



Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Линейная алгебра Ч.1

2022



Линейная алгебра Ч.1

- Понятие матрицы
- Действия над матрицами
- Минор и алгебраическое дополнение
- Определитель (детерминант)
- Свойства определителя
- Обратная матрица

Введение. **Понятие матрицы**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица размера (m×n)

Любая прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей размера (m×n).

Числа, образующие матрицу, называются элементами матрицы.

Историческая справка

Понятие матрицы впервые появилось в середине 19 века. Термин «матрица» ввёл Д.Сильвестр. Начала теории матриц содержит статья ирландского математика и физика У.Гамильтона (1805–1865) «Линейные и векторные функции» (1853). Основы матричного исчисления заложены А.Кели (1821–1895) в «Мемуаре о теории матриц» (1858). Современные обозначения — две вертикальные чёрточки — ввёл английский математик А.Кели (1843–1845), а круглые скобки — английский математик Д.Коллис (1913).

Например,



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица
размера (3x3) или
матрица 3-го порядка

Можно выписать матрицу столбец

$$B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица - столбец размера (3x1)

Можно записать матрицу-строку

$$C = (2 \quad 4 \quad -5) \quad , \text{ размер матрицы } (1 \times 3)$$

В квадратных матрицах можно выделить главную и побочную диагонали

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{побочная} \\ \text{главная} \end{array}$$

Примеры числовых матриц и «не очень»



$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Единичная матрица (3x3)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10^2 & 10^3 \\ 10^4 & 10^5 & 10^6 \\ 10^7 & 10^8 & 10^9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{Скалярная матрица (3x3)}$$

$$B = \begin{pmatrix} \text{Вася} & \text{Коля} & \text{Миша} \\ \text{Иван} & \text{Айк} & \text{Сэм} \\ \text{Хон} & \text{Мин} & \text{Ваагн} \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Нулевая матрица}$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi \\ \varphi & \xi & \kappa \\ \vartheta & \psi & \eta \end{pmatrix}$$



Действия над матрицами

Определение. Две матрицы A и B называются **равными**, если они одинакового размера и соответствующие элементы обеих матриц равны.

Пример Выяснить, какие из следующих матриц равны:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad -1 \quad 2 \quad 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} \sin(\pi/2) & \cos \pi \\ 2 \cos 2\pi & \sin 2\pi \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & \sin(3\pi/2) \\ 2 \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix}.$$



Пример Выяснить, какие из следующих матриц равны:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad -1 \quad 2 \quad 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} \sin(\pi/2) & \cos \pi \\ 2 \cos 2\pi & \sin 2\pi \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & \sin(3\pi/2) \\ 2 \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix}.$$

Решение.

Сравнивать между собой можно лишь матрицы A, B, D, H , т.к. они одинакового размера, а соответственные элементы равны лишь у матриц A и D . Следовательно, равные лишь A и D .



Транспонирование матриц

Определение. Пусть матрица A имеет вид (1). Тогда матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **транспонированной** к матрице A .

При транспонировании строки и столбцы матрицы меняются местами.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Свойства операции транспонирования.

- 1) Если $A \in M_{m \times n}$, то $A^T \in M_{n \times m}$.
- 2) $(A^T)^T = A$.

Сложение матриц



Операция сложения определена для матриц одного размера. Пусть $A, B \in M_{m \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Суммой матриц A и B называется матрица

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример Сложим две матрицы



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0+6 & -1+3 & -5+0 \\ 4+1 & 2+4 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения матриц

- 1) Операция сложения матриц коммутативна и ассоциативна, т.е.
 $A + B = B + A$ — коммутативность.
 $(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность.
- 2) $A + O = O + A$. Здесь O — матрица того же размера, что и матрица A .
- 3) Для любой матрицы A существует единственная матрица B такая, что $A + B = O$.
- 4) Операция сложения и транспонирования связаны соотношением

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$



Умножение матрицы на число

Определение. Произведением матрицы A вида (1) на число λ называется матрица

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример Умножим матрицу A на действительное число λ .



$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}, \lambda = \frac{3}{5}.$$

$$B = \lambda A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \cdot (-2) & \frac{3}{5} \cdot 3 \\ \frac{3}{5} \cdot 1 & \frac{3}{5} \cdot 4 \\ \frac{3}{5} \cdot 12 & \frac{3}{5} \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{36}{5} & 3 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число

- 1) $1 \cdot A = A$,
- 2) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
- 3) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
- 4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
- 5) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.



Умножение матриц

Даны две матрицы A и B :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix}.$$

Если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B , тогда их произведение определяется так:

$$A \cdot B = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, r.$

Здесь для удобства записи использовали знак суммы \sum .



Пример Перемножим две матрицы. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Т.к. число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B , то можно говорить о произведении матрицы A на матрицу B :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-9) + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-9) + 1 \cdot 4 + 7 \cdot (-2) & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 5 & -5 \\ -46 & 19 & -6 \end{pmatrix}$$

Отметим, что в данном случае произведение BA не существует, т.к. число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A .

Свойства операции умножения матриц

- 1) Если $A \in M_{m \times n}, B \in M_{n \times r}$, то $AB \in M_{m \times r}$
- 2) Умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно, т.е., если AB и BA существует, то не обязательно $AB = BA$. В этом заключается одно из отличий операции умножения матриц от операции умножения чисел (последнее всегда коммутативно).
- 3) Умножение матриц ассоциативно:
 $(AB)C = A(BC)$
(при условии существования указанных произведений).
- 4) Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения:
 $(A + B)C = AC + BC,$
 $F(A + B) = FA + FB.$
- 5) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$
- 6) $(AB)^T = B^T \cdot A^T.$
- 7) Пусть E — единичная матрица. Тогда для любой квадратной матрицы A того же порядка что и E

$$EA = AE = A.$$



Для **КВАДРАТНЫХ** матриц можно вычислить определитель.

Определитель квадратной матрицы есть некоторое число, которое вычисляется из элементов матрицы по определенному правилу, которое будет сформулировано после введения понятий миноров и алгебраических дополнений элементов определителя.

Минором элемента определителя называется определитель, полученный после вычеркивания из исходного строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Алгебраическое дополнение элемента – это минор этого элемента, взятый со знаком (+), если сумма номеров строки и столбца, на которых находится элемент – четная, и со знаком (-), если эта сумма – нечетная.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \color{blue}{2} & \color{blue}{4} & \color{blue}{-5} \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = M_{11}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & \color{blue}{-5} \\ \color{blue}{3} & \color{blue}{-1} & \color{blue}{2} \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -M_{23}$$



Определитель 3-го порядка находится путем разложения определителя по элементам строки или столбца.

При этом используется

Основное правило вычисления определителя:
Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения

Например, разложение определителя по элементам 1-ой строки будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$
$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



Пример вычисления определителя путем разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \\ = (3 \cdot 6 - (-2) \cdot (-1)) + 4 \cdot (5 \cdot 6 - (-2) \cdot 4) + 2 \cdot (5 \cdot (-1) - 3 \cdot 4) = \\ = (18 - 2) + 4 \cdot (30 + 8) + 2 \cdot (-5 - 12) = 16 + 152 - 34 = 134$$

Наиболее выгодным является разложение определителя по элементам того ряда, в котором все элементы, кроме одного, равны нулю

Например, данный определитель наиболее выгодно разложить по элементам 2-й строки

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 0 + 0 = \\ = -3 \cdot ((-1) \cdot 7 - (-2) \cdot 4) = -3 \cdot (-7 + 8) = -3 \cdot 1 = -3$$

Если строк или столбцов с нулями нет, то их можно получить, используя элементарные преобразования, не меняющие величины определителя.

Согласно свойству определителей: *Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого ряда, предварительно умноженные на число.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2+2 & -4+3 & -6-4 & -8-1 \\ 3-3 & 6+1 & 9-2 & 12+5 \\ 4-4 & 8-3 & 12+1 & 16+2 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & 7 & 7 & 17 \\ 0 & 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 7 & 7 & 17 \\ 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ -7+7 & -70+7 & -63+17 \\ -5+5 & -50+13 & -45+18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 0 & -63 & -46 \\ 0 & -37 & -27 \end{vmatrix} = \\
 = (-1) \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -63 & -46 \\ -37 & -27 \end{vmatrix} = -(-63 \cdot (-27) - (-46) \cdot (-37)) = \\
 = -(1701 - 1702) = 1$$



Свойства определителей

1. Постоянный множитель из элементов какого либо ряда можно выносить за знак определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ 8 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 8 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Определитель равен нулю, если все элементы какого-либо ряда равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \\ 9 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. Определитель равен нулю, если есть два ряда, соответствующие элементы которых равны или пропорциональны

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 12 \\ -3 & -5 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$



Обратная матрица. Матричные уравнения

Обратной матрицей для квадратной матрицы A называется матрица A^{-1} произведение которой на исходную матрицу равно единичной матрице

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица существует только для квадратных невырожденных матриц, т.е. таких матриц, определитель которых отличен от нуля

$$\det A \neq 0$$

Равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Служит для проверки правильности нахождения обратной матрицы



Нахождение обратной матрицы

2. Найти матрицу, обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Находим определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 18 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(18 \cdot 3 + 1) = -55 \neq 0$$

Т.о. обратная матрица существует.

2) Составляем союзную матрицу

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 8) = -11 \quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 5) = 1 \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 20 = 22 \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 16) = -18$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 5 = 13 \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 15) = 11 \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 1 & 22 & -18 \\ 13 & 11 & -14 \end{pmatrix}$$

3) Полученную матрицу транспонируем 4) Обратная матрица

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 13 \\ -11 & 22 & 11 \\ -1 & -18 & -14 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{55} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 13 \\ -11 & 22 & 11 \\ -1 & -18 & -14 \end{pmatrix}$$

Спасибо за внимание