Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Векторная алгебра Ч.1

2022

Векторная алгебра Ч.1

-Понятие Вектора

-Действия над векторами

-Понятие базиса

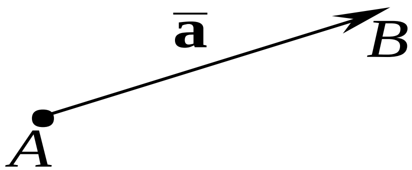
-Скалярное произведение

-Векторное произведение

-Смешанное произведение

Понятие вектора. Виды векторов

Вектором или по-другому свободным вектором называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого есть начало и конец).



Расстояние от начала вектора до его конца называется длиной или модулем вектора и обозначается $|\overline{\mathbf{AB}}|$ или $|\overline{\mathbf{a}}|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором или ортом.**

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым** и обозначается $\overline{\mathbf{0}}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Два вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90.

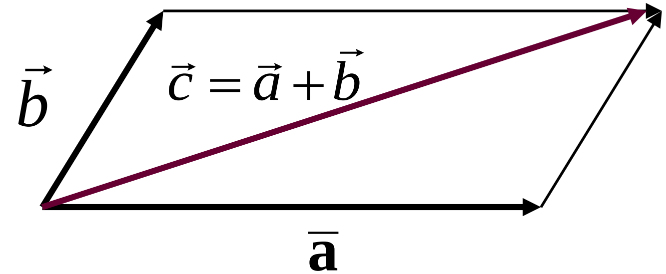
Два вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной или параллельных прямых.

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются **компланарными**.

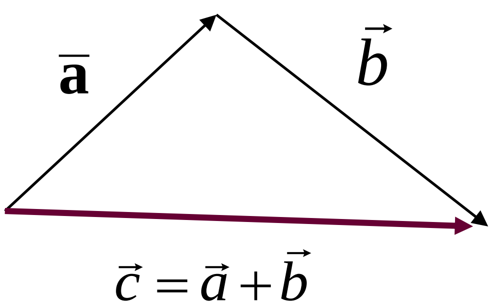
Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и направление.

Сложение и вычитание векторов

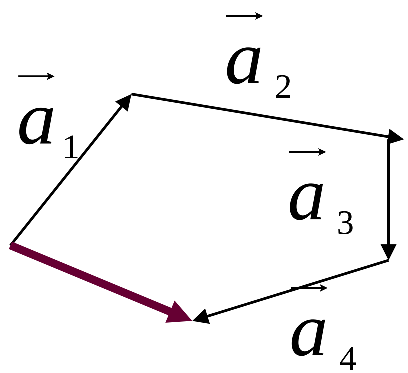
Сложение векторов
(правило параллелограмма)



Сложение векторов
(правило треугольника)

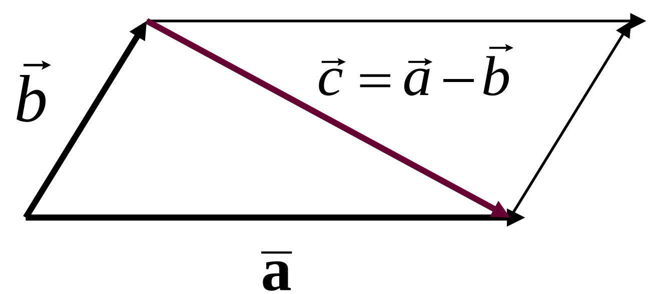


Сложение векторов
(правило многоугольника)



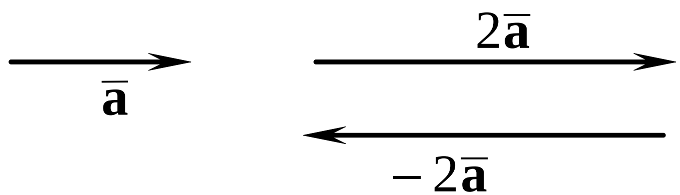
$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$$

Вычитание векторов



Умножение вектора на число векторов

Произведением вектора $\overline{\mathbf{a}}$ на число $\alpha \neq 0$ называется вектор, длина которого $|\alpha| \cdot |\overline{\mathbf{a}}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{\mathbf{a}}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$.



При умножении вектора на (-1) получается противоположный вектор

$$-\overline{\mathbf{a}} = (-1)\overline{\mathbf{a}}$$

Если два ненулевых вектора коллинеарны то один из них можно выразить через другой

$$\overline{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{b}}$$

Линейная независимость системы векторов. Понятие базиса

Совокупность векторов называется линейно зависимой, если линейная комбинация этих векторов равна нулю, причем не все коэффициенты линейной комбинации равны нулю одновременно.

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} = 0$$

Совокупность векторов называется линейно независимой, если линейная комбинация этих векторов не равна нулю, причем равенство нулю возможно только в том случае, если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю одновременно.

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} \neq 0$$

Если векторы линейно зависимы, то один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Три ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны. В этом случае третий вектор является линейной комбинацией двух других $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$

Два ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$

Базисом векторного пространства называется совокупность линейно независимых векторов, количество которых определяется размерностью пространства. Любой небазисный вектор является линейной комбинацией базисных.

В одномерном пространстве - один базисный вектор $\vec{a}$, остальные векторы можно записать в виде $\overline{\mathbf{b}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{a}}$

Все такие векторы будут лежать на одной прямой с вектором $\vec{a}$.

Таким образом, одномерное пространство – это пространство коллинеарных векторов.

В двумерном пространстве на плоскости будет два базисных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а любой третий вектор равен их линейной комбинации

Такой вектор является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\alpha \cdot \vec{a}$ и $\beta \cdot \vec{b}$. Т.е. все три вектора будут компланарны.

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

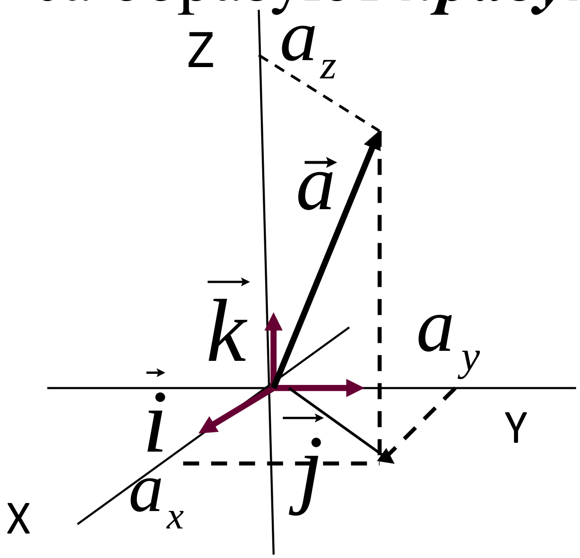
В трехмерном пространстве – три базисных вектора, а любой четвертый можно представить в виде $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$

Выражения вида $\overline{\mathbf{b}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{a}}$, $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$

называются разложениями вектора по базису, а коэффициенты разложения координатами вектора в данном базисе.

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называют систему координат, базисом в которой являются единичные векторы, попарно ортогональные друг с другом.

Правая система координат, в которой векторы базиса образуют ***правую тройку***, обозначают $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:



Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор.

Тогда $\bar{\mathbf{a}} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$

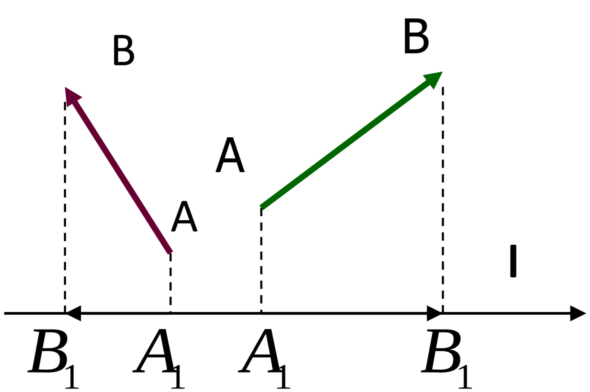
или $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$

Замечание. Иногда в качестве базиса берут ***левую тройку*** векторов ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$). Тогда такую систему координат называют ***левой***.

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, то есть направленная прямая, $\overline{\mathbf{AB}}$ – произвольный вектор.

Обозначим через $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_1}$ – проекции на ось l точек **A** и **B** соответственно.



Проекцией вектора $\overline{\mathbf{AB}}$ ***на ось*** l называется положительное число $\left|\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}\right|$, если вектор $\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}$ и ось l одинаково направлены, и отрицательное число $-\left|\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}\right|$, если вектор $\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}$ и ось l противоположно направлены.

Если точки $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_1}$ совпадают, то проекция вектора $\overline{\mathbf{AB}}$ равна 0.

Свойства проекций:

1. Проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось l равна произведению длины вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на косинус угла φ между вектором и осью: $\text{пр}_l \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos\varphi$.

2. Проекция суммы нескольких векторов на ось l равна сумме их проекций на эту ось.

3. При умножении вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число λ его проекция на ось l также умножается на это число: $\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}$.

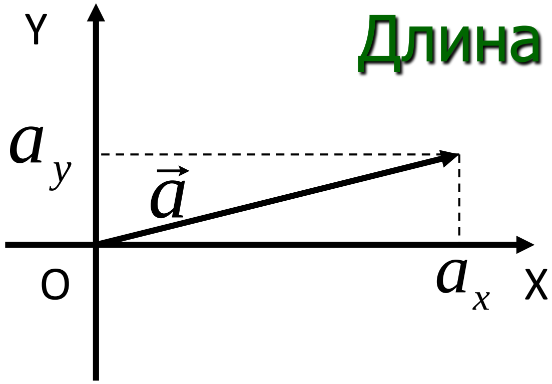
$$\bar{\mathbf{a}} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$

координата a_x – это проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Ox

координата a_y – проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Oy

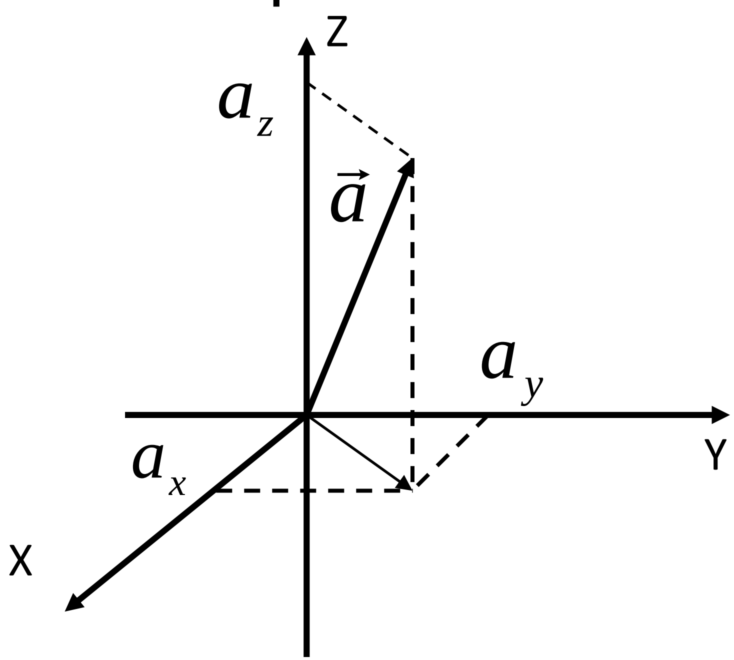
координата a_z – проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Oz.

Длина вектора



Длина вектора в декартовом базисе на плоскости находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$



Длина вектора в декартовом базисе в пространстве находится по формуле

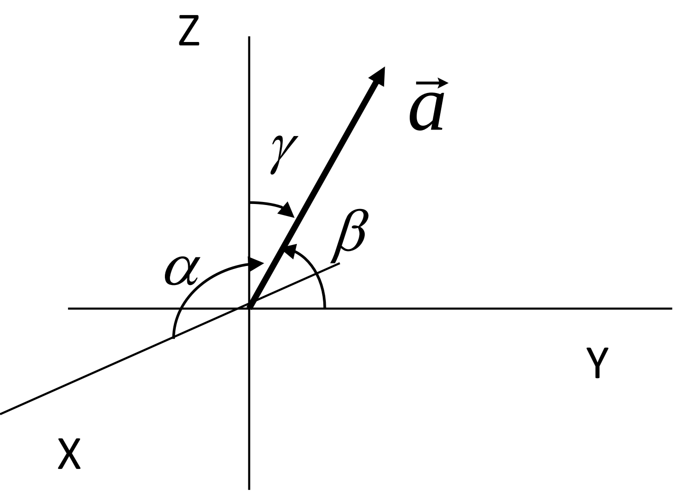
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

(под корнем – сумма квадратов координат вектора)

Пример. Найти длину вектора $\vec{a} = \{2;-7;5\}$

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 49 + 25} = \sqrt{78}$

Направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$



По свойству 1 проекций

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\bar{\mathbf{a}} = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha,$$

$$a_y = \text{пр}_{Oy}\bar{\mathbf{a}} = |\bar{a}| \cdot \cos\beta,$$

$$a_z = \text{пр}_{Oz}\bar{\mathbf{a}} = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow$$

Рассмотрим вектор $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$.

$$\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\} = \frac{a_x}{|\bar{a}|}\mathbf{i} + \frac{a_y}{|\bar{a}|}\mathbf{j} + \frac{a_z}{|\bar{a}|}\mathbf{k} = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{\mathbf{a}},$$

то есть вектор $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ – единичный и направлен также, как и $\bar{\mathbf{a}}$. Этот вектор называют ***ортом вектора*** $\bar{\mathbf{a}}$.

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – ***направляющие косинусы*** вектора $\bar{\mathbf{a}}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ – ***свойство*** направляющих косинусов.

Действия над векторами в координатной форме

Пусть $\mathbf{\bar{a}} = \{ a_x, a_y, a_z \}$, $\mathbf{\bar{b}} = \{ b_x, b_y, b_z \}$.

1. Сложение векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$$

2. Вычитание векторов

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}$$

3. Умножение вектора на число

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} = \{ \alpha \cdot a_x, \ \alpha \cdot a_y, \ \alpha \cdot a_z \}$$

4. Линейная комбинация векторов

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \{\alpha \cdot a_x + \beta \cdot b_x; \alpha \cdot a_y + \beta \cdot b_y; \alpha \cdot a_z + \beta \cdot b_z\}$$

Условие коллинеарности векторов в координатной форме

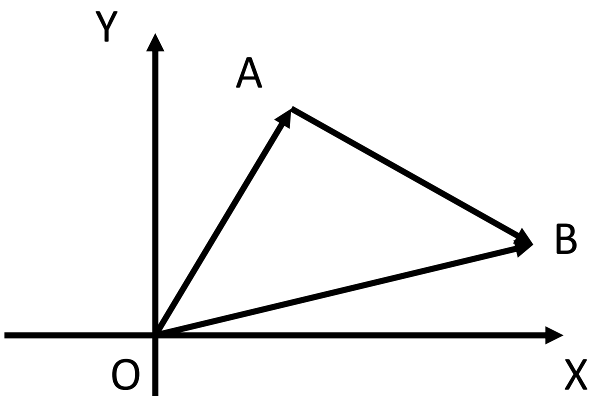
Если два вектора коллинеарны, то

$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ тогда $\begin{cases} b_x = \alpha \cdot a_x \\ b_y = \alpha \cdot a_y \\ b_z = \alpha \cdot a_z \end{cases}$ откуда $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \alpha$

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Координаты вектора, заданного начальной и конечной точками

Пусть известны координаты начала и конца вектора



$\mathbf{A}\,(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{B}\,(x_2, y_2, z_2)$.

Найдем координаты $\overline{\mathbf{AB}}$.

Вектор $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{OB}} - \overline{\mathbf{OA}}$.

Векторы, выходящие из начала координат в какую-либо точку, называются радиус-векторами этой точки.

Координаты радиуса-вектора точки совпадают с координатами самой точки, поэтому

$$\overline{\mathbf{OB}} = \{x_2, y_2, z_2\},$$

$$\overline{\mathbf{OA}} = \{x_1, y_1, z_1\},$$

И тогда $\overline{\mathbf{AB}} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Координаты вектора равны разности соответствующих координат конечной и начальной точек.

Расстояние между двумя точками

Если требуется найти расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то можно образовать вектор

$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и найти его длину по известной формуле

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Пример. Найти расстояние между точками $A(5;-3;1)$ и $B(3;6;-2)$

Решение. Образуем вектор, соединяющий точки, и найдем его длину

$$\overrightarrow{AB} = \{3-5; 6-(-3); -1-2\} = \{-2; 9; -3\}$$

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 9^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+81+9} = \sqrt{94}$$

Скалярное произведение векторов

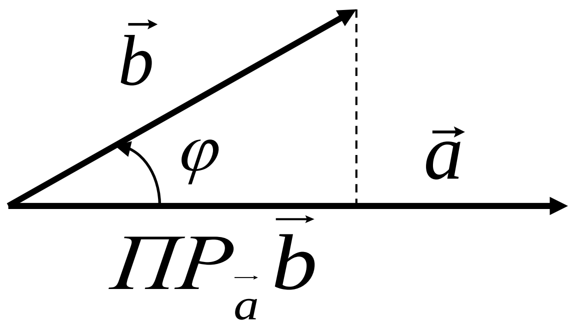
Определение. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Записывают $\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}$ или $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi$$

$$\text{пр}_{\bar{\mathbf{b}}} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \text{пр}_{\bar{\mathbf{a}}} \bar{\mathbf{b}}$$

$$\text{пр}_{\bar{\mathbf{a}}} \bar{\mathbf{b}} = |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow$$



$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \text{пр}_{\bar{\mathbf{b}}} \bar{\mathbf{a}}$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \text{пр}_{\bar{\mathbf{a}}} \bar{\mathbf{b}} = |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \text{пр}_{\bar{\mathbf{b}}} \bar{\mathbf{a}}$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов, если известно:

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 4, \quad \varphi = 120^o$$

Решение.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^o = 12 \cdot (-0{,}5) = -6$$

Свойства скалярного произведения

1. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}})$

2. $(\lambda\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda\,\bar{\mathbf{b}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$

3 $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$

4. Если два вектора перпендикулярны, то есть $\vec{a} \perp \vec{b}$, то их скалярное произведение равно нулю $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 0$

5. Если два вектора коллинеарны, то их скалярное произведение равно произведению длин векторов. При этом произведение положительно, если векторы сонаправлены, и отрицательно, если направления противоположные

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \pm|\vec{a}| \cdot |\overleftarrow{b}|$$

В частности, скалярное произведение вектора самого на себя равняется скалярному квадрату вектора и равняется квадрату его длины

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{a}\right) = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение в координатной форме

Скалярное произведение в координатной форме равно сумме произведений соответствующих координат

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов

$\vec{a} = \{2;-7;5\}$ и $\vec{b} = \{-3;0;-4\}$

Решение

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 2 \cdot (-3) + (-7) \cdot 0 + 5 \cdot (-4) = -6 + 0 - 20 = -26$$

Применение скалярного произведения

Скалярное произведение применяется для нахождения:

1. Длины вектора
2. Проекции вектора на вектор
3. Косинуса угла между векторами
4. Проверки условия перпендикулярности векторов
5. Работы силы по перемещению точки

Векторное произведение векторов

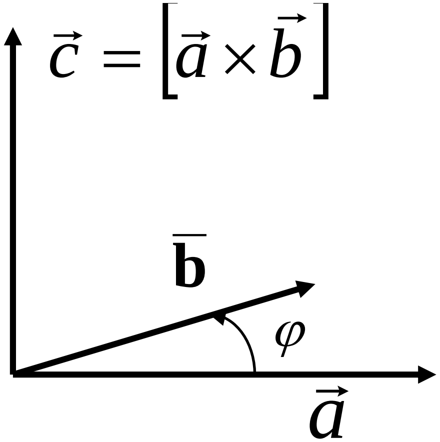
Определение. ***Векторным произведением*** двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{c}}$, для которого выполняются следующие условия:

1. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$, т.е. перпендикулярен плоскости, в которой лежат эти векторы.
2. Длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов на синус угла между векторами

$$|\vec{c}| = \left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$$

3. Вектор $\vec{c}$ направлен так, что из его конца кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки

$$\vec{c} = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$$



Обозначения векторного произведения

$$\vec{c} = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right] \quad \text{или} \quad [\,\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}\,]$$

Если хотя бы один из векторов нулевой, то полагают, что векторное произведение равно нулевому вектору.

Векторные произведения векторов декартового базиса

$$[\mathbf{i},\ \mathbf{j}] = \mathbf{k} \qquad [\mathbf{j},\ \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$$

$$[\mathbf{j},\mathbf{k}] = \mathbf{i} \qquad [\mathbf{k},\mathbf{j}] = -\mathbf{i}$$

$$[\mathbf{i},\mathbf{k}] = -\mathbf{j} \qquad [\mathbf{k},\mathbf{i}] = \mathbf{j}$$

Свойства векторного произведения

1. $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}]$

2. $[\alpha\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}},\alpha\bar{\mathbf{b}}] = \alpha[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$

3. $[\bar{\mathbf{a}}_1+\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}}]$

4. Векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю. В частности, если векторным образом перемножать вектор сам на себя, получится $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{a}}] = \bar{0}$

Векторное произведение в координатной форме

$$[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}] = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Векторное произведение в координатной форме представляет собой определитель третьего порядка, в первой строке которого стоят базисные векторы декартовой системы координат,
а во второй и третьей строках – координаты перемножаемых векторов.

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = \{2;-7;5\}$ и $\vec{b} = \{-3;0;-4\}$

Решение. Составляем определитель и раскладываем его по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -7 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

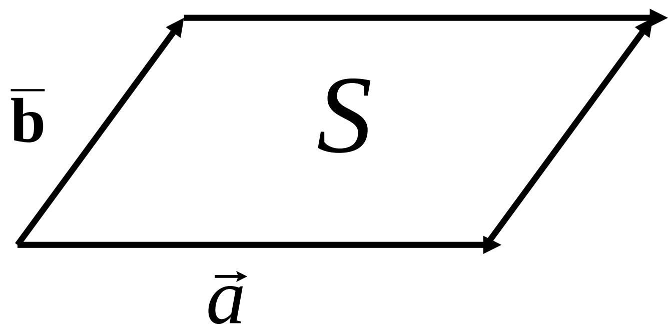
$$= \vec{i}\cdot\big((-7)\cdot(-4) - 5\cdot 0\big) - \vec{j}\cdot(2\cdot(-4) - 5\cdot(-3)) + \vec{k}\cdot(2\cdot 0 - (-7)\cdot(-3)) = 28\cdot\vec{i} - 7\cdot\vec{j} - 21\cdot\vec{k}$$

Применение векторного произведения

Основные приложения векторного произведения:

1. Нахождение площадей параллелограмма и треугольника.
2. Нахождение вектора, перпендикулярного двум векторам.

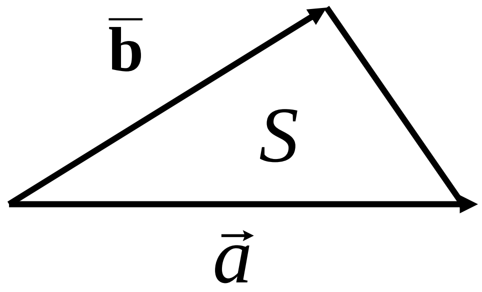
Площадь параллелограмма, построенного на двух векторах, равна модулю векторного произведения этих векторов



$$S = |[\,\bar{\mathbf{a}}\,,\bar{\mathbf{b}}\,]|.$$

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$

Площадь треугольника



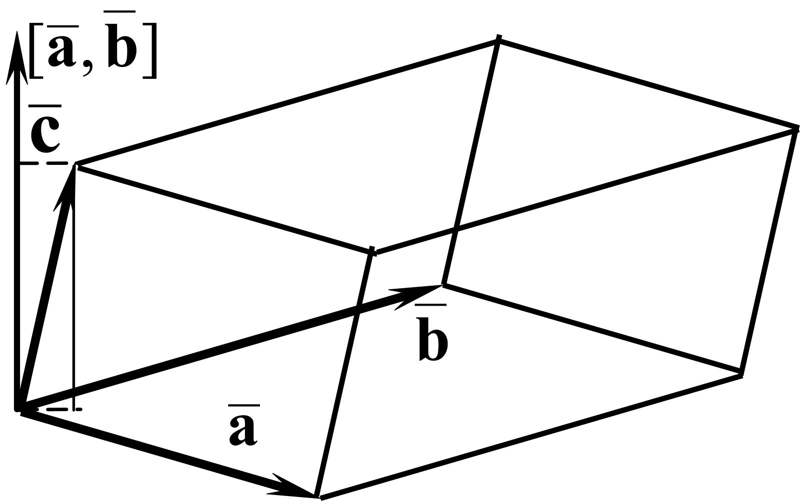
$$S = \frac{1}{2} \cdot |[\,\bar{\mathbf{a}}\,,\bar{\mathbf{b}}\,]|.$$

Смешанное произведение трех векторов

Определение. ***Смешанным произведением*** трёх векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ умножаем скалярно на $\bar{\mathbf{c}}$:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}).$$

Геометрически смешанное произведение по абсолютной величине равняется объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.



$$V = |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$

Объем треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$

Свойства смешанного произведения

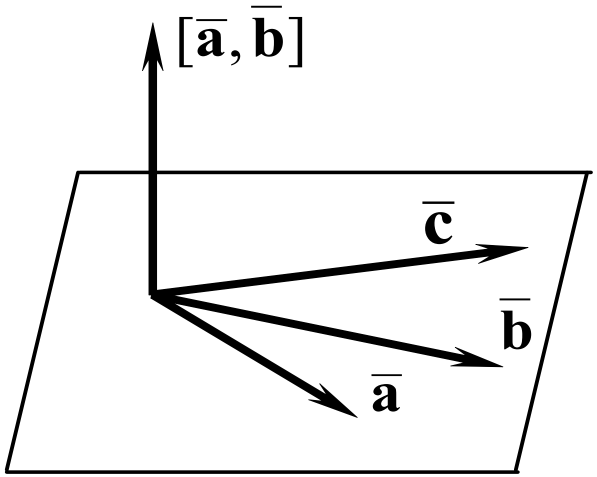
1. $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = -([\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}], \bar{\mathbf{c}})$

2. $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}], \bar{\mathbf{a}}) = ([\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}], \bar{\mathbf{b}})$

3. $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}])$

Условие компланарности векторов.

Если три вектора компланарны, то их смешенное произведение равняется нулю.



$$([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}) = 0$$

Смешанное произведение в координатной форме

Пусть $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x, b_y, b_z\}$, $\overline{\mathbf{c}}=\{c_x, c_y, c_z\}$.

Тогда смешанное произведение в координатной форме равняется определителю третьего порядка, строками которого являются координаты этих векторов

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Применение смешанного произведения:

1. Нахождение объемов параллелепипеда и пирамиды.
2. Проверка условия компланарности трех векторов.
3. Проверка линейной независимости векторов или проверка условия, образуют ли три вектора базис в трехмерном пространстве.

Если векторы некомпланарны, то они линейно независимы и образуют базис. Их смешанное произведение отлично от нуля

$$([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Спасибо за внимание