокращения на экспоненту $e^{j\omega t}$, частотная передаточная функция равна

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{(k_1 + k_2 j\omega)}{(T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1)}; \quad |W(j\omega)| = \frac{y_m(\omega)}{U_m(\omega)}.$$

Фазо-частотная характеристика определяется выражением

$$\arg W(j\omega) = \varphi(\omega).$$

Другие определения частотной передаточной функции.

Частотно-передаточную функцию можно определить из передаточной функции путем подстановки вместо оператора p значения $j\omega$:

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

Другой вариант определения ЧПФ возможен в результате интегрирования весовой функции

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Частотную передаточную функцию можно представить экспоненциальной функцией или в виде алгебраического уравнения:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega), V(\omega)$ – вещественная и мнимая составляющие.

$$\left. \begin{aligned} V(\omega) &= \operatorname{Im} W(j\omega) \\ U(\omega) &= \operatorname{Re} W(j\omega) \end{aligned} \right\}$$

Модуль $A(\omega)$ частотной передаточной функции может определяться как отношение ее числителя и знаменателя. Алгоритм определения $A(\omega)$ предполагает выделение в числителе и знаменателе $W(j\omega)$ вещественных и мнимых частей соответствующих полиномов. В результате $A(\omega)$ определяется как отношение квадратных корней из суммы квадратов вещественной и мнимой частей числителя и знаменателя:

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{U_{\text{числ}}^2(\omega) + V_{\text{числ}}^2(\omega)}}{\sqrt{U_{\text{зн}}^2(\omega) + V_{\text{зн}}^2(\omega)}}.$$

Для приведенного выше примера $A(\omega)$ определяется выражением

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{(k_1^2 + k_2^2 \omega^2)}}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}.$$

Фазо-частотная функция для данного примера определяется как разность аргументов числителя и знаменателя:

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{k_2 \omega}{k_1}\right) - \arctg\left(\frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}\right).$$

Для определения вещественной и мнимой частей $U(\omega), V(\omega)$ частотной передаточной функции необходимо освободиться от мнимой составляющей в знаменателе путем умножения числителя и знаменателя на комплексную величину, сопряженную знаменателю. Так для примера имеем:

$$((1 - T_2^2 \omega^2) - T_1 j \omega) \cdot ((1 - T_2^2 \omega^2) + T_1 j \omega) = ((1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2) - \text{знаменатель}$$

$$U(\omega) = \frac{(k_1(1 - T_2^2 \omega^2) + k_2 T_1 \omega^2)}{((1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2)}; \quad B(\omega) = \frac{(k_1(1 - T_2^2 \omega^2) + k_2 T_1 \omega^2)}{((1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2)};$$

$$V(\omega) = \frac{(k_2 \omega(1 - T_2^2 \omega^2) - k_1 T_1 \omega)}{((1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2)}; \quad M(\omega) = \frac{(k_2 \omega(1 - T_2^2 \omega^2) - k_1 T_1 \omega)}{((1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2)};$$

$$\left((1 - T_2^2 \omega^2) - T_1 j\omega \right) \left((1 - T_2^2 \omega^2) + T_1 j\omega \right) = \left((1 - T_2^2 \omega^2)^2 - T_1^2 \omega^2 \right).$$

Для наглядного представления частотных свойств используются амплитудо-фазовая частотная характеристика (АФЧХ). АФЧХ представляет собой геометрическое место концов векторов (годограф), соответствующих значений $W(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до бесконечности. АФЧХ может быть изображена на комплексной плоскости как для положительных, так и для отрицательных частот.

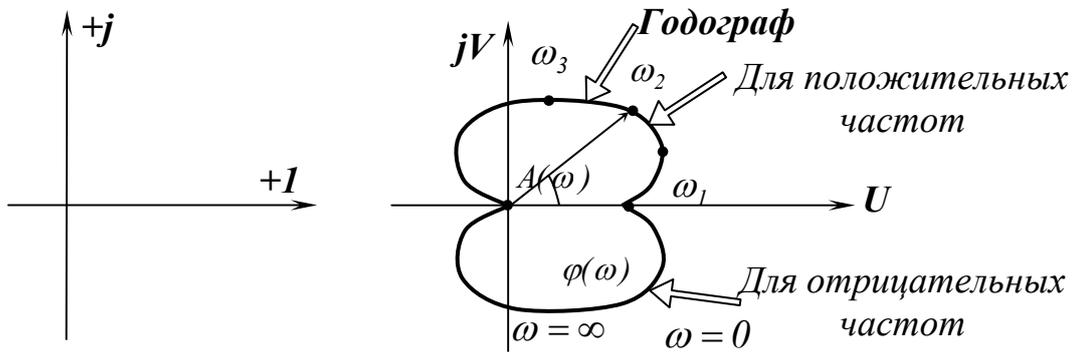


Рис. 4.22. Пример графического изображения годографа $W(j\omega)$ на комплексной плоскости

Вместо АФЧХ можно построить отдельно амплитудную частотную характеристику (АЧХ) и фазо-частотную характеристику (ФЧХ). АЧХ отражает, как система пропускает сигнал различной частоты. ФЧХ отражает фазовые сдвиги, вносимые системой на разных частотах.

В некоторых случаях целесообразно изображать АФЧХ, используя полярные координаты, т.е. непосредственно вычисляя модуль и фазу, по которым вычисляется вещественная и мнимая части путем умножения модуля на направляющий косинус между вектором и соответствующей осью.

4.4.4. Логарифмические частотные характеристики

Логарифмические частотные характеристики вычисляются в результате логарифмирования частотной передаточной функции:

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega).$$

На практике обычно используется десятичный логарифм и изображаются логарифмические ЛАЧХ и ЛФЧХ. Для построения ЛАЧХ определяется величина:

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega), \quad \text{дб(децибел)}. \quad (4.3)$$

Бел представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности. Децибел равен 0,1 Бел.

Так как частотная передаточная функция представляет собой отношение не мощностей, а выходной и входной величин, то увеличение этого отношения в десять раз будет соответствовать увеличению отношения мощностей в 100 раз, что соответствует 2 Белам или 20 дб. Поэтому в правой части уравнения (4.3) имеем множитель 20.

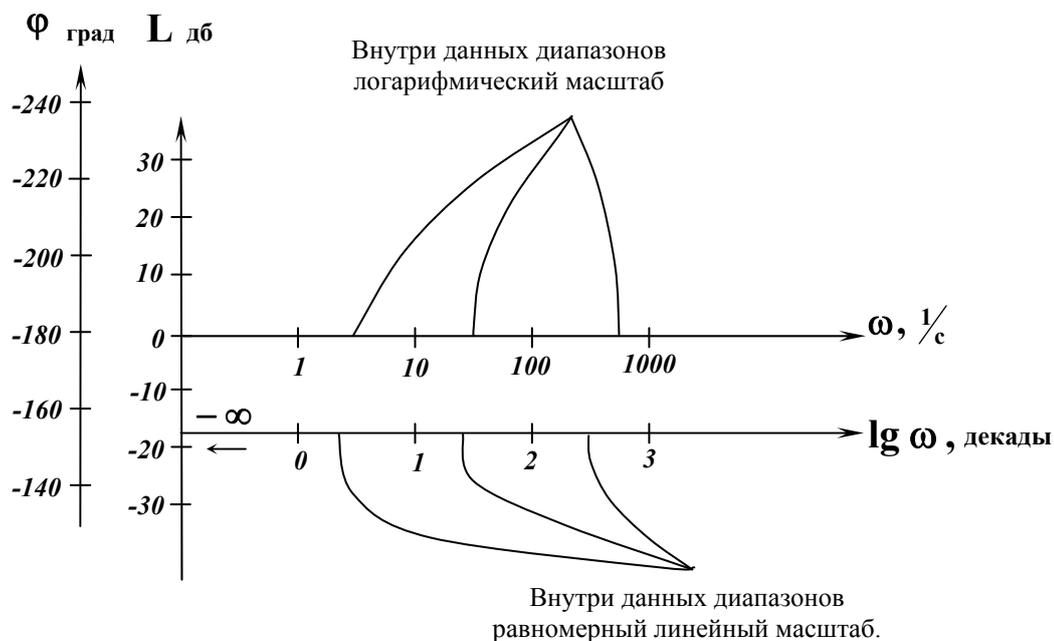


Рис. 4.23. Пример графического изображения ЛАЧХ и ФЧХ

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ используется стандартная координатная сетка. По оси абсцисс откладывается угловая частота в логарифмическом масштабе, т.е. наносятся отметки, соответствующие $\lg \omega$. Около отметки пишется значение частоты ω (рад/с). Иногда по оси абсцисс указывается не значение частоты, а ее десятичный логарифм. Единица приращения логарифма соответствует одной декаде, т.е. удесятерению частоты.

Ось абсцисс должна проходить через точку 0 дБ, что соответствует значению:

$$A(\omega) = 1, \quad \text{т.к.} (\lg 1 = 0).$$

Следует учесть, что точка $\omega = 0$ лежит на оси частот слева в ∞ , т.к. $\lg 0 = -\infty$. Поэтому ось ординат проводят так, чтобы справа от нее можно было представить изображение всей ЛАЧХ. Для построения ЛФЧХ на оси ординат откладывается фаза в градусах в линейном масштабе. Целесообразно совместить точку нуля децибел с точкой оси, где фаза равна (-180°) . Отрицательный сдвиг по фазе откладывается вверх, а положительный – вниз. Главным достоинством ЛАЧХ является возможность построения их практически без вычислительной работы. Во многих случаях ЛАЧХ может быть представлена в виде совокупности отрезков прямых линий с наклонами, кратными величине 20 дБ на декаду.

Практические примеры.

Допустим, модуль частотной передаточной функции элемента равен $A(\omega) = k_0$. ЛАЧХ такого элемента будет равна $L(\omega) = 20 \lg k_0$. Изображение ЛАЧХ на рис. 8.6 представляет прямую линию 1, параллельную оси абсцисс.

Известно, что для интегрирующего элемента первого порядка модуль $A(\omega)$ частотной передаточной функции и значение ЛАЧХ равны

$$A(\omega) = \frac{k_1}{\omega},$$

$$L(\omega) = \frac{20 \lg k_1}{\omega} = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega.$$

ЛАЧХ представляет прямую линию 2 на рис. 8.6, проходящую через точку с координатами $\omega = 1 \text{ рад/с}$ и $L(\omega) = 20 \lg k_1$ и, имеющей отрицательный наклон (-20 дБ/дек), т.к. каждое удесятерение частоты вызовет увеличение $\lg \omega$ на «1» и уменьшение $L(\omega)$ на 20 дБ. Точка пересечения прямой линии 2 с осью частот определяется при $L(\omega) = 0$ или $A(\omega) = 1$. Эта точка характеризуется частотой среза ω_{cp} , равной в данном случае $\omega_{cp1} = k_1$.

Для интегрирующего элемента второго порядка модуль $A(\omega)$ частотной передаточной функции равен

$$A(\omega) = \frac{k_2}{\omega^2}.$$

ЛАЧХ представляет прямую линию 3 на рис. 8.6 с наклоном (- 40 дб.) и частотой среза $\omega_{cp2} = \sqrt{k_2}$. В том случае, когда значение $A(\omega) = \frac{k_N}{\omega^N}$, где N – действительное целое положительное число, то ЛАЧХ представляет прямую линию с наклоном (- $N 20$ дб.) и частотой среза $\omega_{cp2} = \sqrt{k_N}$.

Рассмотрим случай, когда элемент является дифференцирующим звеном первого порядка с модулем частотной передаточной функции

$$A(\omega) = k_3 \omega.$$

Тогда ЛАЧХ будет иметь вид

$$L(\omega) = 20 \lg k_3 + 20 \lg \omega.$$

Графическое изображение ЛАЧХ на рис. 4.24 представляет прямую линию 4 с наклоном (+ 20 дб) и частотой среза $\omega_{cp3} = \frac{1}{k_3}$. Аналогичное соотношение можно получить для дифференцирующего элемента высокого порядка с модулем частотной передаточной функции $A(\omega) = k_M \omega^M$. В этом случае ЛАЧХ будет представлять прямую линию с наклоном (+ $M 20$ дб) и частотой среза

$$\omega_{cp3} = \frac{1}{\sqrt[M]{k_3}}.$$

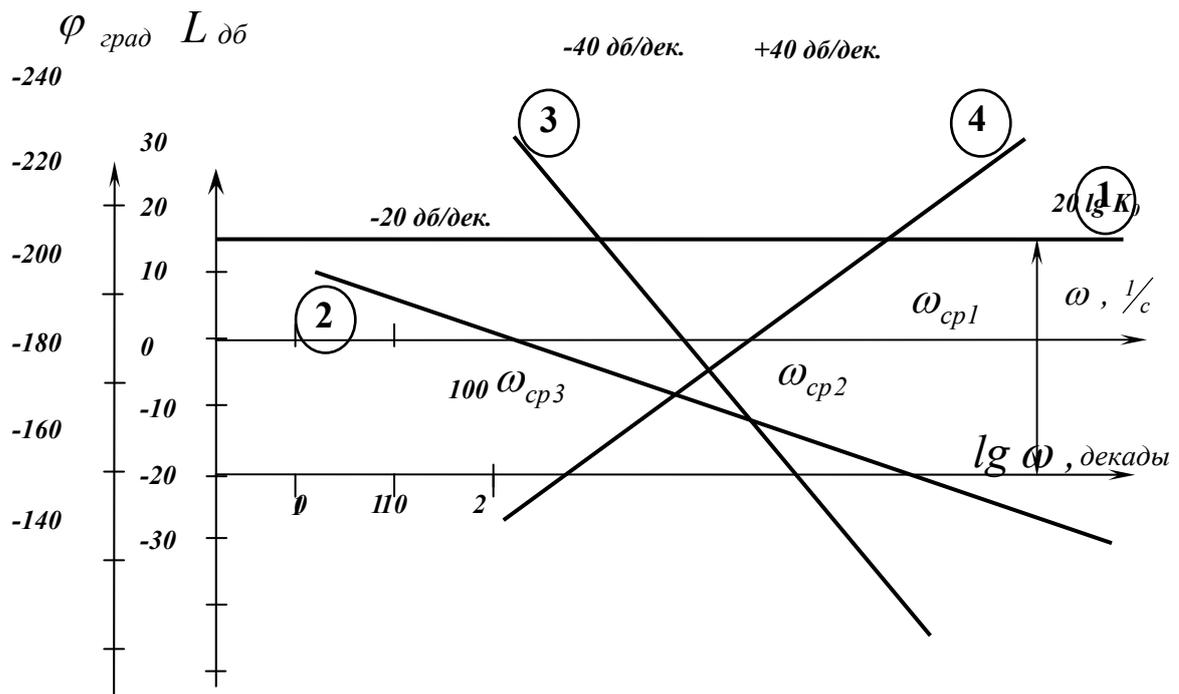


Рис. 4.24. Графическое изображение ЛАЧХ усилительного, интегрирующего и дифференцирующего звеньев

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При исследовании процессов в электротехнических системах целесообразно их представить в виде совокупности типовых звеньев. Далее рассматриваются характеристики некоторых типовых звеньев.

5.1. Безинерционное звено

Данное звено в статике и динамике описывается уравнением:

$$y = kU.$$

Передаточная и частотная функции равны:

$$W(p) = W(j\omega) = k.$$

Примером такого звена является механический редуктор, делитель напряжения, индукционные датчики и т.д.

Временные характеристики звена:

– переходная функция $h(t)$

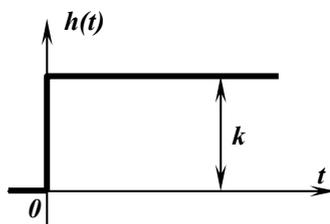


Рис. 5.1. Переходная функция безинерционного звена $h(t) = k \cdot 1(t)$

– весовая функция $\omega(t)$

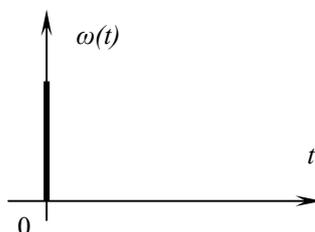


Рис. 5.2. Весовая функция безинерционного звена $\omega(t) = k \cdot \delta(t)$

Частотные характеристики звена, при условии $W(j\omega) = k$:

– амплитудно-фазовая

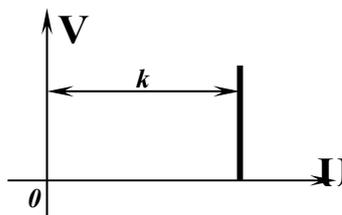


Рис. 5.3. Амплитудно-фазовая характеристика безинерционного звена

– амплитудная и фазовая

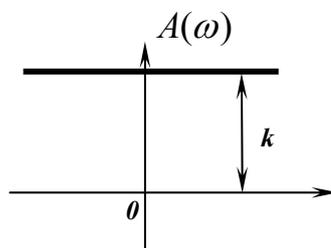


Рис. 5.4. Амплитудная и фазовая характеристика безинерционного звена $A(\omega) = k, \psi = 0$

– логарифмическая

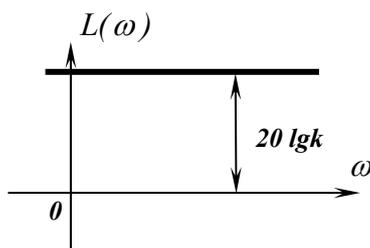


Рис. 5.5. Логарифмическая характеристика безинерционного звена

Безинерционное звено является идеализацией реальных звеньев. В действительности ни одно звено не в состоянии равномерно пропускать все частоты от 0 до ∞ .

5.2. Аperiodическое звено первого порядка

Звено описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy}{dt} + y = kU.$$

Передаточная функция равна следующему выражению:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Примеры аperiodических звеньев первого порядка.

Двигатель постоянного тока.

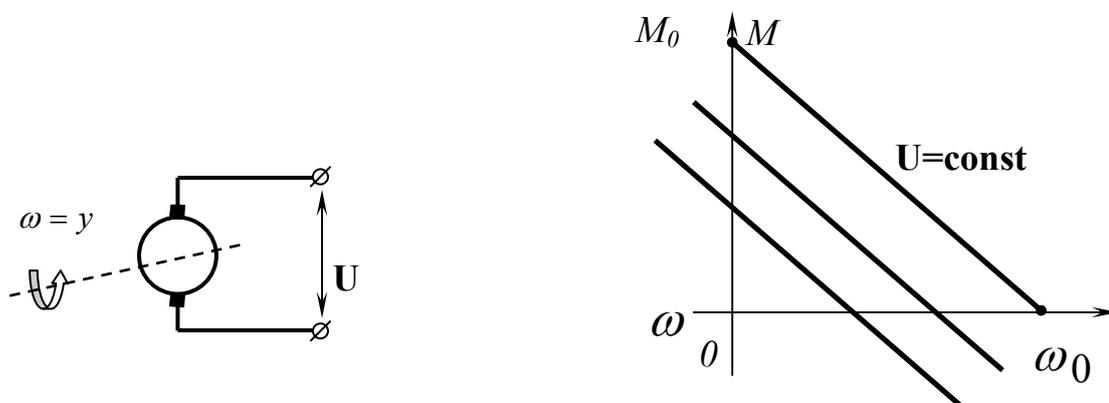


Рис. 5.6. Схема электродвигателя и механические характеристики

Электромеханические процессы в двигателе описываются следующим дифференциальным уравнением

$$J \frac{d\omega}{dt} = k_M U - \frac{M_0}{\omega_0} \omega = k_M U - k_1 \omega,$$

где J – приведенный к валу двигателя момент инерции; k_M – коэффициент пропорциональности.

Данное уравнение приводится к виду

$$T \frac{d\omega}{dt} + \omega = kU,$$

где $T = J \frac{\omega_0}{M_0} = \frac{J}{k_1}$ – постоянная времени; $k = \frac{k_M}{k_1}$ – коэффициент передачи звена.

Генератор постоянного тока.

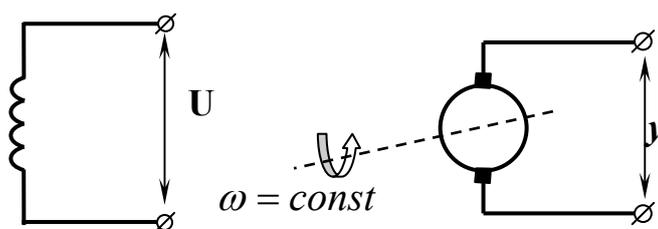


Рис. 5.7. Схема генератора

Электрические RL и RC цепи или четырехполосники.

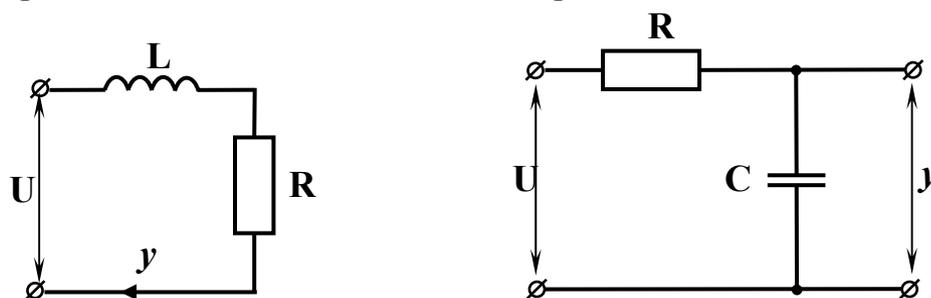


Рис. 5.8. Схемы RL и RC контуров или четырехполосников

Процессы, протекающие в таких электрических цепях можно представить следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} RC \frac{dy}{dt} + y = U, \\ Ty + y = U, \end{cases} \quad \begin{cases} L \frac{dy}{dt} + yR = U, \\ \frac{L}{R} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{R} U, \\ Ty + y = kU. \end{cases}$$

Временные характеристики апериодического звена первого порядка:

– переходная $h(t)$ и весовая $\omega(t)$ функции

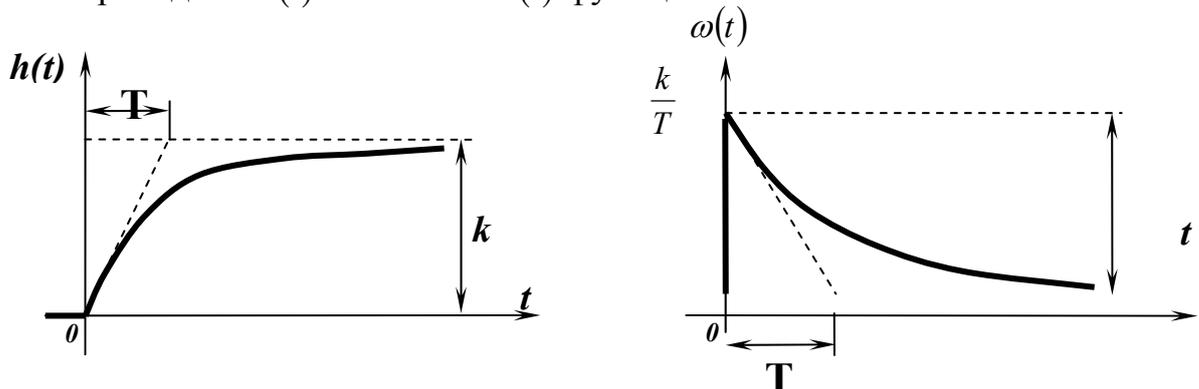


Рис. 5.9. Переходная и весовая функции апериодического звена первого

Аналитическое выражение переходной функции

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t).$$

Аналитическое выражение весовой функции

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t).$$

Частотная передаточная функция определяется уравнением

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

– амплитудно-фазовая частотная характеристика

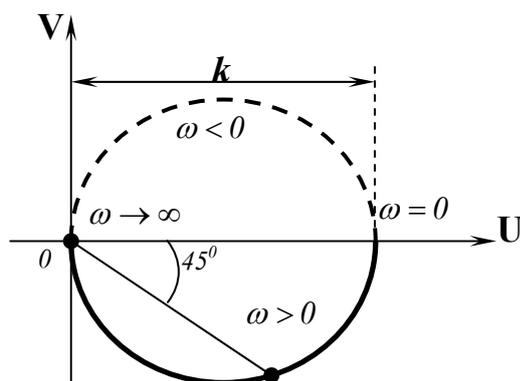


Рис. 5.10. Амплитудно-фазовая частотная характеристика аperiodического звена первого порядка

– амплитудная и фазовая частотные характеристики

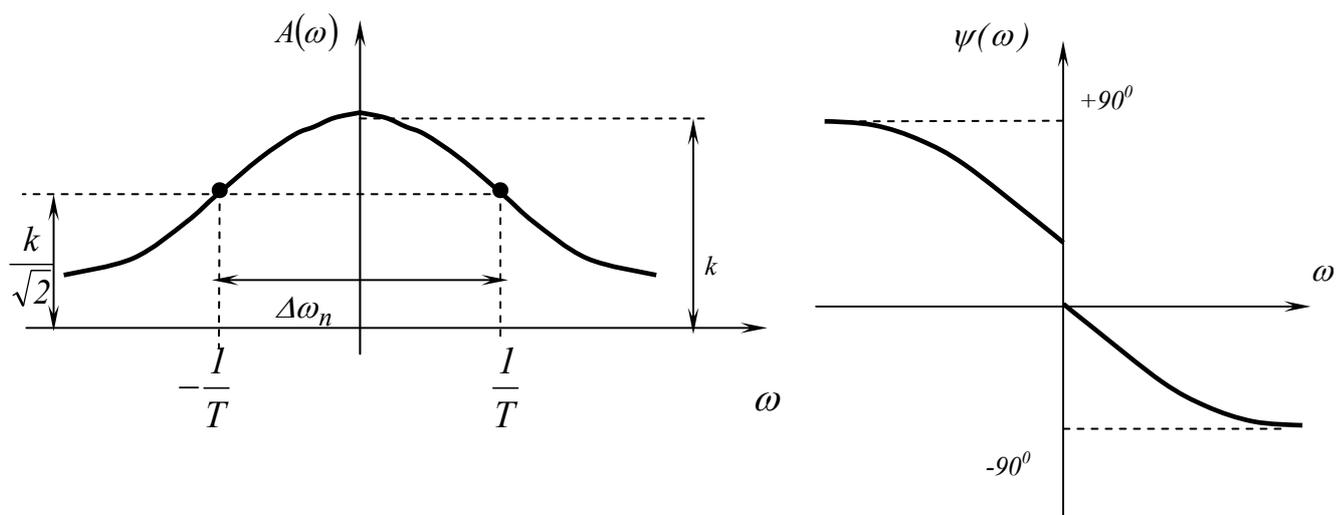


Рис. 5.11. Амплитудная и фазовая частотные характеристики аperiodического звена первого порядка

Модуль частотной характеристики и фазочастотная характеристика определяется выражением

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad \psi(\omega) = -\text{arctg } \omega T.$$

- логарифмическая частотная характеристика

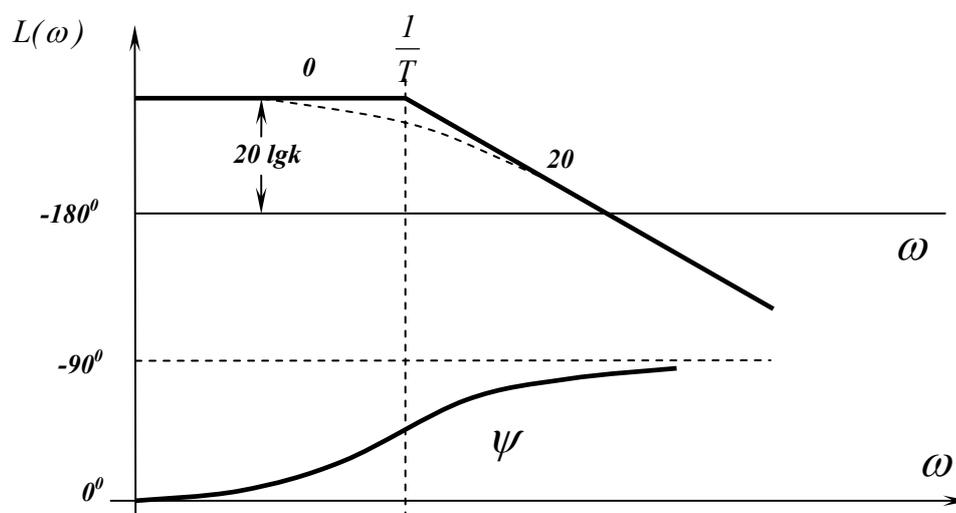


Рис. 5.12. Логарифмическая частотная характеристика аperiodического звена первого порядка

Переходная функция представляет экспоненту, которая рассматривается при $t = 0$. Чем больше постоянная времени, тем дольше длится переходный процесс и медленнее устанавливается значение $y = kU$ на выходе звена. Экспонента приближается к данному значению асимптотически, т.е. в ∞ . Практически, переходный процесс заканчивается через $(3 \div 5)T$. Постоянная времени характеризует инерционность аperiodического звена. Весовая функция может быть определена дифференцированием переходной функции.

Амплитудно-фазовая характеристика для частот $\omega > 0$ имеет вид полуокружности с диаметром k . Величина постоянной времени определяет распределение отметок $\omega = \frac{1}{T}$. На АФХ показаны три

характерные точки $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{T}$, $\omega = \infty$. Из амплитудной

характеристики видно, что колебания малых частот $\omega < \frac{1}{T}$ пропускаются звеном с отношением амплитуд входной и выходной величин, близким к статическому коэффициенту передачи k .

Колебания больших частот $\omega > \frac{1}{T}$ проходят с сильным ослаблением амплитуды. Чем меньше постоянная времени T , тем шире полоса пропускания частот $\Delta\omega_{п}$ у данного звена:

$$\Delta\omega_{\Pi} = \frac{1}{T} - \left(-\frac{1}{T}\right) = \frac{2}{T}.$$

ЛАЧХ изображается в соответствии с уравнением:

$$L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$$

где $|W(j\omega)| = A(\omega) = \frac{y_m(\omega)}{U_m(\omega)} = \frac{\sqrt{k^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + \omega^2 T^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ — отношение числителя и знаменателя $W(j\omega)$ представляется в виде:

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{U_{\text{числ}}^2(\omega) + V_{\text{числ}}^2(\omega)}}{\sqrt{U_{\text{зн}}^2(\omega) + V_{\text{зн}}^2(\omega)}}.$$

Наиболее часто строится асимптотическая ЛАЧХ. На стандартной сетке проводится вертикальная линия через точку с частотой среза (сопрягающая частота) $\omega_c = \frac{1}{T}$. Для частот $\omega < \omega_c$ в выражении $L(\omega)$ под корнем можно пренебречь вторым слагаемым. Тогда при $\omega < \omega_c$ $L(\omega) \approx 20\lg k$. Для больших частот $\omega > \omega_c$ в выражении $L(\omega)$ под корнем можно пренебречь “1” по сравнению с $(\omega^2 T^2)$. Будем иметь при $\omega > \omega_c$ $L(\omega) \approx 20\lg \frac{k}{\omega T}$. Данной характеристике соответствует прямая линия с отрицательным наклоном 20 дб/дек.

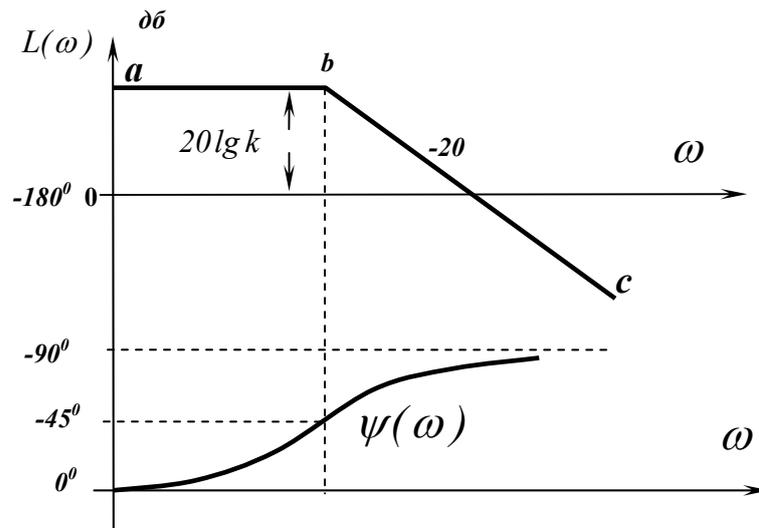


Рис. 5.13. Асимптотическая ЛАЧХ аperiodического звена первого порядка

Ломанная линия abc называется асимптотической ЛАЧХ. Т.е. асимптотическая ЛАЧХ – это ЛАЧХ состоящая из отрезков прямых. Действительная ЛАЧХ будет отличаться от асимптотической и наибольшее отклонение будет в точке b .

$$L\left(\frac{1}{T}\right) = 20\lg\frac{k}{\sqrt{2}} = 20\lg k - 3,03 \text{ дб}.$$

В линейном масштабе это соответствует отклонению в $\sqrt{2}$ раз. При частотах ω слева и справа от ω_c значения ЛАЧХ $L(\omega)$ будут отличаться от асимптотической менее 3 дб.

Фазо-частотная характеристика ФЧХ симметрична относительно частоты ω_c . При $\omega_c = \frac{1}{T}$ $\varphi(\omega) = -45^\circ$ (т.к. $\arctg \omega T = \arctg 1 = 45^\circ$).

5.3. Аперидическое звено второго порядка

Звено описывается дифференциальным уравнением:

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kU.$$

При этом корни характеристического уравнения

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0 \tag{5.1}$$

должны быть вещественными. Это условие будет выполняться при $T_1 \geq 2T_2$. В операторной форме уравнение (5.1) имеет вид:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)y = kU. \tag{5.2}$$

При корнях

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$$

характеристического полинома уравнение (5.2) записывается в виде сомножителей:

$$(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)y = kU$$

и передаточная функция звена равна:

$$W(p) = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}.$$

Примеры апериодических звеньев второго порядка:

Двигатель постоянного тока при отсутствии момента нагрузки на валу двигателя.

При определенных допущениях уравнения электромеханического равновесия записываются следующим образом:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + R_i + C_e \omega_{\text{дв}} = U(t), \\ C_M i - J \frac{d\omega}{dt} = 0. \end{cases}$$

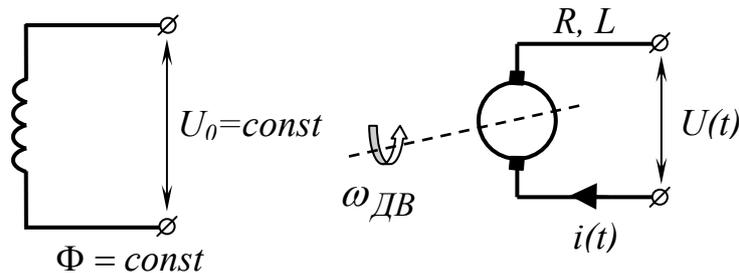


Рис. 5.14. Схема замещения электродвигателя постоянного тока

где C_e, C_M – коэффициенты пропорциональности; i – ток якоря; J – приведенный момент генерации; L, R – индуктивность и активное сопротивление цепи якоря.

Используя операторную форму записи, передаточная функция по скорости двигателя будет равна:

$$W(p) = \frac{\omega_{\text{дв}}(p)}{U(p)} = \frac{1}{C_e} \cdot \frac{1}{T_3 T_M p^2 + T_M p + 1},$$

где $T_M = \frac{JR}{C_e C_M} = J \frac{\omega_{\text{дв}0}}{M_n}$ – электромеханическая постоянная времени;

ω_{0e0}, M_n – скорость холостого хода и пусковой момент двигателя;

$T_{\text{Э}} = \frac{R}{L}$ – электромагнитная постоянная времени.

Передаточную функцию $W(p)$ можно записать в виде:

$$W(p) = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}.$$

При этом для корней $T_{3,4} = \frac{T_M}{2} \pm \sqrt{\frac{T_M^2}{4} - T_{\text{Э}} T_M}$ характеристического уравнения должно выполняться условие $T_M \geq 4T_{\text{Э}}$, позволяющее получить вещественные значения. Также необходимо выполнение условия $T_3 > T_4$.

RL или RC контуры

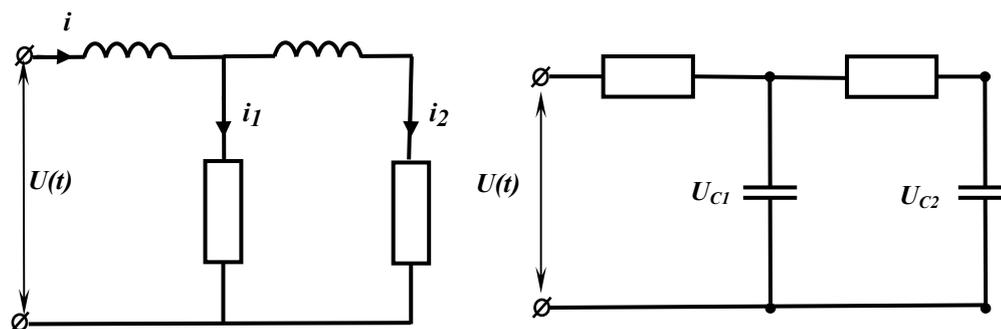


Рис. 5.15. Схемы замещения с RL и RC контурами

Передаточные функции данных многополюсников соответствуют свойствам апериодического звена второго порядка. Для схемы с RL элементами передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{i_2(p)}{U(p)}.$$

Для схемы с RC элементами передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{U_{C2}(p)}{U(p)}.$$

Временные характеристики аperiodического звена второго порядка:

– переходная функция $h(t)$ приведена на рисунке 5.16.

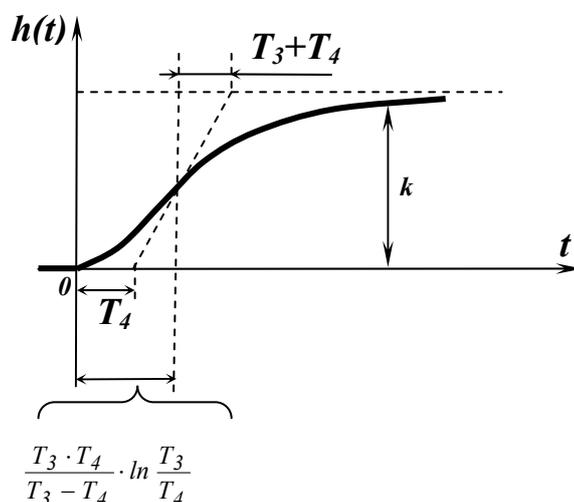


Рис. 5.16. Переходная функция аperiodического звена второго порядка

Аналитическое выражение переходной функции

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t).$$

– весовая функция $\omega(t)$

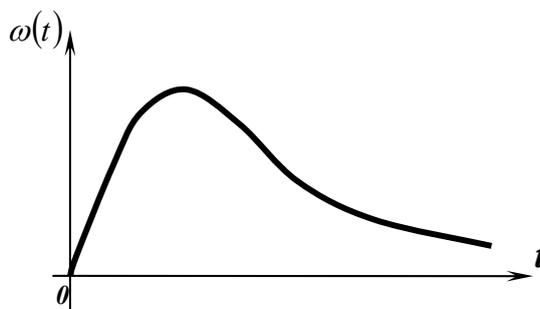


Рис. 5.17. Весовая функция аperiodического звена второго порядка

Аналитическое выражение весовой функции

$$w(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t).$$

Частотная передаточная функция определяется выражением:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}$$

– амплитудно-фазовая частотная характеристика

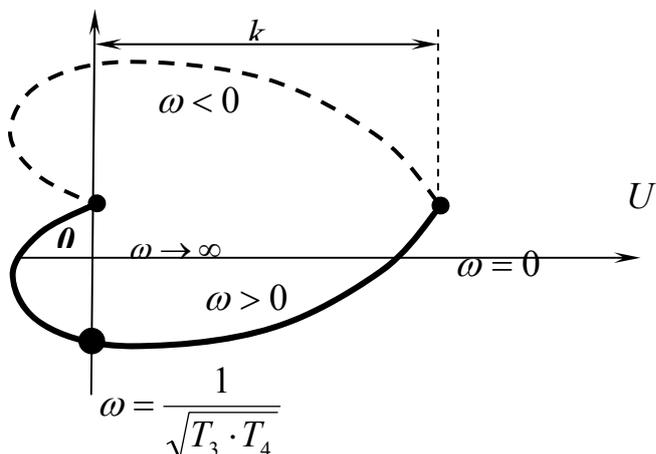


Рис. 5.18. Графическое изображение амплитудно-фазовой частотной характеристики аperiodического звена второго порядка

– амплитудно-фазовая частотная характеристика

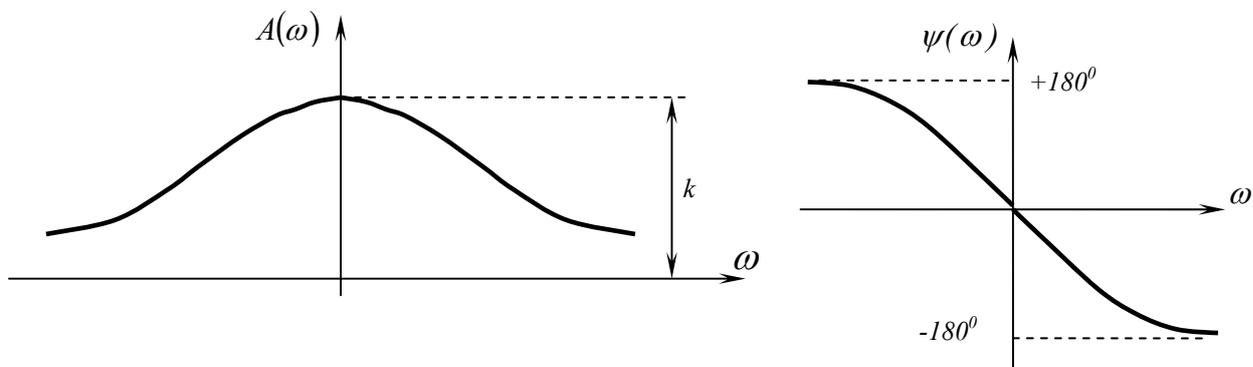


Рис. 5.19. Графическое изображение амплитудной и фазовой частотных характеристик аperiodического звена второго порядка

Модуль частотной передаточной функции определяется выражением

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}; \quad \psi(\omega) = -\arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4.$$

– логарифмическая частотная характеристика

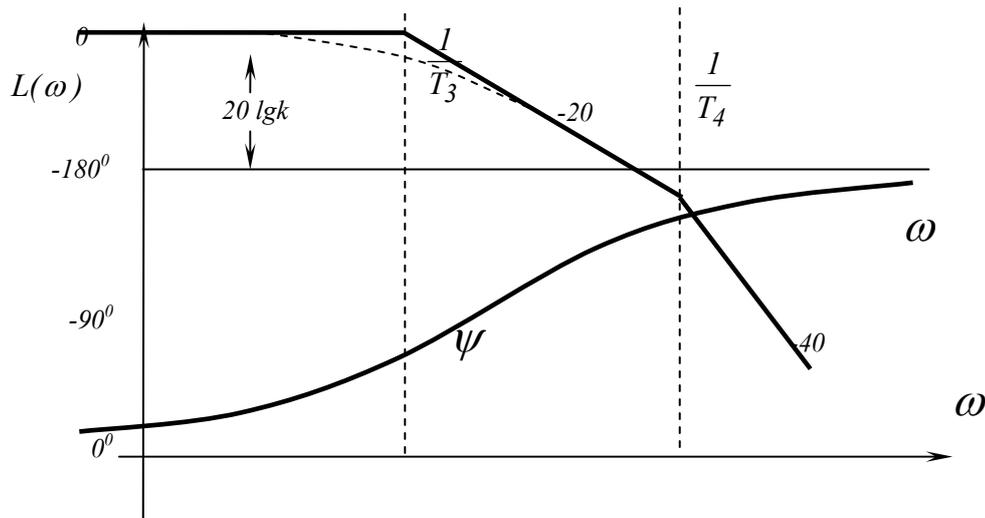


Рис. 5.20. Графическое изображение логарифмической частотной характеристики аperiodического звена второго порядка

Построение асимптотической ЛАЧХ производится аналогичным образом, как и для аperiodического звена первого порядка. Первоначально проводятся вспомогательные вертикальные линии через значения частот среза $w_{cp1} = \frac{1}{T_3}$ и $w_{cp2} = \frac{1}{T_4}$ (полагаем, что $T_3 > T_4$).

ЛАЧХ изображается на рис. 5.20 на основе выражения:

$$L(w) = 20 \lg |W(jw)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(1 + w^2 T_3^2)} \sqrt{(1 + w^2 T_4^2)}}. \quad (5.3)$$

Левее частоты среза w_{cp1} данное выражение заменяется приближенным уравнением:

$$L(w) = 20 \lg k.$$

Этому уравнению соответствует прямая линия с нулевым наклоном – первая асимптота. Для частот $w_{cp1} < w < w_{cp2}$ выражение (5.3) принимает вид:

$$L(w) = 20 \lg \frac{k}{w T_3}.$$

Данному уравнению соответствует прямая линия с отрицательным наклоном 20 дБ/дек. Для частот $\omega > \omega_{cp2}$ выражение (5.3) принимает вид:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega^2 T_3 T_4}.$$

Данному выражению соответствует прямая линия с отрицательным наклоном 40 дБ/дек.

Действительная ЛАЧХ отличается от асимптотической в точках излома на 3 дБ.

5.4. Колебательное звено

Звено описывается тем же дифференциальным уравнением, что и апериодическое звено второго порядка, однако корни характеристического уравнения должны быть комплексными, т.е. выполняться условие $T_1 < 2T_2$.

Передаточная функция колебательного звена записывается в виде:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{k}{\frac{p^2}{q^2} + \frac{2\xi p}{q} + 1}, \quad (5.4)$$

где $q = \frac{1}{T}$ – угловая частота свободных колебаний (при отсутствии затухания); ξ – параметр затухания ($0 < \xi < 1$).

Примеры колебательных звеньев.

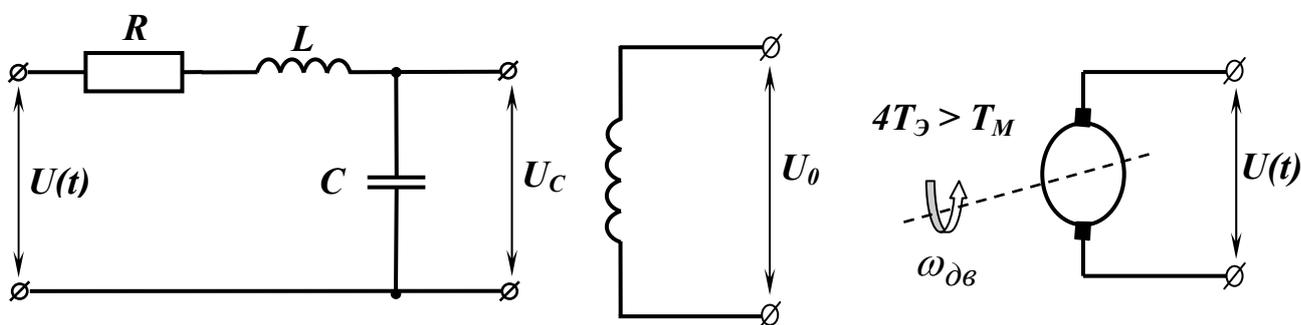


Рис. 5.21. Схемы замещения RLC контура и электродвигателя постоянного тока при условии $4T_э > T_M$

Передаточная функция четырехполюсника равна

$$W(p) = \frac{U_c(p)}{U(p)}.$$

Передаточная функция электродвигателя постоянного тока при условии $4T_\sigma > T_M$ определяется уравнением

$$W(p) = \frac{w_{\text{дв}}(p)}{U(p)}.$$

Корни характеристического уравнения передаточной функции (5.4) вычисляются следующим образом

$$p_{1,2} = -\gamma \pm j\lambda = -\frac{\xi}{T} \pm j\frac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2} = -\xi q \pm jq\sqrt{1-\xi^2}.$$

Значение γ представляет собой коэффициент затухания переходного процесса, λ – частоту затухающих колебаний.

Временные характеристики колебательного звена – переходная характеристика колебательного звена

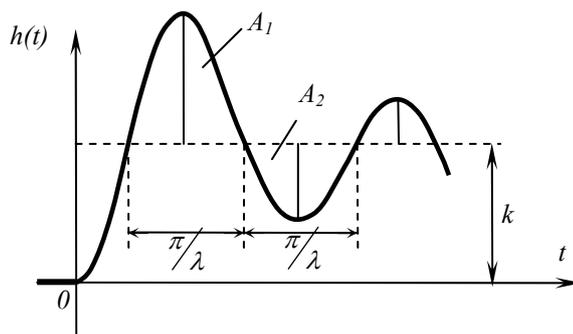


Рис. 5.22. Переходная функция колебательного звена

Коэффициент затухания переходного процесса, частота затухающих колебаний, переходная функция определяются следующими уравнениями:

$$\gamma = \frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2}, \quad \gamma = \xi \cdot q, \quad \lambda = q\sqrt{1-\xi^2},$$

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t \right) \right] \cdot 1(t).$$

– весовая характеристика колебательного звена

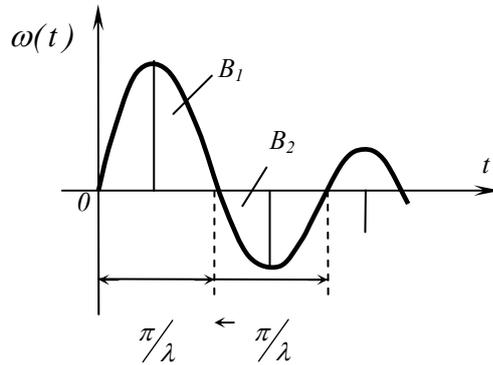


Рис. 5.23. Весовая функция колебательного звена

Коэффициент затухания переходного процесса, частота затухающих колебаний, весовая функция определяются следующими уравнениями:

$$\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{B_1}{B_2}, \quad q = \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}, \quad \xi = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}}, \quad w(t) = \frac{kq^2}{\lambda} e^{-\gamma t} \cdot \sin \lambda t \cdot 1(t).$$

Частотные характеристики колебательного звена

Частотная передаточная функция определяется уравнением:

$$W(j\omega) = \frac{k}{-\frac{\omega^2}{q^2} + j \frac{\omega 2\xi}{q} + 1}.$$

– амплитудно-фазовая частотная характеристика

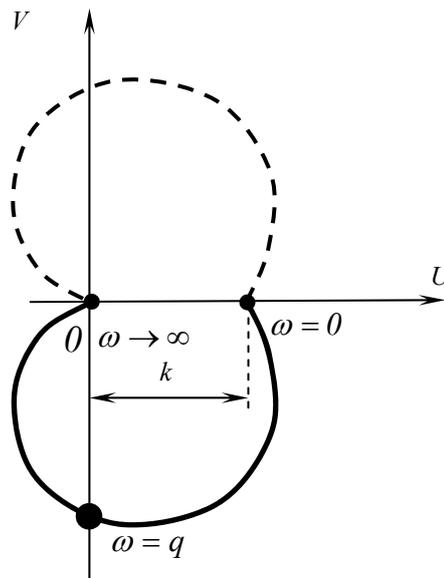


Рис. 5.24. Графическое изображение амплитудно-фазовой частотной характеристики колебательного звена

– амплитудная и фазовая частотные характеристики

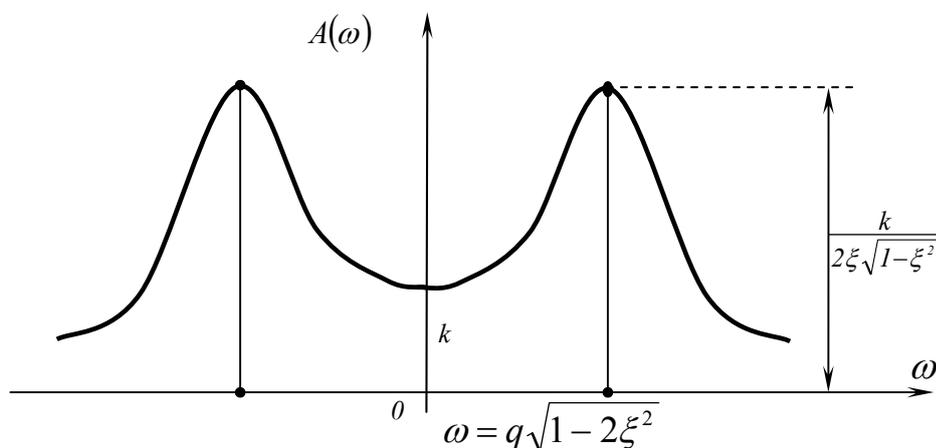


Рис. 5.25. Графическое изображение амплитудной частотной характеристики колебательного звена

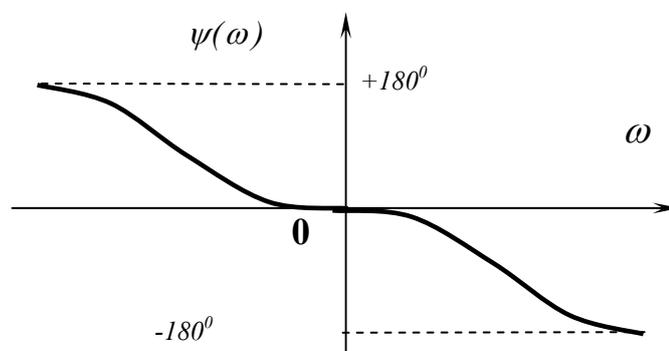


Рис. 5.26. Графическое изображение фазо-частотной характеристики колебательного звена

Модуль и фаза частотной передаточной функции определяются выражениями:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}}, \quad \psi(\omega) = -\arctg \frac{2\omega T \xi}{1 - \omega^2 T^2}.$$

– логарифмические частотные характеристики колебательного звена

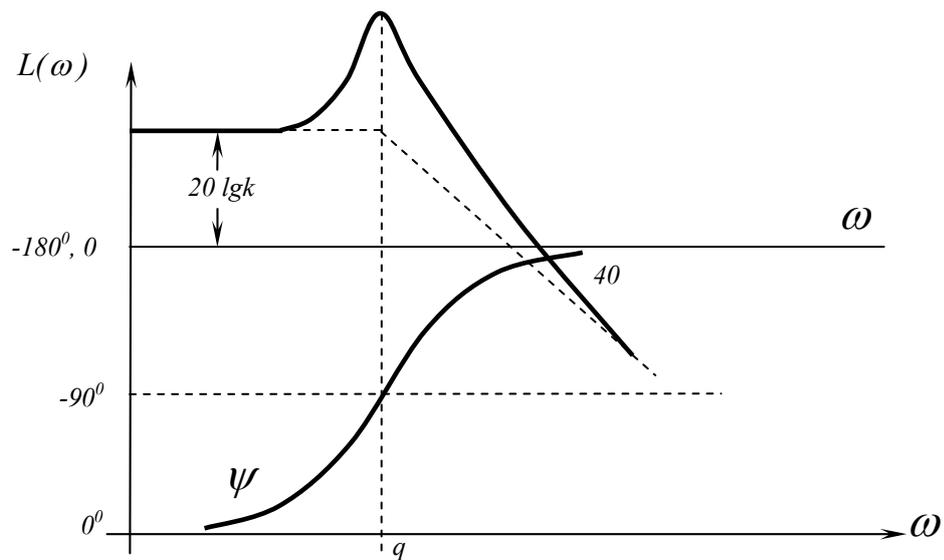


Рис. 5.27. Графическое изображение логарифмических частотных характеристик колебательного звена

Амплитудно-частотная характеристика может иметь резонансный пик. Высота пика будет тем больше, чем меньше параметр затухания:

$$A(\omega)_M = \frac{k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Максимуму амплитудно-частотной характеристики соответствует частота:

$$\omega_M = q\sqrt{1-2\xi^2}.$$

ЛАЧХ строится по выражению:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{q^2}}}. \quad (5.5)$$

Для построения ЛАЧХ такого вида используются так называемые “нормальные” ЛАЧХ. При этом выражение (5.5) записывается в виде суммы:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{q^2}}}$$

Построение первого слагаемого не представляет никакого труда. Второе слагаемое может быть построено в функции относительной частоты $\left(\frac{\omega}{q}\right)$ для различных значений параметра ξ в виде нормированных кривых.

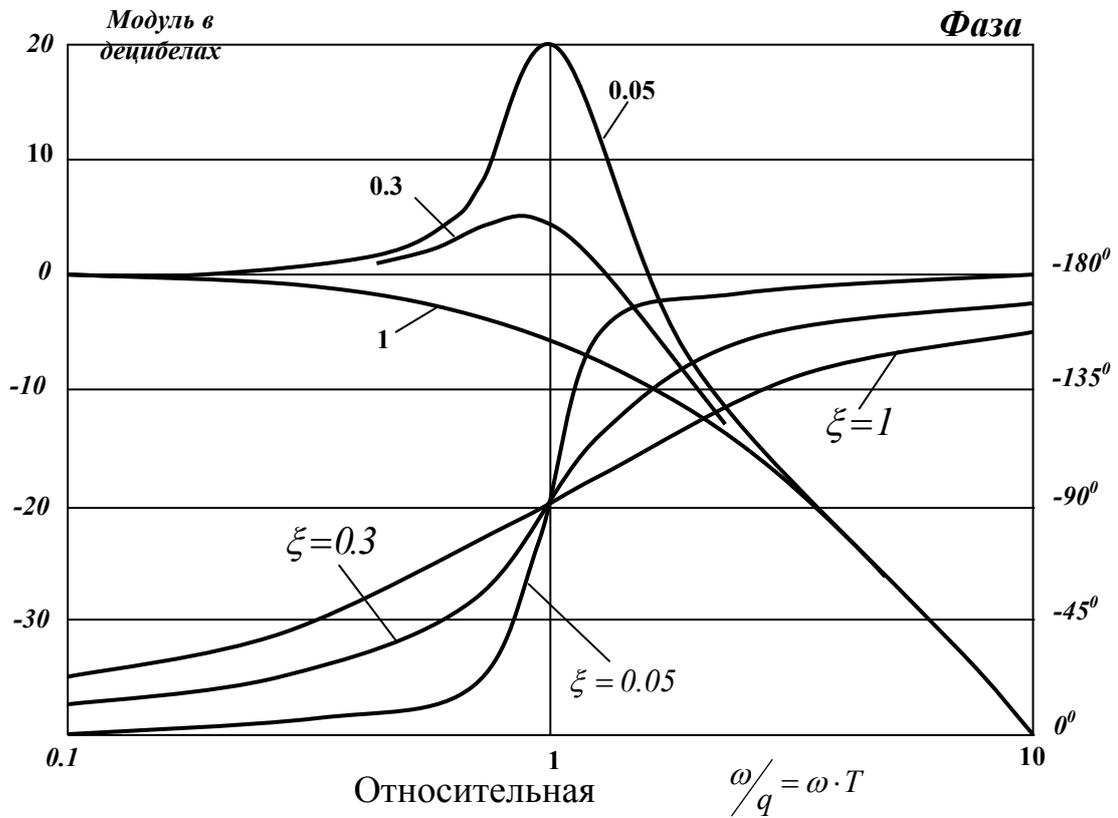


Рис. 5.28. Графическое изображение нормированных ЛАЧХ колебательного звена

Для построения истинной ЛАЧХ необходимо выбрать нормированную ЛАЧХ, соответствующую данному значению ξ , увеличить их значения на $20 \lg k$ и перейти к действительной частоте ω умножением на q . ФЧХ также определяется по нормированным характеристикам, построенным по выражению:

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi \frac{\omega}{q}}{1 - \frac{\omega^2}{q^2}}.$$

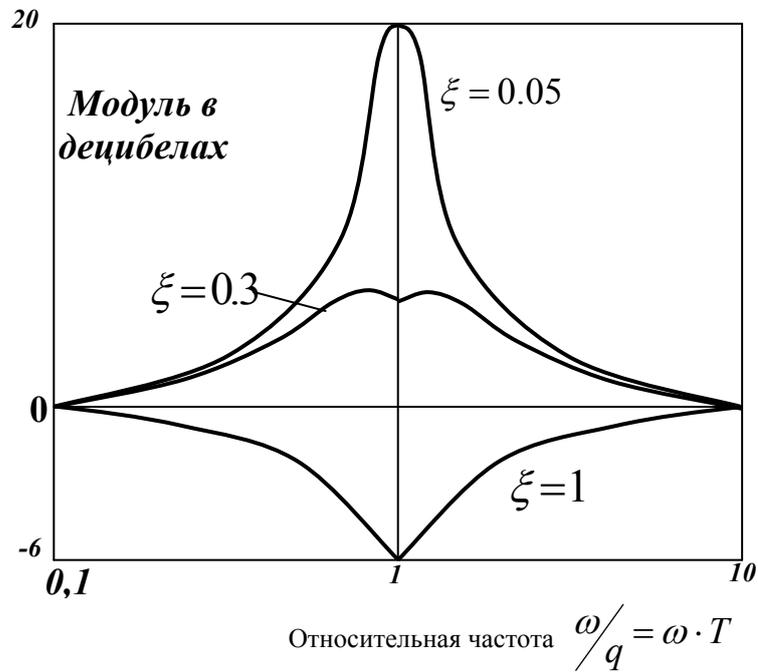


Рис. 5.29. Графическое изображение нормированных логарифмических ФЧХ колебательного звена

Существуют также нормированные переходные характеристики колебательного звена для $k = 1$ в функции относительного времени (qt).

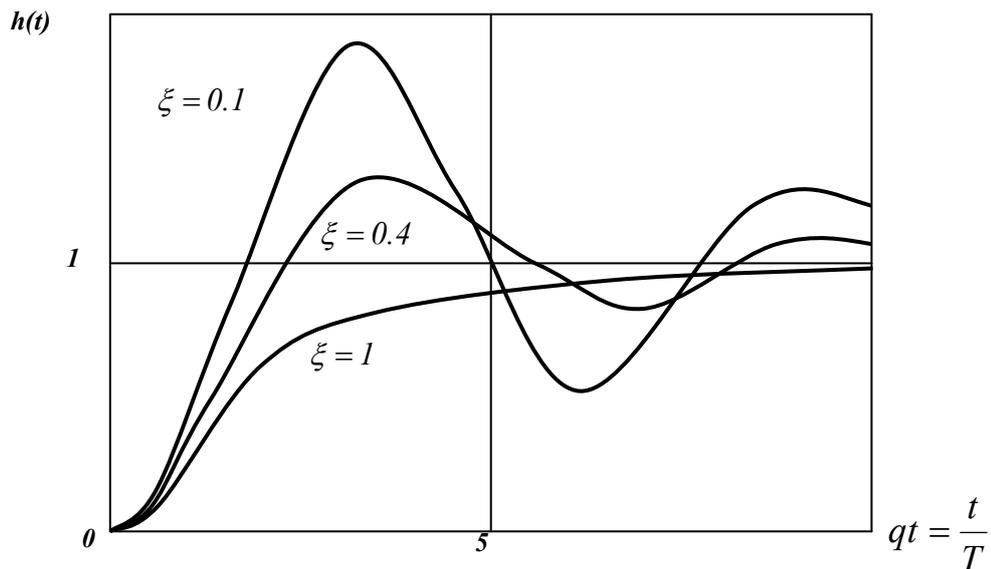


Рис. 5.30. Графическое изображение нормированных переходных характеристик колебательного звена

Сравнительный анализ характеристик показывает, что снижение значения параметра ξ приводит к повышению колебательности переходного процесса и росту резонансного пика АЧХ.

5.5. Консервативное звено

Данное звено является частным случаем колебательного звена при $\xi = 0$. Передаточная функция консервативного звена определяется уравнением:

$$W(p) = \frac{k}{\frac{p^2}{q^2} + 1}.$$

В этом звене пренебрегают рассеянием энергии, т.е. отсутствуют потери.

Временные характеристики:

- переходная функция $h(t)$ консервативного звена:

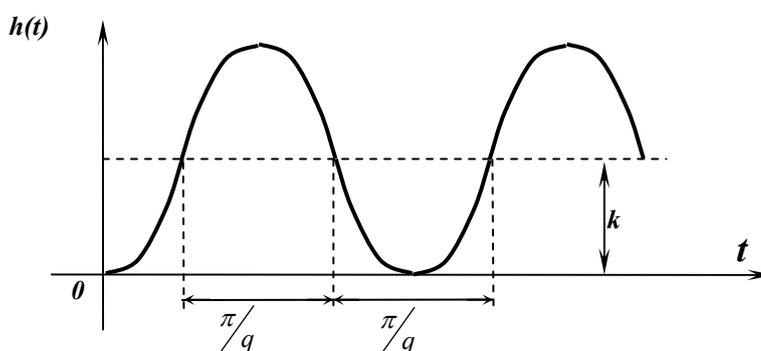


Рис 5.31. Графическое изображение переходной функции консервативного звена

Переходная функция консервативного звена определяется выражением

$$h(t) = k(1 - \cos qt) \cdot 1(t).$$

- весовая функция $w(t)$ консервативного звена:

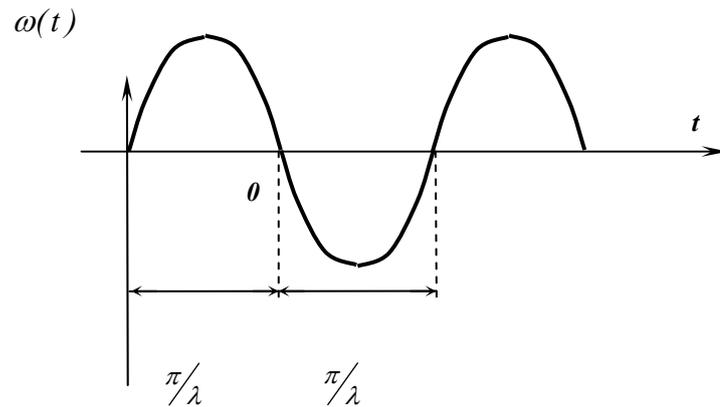


Рис. 5.32. Графическое изображение весовой функции

Переходная функция консервативного звена определяется выражением

$$w(t) = kq \cdot \sin qt \cdot 1(t).$$

Частотные характеристики консервативного звена.

Частотная передаточная функция соответствует уравнению:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \frac{\omega^2}{q^2}}.$$

- амплитудно-фазовая частотная характеристика:

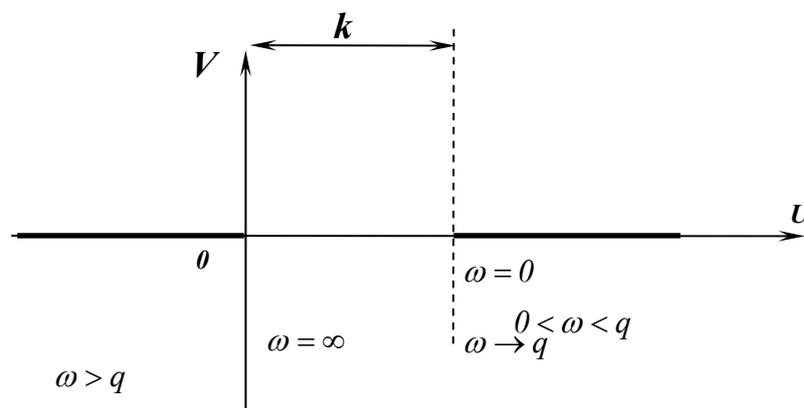


Рис. 5.33. Графическое изображение амплитудно-фазовой частотной характеристики консервативного звена

- амплитудная и фазовая частотные характеристики:

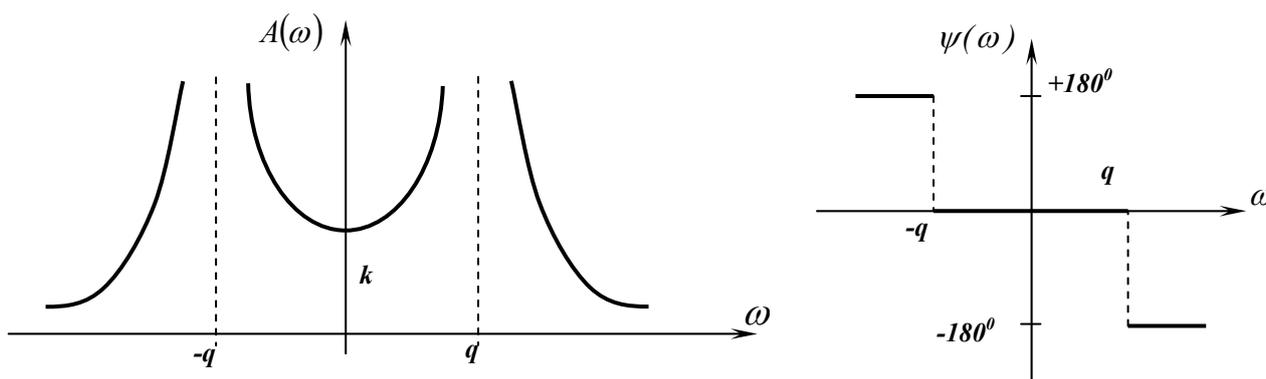


Рис. 5.34. Графическое изображение амплитудной и фазовой частотных характеристик консервативного звена

Модуль и фаза частотной передаточной функции консервативного звена определяются выражениями:

$$A(\omega) = \frac{k}{|1 - \omega^2 T^2|};$$

$$\psi = 0 \text{ при } -q < \omega < q;$$

$$\psi = -180^\circ \text{ при } \omega > q;$$

$$\psi = +180^\circ \text{ при } \omega < -q.$$

- логарифмические частотные характеристики

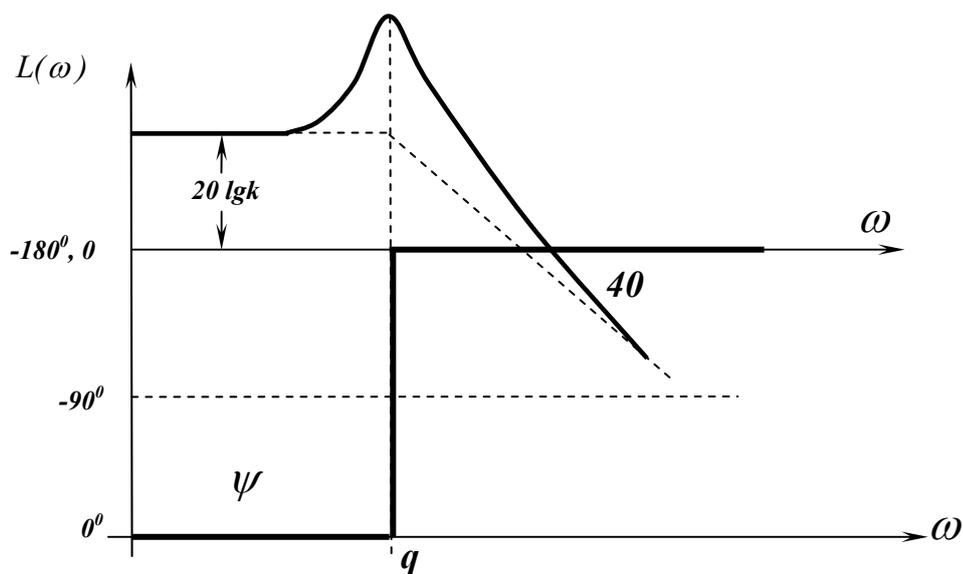


Рис. 5.35. Графическое изображение логарифмических частотных характеристик консервативного звена

При частоте $\omega = q$ модуль частотной передаточной функции обращается в ∞ , а фаза изменяется скачком на 180° .

Амплитудно-фазовая характеристика при $0 < \omega < q$ совпадает с положительной вещественной полуосью при $\omega > q$ – с отрицательной вещественной полуосью.

Построение ЛАЧХ колебательного звена можно также выполнять путём проведения двух асимптот: $20 \lg k$ и (-40 дб/дек) , пересекающихся в точке $\omega_c = \frac{1}{T}$ с последующими нормированными поправками в области ω_c .

5.6. Идеальное интегрирующее звено

Звено описывается следующим дифференциальным уравнением (из уравнения $y = k \int U(t) dt$):

$$\frac{dy}{dt} = kU(t).$$

Передаточная функция звена равна:

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Примеры идеального интегрирующего звена:

Интегрирующий усилитель:

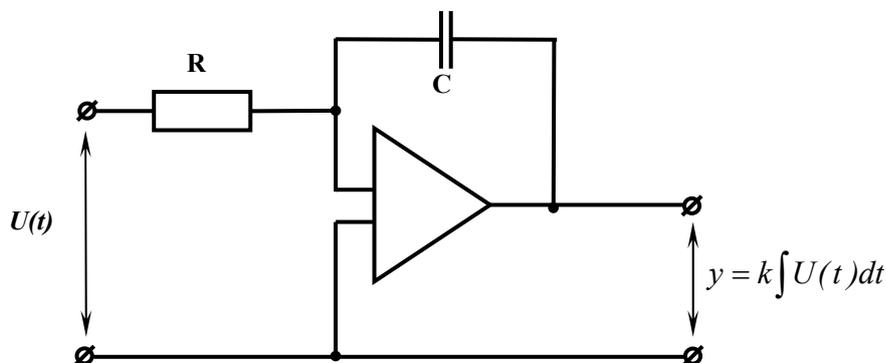


Рис. 5.36. Схема интегрирующего усилителя

Временные характеристики:

- переходная $h(t)$ и весовая $w(t)$ функции идеального интегрирующего звена:

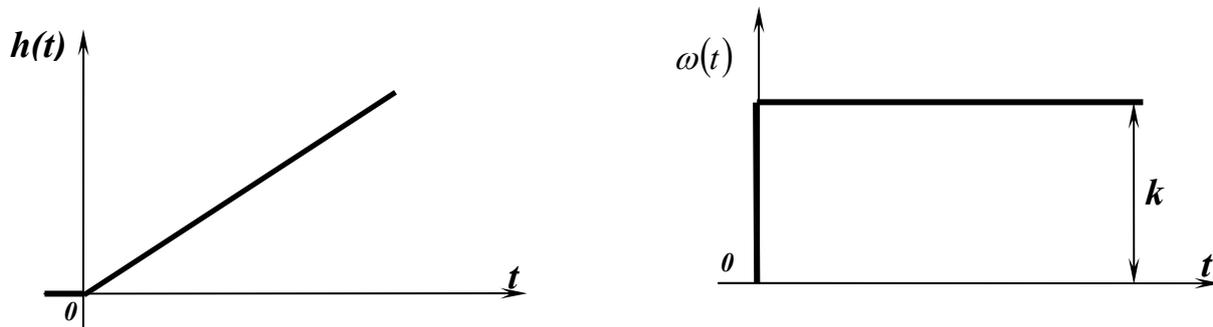


Рис. 5.37. Графическое изображение переходной и весовой функций идеального интегрирующего звена

Переходная функция определяется выражением:

$$h(t) = kt \cdot 1(t).$$

Весовая функция характеризуется уравнением:

$$w(t) = k \cdot 1(t).$$

Частотные характеристики:

Частотная передаточная функция идеального интегрирующего звена имеет вид:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}.$$

- амплитудно-фазовая частотная характеристика:

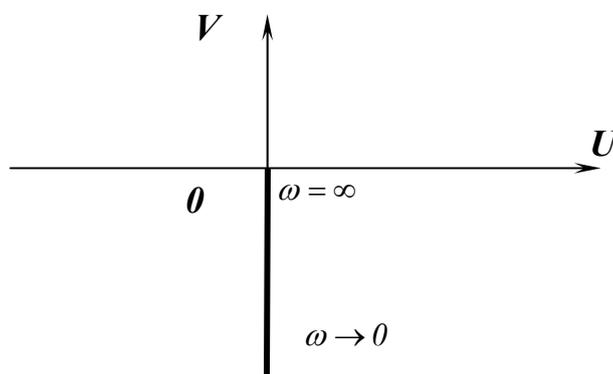


Рис. 5.38. Графическое изображение амплитудно-фазовой частотной характеристики идеального интегрирующего звена

- амплитудная и фазовая частотные характеристики:

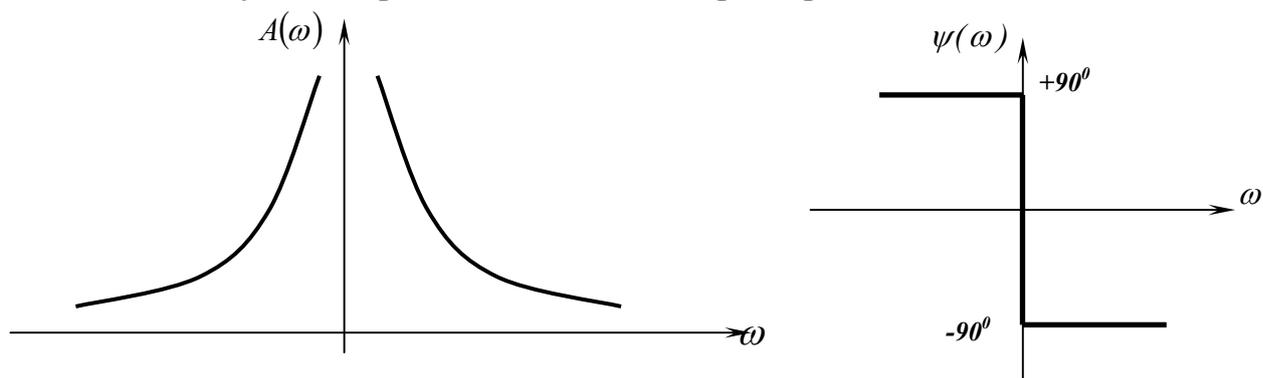


Рис. 5.39. Графическое изображение амплитудной и фазовой частотных характеристик идеального интегрирующего звена

Звено пропускает сигнал тем сильнее, чем меньше его частота. При $w \rightarrow 0$ $A(w) \rightarrow \infty$ и при $w \rightarrow \pm\infty$ $A(w) \rightarrow 0$. Амплитудно-фазовая характеристика приближается к отрицательной части мнимой оси на комплексной плоскости. ЛАЧХ определяется выражением:

$$L(w) = 20 \lg \frac{k}{w}.$$

ЛАЧХ представляет прямую с наклоном (-20 дБ/дек.). Частота среза $w_{cp} = k$. ФЧХ является прямой линией при значении $\varphi = -90^\circ$.

- логарифмические частотные характеристики:

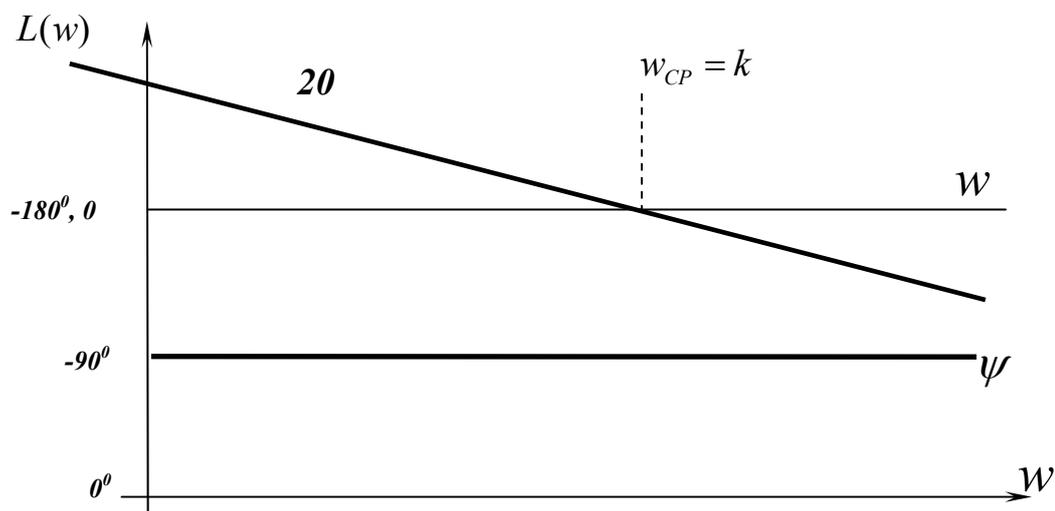


Рис. 5.40. Графическое изображение логарифмических частотных характеристик идеального интегрирующего звена

5.7. Интегрирующее звено с замедлением

Звено описывается дифференциальным уравнением:

$$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = kU(t).$$

Передаточная функция звена определяется уравнением:

$$W(p) = \frac{k}{p(1 + pT)}.$$

Передаточную функцию можно представить в виде последовательного соединения идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка:

$$W(p) = \frac{k}{p} - \frac{kT}{1 + pT}.$$

Временные характеристики:

- переходная $h(t)$ и весовая $w(t)$ функции интегрирующего звена с замедлением:

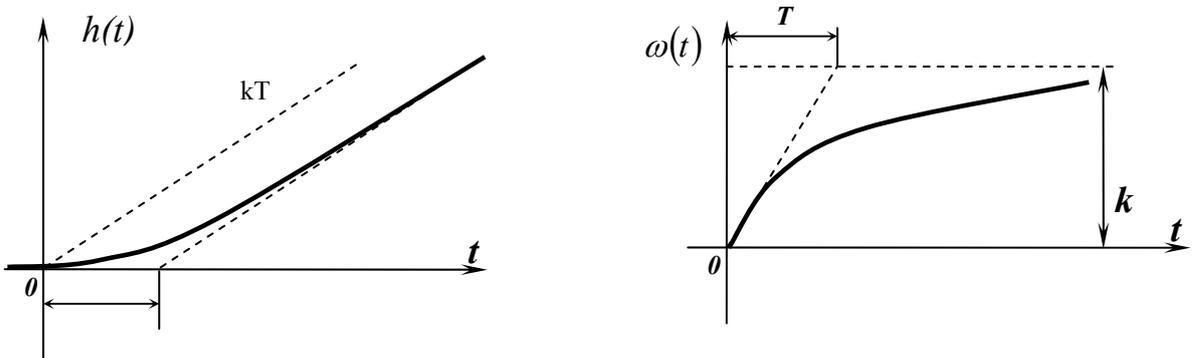


Рис. 5.41. Графическое изображение переходной и весовой функций интегрирующего звена с замедлением

Переходной процесс описывается уравнением:

$$h(t) = k \left[t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] \cdot 1(t).$$

Весовая функция характеризуется следующим выражением:

$$w(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t).$$

Частотные характеристики:

Частотная передаточная функция интегрирующего звена с замедлением определяется уравнением:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega T)}.$$

- амплитудно-фазовая частотная характеристика:

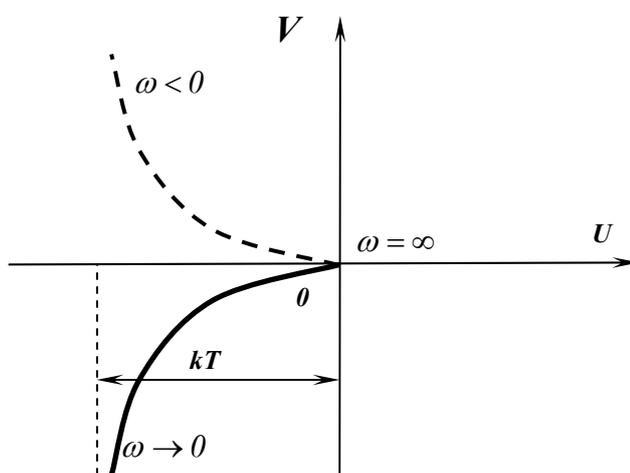


Рис. 5.42. Графическое изображение амплитудно-фазовой частотной характеристики интегрирующего звена с замедлением

- амплитудная и фазовая частотные характеристики:

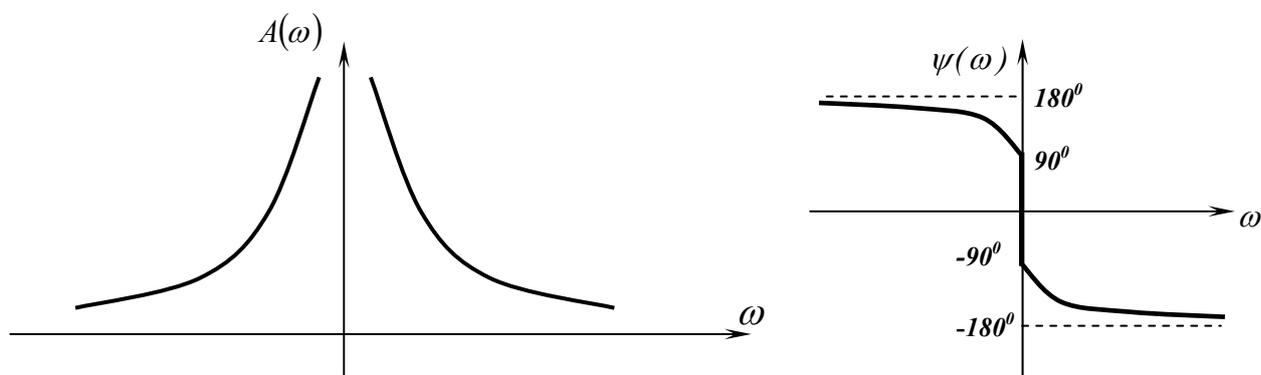


Рис. 5.43. Графическое изображение амплитудной и фазовой частотных характеристик интегрирующего звена с замедлением

- логарифмическая частотная характеристика

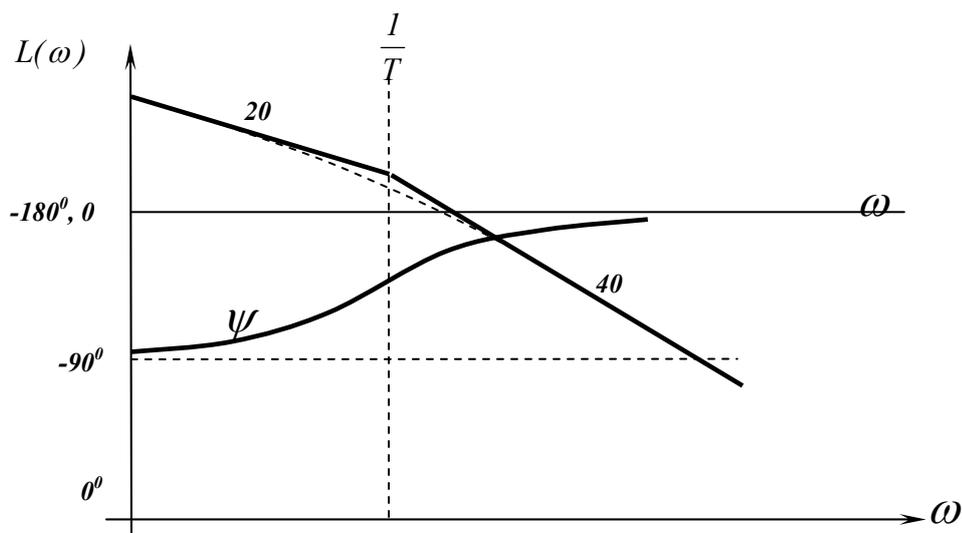


Рис. 5.44. Графическое изображение логарифмических частотных характеристик интегрирующего звена с замедлением

5.8. Изодромное звено

Звено описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = kU + k_1 \frac{dU}{dt}.$$

Передаточная функция соответствует выражению:

$$W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(1 + pT)}{p},$$

где $T = \frac{k_1}{k}$ – постоянная времени звена.

Звено представляется в виде совокупности двух звеньев, действующих параллельно: идеально-интегрирующего и безинерционного.

Временные характеристики:

- переходная $h(t)$ и весовая $w(t)$ функции изодромного звена

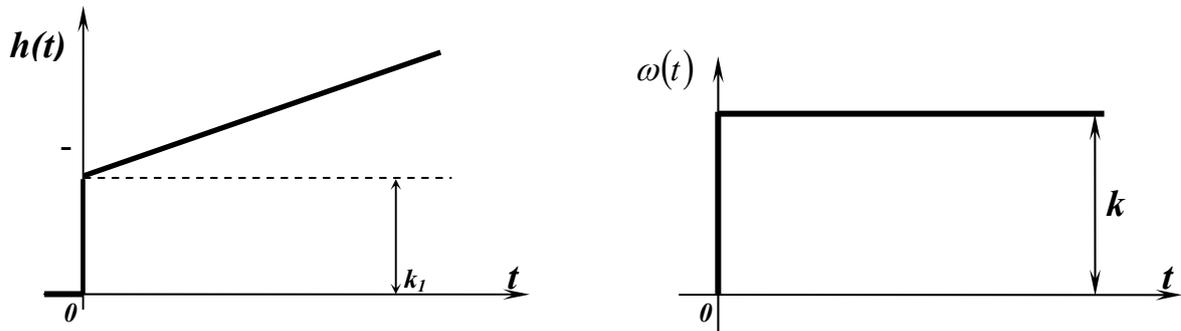


Рис. 5.45. Графическое изображение переходной и весовой функций изодромного звена

Переходной процесс описывается следующим уравнением

$$h(t) = (kt + k_1) \cdot 1(t).$$

Весовая функция характеризуется выражением

$$w(t) = k \cdot 1(t) + k_1 \cdot \delta(t).$$

Частотные характеристики:

Частотная передаточная функция изодромного звена имеет вид:

$$W(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega T)}{j\omega}.$$

- амплитудно-фазовая частотная характеристика:

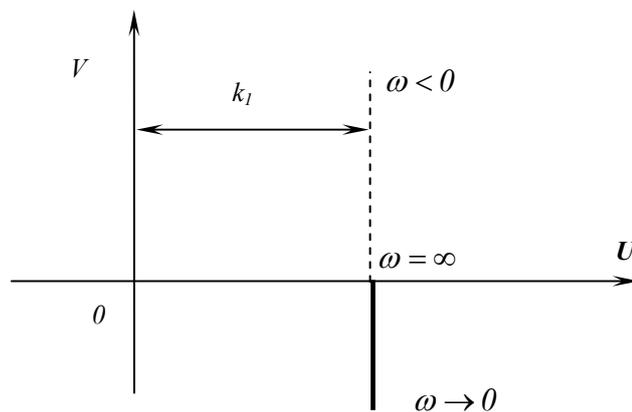


Рис. 5.46. Графическое изображение амплитудно-фазовой частотной характеристики изодромного звена

-амплитудная и фазовая частотные характеристики:

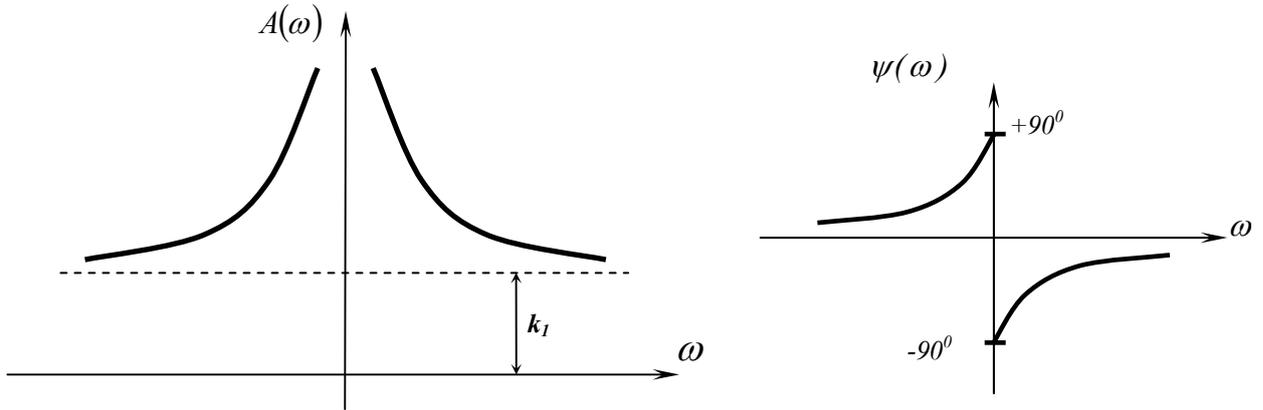


Рис. 5.47. Графическое изображение амплитудной и фазовой частотных характеристик издромного звена

- логарифмические частотные характеристики:

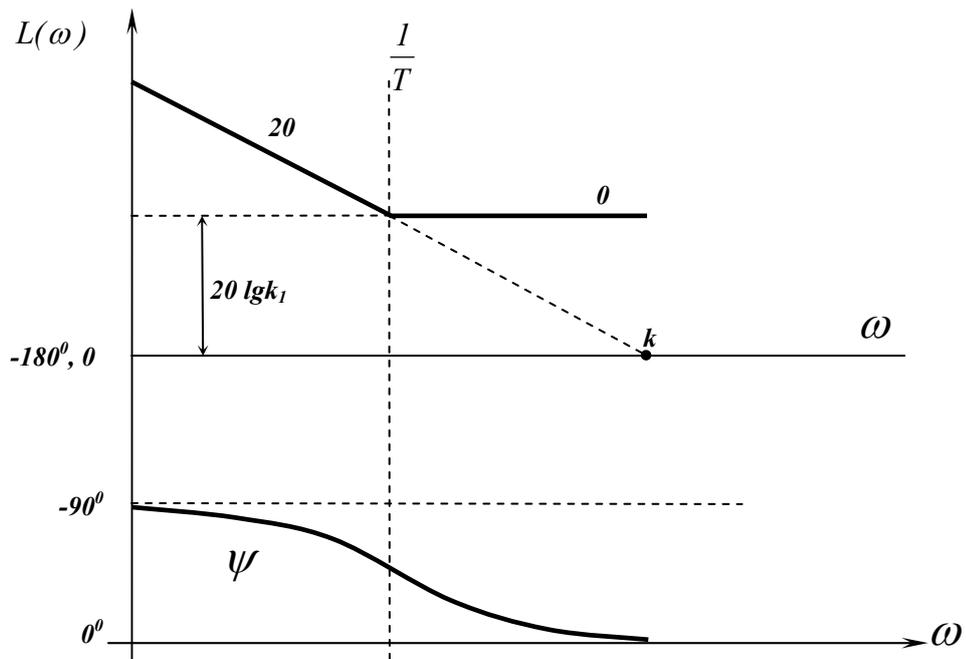


Рис. 5.48. Графическое изображение логарифмических частотных характеристик издромного звена

ЛАЧХ определяется следующим выражением:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k \sqrt{1 + \omega^2 T^2}}{\omega}.$$

Асимптотическая ЛАЧХ представляет две прямые линии с отрицательным наклоном 20 дБ/дек при $\omega_c < \frac{1}{T}$ и прямую линию параллельную оси частот при условии $\omega_c > \frac{1}{T}$.

Из анализа частотных характеристик видно, что в области малых частот $\omega < \omega_c$ звено можно характеризовать как идеальное интегрирующее. При условии $\omega > \omega_c$ звено является безинерционным с коэффициентом передачи k_1 .

5.9. Идеальное дифференциальное звено

Звено описывается дифференциальным уравнением:

$$y = k \frac{dU}{dt}.$$

Передаточная функция звена имеет вид:

$$W(p) = kp. \quad (5.6)$$

Пример идеального дифференцирующего звена:

Тахогенератор постоянного тока.

ЭДС тахогенератора может быть представлена уравнением

$$e = k\omega_{m_2} = k \frac{d\alpha_{m_2}}{dt}, \quad (5.7)$$

где ω_{m_2} – угловая частота вращения вала тахогенератора; α_{m_2} – угол поворота вала тахогенератора. Обозначая угол поворота входным воздействием, а ЭДС тахогенератора выходным сигналом, можно записать

$$\begin{cases} e = y, \\ \alpha = U. \end{cases} \quad (5.8)$$

Путем несложных преобразований из (5.8) и (5.7) можно получить уравнение вида (5.6).

Дифференциальный усилитель.

Передаточная функция такого звена описывается уравнением вида (5.6).

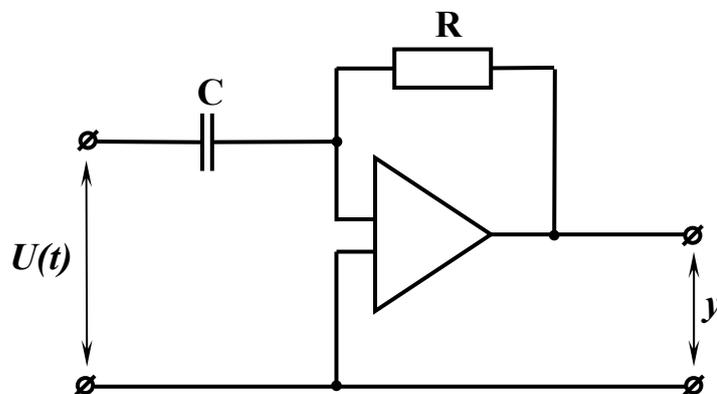


Рис. 5.49. Схема дифференциального усилителя

Временные характеристики идеального дифференцирующего звена:

- переходная и весовая функции



Рис. 5.50. Графическое изображение переходной и весовой функций идеального дифференцирующего звена

Переходный процесс на выходе такого звена определяется выражением:

$$h(t) = k \cdot \delta(t).$$

Весовая функция соответствует уравнению:

$$w(t) = k \cdot \dot{\delta}(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

Частотные характеристики:

Частотная передаточная функция идеального дифференцирующего звена определяется выражением:

$$W(j\omega) = kj\omega.$$

- амплитудно-фазовая частотная характеристика:

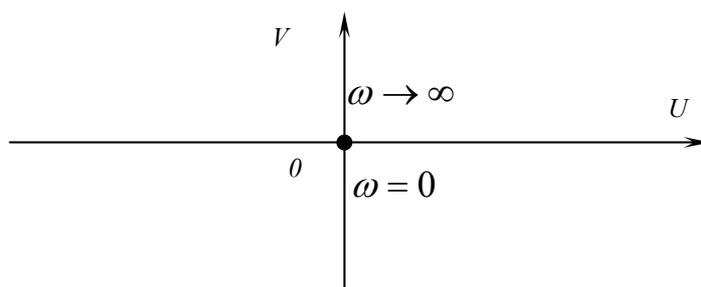


Рис. 5.51. Графическое изображение амплитудно-фазовой частотной характеристики идеального дифференцирующего звена

- амплитудная и фазовая частотная характеристика:

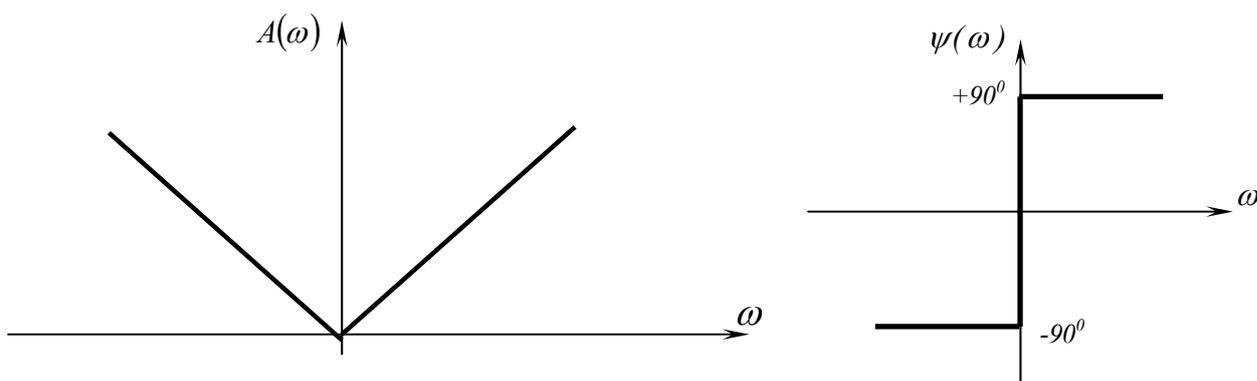


Рис. 5.52. Графическое изображение амплитудной и фазовой частотной характеристики идеального дифференцирующего звена

- логарифмическая частотная характеристика

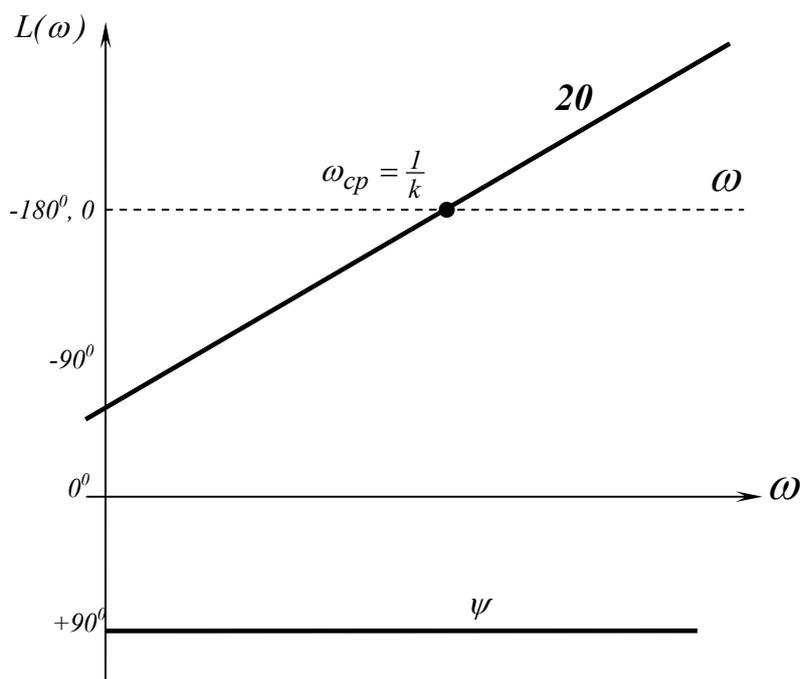


Рис. 5.53. Графическое изображение логарифмических частотных характеристик идеального дифференцирующего звена

5.10. Дифференциальное звено с замедлением

Звено описывается дифференциальным уравнением:

$$T \frac{dy}{dt} + y = k \frac{dU}{dt}.$$

Передаточная функция звена соответствует выражению:

$$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}. \quad (5.9)$$

Звено можно представить в виде последовательно включенных идеального дифференциального звена и апериодического звена первого порядка.

Примеры дифференциального звена с замедлением.

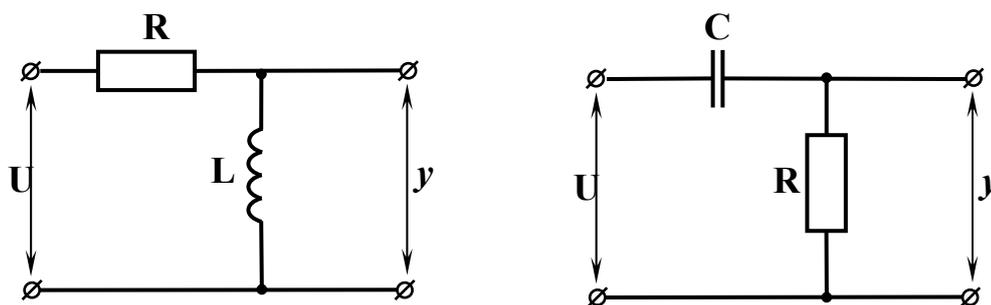


Рис. 5.54. Схемы RL и RC контуров

Например, для схемы с RC элементами можно записать дифференциальное уравнение, которое позволяет получить передаточную функцию вида (5.9)

$$Ri + \frac{1}{C} \int idt = U; \quad W(p) = \frac{y(p)}{U(p)} = \frac{Tp}{1 + Tp}; \quad T = RC - \text{постоянная времени}$$

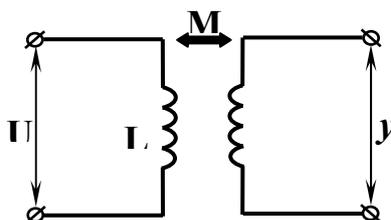


Рис. 5.55. Схема индуктивной цепи с магнитной связью

Временные характеристики:

- переходная и весовая функции:

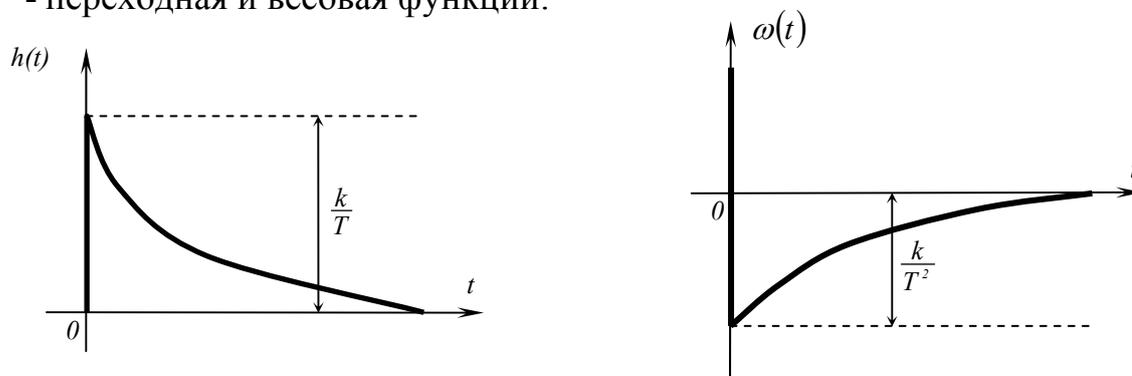


Рис. 5.56. Графическое изображение переходной и весовой функций дифференциального звена с замедлением

Переходный процесс на выходе такого звена определяется выражением:

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t).$$

Весовая функция соответствует уравнению

$$w(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t).$$

Частотные характеристики:

Частотная передаточная функция определяется выражением:

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega}{1 + j\omega T}.$$

- амплитудно-фазовая частотная характеристика

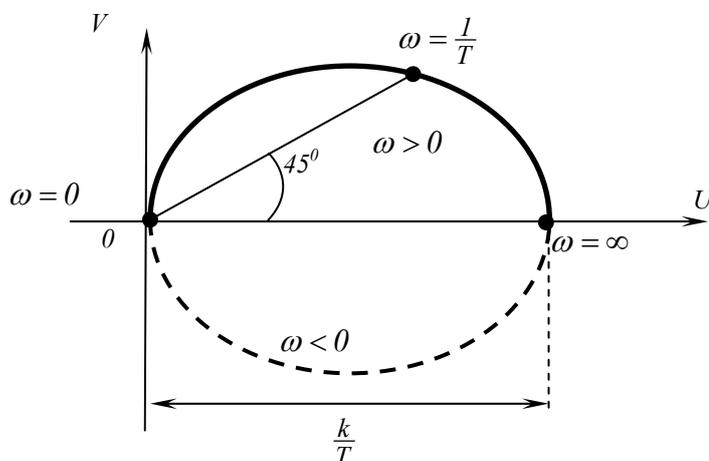


Рис. 5.57. Графическое изображение амплитудно-фазовой частотной характеристики дифференциального звена с замедлением

- амплитудная и фазовая частотные характеристики

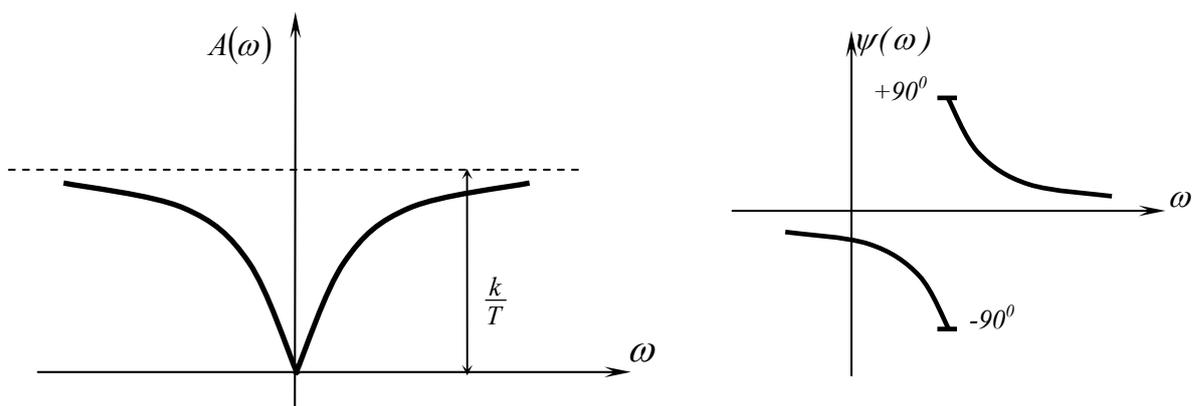


Рис. 5.58. Графическое изображение амплитудной и фазовой частотных характеристик дифференциального звена с замедлением

-логарифмическая частотная характеристика

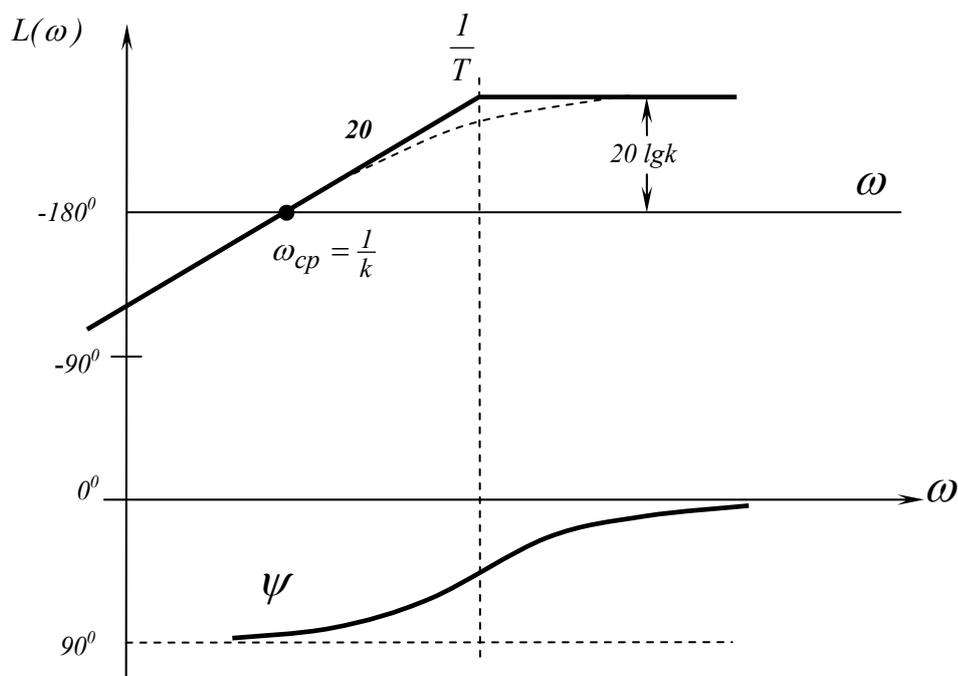


Рис. 5.59. Графическое изображение логарифмической частотной характеристики дифференциального звена с замедлением

АЧХ данного звена и АЧХ идеального дифференцированного звена совпадают в области низких частот. В области высоких частот реальное звено пропускает сигнал хуже чем идеальное звено. Модуль частотной характеристики $A(\omega)$ стремится к значению $\frac{k}{T}$ при $\omega \rightarrow \pm\infty$. Фазовые

сдвиги, вносимые звеном, являются наибольшими при низких частотах. При $\omega \rightarrow \pm\infty$ фазовый сдвиг уменьшается до нуля. ЛАЧХ строится по выражению:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

Асимптотическая ЛАЧХ представляется в виде двух прямых линий. Одна имеет наклон (+20 дБ/дек.) при $\omega < \frac{1}{T}$, вторая – параллельна оси ω при условии $\omega > \frac{1}{T}$.

5.11. Экспериментальный метод определения вида передаточной функции

Для экспериментального определения вида и параметров передаточных функций объекта или звена необходимо сформировать на его входе гармонический сигнал:

$$u(t) = U_m \cos \omega_i t, \quad (5.10)$$

где U_m – амплитудное значение; ω_i – дискретное значение круговой частоты, изменяющейся в процессе эксперимента. Количество точек i выбирается обычно не больше 10. Вариант экспериментальной установки приведен на рис. 5.60.

Значения входного сигнала (5.10) и выходного сигнала:

$$y(t) = y_{mi} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

фиксируются осциллографом или другим измерительным устройством. Дискретно изменяя частоту ω_i входного сигнала, фиксируется несколько графиков входного и выходного сигналов (рис. 5.61).

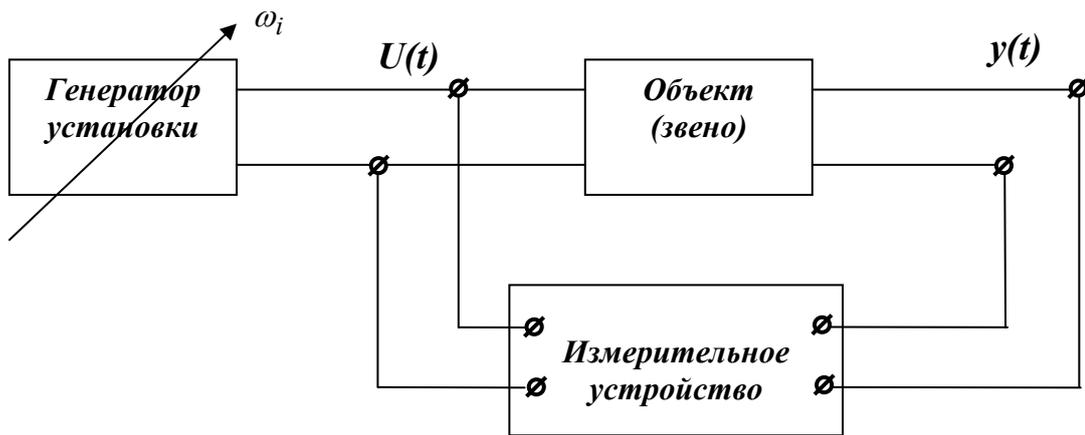


Рис. 5.60. Вариант экспериментальной установки

Например, для двух значений частот входного сигнала имеем соответствующие графики входного и выходного сигналов (рис. 5.61 и рис. 5.62).

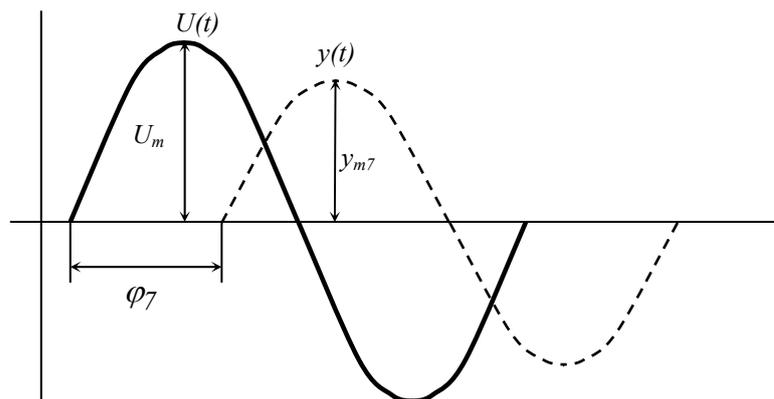


Рис. 5.61. Графики для 7-го значения частоты входного сигнала

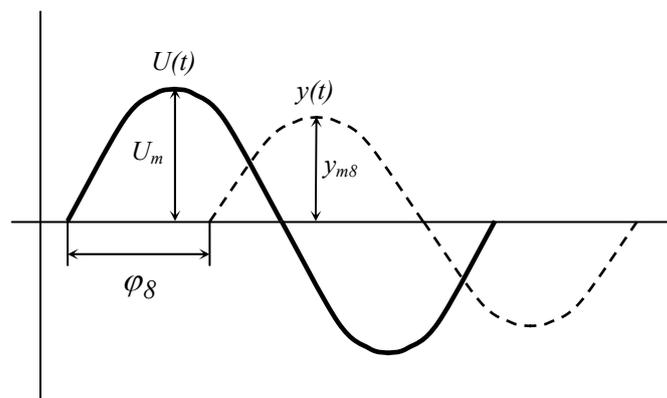


Рис. 5.62. Графики для 8-го значения частоты входного сигнала

Из графиков определяем значения $L_i(w_i) = 20 \lg \frac{y_{mi}}{U_m}$ и φ_i для дискретных значений частот. Полученные значения отображаются на логарифмической бумаге точками. Через эти точки проводятся прямые с типовыми наклонами. Например: 0 дБ/дек, -20 дБ/дек, -40 дБ/дек. В точках пересечения этих прямых определяется значение частот среза $w_{c1} = \frac{1}{T_1}$ и $w_{c2} = \frac{1}{T_2}$. Вид логарифмических частотных характеристик приведен на рис. 5.63, где, например, для 7-го значения частоты:

$$L_o(w) = 20 \lg \frac{y_{m7}}{U_m} = -7 \text{ дБ}; \quad w_7 = 2 \text{ с}^{-1}; \quad \varphi_7 = -152^\circ;$$

и для 8-го значения частоты:

$$L_o(w) = 20 \lg \frac{y_{m8}}{U_m} = -20 \text{ дБ}; \quad w_8 = 4 \text{ с}^{-1}; \quad \varphi_8 = -165^\circ.$$

Постоянные времени при этом равны $T_1 = 5 \text{ с}$; $T_2 = 1.25 \text{ с}$.

В результате передаточная функция объекта или звена, с учетом $20 \lg k = 20$, где $k = 10$, записывается в виде:

$$W(p) = \frac{k}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{10}{(1 + 5p)(1 + 1.25p)}.$$

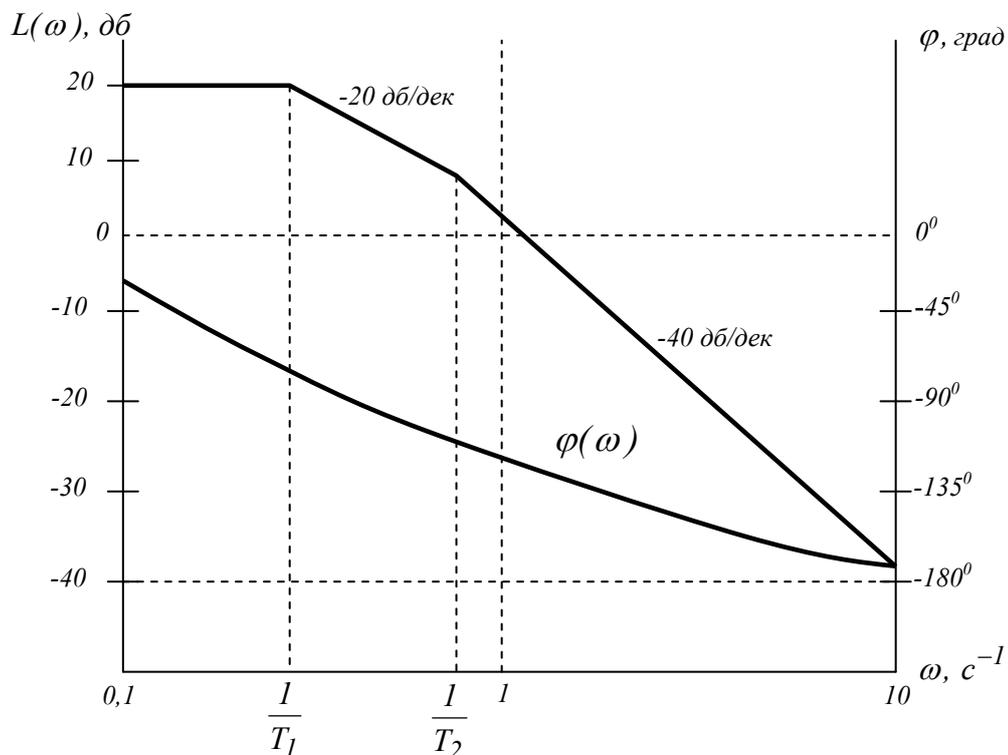


Рис. 5.63. Пример представления ЛАЧХ по экспериментальным данным

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Динамические непрерывные системы могут описываться дифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных. Для большинства практических задач уравнения в частных производных могут быть аппроксимированы обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые содержат только производные по времени.

Система из n уравнений первого порядка определена полностью лишь в том случае, когда известны все коэффициенты уравнений и n начальных условий. Начальные условия образуют n -мерный вектор, который полностью определяет состояние системы в начальный момент времени t_0 . Предполагается, что известны все управляющие и возмущающие воздействия с момента t_0 на всем интервале функционирования системы.

6.1. Представление дифференциальных уравнений в виде структурных схем

Математические уравнения, описывающие систему, удобно представить в виде структурной схемы. Для этого используются обозначения:



Рис. 6.1. Элементы структурных схем

Дифференцирующие элементы при экспериментальном моделировании, например, на операционных усилителях, обычно не используются, т.к. операция дифференцирования приводит к неточным результатам вследствие усиления шумов и помех.

В качестве примера составления структурной схемы рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = \dot{V} + V. \quad (6.1)$$

После соответствующих перестановок данное уравнение записывается в виде:

$$\ddot{y} = (\dot{V} + V) - ay - by. \quad (6.2)$$

Используя обозначения элементов, уравнение (6.2) можно представить структурной схемой (рис. 6.2).

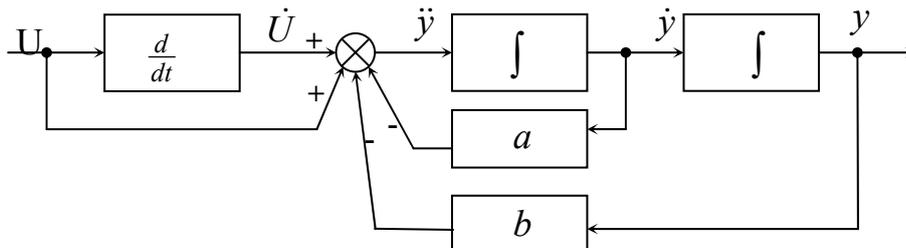


Рис. 6.2. Вариант структурной схемы, составленной по уравнению (6.1)

Уравнение (6.2) можно записать в другом виде

$$\ddot{y} - \dot{V} = V - ay - by. \quad (6.3)$$

Структурная схема, соответствующая данному уравнению приведена на рис. 6.3.

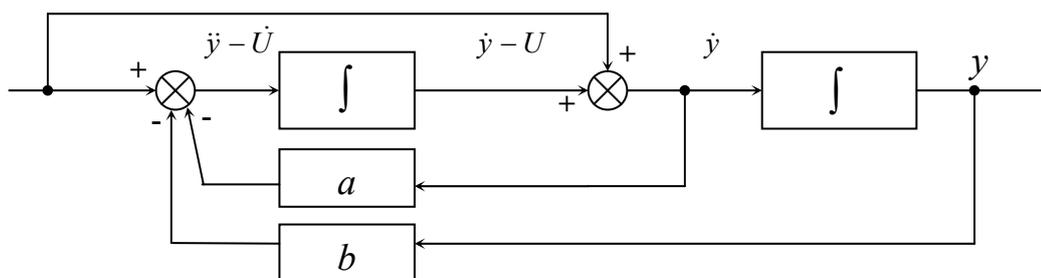


Рис. 6.3. Структурная схема, соответствующая уравнению (6.3)

Во второй схеме отсутствует звено дифференцирования, и данная схема обычно используется для моделирования.

6.2. Представление дифференциальных уравнений систем в форме Коши

Процедура преобразования дифференциального уравнения n -го порядка в векторно-матричное уравнение, состоящее из n дифференциальных уравнений первого порядка, осуществляется путем введения дополнительных переменных. Эти дополнительные переменные называются переменными состояния системы, объекта.

Рассмотрим алгоритм такого преобразования на примере. Допустим, динамическое движение системы описывается уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = \alpha \cdot U,$$

где U – задающее (входное) воздействие, y – выходная переменная.

Введем дополнительные переменные и обозначим:

$$\begin{cases} y = x_1; \\ \dot{y} = x_2; \\ \ddot{y} = \dot{x}_2 = x_3; \\ \ddot{\ddot{y}} = \dot{x}_3. \end{cases}$$

Тогда исходное уравнение представляется в виде системы уравнений, в которых слева от знака равенства первые производные введенных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = \alpha U - bx_1 - ax_3. \end{cases} \quad (6.4)$$

Каждое уравнение этой системы уравнений записано в форме Коши. В векторно-матричной форме система (6.4) принимает следующий вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} U$$

или в компактной форме

$$\dot{x} = Ax + bU,$$

где x – вектор 3-го порядка; A – матрица 3×3 ; b – вектор 3-го порядка; U – скалярное управляющее воздействие.

Практический пример.

Представить дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = U$$

в виде структурной схемы. Принятые обозначения: U – входная переменная, y – выходная переменная.

Запишем данное уравнение относительно старшей производной

$$\ddot{y} = U - a\dot{y} - by. \quad (6.5)$$

Для операции интегрирования \ddot{y} и \dot{y} используем интеграторы.

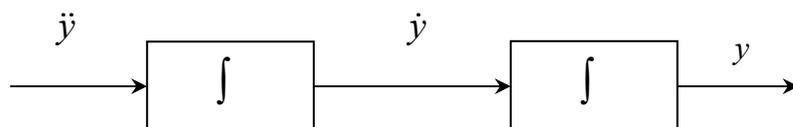


Рис. 6.4.. Структурная схема интегрирования \ddot{y}

Замкнутый контур образуется из условия решения исходного дифференциального уравнения:

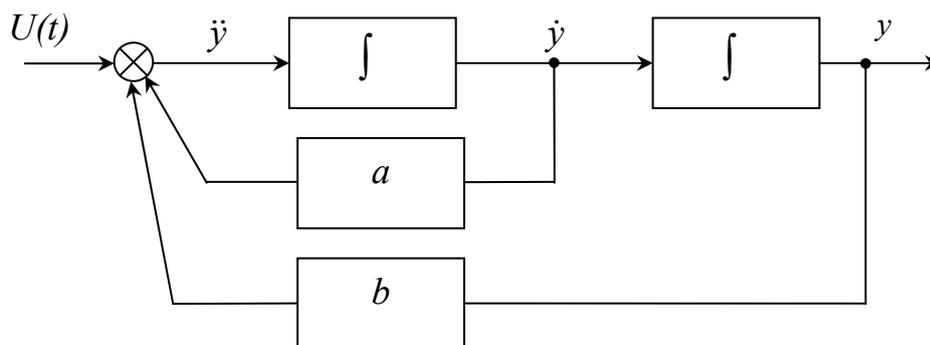


Рис. 6.5. Структурная схема, соответствующая уравнению (6.5)

При моделировании по данной блок-схеме необходимо учитывать изменение знака, вносимое интеграторами, усилителями, сумматорами, начальные условия системы и масштабные коэффициенты времени и амплитуд.

Рассмотрим алгоритм записи дифференциального уравнения второго порядка в виде уравнений в форме Коши. Допустим, система представлена уравнением вида

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = U, \quad (6.6)$$

где U – входная переменная, y – выходная переменная – в терминах пространства состояний.

Структурная схема, соответствующая этому уравнению приведена на рис. 6.6.

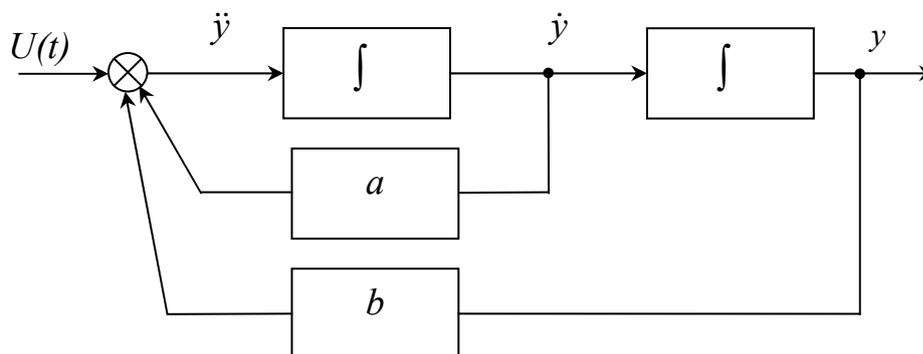


Рис. 6.6. Структурная схема, соответствующая уравнению (6.6)

Введем дополнительные переменные и обозначим

$$y = x_1; \quad \dot{y} = x_2; \quad \ddot{y} = \dot{x}_2.$$

Запишем уравнения в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -bx_1 - ax_2 + U. \end{cases}$$

В форме Коши данная система имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

или в компактном виде

$$\dot{x} = Ax + bU.$$

Т.к. выходная переменная определяется уравнением $y = x_1$, то можно записать:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

или в компактном виде

$$y = c^T x + d \cdot U.$$

При описании некоторых электромеханических процессов, протекающих в системах, можно непосредственно записать дифференциальные уравнения в форме Коши.

Таким образом, для систем, описываемых многомерными линейными дифференциальными уравнениями, в общем случае с нестационарными параметрами, уравнения состояния записываются:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)U; \\ y &= C(t)x + D(t)U. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Структурная схема, соответствующая данным уравнениям, приведена на рис. 6.7.

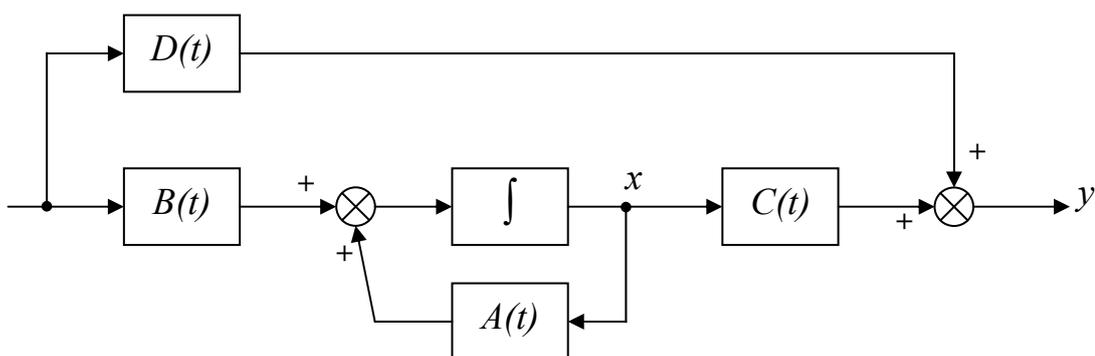


Рис. 6.7. Структурная схема, соответствующая уравнению (6.7)

6.3. Преобразование дифференциальных уравнений в стандартную форму пространства состояний

Рассмотрим методику преобразования математической модели линейной системы с постоянными параметрами, представленной дифференциальным уравнением в операторной форме:

$$(p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_0) \cdot y = (\beta_n p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_0) \cdot U, \quad (6.8)$$

где $p = \frac{d}{dt}$, U – скалярное управляющее воздействие, y – скалярная выходная переменная. В качестве переменных состояния выбираются выходы интеграторов. Структурная схема, соответствующая уравнению (6.8), представлена на рис. 6.8.

Для записи уравнений в форме Коши необходимо определить взаимосвязь коэффициентов a_i, b_i и α_i, β_i . Непосредственно из схемы моделирования можно записать

$$\begin{cases} y = x_1 + b_0 U; \\ \dot{x}_1 = x_2 + b_1 U; \\ \dots\dots\dots; \\ \dot{x}_k = x_{k+1} + b_k U; \\ \dot{x}_n = -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_n) + b_n U. \end{cases} \quad (6.9)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (6.9), запишем

$$p y = \dot{x}_1 + b_0 \dot{U}.$$

В данное уравнение подставим второе уравнение из (6.9) и запишем следующее уравнение:

$$p y = x_2 + b_1 U + b_0 \dot{U}. \quad (6.10)$$

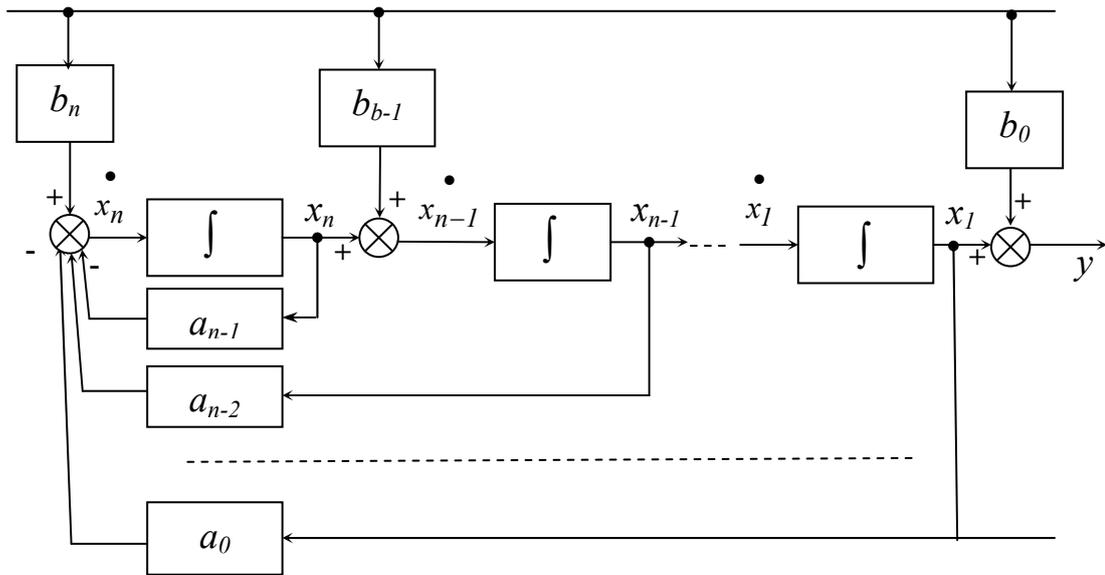


Рис. 6.8. Структурная схема, соответствующая уравнению (6.8)

Используя данную процедуру для второй и старшей производных y , можно записать следующее выражение

$$\begin{cases} p^2 y = \dot{x}_2 + b_1 \dot{U} + b_0 \ddot{U} = x_3 + b_2 U + b_1 \dot{U} + b_0 \ddot{U}; \\ \dots\dots\dots; \\ p^{n-1} y = x_n + b_{n-1} U + b_{n-2} pU + \dots\dots + b_0 p^{n-1} U; \\ p^n y = -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \dots\dots + a_{n-1} x_n) + \\ + b_n U + b_{n-1} pU + \dots\dots + b_0 p^n U. \end{cases} \quad (6.11)$$

Подставляя $y, py, \dots, p^{n-1}y$ из (6.9), (6.10), (6.11) в (6.8) и сравнивая полученный результат с $p^n y$ в (6.11), запишем выражения для определения коэффициентов a_i, b_i :

$$\begin{cases} a_i = \alpha_i; \\ b_0 = \beta_n; \\ b_1 = \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} b_0; \\ b_2 = \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} b_1 - \alpha_{n-2} b_0; \\ \dots\dots\dots; \\ b_n = \beta_0 - \alpha_{n-1} b_{n-1} - \alpha_{n-2} b_{n-2} - \dots - \alpha_0 b_0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Таким образом, коэффициенты b_i определяются путем последовательных подстановок.

Систему уравнений (6.12) можно записать в векторно-матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \dots \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

или в компактном виде $\beta = \alpha \cdot b$.

Тогда, матрицы A, B, C, D векторно-матричной системы уравнений, записанной в виде (2.5) будут равны

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \alpha^{-1} \cdot \beta; \quad C = |1 \ 0 \ \dots \ 0|; \quad (6.13)$$

$$D = b_0 = \beta_n.$$

Уравнения состояния вида (6.7) с матрицами (6.13) называются стандартной формой записи.

6.4. Нормальная форма записи уравнений

6.4.1. Нормальная форма записи дифференциальных уравнений

Пусть уравнения состояния линейной системы имеют вид:

$$\dot{x} = Ax + bU, \quad (6.14)$$

где x – n -мерный вектор переменных; A – $n \times n$ -матрица; b – n -мерный вектор; U – управляющее воздействие.

При выполнении системой условий управляемости, которые заключаются в невырожденности $(n \times n)$ матрицы управляемости

$$S = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b],$$

т.е. существует матрица S^{-1} (определитель матрицы не равен нулю), возможно преобразование вектора x в вектор y . Выполнение этого условия позволяет записать два взаимосвязанных уравнения

$$\begin{aligned} y &= H \cdot x, \\ x &= H^{-1} \cdot y, \end{aligned}$$

где матрица H – матрица наблюдаемости системы.

В результате исходное уравнение (6.14) можно записать в нормальной форме:

$$\dot{y} = A_1 y + b_1 U,$$

где

$$A_1 = H \cdot A \cdot H^{-1}; \quad b_1 = Hb = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]^T; \quad H_1 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]^T \cdot S^{-1};$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 A \\ \dots \\ H_1 A^{n-1} \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Практический пример.

Преобразование дифференциальных уравнений к стандартной форме записи уравнений состояний.

Допустим, система управления описывается дифференциальным уравнением 3-го порядка:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = 2\ddot{U} + 3\dot{U} + U + 2U.$$

Рассмотрим преобразование этого уравнения к стандартной форме пространства состояний.

Запишем исходное уравнение:

$$\begin{matrix} (p^3 + 3p^2 + 4p + 1) \cdot y = (2p^3 + 3p^2 + p + 2) \cdot U, \\ \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0 \quad \beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1 \quad \beta_0 \end{matrix}$$

где коэффициенты определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_0 = -\alpha_0 = -1; \\ a_1 = -\alpha_1 = -4; \\ a_2 = -\alpha_2 = -3; \end{cases}$$
$$b_0 = \beta_3 = 2;$$
$$b_1 = \beta_2 - \alpha_2 b_0 = 3 - 3 \cdot 2 = -3;$$
$$b_2 = \beta_1 - \alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_0 = 1 - 3 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 = 2;$$
$$b_3 = \beta_0 - \alpha_2 b_2 - \alpha_1 b_1 - \alpha_0 b_0 = 2 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 = 6.$$

В результате стандартная векторно-матричная форма записи исходного уравнения имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \cdot U.$$

После подстановки коэффициентов запишем

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot U. \quad (6.15)$$

В векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot U,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Векторно-матричное уравнение выходных переменных имеет вид:

$$y = C \cdot x + D \cdot U,$$

где $C = [1 \ 0 \ 0]$; $D = b_0 = 2$.

После подстановки соответствующих коэффициентов

$$y = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + b_0 U = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2U. \quad (6.16)$$

Структурная схема, соответствующая уравнениям (6.15), (6.16), приведена на рисунке 6.9.

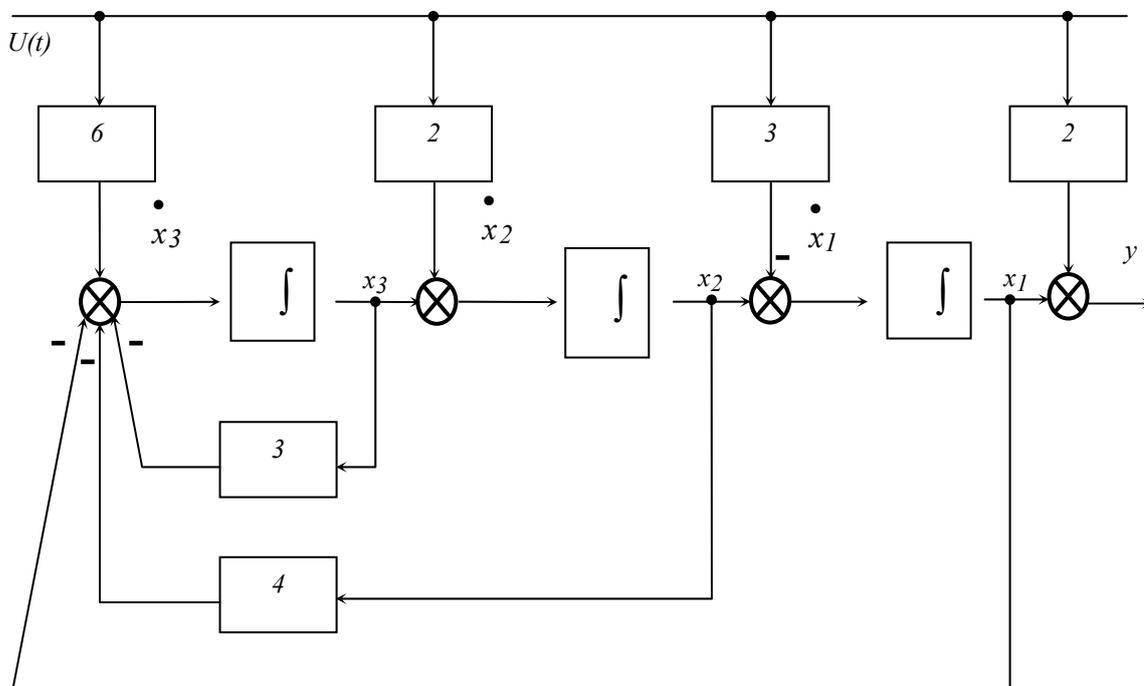


Рис. 6.9. Структурная схема, соответствующая уравнениям (12.2), (12.3)

Практический пример.

Каноническая форма записи системы дифференциальных уравнений.

Допустим, задана система уравнений в форме Коши

$$\dot{x} = Ax + bU, \quad (6.17)$$

где элементы матриц равны:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Запишем уравнение (6.17) в канонической форме. Определяем матрицу управляемости S и обратную матрицу S^{-1} .

$$S = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

По известным уравнениям вычисляем модальную матрицу M и обратную матрицу M^{-1} .

$$M_1 = [0 \quad 1] \cdot S^{-1} = [-1 \quad 1]; \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_1 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем матрицы A и b на основе уравнений:

$$A_1 = M \cdot A \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad b_1 = M \cdot b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В результате запишем каноническую форму:

$$\dot{z} = A_1 \cdot z + b_1 \cdot U.$$

6.4.2. Нормальная форма записи векторно-матричных уравнений

Данная форма записывается в результате диагонализации квадратной матрицы A . При этом предполагается, что существует неособенная модальная матрица M , т.е. существует M^{-1} .

Характеристическое уравнение, представляющее решение системы линейных уравнений, записывается в виде:

$$[\lambda_i I - A] \cdot x_i = U; \quad [\lambda_i x_i] = [A \cdot x_i],$$

где λ_i – характеристические числа; x_i – характеристические векторы.

В развернутом виде данное уравнение записывается следующим образом

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.18)$$

Систему (6.18) можно записать в компактном виде

$$M\Lambda = AM,$$

где

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Ввиду существования матрицы M^{-1} диагональная матрица Λ определяется из уравнения:

$$\Lambda = M^{-1} \cdot A \cdot M.$$

Более высокие степени A приводятся к диагональному виду таким же способом. Например:

$$\Lambda^2 = (M^{-1} AM)(M^{-1} AM) = M^{-1} A^2 M,$$

где выполняется равенство $I = M \cdot M^{-1}$.

Рассмотрим уравнение состояния системы управления с соответствующим выходом

$$x = Ax + b\dot{U}; \quad y = Cx + DU, \quad (6.19)$$

где x – n -мерный вектор; A – $(n \times n)$ -матрица; b – n -мерный вектор; U – скалярная переменная. Матрица A имеет различные характеристические числа λ_i . Пусть M – неособенная матрица, преобразующая вектор состояния x в вектор z . При этом условии можно записать уравнения:

$$\begin{aligned} x &= Mz, \\ z &= M^{-1}x. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (6.19) принимают вид:

$$\begin{cases} M\dot{z} = AMz + bU; \\ y = CMz + DU. \end{cases}$$

Умножение слева первого уравнения на M^{-1} позволяет записать:

$$\dot{z} = M^{-1}AMz + M^{-1}bU.$$

Тогда, исходное уравнение (6.19) в канонической форме записывается в виде:

$$\dot{z} = \Lambda z + b_1 U,$$

где

$$\Lambda = M^{-1}AM; \quad b_1 = M^{-1}b.$$

Если матрица A имеет кратные характеристические числа, то она не может быть приведена к диагональному виду. Тем не менее, существует преобразование подобия $\Lambda = M^{-1}PM$, с помощью которого матрица A преобразуется к почти диагональной форме – канонической форме Жордана. Матрица канонической формы Жордана имеет следующие свойства:

- диагональными элементами Λ являются собственные значения матрицы A ;
- все элементы Λ , расположенные ниже главной диагонали равны 0;
- если соседние элементы на главной диагонали одинаковы, то элементы непосредственно находящиеся справа от главной диагонали равны 1;

- матрица Λ разделяется на подматрицы, образованные каждым собственным значением. Такие подматрицы называются клетками Жордана.

Например, матрица A имеет пять собственных значений, из них $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$. Матрица Λ будет иметь вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Допустим, матрица A имеет четыре собственных значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$. Диагональная матрица собственных чисел равна

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}.$$

Определяем модальную матрицу M , которая преобразует матрицу A с кратными собственными значениями в каноническую форму Жордана. Матрицу M вычисляем с использованием собственных векторов матрицы A . При этом, собственные векторы, соответствующие форме Жордана порядка m , определяем на основе клетки Жордана порядка $(m \times m)$ вида:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Пусть столбцы матрицы M обозначаются через $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Тогда с учетом записи $\Lambda = M^{-1} \cdot A \cdot M$ должно выполняться следующее соотношение:

$$[x_1, x_2, x_3, \dots, x_m] \cdot \Lambda = A \cdot [x_1, x_2, x_3, \dots, x_m].$$

Раскрывая данное соотношение по столбцам, запишем

$$\begin{aligned} \lambda_j x_1 &= Ax_1; \\ x_1 + \lambda_j x_2 &= Ax_2; \\ x_2 + \lambda_j x_3 &= Ax_3; \\ \dots\dots\dots; \\ x_{m-1} + \lambda_j x_m &= Ax_m. \end{aligned}$$

После преобразования данных уравнений запишем

$$\begin{aligned} (\lambda_i I - A)x_1 &= 0; \\ (\lambda_i I - A)x_2 &= -x_1; \\ (\lambda_i I - A)x_3 &= -x_2; \\ \dots\dots\dots; \\ (\lambda_i I - A)x_m &= -x_{m-1}. \end{aligned}$$

Из данных уравнений определяются собственные векторы $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ модальной матрицы M .

Практический пример.

Нормальная форма записи системы дифференциальных уравнений
 Допустим, имеем структурную схему системы управления.

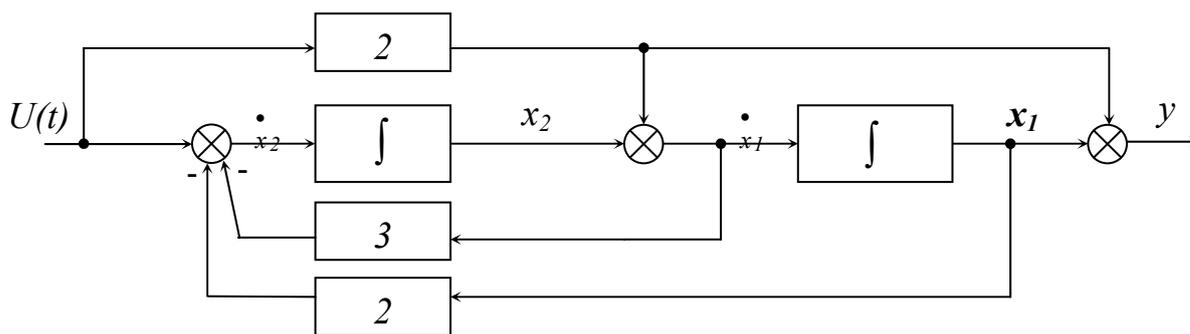


Рис. 6.10. Структурная схема системы управления

Модель такой схемы в стандартной форме дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2U; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + U; \\ y = x_1 + 2U. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U; \\ y = [1 \quad 0] \cdot x + 2U. \end{cases}$$

Преобразуем данные уравнения в нормальную форму дифференциальных уравнений.

Модальная M и обратная M^{-1} матрицы соответствуют следующим матрицам:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

После преобразований нормальная форма дифференциальных уравнений принимает вид:

$$\dot{z} = \Lambda z + b_1 U; \quad y = CMz + DU = C_1 z + DU, \quad (6.21)$$

где

$$\Lambda = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad b_1 = M^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C_1 = CM = [1 \quad 1]; \quad D = 2$$

В результате подстановок равенств (6.20) в (6.21) запишем

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot z + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot U; \quad y = [1 \quad 1] \cdot z + 2U; \quad z = M^{-1} \cdot x. \quad (6.22)$$

Новые и старые переменные связаны уравнениями:

$$\begin{cases} z_1 = 2x_1 + x_2; \\ z_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

Структурная схема системы, соответствующая уравнениям (6.22) в нормальной форме приведена на рис. 6.11.

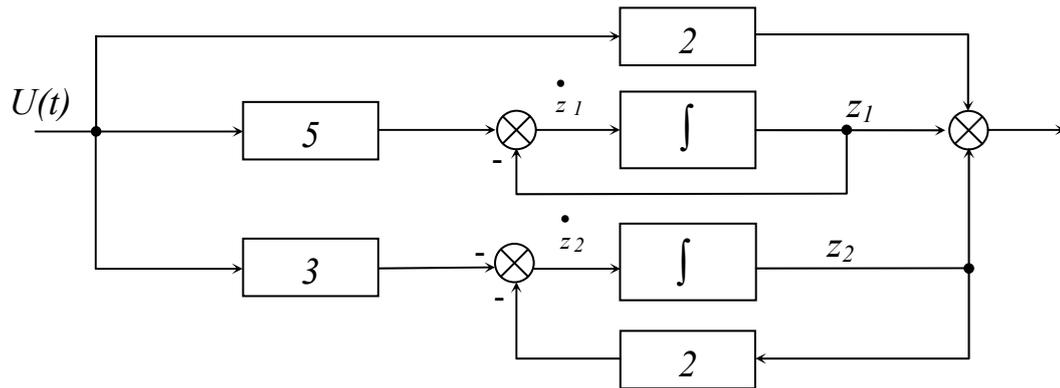


Рис. 6.11. Структурная схема, соответствующая уравнениям (6.22)

7. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДРОБИ

7.1. Разложение передаточных функций на элементарные дроби при различных корнях характеристического уравнения

Рассмотрим систему с одним входом и выходом, передаточная функция которой равна $W(p)$. Обычно $W(p)$ записывается в виде отношения полиномов:

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

При различных корнях $D(p)$ можно записать:

$$D(p) = d_n(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n),$$

где λ_i – характеристические числа. Тогда передаточную функцию можно представить в виде:

$$W(p) = d_0 + \frac{c_1}{(p - \lambda_1)} + \frac{c_2}{(p - \lambda_2)} + \dots + \frac{c_n}{(p - \lambda_n)},$$

где $d_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p)$; $c_i = (p - \lambda_i) \cdot W(p) \Big|_{p=\lambda_i}$.

Выходная переменная $y(p) = W(p) \cdot U(p)$ выражается в виде:

$$y(p) = d_0 U(p) + U(p) \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(p - \lambda_i)}. \quad (7.1)$$

Структурная схема моделирования, соответствующая уравнению (7.1), приведена на рис. 7.1.

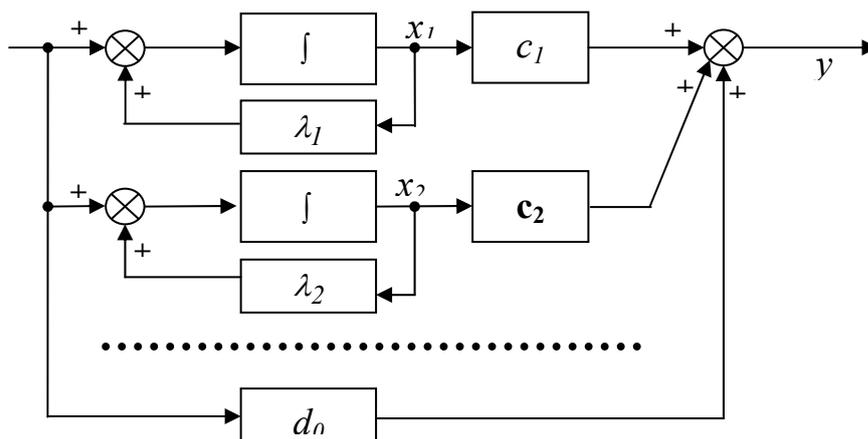


Рис. 7.1. Структурная схема моделирования, соответствующая уравнению (7.1)

Переменная состояния x_i удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot{x}_i - \lambda_i x_i = 0$$

и уравнению выхода

$$y = \sum_{i=1}^n c_i x_i + d_0 U.$$

Согласно данным уравнениям можно записать векторно-матричное уравнение состояния:

$$\dot{x} = \Lambda x + bU,$$

где

$$b = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T,$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

и выходной переменной

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + d_0 U = \langle c, x \rangle + d_0 U.$$

7.2. Разложение передаточной функции на элементарные дроби при кратных корнях характеристического уравнения

В случае если корни многочлена $D(p)$ кратные, то метод разложения на элементарные дроби приводит к недиагональной канонической форме Жордана.

Рассмотрим $W(p)$, имеющую полином:

$$D(p) = d_n (p - \lambda_1)^K (p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n).$$

Разложение передаточной функции на дроби имеет вид:

$$\begin{aligned} W(p) &= d_0 + \frac{c_{11}}{(p - \lambda_1)^K} + \frac{c_{12}}{(p - \lambda_1)^{K-1}} + \dots + \frac{c_{1K}}{(p - \lambda_1)} + \frac{c_3}{(p - \lambda_3)} + \dots + \\ &+ \frac{c_n}{(p - \lambda_n)} = d_0 + \sum_{j=1}^K \frac{c_{1j}}{(p - \lambda_1)^j} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(p - \lambda_i)}; \end{aligned}$$

где

$$d_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p);$$

$$c_{1j} = \frac{1}{(j-1)!} \cdot \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} (p - \lambda_1)^K \cdot W(p) \Big|_{p=\lambda_1};$$

$$c_i = (p - \lambda_i) \cdot W(p) \Big|_{p=\lambda_i}.$$

Тогда, выходная переменная записывается уравнением:

$$y(p) = d_0 U(p) + \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j(p) + \sum_{i=2}^n c_i x_i(p); \quad x_j(p) = \frac{U(p)}{(p - \lambda_1)^{(K-j+1)}};$$

$$x_i(p) = \frac{U(p)}{(p - \lambda_i)}.$$

Практический пример.

Преобразование передаточной функции системы в нормальную форму записи.

Задана передаточная функция системы:

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{2p^2 + 8p + 11}{p^2 + 3p + 2} = \frac{2p^2 + 8p + 11}{(p + 1)(p + 2)}.$$

Разложение $W(p)$ на элементарные дроби позволяет получить (результат деления числителя на знаменатель):

$$d_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p) = 2; \quad \begin{cases} c_1 = W(p) \cdot (p + 1) \Big|_{p=-1} = 5; \\ c_2 = W(p) \cdot (p + 2) \Big|_{p=-2} = -3. \end{cases}$$

В итоге запишем

$$W(p) = 2 + \frac{5}{p + 1} - \frac{3}{p + 2}.$$

Уравнения состояния системы в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U; \\ y &= [5 \quad -3] \cdot x + 2U. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Структурная схема системы, соответствующая уравнениям (7.2) приведена на рис. 7.2.

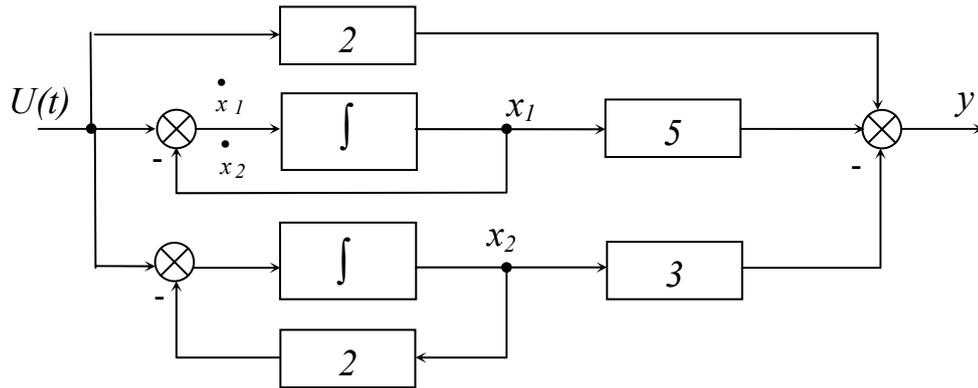


Рис. 7.2. Структурная схема системы, соответствующая уравнениям (7.2)

8. ПЕРЕХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Пусть система, объект описывается векторно-матричным уравнением с нестационарными параметрами:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)U(t), & x(t)|_{t=t_0} &= x_0, \\ y &= C(t)x(t) + D(t)U(t). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Все элементы матриц предполагаются непрерывными функциями времени.

Рассмотрим решение однородного уравнения состояния вида (8.1).

Переходная матрица состояния $\Phi(t, t_0)$ – это матрица размерности $(n \times n)$, удовлетворяющая однородному уравнению состояния

$$\dot{x} = A(t)x(t)$$

для всех действительных t_0 .

Значение производной переходной матрицы равно

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t) \cdot \Phi(t, t_0)$$

с начальным условием

$$\Phi(t_0, t_0) = I.$$

Тогда решение однородного уравнения (8.1) можно записать

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x_0.$$

Для нестационарного уравнения (8.1) состояния системы переходная матрица равна

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right) = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \cdot \int_{t_0}^t A(\lambda) d\lambda + \dots$$

Запишем свойства переходной матрицы состояния для нестационарного случая:

- 1) $\Phi(t_1, t_2) \cdot \Phi(t_2, t_3) = \Phi(t_1, t_3)$ для любых t_1, t_2, t_3 ;
- 2) $\Phi(t_0, t_0) = I$;
- 3) $|\Phi(t, t_0)| = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau\right)$ (определитель матрицы $|\Phi(t, t_0)| \neq 0$);
- 4) $\Phi(t_1, t_2) = \Phi(t_2, t_1)$ для любых t_1 и t_2 .

Переходная матрица состояния для стационарного случая определяется из однородного уравнения стационарных систем:

$$\dot{x} = Ax(t).$$

Переходная матрица состояния может быть представлена матричным рядом или матричной экспонентой

$$\Phi(t - t_0) = I + A(t - t_0) + \frac{1}{2!} A^2(t - t_0)^2 + \dots = \exp(A(t - t_0)).$$

Для начального времени $t_0 = 0$

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Свойства переходной матрицы состояния для стационарного случая:

- 1) $\Phi(t_1 - t_2) \cdot \Phi(t_2 - t_3) = \Phi(t_1 - t_3)$ для любых t_1, t_2, t_3 ;
- 2) $\Phi(0) = I$;
- 3) $\Phi(t)$ – невырожденная матрица для конечномерной A ;
- 4) $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.

8.1. Решение однородного и неоднородного уравнений состояния

Допустим, имеем неоднородное уравнение:

$$\dot{x} = A(t)x(t) - B(t)U(t). \quad (8.2)$$

Преобразуем данное уравнение к однородному виду:

$$\dot{y} = f(t), \quad (8.3)$$

алгоритм решения которого рассмотрим далее.

Для решения этого уравнения предположим, что существует переходная матрица. Тогда можно записать

$$x = \Phi(t, t_0) \cdot y, \quad (8.4)$$

где $\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица состояния.

Вычисляя производную уравнения (8.4) запишем

$$\dot{x} = \dot{\Phi}(t, t_0) \cdot y + \Phi(t, t_0) \cdot \dot{y}.$$

Сравнивая данное уравнение с исходным уравнением (8.3), получим

$$\Phi(t, t_0) \cdot \dot{y} = B(t)U(t).$$

В результате уравнение (8.5) принимает вид:

$$\dot{y} = \Phi(t_0, t) \cdot B(t)U(t), \quad (8.5)$$

При определении переходной функции $\Phi(t_0, t)$ в (8.5) изменен порядок интегрирования.

Решение уравнения (8.5) определяется интегрированием обеих частей:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \cdot B(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (8.6)$$

Используя исходное предположение, после подстановки $x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot y(t)$ в (8.6) запишем на интервале t, t_0 :

$$\begin{aligned} x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, t_0) \cdot \Phi(t_0, \tau) B(\tau) d\tau = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \\ + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) U(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Для стационарных систем уравнение (8.7) имеет вид:

$$x(t) = \Phi(t - t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) U(\tau) d\tau.$$

Последнее уравнение называют переходным уравнением состояния стационарных систем.

Рассмотрим цифровое моделирование систем, представленных нестационарными уравнениями в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t) \cdot x + B(t) \cdot U(t), \\ y &= C(t) \cdot x + D(t) \cdot U(t). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Для моделирования такой системы на ЭВМ рассмотрим цифровую аппроксимацию в момент времени $t = t_K$. При равномерном интервале дискретности можно записать $t_{K+1} = t_K + \Delta t_K$. Тогда производную $x(t)$ в дискретный момент времени $t = t_K$ можно вычислить следующим соотношением (обозначая $x(t_K) = x_K$, $x(t_{K+1}) = x_{K+1}$):

$$\dot{x}_k \cong \frac{1}{\Delta t_k} (x_{k+1} - x_k). \quad (8.9)$$

Дифференциальное уравнение (8.8) с учетом (8.9) аппроксимируется выражением:

$$\frac{1}{\Delta t_k} (x_{k+1} - x_k) = A_k x_k + B_k U_k.$$

После преобразований запишем

$$\begin{cases} x_{k+1} = (I + \Delta t_k A_k) x_k + \Delta t_k B_k U_k, \\ y_k = C_k x_k + D_k U_k. \end{cases}$$

8.2. Определение переходных матриц линейных стационарных систем

Существует несколько способов определения переходной матрицы состояния.

Первый способ: разложение матричной экспоненты в ряд. Данный способ достаточно подробно изложен в литературе, например [4].

Второй способ: используется для диагональной матрицы, элементами которой являются собственные значения исходной матрицы

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}; \quad \exp(\Lambda(t - t_0)) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix}.$$

Третий способ: используется для любой недиагональной матрицы. В этом случае предварительно определяется модальная матрица M , которая преобразует исходную матрицу A в диагональную Λ , т.е. можно записать

$$\Lambda = M^{-1} A M, \quad (8.10)$$

где элементами матрицы Λ являются собственные значения матрицы A .

Из уравнения (8.10) можно записать

$$M^{-1}AM = A.$$

Для невырожденной матрицы известно соотношение

$$A^n = M\Lambda^n M^{-1}.$$

Тогда для матричной экспоненты можно записать

$$e^{A(t-t_0)} = M \cdot e^{\Lambda(t-t_0)} \cdot M^{-1}.$$

Четвертый способ: использование преобразования Лапласа. Рассмотрим применение этого способа для уравнения:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t=0) = x_0. \quad (8.11)$$

В операторной форме уравнение (8.11) имеет вид:

$$p \cdot x(p) - x_0 = A \cdot x(p).$$

Из данного уравнения записываем соотношения:

$$(pI - A) \cdot x(p) = x_0$$

или

$$x(p) = (pI - A)^{-1} x_0.$$

Для состояния системы

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0$$

преобразование Лапласа переходной функции в начальный момент времени равно нулю, что позволяет записать:

$$Z[\Phi(t,0)] = Z[e^{At}] = (pI - A)^{-1}.$$

Из последнего уравнения следует, что переходная матрица состояния определяется как обратное преобразование Лапласа элементов матрицы $[(pI - A)^{-1}]$:

$$\Phi(t,0) = Z^{-1}\{(pI - A)^{-1}\},$$

где Z и Z^{-1} – соответственно символы прямого и обратного преобразования Лапласа.

С помощью прямого преобразования Лапласа на основе уравнений в пространстве состояний можно записать передаточные функции системы.

Допустим, имеем уравнения системы в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BU, \\ y &= Cx + DU. \end{aligned} \tag{8.12}$$

При нулевых начальных условиях уравнения (8.12) записываются:

$$\begin{aligned} px(p) &= Ax(p) + BU(p), \\ y(p) &= Cx(p) + DU(p). \end{aligned}$$

После преобразований запишем

$$(pI - A)x(p) = BU(p)$$

или

$$x(p) = (pI - A)^{-1} BU(p) \tag{8.13}$$

и

$$y(p) = [C(pI - A)^{-1} B + D] \cdot U(p). \tag{8.14}$$

Из уравнений (8.13) и (8.14) запишем передаточные функции

$$\begin{aligned} W_1(p) &= \frac{x(p)}{U(p)} = (pI - A)^{-1} B, \\ W_2(p) &= \frac{y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1} B + D. \end{aligned}$$

Практический пример.

Определение переходной матрицы и реакции системы на ступенчатое единичное воздействие.

Допустим, задана система дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + U; \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + U; \quad y = x_1 + 3x_2.$$

Данные уравнения в компактной векторно-матричной форме имеют вид:

$$\dot{x} = Ax + bU, \quad y = c^T x,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Т.к. матрица A является диагональной, то переходная матрица равна

$$\Phi(t, t_0 = 0) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

Используя уравнение (8.15) определяем реакцию системы (переходной процесс) на ступенчатое единичное воздействие при нулевых начальных условиях. Модель переходного процесса записывается выражением:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}b(\tau) \cdot U(\tau) \cdot d\tau. \quad (8.16)$$

При нулевых начальных условиях: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, уравнение (8.16) имеет вид:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot b(\tau)U(\tau)d\tau.$$

В результате, для данного примера, переходной процесс каждой переменной состояния и выходной переменной записывается уравнениями:

$$x_1(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} 1 \cdot 1(\tau) d\tau = e^{-(t-\tau)} \Big|_0^t = 1 - e^{-t};$$

$$x_2(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 1 \cdot 1(\tau) d\tau = \frac{1}{2} e^{-2(t-\tau)} \Big|_0^t = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t});$$

$$y(t) = x_1(t) + 3x_2(t) = \frac{5}{2} e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-2t}.$$

Практический пример.

Допустим, система управления описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + U; \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2; \\ y &= 4x_2. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Определить переходную матрицу и реакцию (переходные процессы) системы.

В векторно-матричной форме уравнения (8.17) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bU; \\ y &= C^T x, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Определяем собственные значения матрицы A . Для этого составим определитель или характеристический полином:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Характеристические числа и соответствующая матрица равна

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Матричный экспоненциал равен

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Для определения модальной матрицы M определим собственные векторы матрицы A из уравнений:

$$AV_1 = \lambda_1 V_1, \quad AV_2 = \lambda_2 V_2, \quad (8.18)$$

где V_1, V_2 – собственные векторы.

После подстановки соответствующих данных в уравнения (8.18) запишем:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = [-1] \cdot \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix} = [-2] \cdot \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix}.$$

Из данных уравнений получим

$$V_{11} = V_{21} \text{ и } V_{12} = 0.$$

В результате запишем собственные векторы

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда модальную матрицу M запишем в виде:

$$M = [V_1 : V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу M^{-1} :

$$M^{-1} = \frac{AdjM}{|M|} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Записывая переходную матрицу в виде

$$\Phi(t,0) = e^{At} = M \cdot e^{\Lambda t} \cdot M^{-1},$$

получим:

$$\Phi(t,0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ (e^{-t} - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Используя ступенчатое единичное воздействие $U(t)=1(t)$ при нулевых начальных условиях, определяем переходной процесс каждой переменной состояния и выходной переменной

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t \Phi(t,\tau) \cdot b(\tau) 1(\tau) d\tau \\ \int_0^t \Phi(t,\tau) \cdot c(\tau) 1(\tau) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-(t-\tau)} 1(\tau) d\tau \\ \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] \cdot 1(\tau) d\tau \end{bmatrix};$$

$$x_2(t) = \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] \cdot 1(\tau) d\tau = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t};$$

$$x_1(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot 1(\tau) d\tau = 1 - e^{-t}; y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

Практический пример.

Для линейной нестационарной системы управления, представленной уравнением

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 6t \frac{dx}{dt} + 6x = 0 \quad (8.19)$$

определить переходную матрицу $\Phi(t, t_0)$.

Произведем замену переменной $t = e^\tau$. Тогда уравнение (8.19) записывается:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 5\frac{dx}{d\tau} + 6x = 0. \quad (8.20)$$

Обозначим $x = z_1$; $\dot{x} = \dot{z}_1 = z_2$; $\ddot{x} = \dot{z}_2$. Тогда в пространстве новых переменных уравнение (8.20) записывается:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2; \\ \dot{z}_2 = -6z_1 - 5z_2; \end{cases} \quad \dot{z} = Az; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

После всех преобразований получим переходную матрицу

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \begin{bmatrix} 3e^{-2(\tau-\tau_0)} - 2e^{-3(\tau-\tau_0)} & e^{-2(\tau-\tau_0)} - e^{-3(\tau-\tau_0)} \\ -6e^{-2(\tau-\tau_0)} + 6e^{-3(\tau-\tau_0)} & -2e^{-2(\tau-\tau_0)} + 3e^{-3(\tau-\tau_0)} \end{bmatrix}.$$

После подстановки $\tau = \ln t$ получим:

$$\begin{bmatrix} y \\ t \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 - 2\left(\frac{t_0}{t}\right)^3 & \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 - \left(\frac{t_0}{t}\right)^3 \\ -6\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 + 6\left(\frac{t_0}{t}\right)^3 & -2\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 + 3\left(\frac{t_0}{t}\right)^3 \end{bmatrix}}_{\Phi(t, t_0)} \cdot \begin{bmatrix} y(t_0) \\ t_0 \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}.$$

Правильность полученного выражения указывает то, что значение переходной функции в начальный момент времени равно единичной матрице.

$$\Phi(t_0, t_0) = I.$$

Практический пример.

Определить передаточную функцию для системы управления, уравнения которой записаны в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + U; \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + U; \\ y = x_1 + 3x_2. \end{cases} \quad (8.21)$$

В компактном виде уравнения (8.21) записываются

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bU; \\ y &= c^T x, \end{aligned} \quad (8.22)$$

где значения элементов матриц равны

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Используя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, уравнения (8.22) записывают одним уравнением:

$$y(p) = c^T [pI - A]^{-1} b \cdot U(p).$$

Передаточная функция системы определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{y(p)}{U(p)} = c^T [pI - A]^{-1} b = [1 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ 0 & p+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [1 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{p+1} + \frac{3}{p+2} = \frac{p+2+3p+3}{(p+1)(p+2)} = \\ &= \frac{4p+5}{(p+1)(p+2)} = \frac{2p+2,5}{(p+1)(0,5p+1)} = \frac{2,5(0,85p+1)}{(p+1)(0,5p+1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим алгоритм получения передаточных функций на основе моделей в пространстве состояний.

Аналитический вывод передаточной функции системы можно получить, используя преобразованную по Лапласу модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} px(p) = Ax(p) + BU(p); \\ y(p) = Cx(p), \end{cases} \quad (8.23)$$

где p – оператор преобразования Лапласа; x, U, y – соответственно, вектор состояния и скалярные входная и выходная переменные.

После преобразований первое уравнение (8.23) запишем в следующем виде:

$$(pI - A)x(p) = BU(p)$$

или

$$x(p) = (pI - A)^{-1} BU(p).$$

Далее, записывая второе уравнение:

$$y(p) = C(pI - A)^{-1} BU(p),$$

получим передаточную функцию системы управления:

$$W(p) = \frac{y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1} B. \quad (8.24)$$

Т.к. оператор p не является числом, то данный способ получения $W(p)$ не может быть реализован на ЭВМ. Однако рассмотренный алгоритм целесообразно использовать для аналитической записи $W(p)$ из уравнений пространства состояний систем второго и третьего порядков.

Практический пример.

Рассмотрим систему управления, заданную уравнениями в пространстве состояний:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} U \quad (8.25)$$

и выходной переменной

$$y = x_1,$$

где элементы матриц равны

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

В результате преобразования Лапласа уравнения (8.25) получим:

$$[pI - A] = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 2 & p+3 \end{bmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

$$\begin{aligned} [pI - A]^{-1} &= \frac{1}{p(p+3)+2} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix} = \frac{1}{p^2+3p+2} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{p+3}{p^2+3p+2} & \frac{1}{p^2+3p+2} \\ \frac{-2}{p^2+3p+2} & \frac{p}{p^2+3p+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В соответствии с уравнением (8.25) передаточная функция системы будет равна:

$$W(p) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{p+3}{p^2+3p+2} & \frac{1}{p^2+3p+2} \\ \frac{-2}{p^2+3p+2} & \frac{p}{p^2+3p+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{9}{p^2+3p+2}.$$

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из элементов (действительные или комплексные числа или функции переменных), которая подчиняется определенным правилам сложения, вычитания, умножения и равенства. Элементы a_{ij} матрицы записываются при помощи двойного индекса. Первый – указывает строку таблицы, на которой расположен элемент, второй – ее столбец. Матрица, содержащая m строк и n столбцов, называется $(m \times n)$ матрицей или матрицей порядка m на n . Квадратной матрицей – матрица – n -го порядка. Иногда матрицы обозначаются:

$$A = [a_{ij}], \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Матрица $(m \times 1)$ называется матрицей-столбцом, матрица $(1 \times n)$ – матрицей-строкой.

Диагональная матрица – квадратная матрица, элементы на главной диагонали равны a_{ij} , а остальные элементы равны нулю.

Единичная матрица – это диагональная матрица с элементами, равными единице. Данная матрица обычно обозначается I .

Нулевая матрица – матрица, все элементы которой равны нулю.

Транспонированная матрица. Транспонирование – это операция, при которой строки и столбцы матрицы меняются местами. Транспонированная матрица обозначается как A^T . Т.е., если $A = [a_{ij}]$, то $A^T = [a_{ji}]$.

Симметрическая матрица – квадратная матрица равная своей транспонированной матрице, т.е. $A = A^T$.

Матрица A называется ортогональной, если $A^{-1} = A^T$.

П.2. Простейшие операции

Сложение матриц. Если матрицы одного порядка, то суммой двух матриц служит матрица $C = A + B$, элементы которой определяются:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Вычитание матриц. Операция аналогична операции сложения.

Равенство матриц. Две матрицы A, B одинакового порядка равны только тогда, когда $a_{ij} = b_{ij}$.

Умножение матриц. Один из вариантов записи $y = Ax$. Данная операция трактуется как преобразование матрицей A вектора x в вектор y . В другой форме можно записать:

$$Ax = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right].$$

В общем случае для определения произведения $A \cdot B$ число столбцов A должно равняться числу строк B . Операция умножения не коммутативна, т.е. $AB \neq BA$. При умножении на скалярную величину все элементы матрицы умножаются на скалярную величину.

Дифференцирование и интегрирование матриц. Данные операции над матрицами эквивалентны соответствующим преобразованиям над элементами матриц при сохранении порядка следования алгебраических операций.

П.3. Определители

Применение определителей упрощает решение алгебраических уравнений. Определитель вводится только для квадратной матрицы и равен числу её строк или столбцов. Определитель квадратной матрицы A размерности $(n \times n)$ равен алгебраической сумме всех возможных произведений n элементов, содержащих лишь один элемент из каждой строки и столбца. Обозначение определителя $|A|$.

Некоторые свойства определителей:

- определитель единичной матрицы равен единице;
- определитель равен нулю, если равны нулю все элементы какой-либо строки (столбца) или если равны или пропорциональны соответствующие элементы произвольных двух строк (двух столбцов);
- величина определителя остается постоянной по модулю при перестановке его строк (столбцов).

П.4. Миноры и алгебраические дополнения

Минором элемента a_{ij} называется определитель $|M_{ij}|$, образованный при вычеркивании i -й строки и j -го столбца в определителе $|A|$.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} равно минору a_{ij} , умноженному на множитель $(-1)^{i+j}$, и записывается в виде:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|.$$

П.5. Присоединенная и обратная матрицы

Если A – квадратная матрица, а C_{ij} – алгебраическое дополнение a_{ij} , то присоединенной для матрицы A называется матрица, образованная из алгебраических дополнений C_{ji} . Данная матрица обозначается:

$$AdjA = [C_{ji}].$$

Из определения присоединенной матрицы можно записать равенство:

$$A[C_{ji}] = |A|I.$$

Разделим обе части данного уравнения на определитель $|A|$ (при условии $|A| \neq 0$). В результате можно записать:

$$A \left(\frac{AdjA}{|A|} \right) = I.$$

Из данного уравнения определяем матрицу $\left(\frac{AdjA}{|A|} \right)$ как обратную для матрицы A , так что $A \cdot A^{-1} = I$, где $A^{-1} = \left(\frac{AdjA}{|A|} \right)$ при $|A| \neq 0$.

Очевидно, для невырожденной матрицы будет выполняться равенство:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I. \quad (\text{П.2})$$

Рассмотрим алгоритм вычисления производной обратной матрицы. В соответствии с уравнением (П.2) можно записать:

$$\frac{d[A^{-1}(t) \cdot A(t)]}{dt} = \frac{dI}{dt} = [0]$$

Осуществляя преобразование левой части данного уравнения, запишем:

$$\frac{d(A^{-1}(t))}{dt} \cdot A(t) + A^{-1}(t) \cdot \dot{A}(t) = [0]$$

После соответствующих перестановок получим:

$$\frac{d(A^{-1}(t))}{dt} \cdot A(t) = -A^{-1}(t) \cdot \dot{A}(t).$$

Умножая левую и правую части данного равенства на матрицу $A^{-1}(t)$, запишем производную от обратной матрицы:

$$\frac{d(A^{-1}(t))}{dt} = -A^{-1}(t) \cdot \dot{A}(t) \cdot A^{-1}(t).$$

Замечание. Производная от обратной матрицы не равна обратной матрице от производной исходной матрицы $\left[\frac{dA(t)}{dt} \right]^{-1}$.

П.6. Векторы и линейные векторные пространства

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов \vec{x}, \vec{y} с действительными составляющими определяется выражением:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x^T y = y^T x = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Скалярное произведение двух векторов \vec{x}, \vec{y} для комплексных чисел:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (x^*)^T y = y^T x^* \neq x^T y^*,$$

где x^* – вектор \bar{x} с комплексно сопряженными составляющими.

Ортогональные векторы

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0.$$

Длина вектора

Длина вектора \bar{x} , называемая нормой \bar{x} , определяется как квадратный корень от скалярного произведения:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}.$$

Следствием данного определения являются соотношения:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \text{ – неравенство треугольника;}$$

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \times \|\bar{y}\| \text{ – неравенство Шварца.}$$

Линейная независимость векторов

Векторы $x_i, i = \overline{1, n}$ с составляющими $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}$ называются линейно независимыми, если не существует таких постоянных коэффициентов $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$, что

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \dots + k_m x_m = 0.$$

На основе определения *линейной независимости векторов* формулируются следующие важные определения:

- **особенная матрица.** Квадратная матрица A называется особенной, если ее столбцы или строки являются линейно независимыми, и в этом случае определитель $|A| = 0$. Если $|A| \neq 0$, то матрица A называется неособенной. Следовательно, обратные матрицы существуют только для неособенных матриц;

- **вырожденность.** Если строки или столбцы особенной матрицы линейно связаны одним соотношением, то матрица называется просто

вырожденной, или вырождение кратности 1. Если строки или столбцы матрицы связаны между собой более чем одним соотношением, то матрица называется многократно вырожденной. При числе q таких соотношений матрица имеет вырождение кратности q ;

- ранг матрицы. Рангом r матрицы A является наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A . Если порядок квадратной матрицы равен n , то

$$r = n - q.$$

Ясно, что ранг r матрицы $(n \times n)$ меньше n только в том случае, если матрица является особенной. В этом случае номер максимального минора отличного от нуля, или значение q , называется дефектом матрицы A .

Практические примеры.

1) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; d = [3 \ 2]; e = [1 \ 0]; a = 1.$$

Вычислить:

1) a_{12} ; a_{21} ; d_{12} ; e_{11} ; $A+B$; $A-B$; $A+I$; A^T ; B^T ; $d+e$; $d-e$; d^T ; e^T ; A^T+B^T ;

2) $d \cdot e^T$; $A \cdot B$; $B \cdot A$; $B^T \cdot A^T$; $(A \cdot B)^T$; $A \cdot I$; $I \cdot A$; $A \cdot a$; $A(B+C)$; $AB+AC$; $d^T \cdot e$;

2) блочные матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} A_1/A_3 \\ A_2/A_4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_1/B_3 \\ B_2/B_4 \end{bmatrix}; A+B = \begin{bmatrix} A_1+B_1/A_3+B_3 \\ A_2+B_2/A_4+B_4 \end{bmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (A_1 \cdot B_1 + A_3 \cdot B_2)/(A_2 \cdot B_3 + A_3 \cdot B_4) \\ (A_2 \cdot B_2 + A_4 \cdot B_2)/(A_2 \cdot B_3 + A_4 \cdot B_4) \end{bmatrix}.$$

3) Задано:

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2 & 1 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}; \quad B(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2t \\ t^2 & t \end{bmatrix}.$$

Определить:

$$\frac{d}{dt}[A(t) + B(t)] = \dot{A}(t) + \dot{B}(t); \quad \frac{d}{dt}[A(t) \cdot B(t)] = \dot{A}(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot \dot{B}(t);$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[A^3(t)] &= \dot{A}(t) \cdot A^2(t) + A(t) \cdot \dot{A}(t) \cdot A(t) + A^2(t) \cdot \dot{A}(t) = \dot{A}(t) \cdot A(t) \cdot A(t) + \\ &+ A(t) \cdot \dot{A}(t) \cdot A(t) + A(t) \cdot A(t) \cdot \dot{A}(t). \end{aligned}$$

4) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix}.$$

Определить:

$$Q_0'(A) = \begin{bmatrix} \int_0^t t dt & \int_0^t dt \\ 0 & 0 \\ \int_0^t dt & \int_0^t t dt \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & t \\ t & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

П.7. Характеристическое уравнение

Данная тема чрезвычайно важна, так как от значений характеристических чисел системы зависят ее динамические свойства. Рассмотрим векторно-матричное уравнение:

$$y = A \cdot x,$$

где y, x – векторы-столбцы, A – $(n \times n)$ квадратная матрица.

Если существует вектор x , то y пропорционален x , или можно записать равенство:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x,$$

где λ – скаляр, являющийся коэффициентом пропорциональности.

Данное уравнение можно записать в виде одного векторно-матричного уравнения:

$$(\lambda \cdot I - A) \cdot x = 0.$$

или системы однородных уравнений:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= 0, \\ a_{21} \cdot x_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= 0, \\ \dots, \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) \cdot x_n &= 0. \end{aligned}$$

Система однородных уравнений имеет решение только в том случае, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, т.е.

$$|\lambda \cdot I - A| = 0. \quad (\text{П.3})$$

При этом значения λ_i , для которых уравнение имеет решение $x_i \neq 0$, называются характеристическими числами, а соответствующий вектор решения x_i – характеристическим вектором матрицы A .

Полином n -й степени относительно характеристического числа λ , определяемый уравнением (П.3), называется характеристическим уравнением матрицы A . Общий вид этого уравнения записывается в канонической форме:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0. \quad (\text{П.4})$$

Корни уравнения (П.4) равны характеристическим значениям матрицы A . Корни могут быть вещественными и комплексными (вида $\alpha + j\beta$). При действительных элементах матрицы A комплексные корни должны быть комплексно сопряженными ($\alpha + j\beta$) и ($\alpha - j\beta$). Корни уравнения (П.4) до четвертой степени включительно определяются через коэффициенты a_i при помощи конечного числа алгебраических операций. Уравнения 5-й и более степеней решаются

приближенными методами. Методика определения корней уравнения (П.4) приведена, например, в [1].

Особый интерес представляют коэффициенты характеристического уравнения a_1 и a_n . Так, при значении λ , равном нулю, имеем:

$$P(0) = |-A| = a_n, \Rightarrow a_n = (-1) \cdot |A|.$$

При различных значениях характеристических чисел запишем полином $P(\lambda)$ в виде произведения сомножителей:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n).$$

В случае λ , равном нулю, можно записать:

$$P(0) = (-1)^n \cdot |A| = (-1)^n \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n)$$

или

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n) = |A|.$$

Таким образом, произведение характеристических чисел равно определителю матрицы A . В случае равенства нулю какого-либо из характеристических чисел матрица A является особенной.

Раскрывая характеристическое уравнение (П.4), записанное в виде произведения сомножителей, можно выразить коэффициенты при различных степенях λ через характеристические числа. Например, коэффициент при λ^{n-1} равен

$$a_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

Раскрывая также определитель $|\lambda \cdot I - A|$ найдем, что коэффициент при λ^{n-1} равен

$$a_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) = -(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}).$$

Таким образом, сумма диагональных элементов квадратной матрицы равна сумме ее характеристических чисел и называется *следом* матрицы. След матрицы A записывается в виде:

$$Tr[a_{ij}] = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

Обозначив *след* матрицы A^k (матрица A , умноженная k раз на себя) через T_k , можно записать полезную формулу:

$$\begin{aligned} a_1 &= -T_1, \\ a_2 &= -(2)^{-1} \cdot (a_1 T_1 + T_2), \\ a_3 &= -(3)^{-1} \cdot (a_2 T_1 + a_2 T_2 + T_3), \\ &\dots\dots\dots, \\ a_n &= -(n)^{-1} \cdot (a_{n-1} T_1 + a_{n-2} T_2 + \dots\dots\dots + a_1 T_{n-1} + T_n). \end{aligned}$$

Данная формула известна как формула Бохера и используется при вычислении коэффициентов характеристического уравнения на ЭВМ.

Полезные матричные соотношения:

$$\begin{aligned} TrA &= TrA^T \cdot Tr(a \cdot A) = a \cdot TrA, \\ Tr(A + B) &= TrA + TrB, \\ Tr(B \cdot A) &= Tr(A \cdot B). \end{aligned}$$

П.8. Модальная матрица

Для каждого из n характеристических чисел $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ матрицы A (предполагается, что корни уравнения (П.4) различны) можно получить решение уравнения (П.2) относительно вектора x . Векторы x_i , представляющие решение системы уравнений

$$[\lambda_i - A]x_i = 0. \tag{П.5}$$

являются *характеристическими векторами* матрицы A . Так как уравнение (П.5) однородное, то $k_i x_i$, где k_i – произвольная скалярная величина, также служит решением. Поэтому уравнение (П.5) определяет однозначно лишь направление каждого из x_i . Матрица, образованная векторами-столбцами, называется модальной матрицей (термин *mode* – частота). При различных характеристических числах столбцы модальной матрицы могут выбираться равными или пропорциональными произвольному столбцу $Adj[\lambda \cdot I - A]$. Это

основывается на том факте, что $[\lambda_i \cdot I - A]$ имеет ранг $(n-1)$. То есть, выбор каждого λ_i определяет только один столбец модальной матрицы.

В случае кратных характеристических чисел и несимметрической матрицы A определение независимых модальных столбцов не очевидно. Причина состоит в том, что не существует однозначного соответствия между порядком кратности корня характеристического уравнения и рангом соответствующей характеристической матрицы $[\lambda_i \cdot I - A]$.

П.9. Билинейная и квадратичная формы вектора

Билинейной формой относительно переменных x_i, y_i называется выражение вида:

$$B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i y_j$$

или в матричной форме:

$$B = x^T \cdot A \cdot y.$$

Если вектор x равен вектору y , то данное уравнение превращается в уравнение:

$$Q = x^T \cdot A \cdot x, \quad (\text{П.6})$$

которое называется квадратичной формой.

Квадратичная форма (П.6) называется положительно определенной, если она неотрицательна при всех действительных значениях x и равна нулю только тогда, когда x – нулевой вектор. Если выполняются эти условия, матрица должна быть неособенной матрицей.

Квадратичная форма (П.6) называется положительно полуопределенной, если она неотрицательна. Она может равняться нулю при отличном от нуля векторе x . Данный случай возникает при особенной матрице A .

Определение положительной определенности квадратичной формы при помощи главных миноров. Данный подход позволяет определить свойство положительной определенности квадратичной формы (П.6), не вычисляя собственные значения матрицы. Главным минором матрицы A является минор, диагональные элементы которого являются также диагональными элементами матрицы. Главный минор Δ_m порядка m определяется как определитель, получаемый исключением последних $(n - m)$ столбцов и строк матрицы A . Так как матрица A симметричная, то главные миноры равны:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{11}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Delta_n &= |A|. \end{aligned}$$

П.10. Матричные многочлены. Бесконечные ряды и функции от матриц

Произведение матриц записывается равенством:

$$A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A = A^k,$$

где k – число множителей, входящих в произведение. Умножение степеней матриц определяется из обычных правил скалярной алгебры:

$$\begin{aligned} A^k \cdot A^m &= A^{k+m}, \\ (A^k)^m &= A^{km}, \\ A^0 &= I. \end{aligned}$$

При возведении матрицы в отрицательную степень необходимо, чтобы матрица A была неособенной, то есть существовала обратная матрица:

$$(A^{-1})^m = A^{-m}.$$

П.11. Теорема Кэлли-Гамильтона

Для характеристического полинома вида

$$P(\lambda) = [\lambda_i \cdot I - A]$$

матричный многочлен $P(\lambda) = [0]$ равен нулевой матрице.

Данная теорема позволяет получить простые алгоритмы для нахождения функции от матрицы A . Так, при определении матричных многочленов n -го порядка от матрицы A используется процедура понижения порядка многочлена, который записывается в виде линейной комбинации $1, A, A^2, A^3, \dots$. При получении функции от матрицы используется метод Кэлли-Гамильтона, основанный на одноименной теореме.

Рассмотрим полиномиальную функцию $N(\lambda)$ от матрицы A при случае, когда степень матричного полинома $N(\lambda)$ выше, чем порядок A . Здесь мы полагаем, что $N(\lambda)$ – аналитическая функция в окрестности начала координат. Разделив $N(\lambda)$ на характеристический многочлен $P(\lambda)$ матрицы A , получим:

$$\frac{N(\lambda)}{P(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)}. \quad (\text{П.7})$$

Умножая обе части уравнения на полином $P(\lambda)$, запишем:

$$N(\lambda) = Q(\lambda) \cdot P(\lambda) + R(\lambda).$$

При равенстве $P(\lambda) = 0$ уравнение (П.7) превращается в уравнение:

$$N(\lambda) = R(\lambda).$$

Согласно теореме Кэлли-Гамильтона, при $P(A) = [0]$ матричная функция $N(A)$ будет определяться уравнением:

$$N(A) = R(A).$$

$$d^k \left(\frac{F(\lambda)}{d\lambda^k} \right)_{\lambda = \lambda_i} = \left(\frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k} \right)_{\lambda = \lambda_i}, \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, s.$$

П.12. Ряды матриц

Ряды

Геометрический ряд: $S(A) = I + a \cdot A + a^2 \cdot A^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \cdot A^i$.

Экспоненциальная функция:

$$\exp A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^k}{k!},$$

$$\exp(-A) = I - A + \frac{A^2}{2!} - \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^k A^k}{k!},$$

$$\exp A \cdot \exp D = \exp D \cdot \exp A = \exp(A + D), \quad \text{если } AD = DA,$$

$$\exp A \cdot \exp(-A) = \exp(A - A) = I.$$

Тригонометрические тождества:

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots = \frac{\exp(jA) - \exp(-jA)}{2},$$

$$\cos A = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \dots = \frac{\exp(jA) + \exp(-jA)}{2},$$

$$\exp(jA) = \left(I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \dots \right) + \left(A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots \right) = \cos A + j \sin A,$$

$$\exp(-jA) = \cos A - j \sin A.$$

Дифференцирование экспоненциальной функции

Экспоненциальная функция от времени записывается в виде ряда:

$$\exp(At) = I + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Производная от времени:

$$\frac{d(\exp(At))}{dt} = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \exp(At).$$

k -тая производная определяется выражением:

$$\frac{d^k(\exp(At))}{dt^k} = A^k \exp(At).$$

Интегрирование экспоненциальной функции

Интеграл матричной экспоненты $\exp(At)$, где A – постоянная матрица, определяется путем интегрирования соответствующего ряда:

$$\int_0^t \exp(At) dt = It + \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^k t^{k+1}}{(k+1)!}.$$

В результате интегрирования можно записать:

$$A \int_0^t \exp(At) dt = \exp(At) - I.$$

Полагая, что матрица A неособенная, запишем:

$$\int_0^t \exp(At) dt = (\exp(At) - I)A^{-1}.$$

Решение линейного матричного дифференциального уравнения с изменяющимися во времени коэффициентами часто зависит от экспоненциальной функции

$$\exp \int_0^t A(\lambda) d\lambda.$$

В этом случае данная функция представляется в виде бесконечного ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^t A(\lambda) d\lambda \right\}^k.$$

П.13. Дифференцирование квадратичных форм

Операция дифференцирования квадратичных форм используется при анализе устойчивости динамических систем. Для квадратичной формы

$$Q = x^t \cdot A \cdot x,$$

где A – симметрическая матрица, можно записать:

$$\text{grad}_x Q = 2A \cdot x,$$

где $\{grad_x\}$ – оператор-вектор.

$$\left[\frac{d}{dx} \right] = \left[\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \dots, \frac{d}{dx_n} \right]^T.$$

Часто используется матричный оператор, образованный внешним произведением $\{grad_x\}$ и $\{grad_y\}$:

$$\{grad_x\} \triangleright \triangleleft \{grad_y\} = \left[\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \dots, \frac{d}{dx_n} \right]^T \left[\frac{d}{dy_1}, \frac{d}{dy_2}, \dots, \frac{d}{dy_n} \right].$$

Если симметрическая матрица A , как и вектор переменных x , являются функциями времени, то производная по t от квадратичной формы записывается выражением:

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= \frac{d[x^T(t) \cdot A(t) \cdot x(t)]}{dt} = \dot{x}^T(t) \cdot A(t) \cdot x(t) + x^T(t) \cdot \dot{A}(t) \cdot x(t) + x^T(t) \cdot A(t) \cdot \dot{x}(t) = \\ &= 2\{\dot{x}^T(t) \cdot A(t) \cdot x(t)\} + x^T(t) \cdot \dot{A}(t) \cdot x(t).\end{aligned}$$

Если матрица A - стационарная матрица, то приведенное выражение записывается:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 2(\dot{x}^T(t) \cdot A \cdot x(t)).$$

Практические примеры.

1) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Вычислить $|A|$.

2) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вычислить миноры, алгебраические дополнения и определитель $|A|$.

$$\begin{aligned}|M_{11}| &= 4, & |C_{11}| &= 4, \\ |M_{12}| &= 2, & |C_{12}| &= -2, \\ |M_{13}| &= -4, & |C_{13}| &= -4,\end{aligned}$$

$$|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = -2.$$

3) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Определить алгебраические дополнения и присоединенную матрицу.

$$\begin{aligned} c_{11} &= -3, & c_{12} &= 2, & c_{13} &= 1, \\ c_{21} &= -4, & c_{22} &= 1, & c_{23} &= -2, \\ c_{31} &= 6, & c_{32} &= -4, & c_{33} &= 3, \end{aligned} \quad AdjA = [c_{ji}] = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

4) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определить A^{-1} .

$$|A| = 1, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = I.$$

5) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определить равенство соотношений $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad (A \cdot B)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}}{6}, \quad B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}}{6},$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{2}, \quad B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{3}.$$

6) Задано:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix}.$$

Определить производную от обратной матрицы.

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{A}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7) Задано:

$$x = \begin{bmatrix} 1+j \\ 2 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} 1+j \\ 2j \end{bmatrix}.$$

Определить скалярное произведение.

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= (x^*)^T \cdot y = [1-j \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 1+j \\ 2j \end{bmatrix} = \\ &= [(1-j) \cdot (1+j) + 4j] = 1 + j - j - j^2 + 4j = 2 + 4j. \end{aligned}$$

8) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Определить корень квадратной матрицы A .

1) Пусть: $B^2 = B \cdot B = A$.

Тогда:

$$\begin{bmatrix} b_{11}^2 + b_{12} \cdot b_{21} & b_{12} \cdot (b_{11} + b_{22}) \\ b_{21} \cdot (b_{11} + b_{22}) & b_{12} \cdot b_{21} + b_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$
$$a_{11} = b_{11}^2 + b_{12} \cdot b_{21}, \quad a_{12} = b_{12} \cdot (b_{11} + b_{22}),$$
$$a_{21} = b_{21} \cdot (b_{11} + b_{22}), \quad a_{22} = b_{12} \cdot b_{21} + b_{22}^2.$$

2) Пусть:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$b_{21} = 0, \quad b_{11} = \pm 2, \quad b_{22} = \pm 1, \quad b_{12} = \pm \frac{1}{3}.$$

Квадратный корень A равен:

$$B = \pm \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Одно из решений: $B = \pm \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, но оно не является единственным.

Другое решение: $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{11} \end{bmatrix}$, где $b_{11}^2 + b_{12}b_{21} = 4$.

Существует ∞ число квадратных корней.

9) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Определить A^{-1} .

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2,$$

$$P(A) = A^2 + 3A + 2I = [0].$$

Умножая справа на A^{-1} , запишем:

$$A + 3I + 2A^{-1} = [0].$$

Откуда:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}I = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Определить матричный полином.

$$N(A) = A^4 + A^3 + A^2 + A + I.$$

Характеристическое уравнение.

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

$$A^2 + 3A + 2I = [0],$$

$$A^2 = -3A - 2I.$$

Откуда

$$A^4 = 9A^2 + 12A + 4I = 9(-3A - 2I) + 12A + 4I = -15A - 14I,$$

$$A^3 = -3A^2 - 2A = -3(-3A - 2I) - 2A = 7A + 6I,$$

$$N(A) = -10A - 9I = \begin{bmatrix} -9 & -10 \\ 20 & 21 \end{bmatrix}.$$

Другой вариант определения $N(A)$.

$$N(A) = A^4 + A^3 + A^2 + A + 1, \quad N(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 1, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Разделив $N(\lambda)$ на $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, получим:

$$\begin{array}{r} \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 \quad | \quad \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ -(\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2) \quad \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 \end{array}$$

$$0 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$$

$$-(-2\lambda^3 - 6\lambda^2 - 4\lambda)$$

$$0 + 5\lambda^2 + 5\lambda + 1$$

$$-(5\lambda^2 + 15\lambda + 10)$$

$$-10\lambda - 9 = R(\lambda)$$

$$\frac{N(\lambda)}{P(\lambda)} = (\lambda^2 - 2\lambda + 5) + \frac{(-10\lambda - 9)}{\lambda^2 + 3\lambda + 2}.$$

Поэтому:

$$N(A) = R(A) = -10A - 9I = \begin{bmatrix} -9 & -10 \\ 20 & 21 \end{bmatrix}.$$

11) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Определить $F(A) = \exp(At)$.

Так как матрица A 2-го порядка $n=2$, то многочлен $R(\lambda)$ будет первого порядка.

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda.$$

В результате подстановки λ_1 и λ_2 получим два линейных уравнения:

$$\begin{cases} F(\lambda_1) = R(\lambda_1), \\ F(\lambda_2) = R(\lambda_2), \end{cases} \quad \begin{cases} \exp(-t) = \alpha_0 - \alpha_1, \\ \exp(-2t) = \alpha_0 - 2\alpha_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exp(\lambda_1 t) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1, \\ \exp(\lambda_2 t) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_0 = 2 \exp(-t) - \exp(-2t), \\ \alpha_1 = \exp(-t) - \exp(-2t). \end{cases}$$

Таким образом:

$$F(A) = \exp(At) = \alpha_0 \cdot I + \alpha_1 \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -(e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

12) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Определить $\exp(At)$.

Вычисляем:

$$|\lambda \cdot I - A| = P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Имеем три корня: $\lambda_{1,2} = 1$ и $\lambda_3 = 2$.

Так как, матрица A третьего порядка, то многочлен

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2.$$

Для определения $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ имеем три уравнения:

$$\begin{cases} F(\lambda_1) = R(\lambda_1), \\ \left. \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_1} = \left. \frac{dR(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_1}, \\ F(\lambda_2) = R(\lambda_2), \end{cases},$$

где $\lambda_1 = 1$.

Таким образом, α_i определяются из системы:

$$\begin{bmatrix} e^t \\ t \cdot e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} e^t \\ t \cdot e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Для вычисления C^{-1} будем использовать теорему Келли-Гамильтона.

Характеристический многочлен матрицы $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ равен

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$. Следовательно $C^3 - 6C^2 + 4C - I = [0]$.

Матрица C^{-1} равна $C^{-1} = C^2 - 6C + 4I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Поэтому:

$$\alpha_0 = -2t \cdot e^t + e^{2t},$$

$$\alpha_1 = 2e^t + 3t \cdot e^t - 2e^{2t},$$

$$\alpha_2 = -e^t - t \cdot e^t + e^{2t}.$$

Следовательно:

$$\exp(At) = \alpha_0 \cdot I + \alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot A^2,$$

где $A^2 = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 14 \\ -10 & 10 & 26 \\ -8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

13) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \exp(At) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -(e^{-t} - 2e^{-2t}) \end{bmatrix},$$

$$\int_0^t \exp(At) dt = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{3}{2} & -e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2} \\ 2e^{-t} - e^{-2t} - 1 & e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

14) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вычислить градиент $\text{grad}_x Q$.

$$\begin{aligned} Q &= x^T \cdot A \cdot x = [x_1 \quad x_2] \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 = \\ &= x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2, \end{aligned}$$

$$\text{grad}_x Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ 4x_2 + 6x_1 \end{bmatrix}.$$

15) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} t^2 & 2t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}.$$

Определить производную выражения $Q(t) = x^T \cdot A(t) \cdot x$.

$$Q(t) = t^2 x_1^2 + x_2^2 + 4t x_1 x_2,$$

$$Q(t) = 2\dot{x}^T \cdot A(t) \cdot x + x^T \cdot \dot{A}(t) \cdot x = \dots$$

16) Задано:

Система однородных уравнений с матрицей коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Запишем характеристический полином, используя формулу Бохера.

$$a_1 = -T_1 = -(2 + 1 - 1) = -2, \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad T_2 = 14,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(a_1 T_1 + T_2) = -5, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 3 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{bmatrix}, \quad T_3 = 20,$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}(a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3) = 6.$$

Многочлен имеет вид:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 3) = 0.$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Определение корней квадратного уравнения:

$$\lambda^2 + a\lambda + c = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}.$$

Определение корней кубического уравнения:

$$P_n(\lambda) = \lambda^3 + r\lambda^2 + s\lambda + t = 0,$$

если многочлен $P_n(\lambda)$ делится на $(\lambda - \lambda_1)$ без остатка, то другие из уравнения:

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot P_{n-1}(\lambda) \quad \text{при } P_{n-1}(\lambda) = 0.$$

17) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Определить характеристические числа и модальную матрицу.
Характеристическое уравнение:

$$|\lambda \cdot I - A| = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & 2 & -3 \\ -1 & (\lambda - 1) & -1 \\ -1 & -3 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 3),$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Присоединенная матрица:

$$Adj[\lambda \cdot I - A] = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 4 & -2\lambda + 7 & 3\lambda - 5 \\ \lambda + 2 & \lambda^2 - \lambda - 5 & \lambda + 1 \\ \lambda + 2 & 3\lambda - 8 & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \end{bmatrix}.$$

При $\lambda = 1$ присоединенная матрица $\begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$

При $\lambda_2 = -2$: $\begin{bmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix}$. При $\lambda_3 = 3$: $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$

Модальная матрица $M = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}$.

18) Задано:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить $C = M^{-1} \cdot A \cdot M$.

$$M^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -15 & 25 & -10 \\ 0 & 2 & -2 \\ 15 & 3 & 12 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б.П. и др. Численные методы анализа.- М.: Физматгиз, 1963.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц – М.: Наука, 1969г.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с американского / Под ред. И.Г. Арамановича. М.:Наука, 1984.
4. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. - М.: Наука. 1985. - 351 с.
5. Горовиц А. Синтез систем с обратной связью. - М.: Сов. Радио, 1970.- 600 с.
6. Емельянов С.В. Системы автоматического регулирования с переменной структурой. - М.: Наука, 1967. - 382 с.
7. Кулесский Р.А., Шубенко В.А. Электроприводы постоянного тока с цифровым управлением. - М.: Энергия, 1973. - 208 с.
8. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. Учебн. пособие для электротехн. специальностей вузов. М.:Высшая школа, 1973. – 528 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	7
1.1. Решение неоднородной системы уравнений	7
Решение однородной системы уравнений.....	8
Решение зависимых неоднородных уравнений	9
2. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	12
2.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.....	12
2.2. Метод последовательных приближений	15
2.3. Метод численного интегрирования	17
2.4. Метод Эйлера.....	18
2.5. Модификации метода Эйлера	20
2.6. Метод Рунге-Кутты	23
2.7. Метод Адамса.....	25
3. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	28
3.1. Методы линеаризации нелинейных элементов и систем	28
3.2. Формы записи линеаризованных моделей	37
4. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ.....	41
4.1. Элементы структурных схем.....	41
4.2. Преобразование структурных схем.....	41
4.3. Передаточные функции систем регулирования.....	45
4.4. Динамические звенья и их характеристики.....	56
4.4.1. Типовые звенья.....	56
4.4.2. Переходная и весовая функции	57
4.4.3. Частотная передаточная функция и частотные характеристики	60
4.4.4. Логарифмические частотные характеристики	63
5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	67
5.1. Безинерционное звено	67
5.2. Аперидическое звено первого порядка.....	69
5.3. Аперидическое звено второго порядка.....	75
5.4. Колебательное звено.....	81
5.5. Консервативное звено	88
5.6. Идеальное интегрирующее звено	91
5.7. Интегрирующее звено с замедлением.....	94
5.8. Изодромное звено	96
5.9. Идеальное дифференциальное звено	99
5.10. Дифференциальное звено с замедлением.....	102
5.11. Экспериментальный метод определения вида передаточной функции	106

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ.....	109
6.1. Представление дифференциальных уравнений в виде структурных схем	109
6.2. Представление дифференциальных уравнений систем в форме Коши	111
6.3. Преобразование дифференциальных уравнений в стандартную форму пространства состояний	115
6.4. Нормальная форма записи уравнений	118
6.4.1. Нормальная форма записи дифференциальных уравнений	118
6.4.2. Нормальная форма записи векторно-матричных уравнений	121
7. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДРОБИ	127
7.1. Разложение передаточных функций на элементарные дроби при различных корнях характеристического уравнения	127
7.2. Разложение передаточной функции на элементарные дроби при кратных корнях характеристического уравнения	129
8. ПЕРЕХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ.....	131
8.1. Решение однородного и неоднородного уравнений состояния.....	133
8.2. Определение переходных матриц линейных стационарных систем.....	135
ПРИЛОЖЕНИЕ	146
П.1. Основные типы матриц.....	146
П.2. Простейшие операции.....	147
П.3. Определители	148
П.4. Миноры и алгебраические дополнения	148
П.5. Присоединенная и обратная матрицы	149
П.6. Векторы и линейные векторные пространства	150
П.7. Характеристическое уравнение	153
П.8. Модальная матрица	156
П.9. Билинейная и квадратичная формы вектора.....	157
П.10. Матричные многочлены. Бесконечные ряды и функции от матриц	158
П.11. Теорема Кэлли-Гамильтона	159
П.12. Ряды матриц	161
П.13. Дифференцирование квадратичных форм.....	163
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	176

Виктор Григорьевич Букреев
Иван Юрьевич Краснов
Алексей Анатольевич Старых

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие

Редактор

О.М. Васильева

Подписано к печати . Формат 60x84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. Уч.-изд.л. .
Заказ . Тираж экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ . 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.