Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Аналитическая геометрия в пространстве Ч.2

2022

Аналитическая геометрия в пространстве Ч.2

-Сфера

-Эллипсоид

-Гиперболоиды

-Конусы

-Параболоиды

-Цилиндрические поверхности

-Примеры

Поверхности 2-го порядка

Общее уравнение плоскости или прямой в пространстве – есть уравнения линейные относительно переменных x, y и z

Уравнение поверхности 2-го порядка

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 -$ квадратичная часть

$Dx + Ey + Fz + G -$ линейная часть

К поверхностям 2-го порядка относятся :
сфера, эллипсоид, гиперболоиды, конусы, параболоиды и цилиндры.

Основная задача состоит в умении по уравнению определить тип поверхности, привести само уравнение к каноническому виду и построить поверхность в системе координат.

1. Сфера

Определение. Сферой называется множество точек пространства, равноудаленных от одной точки, называемой центром

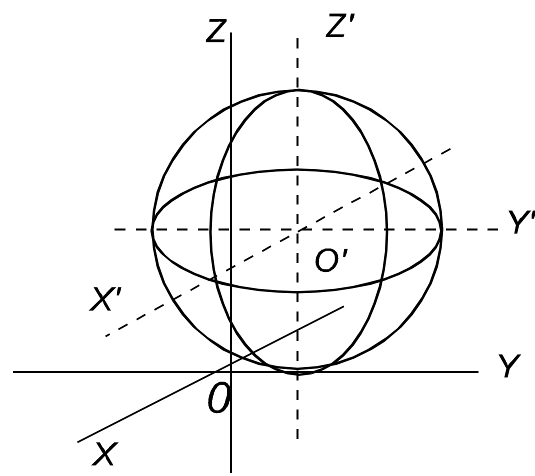
Уравнение сферы с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Уравнение сферы со смещенным центром $O'(x_0; y_0; z_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

! В уравнение сферы входят квадраты трех переменных, причем коэффициенты при квадратах и знаки при них одинаковые.



Построение сферы

Построить сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 6y$

Данное уравнение определяет сферу, так как
имеются квадраты всех переменных, знаки и коэффициенты при которых одинаковые.
Для построения сферы необходимо знать координаты центра и радиус.
Наличие слагаемого с первой степенью переменной *y* указывает на наличие смещения центра сферы по оси OY

Для приведения уравнения к каноническому виду

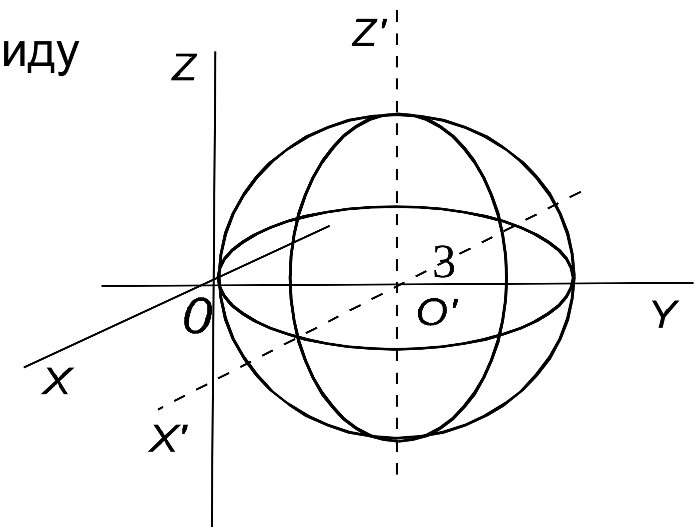
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

необходимо выполнить преобразования, связанные с выделением полного квадрата

$$x^2 + y^2 - 6y + z^2 = 0$$

$$x^2 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + z^2 = 0$$

$$x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$$



$O'(0;3;0)$ - центр сферы

$R = 3$ - радиус сферы

Построение сферы

2. Построить сферу $x^2+y^2+z^2=2y+9z+1$

Данное уравнение определяет сферу, так как
имеются квадраты всех переменных, знаки и коэффициенты при которых одинаковые.

Наличие слагаемых с первой степенью переменных ***z*** и ***y*** указывает на наличие смещения центра сферы по осям OY и OZ

Для приведения уравнения к каноническому виду

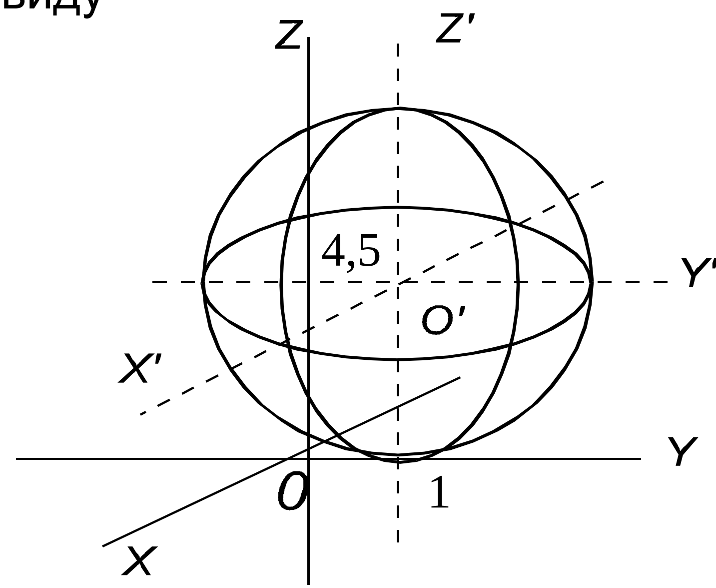
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

необходимо выполнить преобразования, связанные с выделением полного квадрата

$$x^2+(y^2-2y+1)-1+(z^2-9z+4{,}5^2)-4{,}5^2=1$$

$$x^2+(y-1)^2+(z-4{,}5)^2=1+4{,}5^2+1$$

$$x^2+(y-1)^2+(z-4{,}5)^2=22{,}25$$



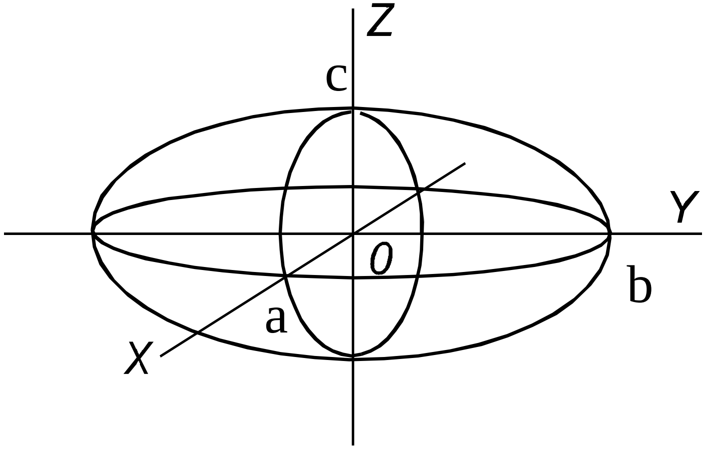
$O'(0;1;4{,}5)$ - центр сферы

$R=\sqrt{22{,}25}$ - радиус сферы

Эллипсоид

Каноническое уравнение трехосного эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$a,\ b,\ c-$ полуоси эллипсоида.

Центр этого эллипсоида находится
в начале координат.

Уравнение эллипсоида с центром в точке $O'(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1-$$

Признаки уравнения эллипсоида:

1. Наличие квадратов всех трех переменных
2. Одинаковые знаки при квадратах переменных
3. Разные коэффициенты при квадратах переменных

Построить поверхность $x^2+16y^2+4z^2=8z+5$

В уравнении есть квадраты переменных, знаки при которых одинаковые, а коэффициенты разные. Это эллипсоид, причем со смещенным центром. Уравнение нужно привести к каноническому виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

$$x^2+16y^2+4z^2-8z=5$$

$$x^2+16y^2+4(z^2-2z)=5$$

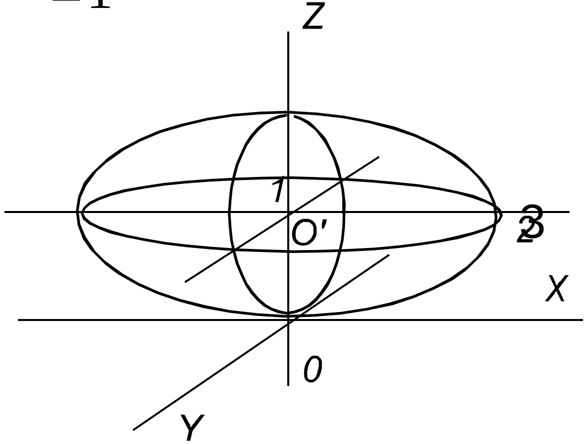
$$x^2+16y^2+4(z^2-2z+1-1)=5$$

$$x^2+16y^2+4(z-1)^2-4=5$$

$$x^2+16y^2+4(z-1)^2=9$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{16y^2}{9}+\frac{4(z-1)^2}{9}=1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9/16}+\frac{(z-1)^2}{9/4}=1}$$



$O'(0;0;1)$ - центр эллипсоида

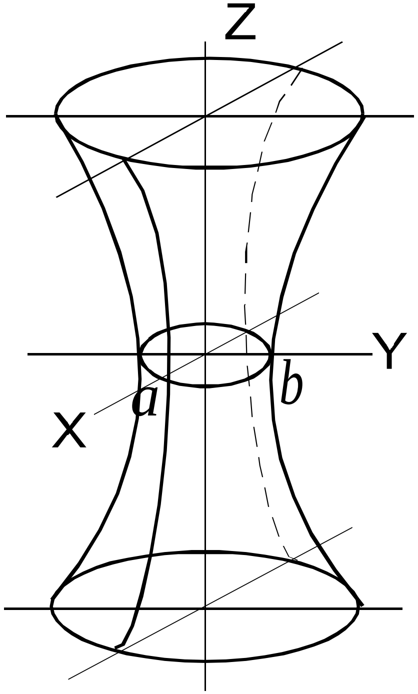
Полуоси эллипсоида

$a=3,\ b=3/4,\ c=3/2$

Гиперболоиды

Канонические уравнения гиперболоидов

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$



В зависимости от знака перед единицей в правой части гиперболоиды делятся на одно и двуполостные.

Каноническое уравнение *однополостного гиперболоида*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$a,\ b,\ c-$ полуоси

Признаки уравнения однополостного гиперболоида:

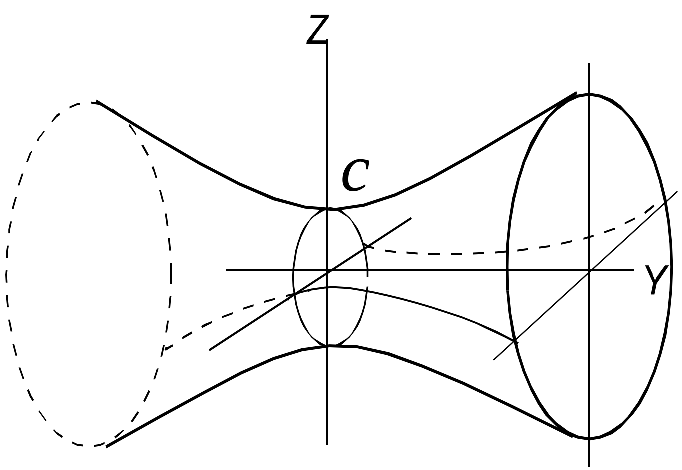
1. Наличие квадратов всех трех переменных
2. Разные знаки при квадратах переменных
3. Один знак минус при квадрате переменной в левой части уравнения, в правой части плюс 1.

Разные ориентации однополостных гиперболоидов

Ориентация гиперболоида зависит от того, перед какой переменной в каноническом уравнении стоит знак минус.

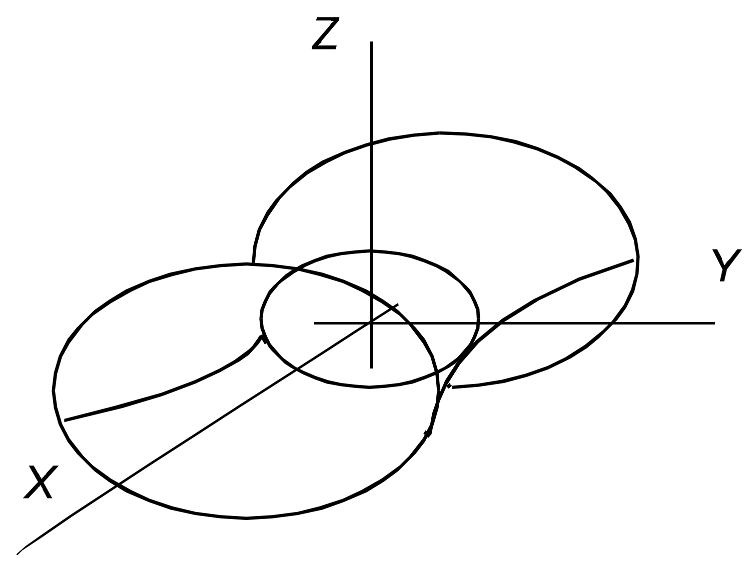
Однополостный гиперболоид с осью симметрии OY

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Однополостный гиперболоид с осью симметрии OX

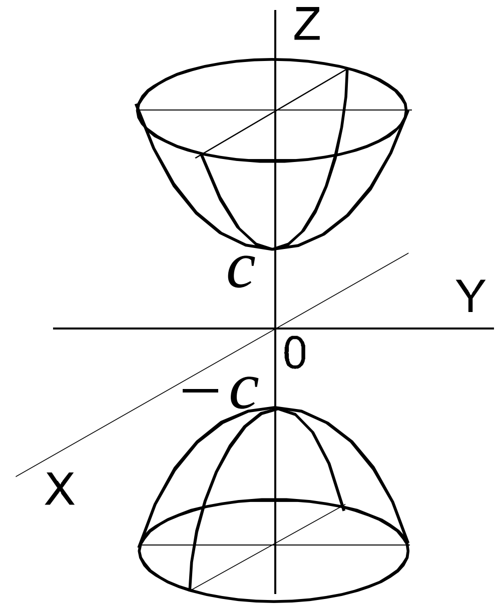
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Гиперболоиды

Каноническое уравнение *двуполостного гиперболоида*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



$a,\ \ b,\ \ c-$ полуоси

Если из уравнения выразить z, то получим

$$z=\pm c\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}$$

Т.к. $\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}\geq 1$, то получается, что $|z|\geq c$

Двуполостный гиперболоид на проходит через начало координат.

Признаки уравнения двуполостного гиперболоида:

1. Наличие квадратов всех трех переменных
2. Разные знаки при квадратах переменных
3. Два знака минус в уравнении: один при квадрате переменной в левой части уравнения, другой в правой части при 1.

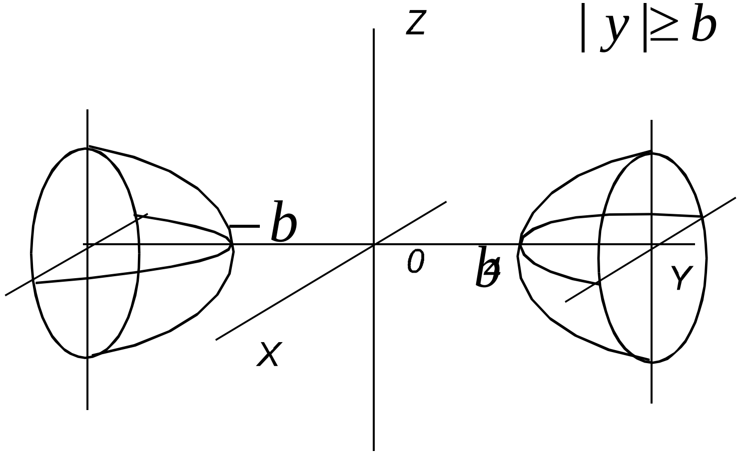
Разные ориентации двуполостного гиперболоида

Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида содержит два знака минус в уравнении.

Один знак минус оставляем в левой части уравнения, а второй поставим перед единицей в правой части. В таком случае легко определить ось симметрии гиперболоида: перед квадратом какой переменной в левой части уравнения знак минус, та ось системы координат и будет являться осью симметрии.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$|y| \geq b$$

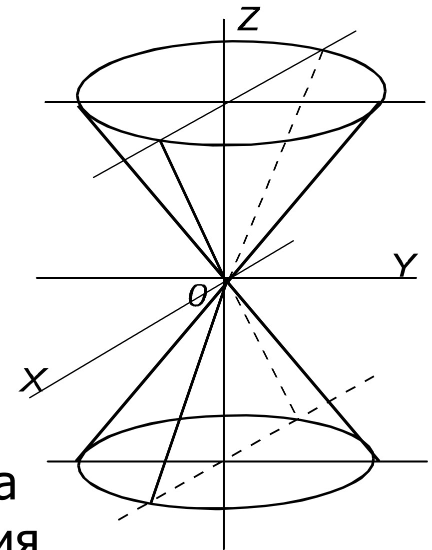


$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$|x| \geq a$$

Конусы 2-го порядка

Каноническое уравнение конуса



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Каноническое уравнение конуса от уравнений гиперболоидов отличает то, что в правой части уравнения стоит не единица, а ноль. Если один знак минус оставляем в левой части уравнения, то ось симметрии конуса определится также, как и для гиперболоидов: перед квадратом какой переменной в левой части уравнения знак минус, та ось системы координат и будет являться осью симметрии. Для данного уравнения – это ось OZ.

Признаки уравнения конуса:

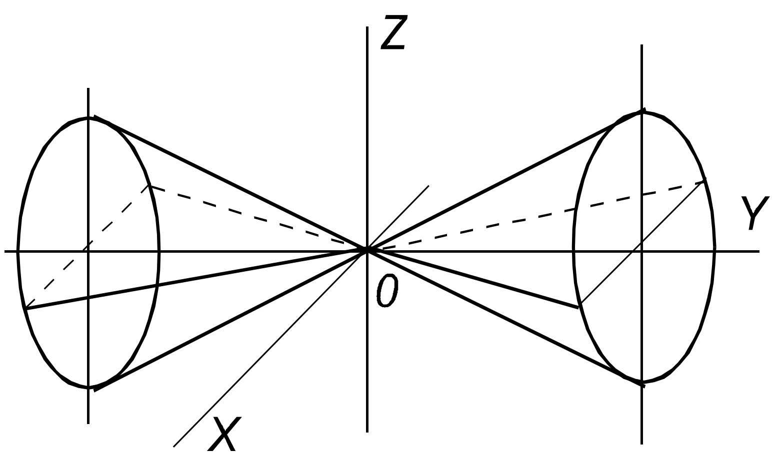
1. Наличие квадратов всех трех переменных
2. Разные знаки при квадратах переменных
3. Свободный член в правой части уравнения равен нулю.

Конусы с разными осями симметрии

Ось симметрии конуса определяется по уравнению

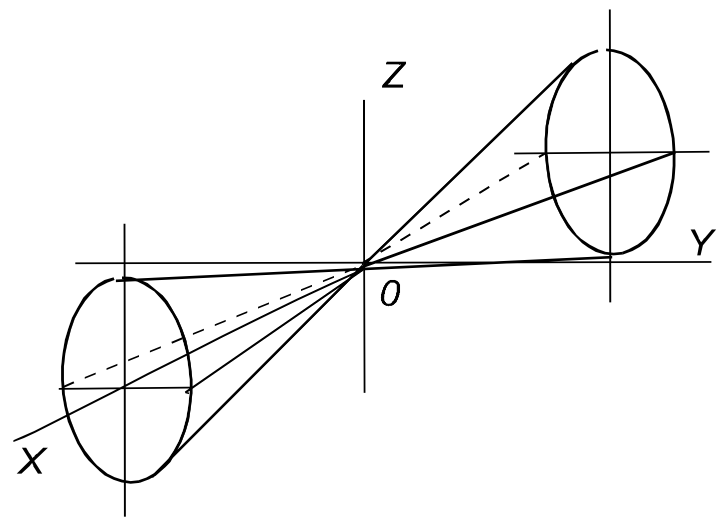
Конус с осью симметрии OY

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Конус с осью симметрии OX

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

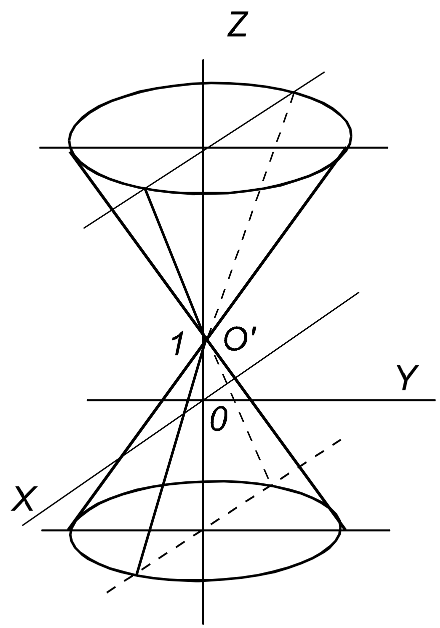


- Построить поверхность $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=\dfrac{(z-1)^2}{9}$

Перенесем квадраты переменных в левую часть уравнения так, чтобы получился один знак «минус»

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{(z-1)^2}{9}=0$$

Это уравнение конуса, так как в правой части стоит ноль.



Вершина конуса смещена на 1 по оси OZ вверх.
Ось симметрии конуса – OZ, так как перед квадратом переменной z стоит знак минус.

Параболоиды

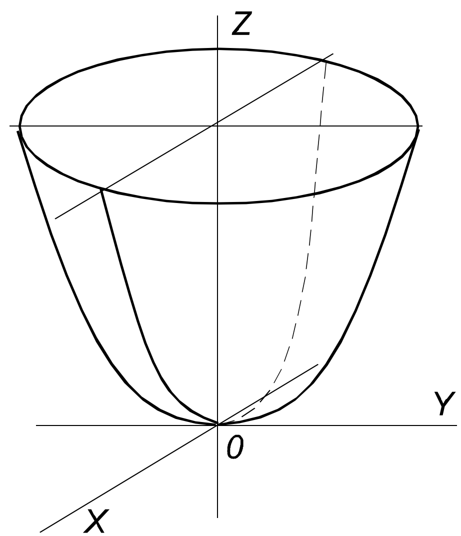
Канонические уравнения параболоидов можно записать в общем виде

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

Таким образом, в уравнении отсутствует квадрат одной переменной. В зависимости от знака между квадратами двух других переменных различают эллиптические и гиперболические параболоиды

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$



Круговой параболоид

Если $a = b,$ то

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

<u>Признаки уравнения эллиптического или кругового параболоида</u>:

1. Отсутствие квадрата одной из переменных
2. Одинаковые знаки при квадратах переменных в левой части уравнения

Различные ориентации эллиптических параболоидов

Характерным признаком уравнения эллиптического параболоида является присутствие всех трех переменных, но одно из них входит в уравнение только в первой степени, т.е. в уравнении параболоида отсутствует квадрат одной переменной. Ось симметрии параболоида параллельна той оси, координата которой в уравнении только в первой степени.

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2px-$$ параболоид с осью симметрии OX

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=2py-$$ параболоид с осью симметрии OY

Возможна также смена направления чаши параболоида.
Если в каноническом уравнении в правой части стоит знак минус, то параболоид направлен в отрицательном направлении оси симметрии.

Можно записать один из видов параболоидов со смещенной вершиной

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2p(z-z_0),$$ где $O'(0;0;z_0)$ - вершина параболоида

Для построения эллиптического параболоида нужно знать:

1. Координаты вершины
2. Ось симметрии (определяется по переменной, квадрата которой нет в уравнении)
3. Направление чаши параболоида (определяется по знаку переменной в правой части канонического уравнения)

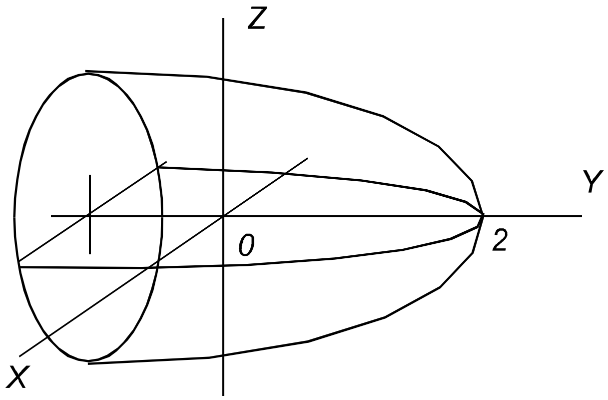
- Построить поверхность $x^2 + z^2 + y = 2$

Уравнение определяет круговой параболоид с осью симметрии OY и смещенной также по оси OY вершиной

Приведем уравнение к каноническому виду

$$x^2 + z^2 = 2 - y$$

$$x^2 + z^2 = -(y - 2)$$



$O'(0;2;0)$ - вершина параболоида

Чаша параболоида направлена влево, т.е. в отрицательном направлении оси симметрии

Построить поверхность $3z = 1 - 2x^2 - 5y^2$

Уравнение определяет эллиптический параболоид (так как коэффициенты при квадратах переменных различные) с осью симметрии OZ (так как отсутствует квадрат переменной z) и смещенной также по оси OZ вершиной

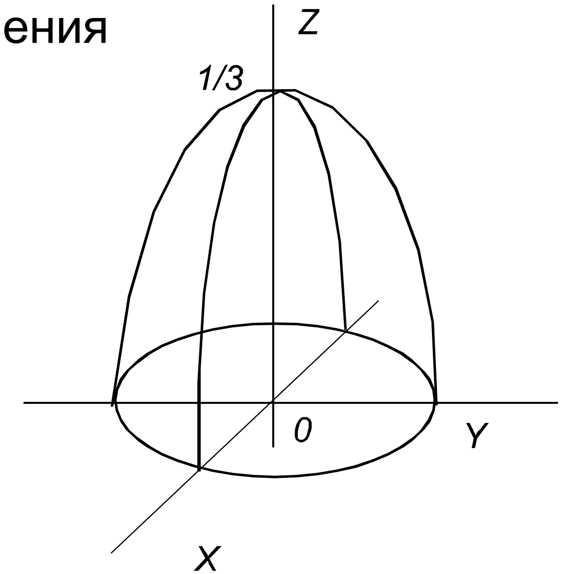
Проведем необходимые преобразования уравнения к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2p(z - z_0),$$

$$2x^2 + 5y^2 = 1 - 3z$$

$$2x^2 + 5y^2 = -3(z - 1/3)$$

$O'(0;0;1/3)$ - вершина параболоида



Чаша параболоида направлена вниз, т.е. в отрицательном направлении оси симметрии

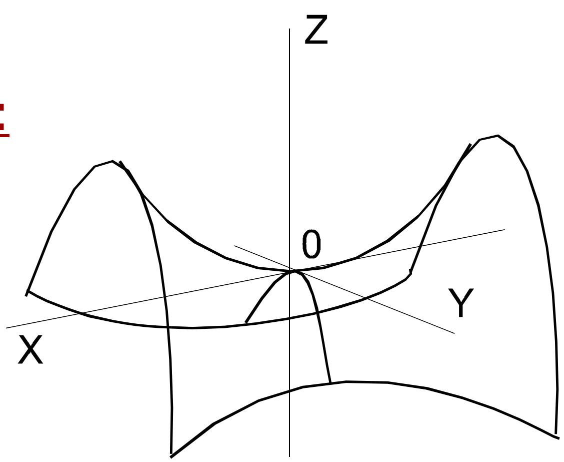
Замечание: наличие коэффициентов при квадратах переменных при таком схематичном построении можно не принимать во внимание.

Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение гиперболического параболоида имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$$

Отличительным признаком уравнения гиперболического параболоида является то что в левой части уравнения между квадратами переменных знак минус.



Признаки уравнения гиперболического параболоида:

1. Отсутствие квадрата одной из переменных
2. Разные знаки при квадратах переменных в левой части уравнения

Эта поверхность имеет форму седла.

Возможны различные варианты ориентации гиперболического параболоида в зависимости от оси симметрии, знаков при квадратах.

Цилиндрические поверхности

– Цилиндрическая поверхность-это поверхность, которую описывает прямая линия (образующая), которая оставаясь параллельно самой себе движется вдоль некоторой кривой, называемой направляющей. По названию направляющей получают свое название и цилиндры.

– Если образующая параллельна какой-либо оси координат, то каноническое уравнение цилиндра не содержит в уравнении соответствующую переменную. В этом случае уравнение цилиндра повторяет уравнение своей направляющей. Вариантов различных уравнений цилиндров достаточно много.

– Для построения цилиндра нужно построить направляющую в той плоскости, в которой она задана, а затем «тянуть» эту линию вдоль той оси, координата которой отсутствует в уравнении.

<u>Признаки уравнения цилиндрической поверхности:</u>

В уравнении цилиндрической поверхности отсутствует одна переменная.

Виды цилиндров

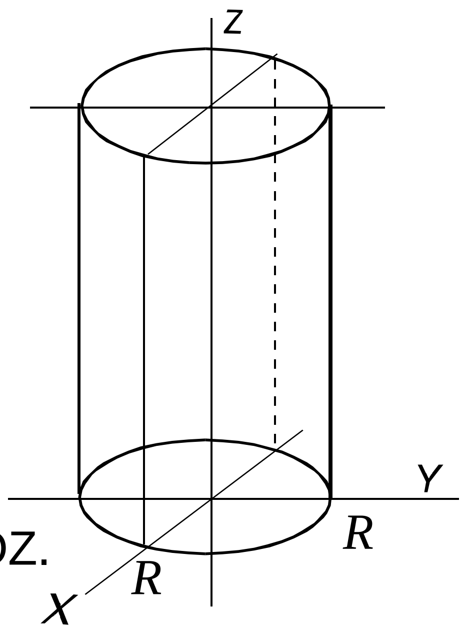
- Круговые цилиндры:

Направляющей линией является окружность.

$x^2 + y^2 = R^2 -$ ось симметрии OZ

$y^2 + z^2 = R^2 -$ ось симметрии OX

$x^2 + z^2 = R^2 -$ ось симметрии OY



На рисунке изображен цилиндр с осью симметрии OZ.

Для построения цилиндра строим окружность радиуса R в плоскости XOY, а затем «превращаем» эту окружность в цилиндр, вытягивая вдоль оси симметрии.
Можно построить цилиндр и таким способом: нарисовать две или несколько одинаковых окружностей параллельных друг другу на разной высоте, а затем соединить их образующими параллельными оси симметрии.

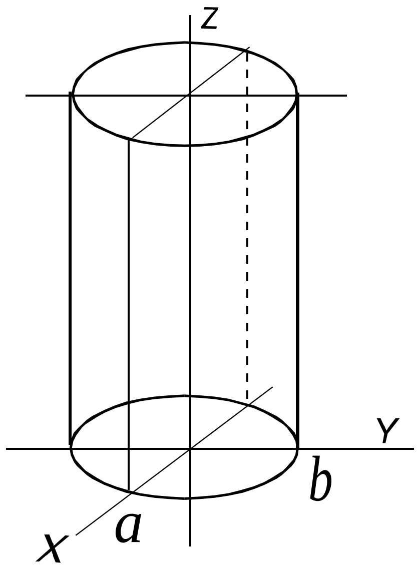
- Эллиптические цилиндры

Направляющей кривой являются эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 -$$ ось симметрии OZ

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 -$$ ось симметрии OX

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 -$$ ось симметрии OY



Для построения цилиндра строим эллипс с полуосями a и b в плоскости XOY, а затем «превращаем» этот эллипс в цилиндр, вытягивая вдоль оси симметрии.

По внешнему виду при схематическом построении эллиптический и круговой цилиндры выглядят одинаково.

- Построить поверхности

$$x^2+z^2=2z$$

В уравнении отсутствует переменная y. Это круговой цилиндр с осью симметрии OY. Приводим уравнение к каноническому виду

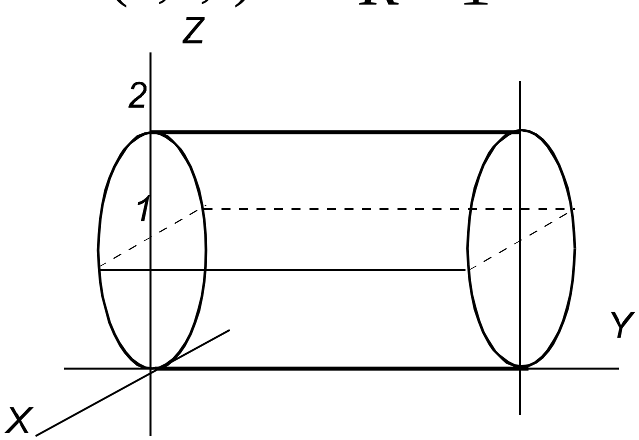
$$x^2+z^2-2z=0$$

$$x^2+z^2-2z+1-1=0$$

$$x^2+(z-1)^2-1=0$$

$$x^2+(z-1)^2=1$$

$$O'(0;0;1) \qquad R=1$$



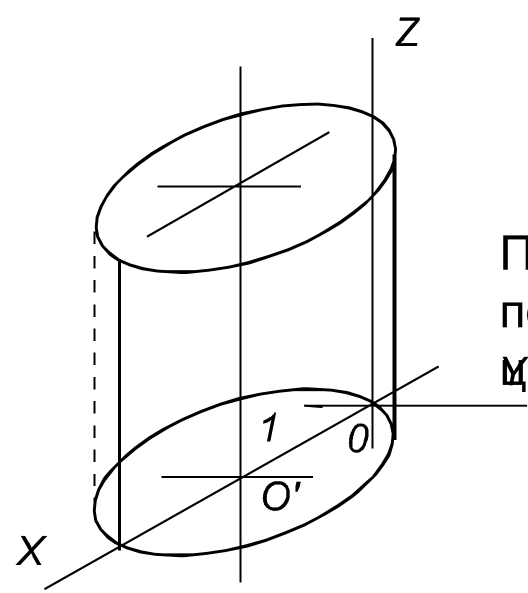
$$y=\sqrt{2x-x^2}$$

В уравнении отсутствует переменная z. Это круговой цилиндр с осью симметрии OZ.
Приводим уравнение к каноническому виду

$$y^2=2x-x^2$$

$$x^2+y^2=2x$$

$$(x-1)^2+y^2=1, \qquad y\geq 0$$



Правая половинка цилиндра

- Гиперболические цилиндры

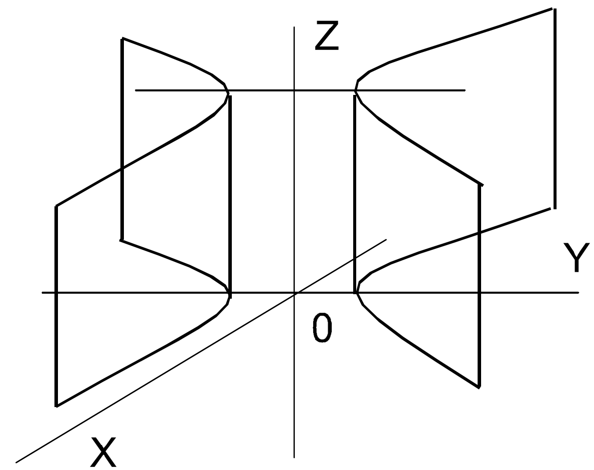
В качестве направляющей этих цилиндров служит гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1-$$ ось симметрии OZ

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1-$$ ось симметрии OX

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1-$$ ось симметрии OY

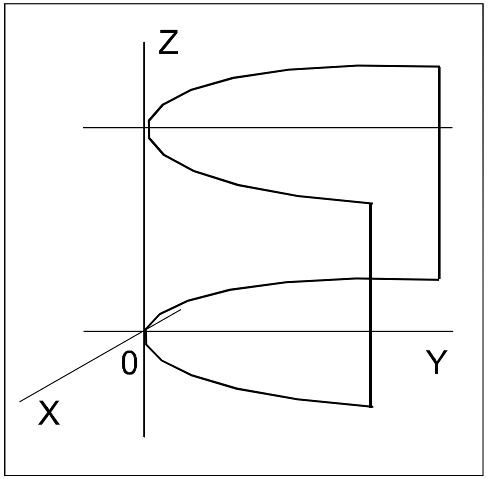


При построении гиперболических цилиндров обязательно нужно правильно определить мнимую и действительную оси гиперболы и ось симметрии самого цилиндра.

- Параболические цилиндры

Направляющей этих цилиндров является парабола.

$$x^2 = 2py$$



$x^2 = \pm 2py -$ ось симметрии OZ

$y^2 = \pm 2px -$ ось симметрии OZ

$y^2 = \pm 2pz -$ ось симметрии OX

$z^2 = \pm 2py -$ ось симметрии OX

$x^2 = \pm 2pz -$ ось симметрии OY

$z^2 = \pm 2px -$ ось симметрии OY

При построении цилиндра нужно определить основные параметры параболы: координаты вершины, ось симметрии и направление ветвей, построить параболу, а затем уже строить цилиндр с соответствующей осью симметрии.

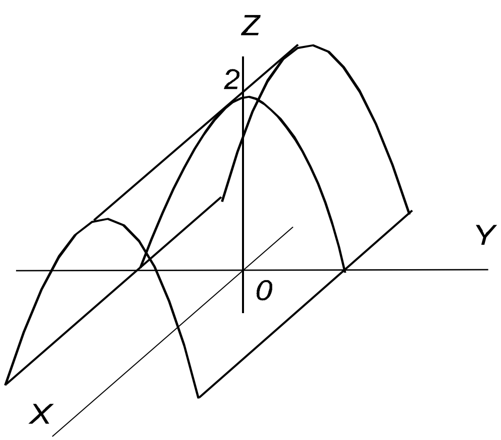
Построить поверхности

$$1)\, 3z = 6 - y^2$$

$$y^2 = 6 - 3z$$

$$y^2 = -3(z-2)$$

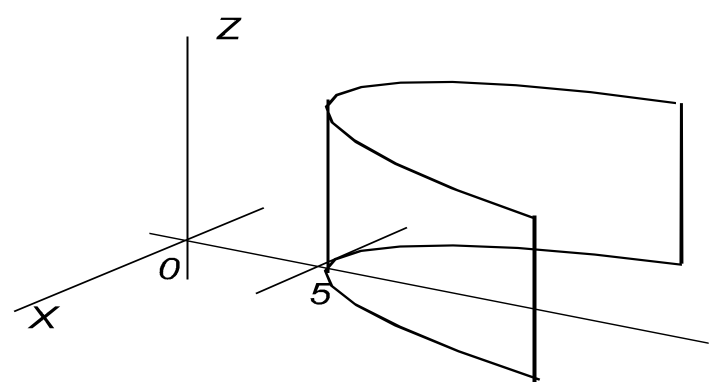
Ось цилиндра – OX,
Направляющей является парабола
с осью симметрии OZ , смещенной
на 2 единицы вверх по оси OZ вершиной
 и ветвями, направленными вниз,
вершина $O^{'}(0;0;2)$



$$2)\, y = 5 + x^2$$

$$x^2 = y - 5$$

Ось цилиндра – OZ,
направляющей является
парабола с осью
симметрии OY, вершиной в
точке $O^{'}(0;5;0)$
и ветвями, направленными
вправо

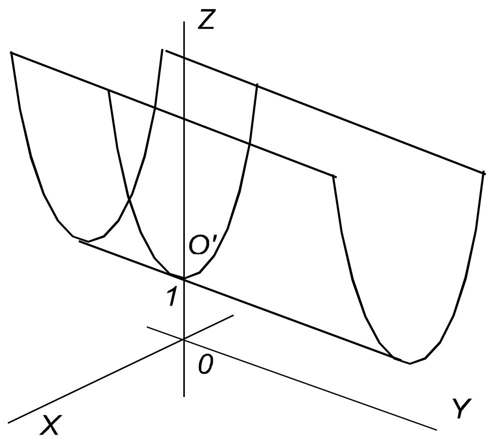


Построить поверхности

$$3)\, z = 1 + x^2$$

$$x^2 = z - 1$$

Ось цилиндра – OY,
направляющей является парабола
с осью симметрии OZ, вершиной
в точке $O^{'}(0;0;1)$
и ветвями, направленными вверх

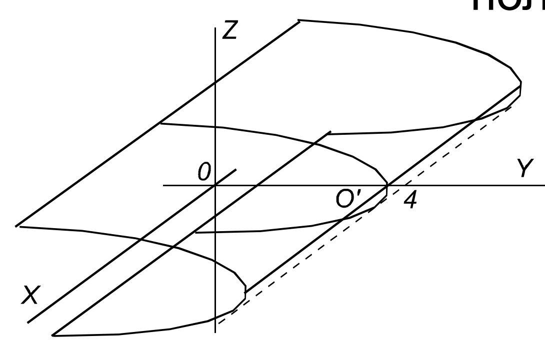


$$4)\, z = \sqrt{4 - y},$$

$$z^2 = 4 - y$$

$$z^2 = -(y - 4), \qquad z \geq 0$$

Верхняя
половинка



Ось цилиндра – OX, направляющей является
парабола с осью симметрии OY, вершиной
в точке $O^{'}(0;4;0)$
и ветвями, направленными влево

Спасибо за внимание